В. А. ЗОРИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

I

В. А. Зорич

Математический анализ

Часть I

Издание десятое,
исправленное

Рекомендовано УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
01.05.01 Фундаментальные математика и механика
и направлениям
01.03.01 Математика,
01.03.03 Механика и математическое моделирование,
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Издательство МЦНМО
Москва, 2019

УДК 517
ББК 22.16
З86

Рецензенты:

Отдел теории функций комплексного переменного
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
Заведующий отделом академик А. А. Гончар

Академик В. И. Арнольд

Зорич В. А.

З86 Математический анализ. Часть I. — Изд. 10-е, испр. — М.: МЦНМО, 2019. — xii+564 с. Библ.: 54 назв. Илл.: 65.
ISBN 978-5-4439-4029-8, 978-5-4439-4030-4 (часть I).

Университетский учебник для студентов физико-математических специальностей. Может быть полезен студентам факультетов и вузов с расширенной математической подготовкой, а также специалистам в области математики и ее приложений.

ББК 22.16

«Полная строгость изложения соединена с доступностью и полнотой, а также воспитанием привычки иметь дело с реальными задачами естествознания».
— Из отзыва академика А. Н. Колмогорова о первом издании учебника.

Учебное издание для вузов

Владимир Антонович Зорич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ I

ISBN 978-5-4439-1304-9
9 785443 913049 >

Подписано в печать 25.09.2019 г. Формат 70 × 100/16.
Печ. л. 36. Тираж 1500 экз. Заказ № ????

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04

Отпечатано в ОАО «Первая образцовая типография», филиал «Дом печати — Вятка»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122. www.gipp.kirov.ru; e-mail: order@gipp.kirov.ru

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга», Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mccme.ru

ISBN 978-5-4439-4029-8
ISBN 978-5-4439-4030-4 (часть I)

© В. А. Зорич, 2001—2019.
© Издательство МЦНМО, 2019.

Оглавление

Из предисловия к первому изданию

Создание Ньютоном и Лейбницем три столетия тому назад основ дифференциального и интегрального исчисления даже по нынешним масштабам представляется крупнейшим событием в истории науки вообще и математики в особенности.

Математический анализ (в широком смысле слова) и алгебра, переплетаясь, образовали теперь ту корневую систему, на которой держится разветвленное дерево современной математики и через которую происходит его основной живительный контакт с внематематической сферой. Именно по этой причине основы анализа включаются как необходимый элемент даже самых скромных представлений о так называемой высшей математике, и, вероятно, поэтому изложению основ анализа посвящено большое количество книг, адресованных различным кругам читателей.

Эта книга в первую очередь адресована математикам, желающим (как и должно) получить полноценные в логическом отношении доказательства фундаментальных теорем, но вместе с тем интересующимся также их внематематической жизнью.

Особенности настоящего курса сводятся в основном к следующему.

По характеру изложения. В пределах каждой большой темы изложение, как правило, индуктивное, идущее порой от постановки задачи и наводящих эвристических соображений по ее решению к основным понятиям и формализмам.

Подробное вначале, изложение становится все более сжатым по мере продвижения по курсу.

Упор сделан на эффективном аппарате гладкого анализа. При изложении теории я (в меру своего понимания) стремился выделить наиболее существенные методы и факты и избежать искушения незначительного усиления теорем ценой значительного усложнения доказательств.

Изложение геометрично всюду, где это представлялось ценным для раскрытия существа дела.

Основной текст снабжен довольно большим количеством примеров, а почти каждый параграф заканчивается набором задач, которые, надеюсь, существенно дополняют даже теоретическую часть основного текста. Следуя великолепному опыту Полиа и Сеге, я часто старался представить красивый математический или важный прикладной результат в виде серий доступных читателю задач.

Расположение материала диктовалось не только архитектурой математики в смысле Бурбаки, но и положением анализа как составной части единого математического или, лучше сказать, естественно-математического образования.

По содержанию. Курс издается в двух книгах (части I и II).

Настоящая первая часть содержит дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной и дифференциальное исчисление функций многих переменных.

В дифференциальном исчислении выделена роль дифференциала как линейного эталона для локального описания характера изменения переменной величины. Кроме многочисленных примеров использования дифференциального исчисления для исследования функциональных зависимостей (монотонность, экстремумы), показана роль языка анализа в записи простейших дифференциальных уравнений — математических моделей конкретных явлений и связанных с ними содержательных задач.

Рассмотрен ряд таких задач (например, движение тела переменной массы, ядерный реактор, атмосферное давление, движение в сопротивляющейся среде), решение которых приводит к важнейшим элементарным функциям. Полнее использован комплексный язык, в частности, выведена формула Эйлера и показано единство основных элементарных функций.

Интегральное исчисление сознательно изложено по возможности на наглядном материале в рамках интеграла Римана. Для большинства приложений этого вполне хватает[1]. Указаны различные приложения интеграла, в том числе приводящие к несобственному интегралу (например, работа выхода из поля тяготения и вторая космическая скорость) или к эллиптическим функциям (движение в поле тяжести при наличии связей, маятник).

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных довольно геометрично. В нем, например, рассмотрены такие важные и полезные следствия теоремы о неявной функции, как криволинейные координаты и локальное приведение к каноническому виду гладких отображений (теорема о ранге) и функций (лемма Морса), а также теория условного экстремума.

Результаты, относящиеся к теории непрерывных функций и дифференциальному исчислению, подытожены и изложены в общем инвариантном виде в двух главах, которые естественным образом примыкают к дифференциальному исчислению вещественнозначных функций нескольких переменных. Эти две главы открывают вторую часть курса. Вторая книга, в которой, кроме того, изложено интегральное исчисление функций многих переменных, доведенное до общей формулы Ньютона—Лейбница—Стокса, приобретает, таким образом, определенную целостность.

Более полные сведения о второй книге мы поместим в предисловии к ней, а здесь добавим только, что кроме уже перечисленного материала она содержит сведения о рядах функций (степенных рядах и рядах Фурье в том

[1]Более «сильные» интегралы, как известно, требуют более кропотливых и выбивающихся из основного русла теоретико-множественных рассмотрений, мало что прибавляя к эффективному аппарату анализа, который и должен быть освоен в первую очередь.

числе), об интегралах, зависящих от параметра (включая фундаментальное решение, свертку и преобразование Фурье), а также об асимптотических разложениях (они обычно мало представлены в учебной литературе).

Остановимся теперь на некоторых частных вопросах.

О введении. Вводного обзора предмета я не писал, поскольку большинство начинающих студентов уже имеют из школы первое представление о дифференциальном и интегральном исчислении и его приложениях, а на большее вступительный обзор вряд ли мог бы претендовать. Вместо него я в первых двух главах довожу до определенной математической завершенности представления бывшего школьника о множестве, функции, об использовании логической символики, а также о теории действительного числа.

Этот материал относится к формальным основаниям анализа и адресован в первую очередь студенту-математику, который в какой-то момент захочет проследить логическую структуру базисных понятий и принципов, используемых в классическом анализе. Собственно математический анализ в книге начинается с третьей главы, поэтому читатель, желающий по возможности скорее получить в руки эффективный аппарат и увидеть его приложения, при первом чтении вообще может начать с главы III, возвращаясь к более ранним страницам в случае, если что-то ему покажется неочевидным и вызовет вопрос, на который, надеюсь, я тоже обратил внимание и предусмотрительно дал ответ в первых главах.

О рубрикации. Материал обеих книг разбит на главы, имеющие сплошную нумерацию. Параграфы нумеруются в пределах каждой главы отдельно; подразделения параграфа нумеруются только в пределах этого параграфа. Теоремы, утверждения, леммы, определения и примеры для большей логической четкости выделяются, а для удобства ссылок нумеруются в пределах каждого параграфа.

О вспомогательном материале. Несколько глав книги написаны как естественное окаймление классического анализа. Это, с одной стороны, уже упоминавшиеся главы I, II, посвященные его формально-математическим основаниям, а с другой стороны, главы IX, X, XV второй части, дающие современный взгляд на теорию непрерывности, дифференциальное и интегральное исчисление, а также глава XIX, посвященная некоторым эффективным асимптотическим методам анализа.

Вопрос о том, какая часть материала этих глав включается в лекционный курс, зависит от контингента слушателей и решается лектором, но некоторые вводимые здесь фундаментальные понятия обычно присутствуют в любом изложении предмета математикам.

В заключение я хотел бы поблагодарить тех, чья дружеская и квалифицированная профессиональная помощь была мне дорога и полезна при работе над этой книгой.

Предлагаемый курс довольно тщательно и во многих аспектах согласовывался с последующими современными университетскими математическими

курсами — такими, например, как дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, теория функций комплексного переменного, функциональный анализ. В этом отношении мне были весьма полезны контакты и обсуждения с В. И. Арнольдом и, особенно многочисленные, с С. П. Новиковым в период совместной работы в экспериментальном потоке при отделении математики.

Много советов я получил от Н. В. Ефимова, заведующего кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ.

Я признателен также коллегам по кафедре и факультету за замечания к ротапринтному изданию моих лекций.

При работе над книгой ценными оказались предоставленные в мое распоряжение студенческие записи моих лекций последнего времени, за что я благодарен их владельцам.

Я глубоко признателен официальным рецензентам издательства Л. Д. Кудрявцеву, В. П. Петренко, С. Б. Стечкину за конструктивные замечания, значительная часть которых учтена в предлагаемом читателю тексте.

Из предисловия ко второму изданию

В этом, втором издании книги, наряду с попыткой устранить опечатки первого[1], сделаны отдельные изменения изложения (в основном это касается вариантов доказательств отдельных теорем) и добавлены некоторые новые задачи, как правило, неформального характера. [...]

В заключение хотел бы поблагодарить знакомых и незнакомых мне коллег и студентов за отзывы и конструктивные замечания к первому изданию курса. Особенно интересно и полезно мне было прочитать рецензии А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда. Разные по объему, форме и стилю, они в профессиональном плане имели так ободряюще много общего.

Предисловие к седьмому изданию

Я только что написал предисловие к новому английскому изданию этого учебника, поэтому позволю себе повторить то, что в равной мере относится и к этому седьмому русскому изданию книги.

Время, прошедшее с момент выхода предыдущих изданий учебника, наука не стояла на месте. Например, решена проблема Ферма, доказана гипотеза Пуанкаре, найден бозон Хиггса. Сделано еще многое, что, возможно, не

[1]Не следует огорчаться: вместо исправленных опечаток не сохранившегося набора первого издания заведомо появится комплект новых опечаток, так оживляющих, по мнению Эйлера, чтение математического текста.

имеет прямого отношения к учебнику классического математического анализа, но косвенно сказывается в том, что автор за это время тоже кое-что выучил, обдумал, понял и углубил свои знания. А они, эти дополнительные знания, полезны, даже когда вы рассказываете вроде бы совсем о другом.[1]

Кроме исходного русского издания, учебник вышел на английском, немецком и китайском языках. Внимательные разноязычные читатели нашли в тексте много погрешностей. К счастью, это локальные погрешности, в основном опечатки. Конечно, они учтены и исправлены в этом новом издании.

Главное, что отличает седьмое русское издание от шестого, — новые дополнения. В первой книге оно одно («Формула Эйлера—Маклорена»), а во второй их три («Функции многих переменных и дифференциальные формы с термодинамическими интерпретациями»; «Операторы теории поля в криволинейных координатах»; «Современная формула Ньютона—Лейбница и единство математики»). Чтобы не нарушать прежний текст, дополнения помещены в конце каждой книги. Они могут быть полезны как студентам (математикам, физикам), так и преподавателям, — каждому для своих целей. Последнее из них можно рассматривать как итоговый обзор, который содержит важнейшие концептуальные достижения всего курса, связывающие анализ с другими разделами единой математики.

Мне приятно, что книга оказалась в какой-то мере полезной и математикам, и физикам, и даже инженерам в высших технических школах с углубленным изучением математики. Это вдохновило меня на написание дополнения, в котором математика и элементарная, но вполне содержательная термодинамика идут рука об руку.

Удовольствие видеть новое поколение, когда оно мыслит шире, понимает глубже и умеет больше, чем поколение, на плечах которого оно поднялось.

Москва, 2015 г. В. Зорич

---

[1]Про Эрдёша, который, подобно Адамару, прожил большую математическую и человеческую жизнь, рассказывают следующее. Когда он уже был на склоне лет, какая-то журналистка, бравшая у него интервью, под конец спросила, сколько ему лет. Эрдёш задумался и ответил: «Помню, что когда я был совсем молодым, наука установила, что Земле два миллиарда лет. Сейчас наука утверждает, что Земле уже четыре с половиной миллиарда лет. Значит, мне примерно два с половиной миллиарда лет».

Глава I

Некоторые общематематические понятия и обозначения

§ 1. Логическая символика

1. Связки и скобки. Язык этой книги, как и большинства математических текстов, состоит из обычного языка и ряда специальных символов излагаемых теорий. Наряду с этими специальными символами, которые будут вводиться по мере надобности, мы используем распространенные символы математической логики $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ для обозначения соответственно отрицания «не» и связок «и», «или», «влечет», «равносильно»[1].

Возьмем, например, три представляющих и самостоятельный интерес высказывания:

L. «Если обозначения удобны для открытий ..., то поразительным образом сокращается работа мысли» (Г. Лейбниц[2]).

P. «Математика — это искусство называть разные вещи одинаковыми именами» (А. Пуанкаре[3]).

G. «Великая книга природы написана языком математики» (Г. Галилей[4]).

Тогда в соответствии с указанными обозначениями:

Запись $L \Rightarrow P$ означает	L влечет P
$L \Leftrightarrow P$	L равносильно P
$((L \Rightarrow P) \wedge (\neg P)) \Rightarrow (\neg L)$	Если P следует из L и P неверно, то L неверно
$\neg((L \Leftrightarrow G) \vee (P \Leftrightarrow G))$	G не равносильно ни L, ни P

---

[1]В логике вместо символа $\wedge$ чаще используется символ &. Символ $\Rightarrow$ импликации логики чаще пишут в виде $\rightarrow$, а отношение равносильности — в виде $\longleftrightarrow$ или $\leftrightarrow$. Однако мы будем придерживаться указанной в тексте символики, чтобы не перегружать традиционный для анализа знак $\rightarrow$ предельного перехода.

[2]Г. В. Лейбниц (1646—1716) — выдающийся немецкий ученый, философ и математик, которому наряду с Ньютоном принадлежит честь открытия основ анализа бесконечно малых.

[3]А. Пуанкаре (1854—1912) — французский математик, блестящий ум которого преобразовал многие разделы математики и достиг ее фундаментальных приложений в математической физике.

[4]Г. Галилей (1564—1642) — итальянский ученый, крупнейший естествоиспытатель. Его труды легли в основу всех последующих физических представлений о пространстве и времени. Отец современной физической науки.

Мы видим, что пользоваться только формальными обозначениями, избегая разговорного языка, — не всегда разумно.

Мы замечаем, кроме того, что в записи сложных высказываний, составленных из более простых, употребляются скобки, выполняющие ту же синтаксическую функцию, что и при записи алгебраических выражений. Как и в алгебре, для экономии скобок можно договориться о «порядке действий». Условимся с этой целью о следующем порядке приоритета символов:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow.$$

При таком соглашении выражение $\neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D$ следует расшифровать как $(((\neg A) \wedge B) \vee C) \Rightarrow D$, а соотношение $A \vee B \Rightarrow C$ — как $(A \vee B) \Rightarrow C$, но не как $A \vee (B \Rightarrow C)$.

Записи $A \Rightarrow B$, означающей, что A влечет B или, что то же самое, B следует из A, мы часто будем придавать другую словесную интерпретацию, говоря, что B есть *необходимый признак* или *необходимое условие* A и, в свою очередь, A — *достаточное условие* или *достаточный признак* B. Таким образом, соотношение $A \Leftrightarrow B$ можно прочитать любым из следующих способов:

A необходимо и достаточно для B;
A тогда и только тогда, когда B;
A, если и только если B;
A равносильно B.

Итак, запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что A влечет B и, одновременно, B влечет A.

Употребление союза *и* в выражении $A \wedge B$ пояснений не требует.

Следует, однако, обратить внимание на то, что в выражении $A \vee B$ союз *или* неразделительный, т. е. высказывание $A \vee B$ считается верным, если истинно хотя бы одно из высказываний A, B. Например, пусть x — такое действительное число, что $x^2 - 3x + 2 = 0$. Тогда можно написать, что имеет место следующее соотношение:

$$(x^2 - 3x + 2 = 0) \Leftrightarrow (x = 1) \vee (x = 2).$$

2. Замечания о доказательствах. Типичное математическое утверждение имеет вид $A \Rightarrow B$, где A — посылка, а B — заключение. Доказательство такого утверждения состоит в построении цепочки $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow C_n \Rightarrow B$ следствий, каждый элемент которой либо считается аксиомой, либо является уже доказанным утверждением[1].

В доказательствах мы будем придерживаться классического правила вывода: если A истинно и $A \Rightarrow B$, то B тоже истинно.

При доказательстве от противного мы будем использовать также принцип исключенного третьего, в силу которого высказывание $A \vee \neg A$ (A или

[1]Запись $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ будет употребляться как сокращение для $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.

не A) считается истинным независимо от конкретного содержания высказывания A. Следовательно, мы одновременно принимаем, что $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$, т. е. повторное отрицание равносильно исходному высказыванию.

3. Некоторые специальные обозначения. Для удобства читателя и сокращения текста начало и конец доказательства условимся отмечать знаками ◀ и ▶ соответственно.

Условимся также, когда это будет удобно, вводить определения посредством специального символа := (равенство по определению), в котором двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.

Например, запись

$$\int f(x)\,dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; P, \xi)$$

определяет левую часть посредством правой части, смысл которой предполагается известным.

Аналогично вводятся сокращенные обозначения для уже определенных выражений. Например, запись

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =: \sigma(f; P, \xi)$$

вводит обозначение $\sigma(f; P, \xi)$ для стоящей слева суммы специального вида.

4. Заключительные замечания. Отметим, что мы здесь говорили, по существу, только об обозначениях, не анализируя формализм логических выводов и не касаясь глубоких вопросов истинности, доказуемости, выводимости, составляющих предмет исследования математической логики.

Как же строить математический анализ, если мы не имеем формализации логики? Некоторое утешение тут может состоять в том, что мы всегда знаем или, лучше сказать, умеем больше, чем способны в данный момент формализовать. Пояснением смысла последней фразы может служить известная притча о том, что сороконожка даже ходить разучилась, когда ее попросили объяснить, как именно она управляется со всеми своими конечностями.

Опыт всех наук убеждает нас в том, что считавшееся ясным или простым и нерасчленяемым вчера может подвергнуться пересмотру или уточнению сегодня. Так было (и, без сомнения, еще будет) и с многими понятиями математического анализа, важнейшие теоремы и аппарат которого были открыты еще в XVII—XVIII веках, но приобрели современный формализованный, однозначно трактуемый и, вероятно, потому общедоступный вид лишь после создания теории пределов и необходимой для нее логически полноценной теории действительных чисел (XIX век).

Именно с этого уровня теории действительных чисел мы и начнем в главе II построение всего здания анализа.

Как уже отмечалось в предисловии, желающие быстрее ознакомиться с основными понятиями и эффективным аппаратом собственно дифференциального и интегрального исчисления могут начать сразу с главы III, возвращаясь к отдельным местам первых двух глав лишь по мере необходимости.

Упражнения

Будем отмечать истинные высказывания символом 1, а ложные — символом 0. Тогда каждому из высказываний $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ можно сопоставить так называемую *таблицу истинности*, которая указывает его истинность в зависимости от истинности высказываний A, B. Эти таблицы являются формальным определением логических операций $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$. Вот они:

A	0	1
$\neg A$	1	0

$A \wedge B$	B: 0	B: 1
A: 0	0	0
A: 1	0	1

$A \vee B$	B: 0	B: 1
A: 0	0	1
A: 1	1	1

$A \Rightarrow B$	B: 0	B: 1
A: 0	1	1
A: 1	0	1

1. Проверьте, все ли в этих таблицах согласуется с вашим представлением о соответствующей логической операции. (Обратите, в частности, внимание на то, что если A ложно, то импликация $A \Rightarrow B$ всегда истинна.)

2. Покажите, что справедливы следующие простые, но очень важные и широко используемые в математических рассуждениях соотношения:
a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$; b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$; c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$;
d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$; e) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.

§ 2. Множества и элементарные операции над множествами

1. Понятие множества. С конца XIX — начала XX столетия наиболее универсальным языком математики стал язык теории множеств. Это проявилось даже в одном из определений математики как науки, изучающей различные структуры (отношения) на множествах[1].

«Под *множеством* мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли» — так описал понятие «множество» Георг Кантор[2], основатель теории множеств.

---

[1] *Бурбаки Н.* Архитектура математики. В кн.: *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963.

[2] Г. Кантор (1845—1918) — немецкий математик, создатель теории бесконечных множеств и родоначальник теоретико-множественного языка в математике.

Описание Кантора, разумеется, нельзя назвать определением, поскольку оно апеллирует к понятиям, быть может, более сложным (во всяком случае, не определенным ранее), чем само понятие множества. Цель этого описания — разъяснить понятие, связав его с другими.

Основные предпосылки канторовской (или, как условно говорят, «наивной») теории множеств сводятся к следующему:

1° множество может состоять из любых различимых объектов;

2° множество однозначно определяется набором составляющих его объектов;

3° любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладают.

Если x — объект, P — свойство, $P(x)$ — обозначение того, что x обладает свойством P, то через $\{x \mid P(x)\}$ обозначают весь класс объектов, обладающих свойством P. Объекты, составляющие класс или множество, называют *элементами* класса или множества.

Множество, состоящее из элементов $x_1, \ldots, x_n$, обычно обозначают как $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Там, где это не вызывает недоразумения, для сокращения записи мы позволяем себе обозначать одноэлементное множество $\{a\}$ просто через a.

Слова «класс», «семейство», «совокупность», «набор» в наивной теории множеств употребляют как синонимы термина «множество».

Следующие примеры демонстрируют применение этой терминологии:

множество букв «а» в слове «я»;

множество жен Адама;

набор из десяти цифр;

семейство бобовых;

множество песчинок на Земле;

совокупность точек плоскости, равноудаленных от двух данных ее точек;

семейство множеств;

множество всех множеств.

Различие в возможной степени определенности задания множества наводит на мысль, что множество — не такое уж простое и безобидное понятие.

И в самом деле, например, понятие множества всех множеств просто противоречиво.

◄ Действительно, пусть для множества M запись $P(M)$ означает, что M не содержит себя в качестве своего элемента.

Рассмотрим класс $K = \{M \mid P(M)\}$ множеств, обладающих свойством P.

Если K — множество, то либо верно, что $P(K)$, либо верно, что $\neg P(K)$. Однако эта альтернатива для K невозможна. Действительно, $P(K)$ невозможно, ибо из определения K тогда бы следовало, что K содержит K, т. е. что верно $\neg P(K)$; с другой стороны, $\neg P(K)$ тоже невозможно, поскольку это означает, что K содержит K, а это противоречит определению K как класса тех множеств, которые сами себя не содержат.

Следовательно, K — не множество. ►

Это классический парадокс Рассела[1], один из тех парадоксов, к которым приводит наивное представление о множестве.

В современной математической логике понятие множества подвергается (как мы видим, не без оснований) тщательному анализу. Однако в такой анализ мы углубляться не станем. Отметим только, что в существующих аксиоматических теориях множество определяется как математический объект, обладающий определенным набором свойств.

Описание этих свойств составляет аксиоматику. Ядром аксиоматики теории множеств является постулирование правил, по которым из множеств можно образовывать новые множества. В целом любая из существующих аксиоматик такова, что она, с одной стороны, избавляет от известных противоречий наивной теории, а с другой — обеспечивает свободу оперирования с конкретными множествами, возникающими в различных отделах математики, и в первую очередь именно в математическом анализе, понимаемом в широком смысле слова.

Ограничившись пока этими замечаниями относительно понятия множества, перейдем к описанию некоторых наиболее часто используемых в анализе свойств множеств.

Желающие подробнее ознакомиться с понятием множества могут просмотреть пункт 2 из § 4 настоящей главы или обратиться к специальной литературе.

2. Отношение включения. Как уже отмечалось, объекты, составляющие множество, принято называть *элементами* этого множества. Мы будем стремиться обозначать множества прописными буквами латинского алфавита, а элементы множества — соответствующими строчными буквами.

Высказывание «x есть элемент множества X» коротко обозначают символом

$$x \in X \quad (\text{или } X \ni x),$$

а его отрицание — символом

$$x \notin X \quad (\text{или } X \not\ni x).$$

В записи высказываний о множествах часто используются логические операторы $\exists$ («существует» или «найдется») и $\forall$ («любой» или «для любого»), называемые кванторами *существования* и *всеобщности* соответственно.

Например, запись $\forall x\ ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$ означает, что для любого объекта x соотношения $x \in A$ и $x \in B$ равносильны. Поскольку множество вполне определяется своими элементами, указанное высказывание принято обозна-

[1]Б. Рассел (1872—1970) — английский логик, философ, социолог и общественный деятель.

чать короткой записью

$$A = B,$$

читаемой «A равно B», обозначающей совпадение множеств A и B.

Таким образом, два множества *равны*, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Отрицание равенства обычно записывают в виде $A \neq B$.

Если любой элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество A является *подмножеством* множества B, или что B содержит A, или что B включает в себя A. В связи с этим отношение $A \subset B$ между множествами A, B называется *отношением включения* (рис. 1).

Итак,

$$(A \subset B) := \forall x \ ((x \in A) \Rightarrow (x \in B)).$$

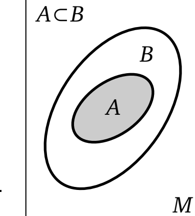


Рис. 1

Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то будем говорить, что включение $A \subset B$ *строгое* или что A — *собственное* подмножество B.

Используя приведенные определения, теперь можно заключить, что

$$(A = B) \iff (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Если M — множество, то любое свойство P выделяет в M подмножество

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

тех элементов M, которые обладают этим свойством.

Например, очевидно, что

$$M = \{x \in M \mid x \in M\}.$$

С другой стороны, если в качестве P взять свойство, которым не обладает ни один элемент множества M, например $P(x) := (x \neq x)$, то мы получим множество

$$\varnothing = \{x \in M \mid x \neq x\},$$

называемое *пустым* подмножеством множества M.

3. Простейшие операции над множествами. Пусть A и B — подмножества множества M.

a. *Объединением* множеств A и B называется множество

$$A \cup B := \{x \in M \mid (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

состоящее из тех и только тех элементов множества M, которые содержатся хотя бы в одном из множеств A, B (рис. 2).

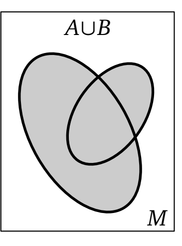
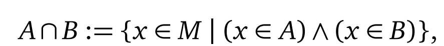


Рис. 2

b. *Пересечением* множеств A и B называется множество



$$A \cap B := \{x \in M \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

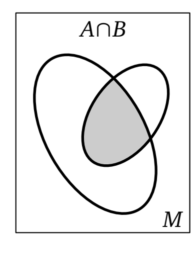



Рис. 3

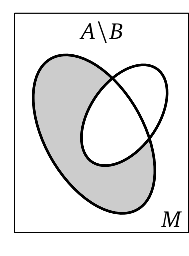


Рис. 4

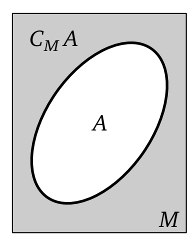


Рис. 5

образованное теми и только теми элементами множества M, которые принадлежат одновременно множествам A и B (рис. 3).

c. *Разностью* между множеством A и множеством B называется множество

$$A \setminus B := \{x \in M \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$

состоящее из тех элементов множества A, которые не содержатся в множестве B (рис. 4).

Разность между множеством M и содержащимся в нем подмножеством A обычно называют *дополнением* A в M и обозначают через $C_M A$ или CA, когда из контекста ясно, в каком множестве ищется дополнение к A (рис. 5).

Пример. В качестве иллюстрации взаимодействия введенных понятий проверим следующие соотношения (так называемые правила де Моргана[1]):

$$C_M(A \cup B) = C_M A \cap C_M B, \tag{1}$$

$$C_M(A \cap B) = C_M A \cup C_M B. \tag{2}$$

◄ Докажем, например, первое из этих равенств:

$$(x \in C_M(A \cup B)) \Rightarrow (x \notin (A \cup B)) \Rightarrow ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in C_M A) \wedge (x \in C_M B) \Rightarrow (x \in (C_M A \cap C_M B)).$$

Таким образом, установлено, что

$$C_M(A \cup B) \subset (C_M A \cap C_M B). \tag{3}$$

С другой стороны,

$$(x \in (C_M A \cap C_M B)) \Rightarrow ((x \in C_M A) \wedge (x \in C_M B)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \Rightarrow (x \notin (A \cup B)) \Rightarrow (x \in C_M(A \cup B)),$$

т. е.

$$(C_M A \cap C_M B) \subset C_M(A \cup B). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует (1). ►

[1] А. де Морган (1806—1871) — шотландский математик.

d. *Прямое* (*декартово*) *произведение множеств*. Для любых двух множеств A, B можно образовать новое множество — пару $\{A, B\} = \{B, A\}$, элементами которого являются множества A и B и только они. Это множество состоит из двух элементов, если $A \neq B$, и из одного элемента, если $A = B$.

Указанное множество называют *неупорядоченной парой* множеств A, B, в отличие от упорядоченной пары (A, B), в которой элементы A, B наделены дополнительными признаками, выделяющими первый и второй элементы пары $\{A, B\}$. Равенство

$$(A, B) = (C, D)$$

упорядоченных пар по определению означает, что $A = C$ и $B = D$. В частности, если $A \neq B$, то $(A, B) \neq (B, A)$.

Пусть теперь X и Y — произвольные множества. Множество

$$X \times Y := \{(x, y) \mid (x \in X) \wedge (y \in Y)\},$$

образованное всеми упорядоченными парами (x, y), первый член которых есть элемент из X, а второй член — элемент из Y, называется *прямым* или *декартовым произведением множеств* X и Y (в таком порядке!).

Из определения прямого произведения и сделанных выше замечаний об упорядоченной паре явствует, что, вообще говоря, $X \times Y \neq Y \times X$. Равенство имеет место, лишь если $X = Y$. В последнем случае вместо $X \times X$ пишут коротко X^2.

Прямое произведение называют также декартовым произведением в честь Декарта[1], который независимо от Ферма[2] пришел через систему координат к аналитическому языку геометрии. Известная всем система декартовых координат в плоскости превращает эту плоскость именно в прямое произведение двух числовых осей. На этом знакомом объекте наглядно проявляется зависимость декартова произведения от порядка сомножителей. Например, упорядоченным парам $(0, 1)$ и $(1, 0)$ отвечают различные точки плоскости.

В упорядоченной паре $z = (x_1, x_2)$, являющейся элементом прямого произведения $Z = X_1 \times X_2$ множеств X_1 и X_2, элемент x_1 называется *первой проекцией пары* z и обозначается через $\mathrm{pr}_1\, z$, а элемент x_2 — *второй проекцией пары* z и обозначается через $\mathrm{pr}_2\, z$.

Проекции упорядоченной пары по аналогии с терминологией аналитической геометрии часто называют (первой и второй) *координатами пары*.

---

[1]Р. Декарт (1596—1650) — выдающийся французский философ, математик и физик, внесший фундаментальный вклад в теорию научного мышления и познания.

[2]П. Ферма (1601—1665) — замечательный французский математик, юрист по специальности. Ферма стоял у истоков ряда областей современной математики: анализ, аналитическая геометрия, теория вероятностей, теория чисел.

Упражнения

В задачах 1, 2, 3 через A, B, C обозначены подмножества некоторого множества M.

1. Проверьте соотношения

a) $(A\subset C)\wedge(B\subset C) \iff ((A\cup B)\subset C)$; b) $(C\subset A)\wedge(C\subset B) \iff (C\subset(A\cap B))$;

c) $C_M(C_M A)=A$; d) $(A\subset C_M B) \iff (B\subset C_M A)$;

e) $(A\subset B) \iff (C_M A\supset C_M B)$.

2. Покажите, что

a) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=:A\cup B\cup C$; b) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=:A\cap B\cap C$;

c) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; d) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

3. Проверьте взаимосвязь (двойственность) операций объединения и пересечения:

a) $C_M(A\cup B)=C_M A\cap C_M B$; b) $C_M(A\cap B)=C_M A\cup C_M B$.

4. Проиллюстрируйте геометрически декартово произведение

a) двух отрезков (прямоугольник); b) двух прямых (плоскость);

c) прямой и окружности (цилиндрическая поверхность);

d) прямой и круга (цилиндр); e) двух окружностей (тор);

f) окружности и круга (полноторие).

5. Множество $\Delta=\{(x_1,x_2)\in X^2 \mid x_1=x_2\}$ называется *диагональю декартова квадрата* X^2 множества X.

Проиллюстрируйте геометрически диагонали множеств, полученных в пунктах a), b), e) задачи 4.

6. Покажите, что

a) $(X\times Y=\varnothing) \iff (X=\varnothing)\vee(Y=\varnothing)$,

а если $X\times Y\neq\varnothing$, то

b) $(A\times B\subset X\times Y) \iff (A\subset X)\wedge(B\subset Y)$, c) $(X\times Y)\cup(Z\times Y)=(X\cup Z)\times Y$,

d) $(X\times Y)\cap(X'\times Y')=(X\cap X')\times(Y\cap Y')$.

Здесь $\varnothing$ — символ пустого множества, т. е. множества, не содержащего элементов.

7. Сравнив соотношения задачи 3 с соотношениями a), b) из упражнения 2 к § 1, установите соответствие между логическими операциями $\neg$, $\wedge$, $\vee$ на высказываниях и операциями C, $\cap$, $\cup$ на множествах.

§ 3. Функция

1. Понятие функции (отображения). Перейдем теперь к описанию фундаментального не только для математики понятия функциональной зависимости.

Пусть X и Y — какие-то множества.

Говорят, что имеется *функция*, определенная на X со значениями в Y, если в силу некоторого закона f каждому элементу $x\in X$ соответствует элемент $y\in Y$.

В этом случае множество X называется *областью определения* функции; символ x его общего элемента — *аргументом функции* или *независимой переменной*; соответствующий конкретному значению $x_0\in X$ аргумента x элемент $y_0\in Y$ называют *значением функции на элементе* x_0 или значением

функции при значении аргумента $x=x_0$ и обозначают через $f(x_0)$. При изменении аргумента $x\in X$ значения $y=f(x)\in Y$, вообще говоря, меняются в зависимости от значений x. По этой причине величину $y=f(x)$ часто называют *зависимой переменной*.

Множество

$$f(X) := \{y \in Y \mid \exists x \ ((x \in X) \wedge (y = f(x)))\}$$

всех значений функции, которые она принимает на элементах множества X, будем называть *множеством значений* или *областью значений функции*.

В зависимости от природы множеств X, Y термин «функция» в различных отделах математики имеет ряд полезных синонимов: *отображение*, *преобразование*, *морфизм*, *оператор*, *функционал*. Отображение — наиболее распространенный из них, и мы его тоже часто будем употреблять.

Для функции (отображения) приняты следующие обозначения:

$$f: X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Когда из контекста ясно, каковы область определения и область значений функции, используют также обозначения $x \mapsto f(x)$ или $y=f(x)$, а чаще обозначают функцию вообще одним лишь символом f.

Две функции f_1, f_2 считаются *совпадающими* или *равными*, если они имеют одну и ту же область определения X и на любом элементе $x\in X$ значения $f_1(x)$, $f_2(x)$ этих функций совпадают. В этом случае пишут $f_1=f_2$.

Если $A\subset X$, а $f: X\to Y$ — некоторая функция, то через $f|A$ или $f|_A$ обозначают функцию $\varphi: A\to Y$, совпадающую с f на множестве A, т. е. $f|_A(x) = \varphi(x) = f(x)$, если $x\in A$. Функция $f|_A$ называется *сужением* или *ограничением* функции f на множество A, а функция $f: X\to Y$ по отношению к функции $\varphi=f|_A: A\to Y$ называется *распространением* или *продолжением* функции φ на множество X.

Мы видим, что иногда приходится рассматривать функцию $\varphi: A\to Y$, определенную на подмножестве A некоторого множества X, причем область значений $\varphi(A)$ функции φ тоже может оказаться не совпадающим с Y подмножеством множества Y. В связи с этим для обозначения любого множества X, содержащего область определения функции, иногда используется термин *область отправления функции*, а любое множество Y, содержащее область значений функции, называют тогда *областью ее прибытия*.

Итак, задание функции (отображения) предполагает указание тройки (X, f, Y), где

X — отображаемое множество, или область определения функции;

Y — множество, в которое идет отображение, или область прибытия функции;

f — закон, по которому каждому элементу $x\in X$ сопоставляется определенный элемент $y\in Y$.

Наблюдаемая здесь несимметричность между X и Y отражает то, что отображение идет именно из X в Y.

Рассмотрим некоторые примеры функций.

Пример 1. Формулы $l=2\pi r$ и $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ устанавливают функциональную зависимость длины окружности l и объема шара V от радиуса r. По смыслу каждая из этих формул задает свою функцию $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, определенную на множестве $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел со значениями в том же множестве $\mathbb{R}_+$.

Пример 2. Пусть X — множество инерциальных систем координат, а $c\colon X\to\mathbb{R}$ — функция, состоящая в том, что каждой инерциальной системе координат $x\in X$ сопоставляется измеренное относительно нее значение $c(x)$ скорости света в вакууме. Функция $c\colon X\to\mathbb{R}$ постоянна, т. е. при любом $x\in X$ она имеет одно и то же значение c (это фундаментальный экспериментальный факт).

Пример 3. Отображение $G\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ (прямого произведения $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\times\mathbb{R}=\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x$ оси времени $\mathbb{R}_t$ и пространственной оси $\mathbb{R}_x$) на себя же, задаваемое формулами

$$x'=x-vt,$$
$$t'=t,$$

есть классическое преобразование Галилея для перехода от одной инерциальной системы координат (x,t) к другой — (x',t'), движущейся относительно первой со скоростью v.

Той же цели служит отображение $L\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, задаваемое соотношениями

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$
$$t'=\frac{t-\left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Это — известное (одномерное) *преобразование Лоренца*[1], играющее фундаментальную роль в специальной теории относительности; c — скорость света.

Пример 4. *Проектирование* $\mathrm{pr}_1\colon X_1\times X_2\to X_1$, задаваемое соответствием $X_1\times X_2\ni(x_1,x_2)\overset{\mathrm{pr}_1}{\longmapsto}x_1\in X_1$, очевидно, является функцией. Аналогичным образом определяется вторая проекция $\mathrm{pr}_2\colon X_1\times X_2\to X_2$.

---

[1]Г. А. Лоренц (1853—1928) — выдающийся голландский физик-теоретик. Указанные преобразования Пуанкаре назвал в честь Лоренца, стимулировавшего исследование симметрий уравнений Максвелла. Они существенно использованы Эйнштейном в сформулированной им в 1905 году специальной теории относительности.

Пример 5. Пусть $\mathscr{P}(M)$ — множество всех подмножеств множества M. Каждому множеству $A \in \mathscr{P}(M)$ поставим в соответствие множество $C_M A \in \in \mathscr{P}(M)$, т. е. дополнение к A в M. Тогда получим отображение $C_M : \mathscr{P}(M) \to \to \mathscr{P}(M)$ множества $\mathscr{P}(M)$ в себя.

Пример 6. Пусть $E \subset M$. Вещественнозначную функцию $\chi_E : M \to \mathbb{R}$, определенную на множестве M условиями $(\chi_E(x) = 1$, если $x \in E) \wedge (\chi_E(x) = = 0$, если $x \in C_M E)$, называют *характеристической функцией множества* E.

Пример 7. Пусть $M(X; Y)$ — множество отображений множества X в множество Y, а x_0 — фиксированный элемент из X. Любой функции $f \in \in M(X; Y)$ поставим в соответствие ее значение $f(x_0) \in Y$ на элементе x_0. Этим определяется функция $F : M(X; Y) \to Y$. В частности, если $Y = \mathbb{R}$, т. е. если Y есть множество действительных чисел, то каждой функции $f : X \to \mathbb{R}$ функция $F : M(X; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ставит в соответствие число $F(f) = f(x_0)$. Таким образом, F есть функция, определенная на функциях. Для удобства такие функции называют *функционалами*.

Пример 8. Пусть Γ — множество кривых, лежащих на поверхности (например, земной) и соединяющих две ее фиксированные точки. Каждой кривой $\gamma \in \Gamma$ можно сопоставить ее длину. Тогда мы получим функцию $F : \Gamma \to \mathbb{R}$, которую часто приходится рассматривать с целью отыскания кратчайшей линии или, как говорят, *геодезической* линии между данными точками на поверхности.

Пример 9. Рассмотрим множество $M(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ всех вещественнозначных функций, определенных на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Фиксировав число $a \in \mathbb{R}$, каждой функции $f \in M(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ поставим в соответствие функцию $f_a \in M(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, связанную с ней соотношением $f_a(x) = f(x + a)$. Функцию $f_a(x)$ обычно называют *сдвигом* на a функции $f(x)$. Возникающее при этом отображение $A : M(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to M(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ называется *оператором сдвига*. Итак, оператор A определен на функциях и значениями его также являются функции: $f_a = A(f)$.

Рассмотренный пример мог бы показаться искусственным, если бы мы на каждом шагу не видели реальные операторы. Так, любой радиоприемник есть оператор $f \overset{F}{\mapsto} \widehat{f}$, преобразующий электромагнитные сигналы f в звуковые $\widehat{f}$; любой из наших органов чувств является оператором (преобразователем) со своими областью определения и областью значений.

Пример 10. Положение частицы в пространстве определяется упорядоченной тройкой чисел (x, y, z), называемой ее координатами в пространстве. Множество всех таких упорядоченных троек можно себе мыслить как прямое произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ трех числовых осей $\mathbb{R}$.

При движении в каждый момент времени t частица находится в некоторой точке пространства $\mathbb{R}^3$ с координатами $(x(t), y(t), z(t))$. Таким образом, движение частицы можно интерпретировать как отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, где $\mathbb{R}$ — ось времени, а $\mathbb{R}^3$ — трехмерное пространство.

Если система состоит из n частиц, то ее конфигурация задается положением каждой из частиц, т. е. упорядоченным набором $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots;$

x_n, y_n, z_n) из $3n$ чисел. Множество всех таких наборов называется *конфигурационным пространством системы n частиц*. Следовательно, конфигурационное пространство системы n частиц можно интерпретировать как прямое произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{3n}$ n экземпляров пространства $\mathbb{R}^3$.

Движению системы из n частиц отвечает отображение $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$ оси времени в конфигурационное пространство системы.

Пример 11. Потенциальная энергия U механической системы связана с взаимным расположением частиц системы, т. е. определяется конфигурацией, которую имеет система. Пусть Q — множество реально возможных конфигураций системы. Это некоторое подмножество конфигурационного пространства системы. Каждому положению $q \in Q$ отвечает некоторое значение $U(q)$ потенциальной энергии системы. Таким образом, потенциальная энергия есть функция $U\colon Q \to \mathbb{R}$, определенная на подмножестве Q конфигурационного пространства со значениями в области $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Пример 12. Кинетическая энергия K системы n материальных частиц зависит от их скоростей. Полная механическая энергия системы $E = K + U$, т. е. сумма кинетической и потенциальной энергий, зависит, таким образом, как от конфигурации q системы, так и от набора v скоростей ее частиц. Как и конфигурация q частиц в пространстве, набор v, состоящий из n трехмерных векторов, может быть задан упорядоченным набором из $3n$ чисел. Упорядоченные пары (q, v), отвечающие состояниям нашей системы, образуют подмножество Φ в прямом произведении $\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} = \mathbb{R}^{6n}$, называемом *фазовым пространством системы n частиц* (в отличие от конфигурационного пространства $\mathbb{R}^{3n}$).

Полная энергия системы является, таким образом, функцией $E\colon \Phi \to \mathbb{R}$, определенной на подмножестве Φ фазового пространства $\mathbb{R}^{6n}$ и принимающей значения в области $\mathbb{R}$ действительных чисел.

В частности, если система изолирована, т. е. на нее не действуют внешние силы, то по закону сохранения энергии в любой точке множества Φ состояний системы функция E будет иметь одно и то же значение $E_0 \in \mathbb{R}$.

2. Простейшая классификация отображений. Когда функцию $f\colon X \to Y$ называют отображением, значение $f(x) \in Y$, которое она принимает на элементе $x \in X$, обычно называют *образом* элемента x.

Образом множества $A \subset X$ при отображении $f\colon X \to Y$ называют множество

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x\ ((x \in A) \wedge (y = f(x)))\}$$

тех элементов Y, которые являются образами элементов множества A.

Множество

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

тех элементов X, образы которых содержатся в B, называют *прообразом* (или *полным прообразом*) множества $B \subset Y$ (рис. 6).

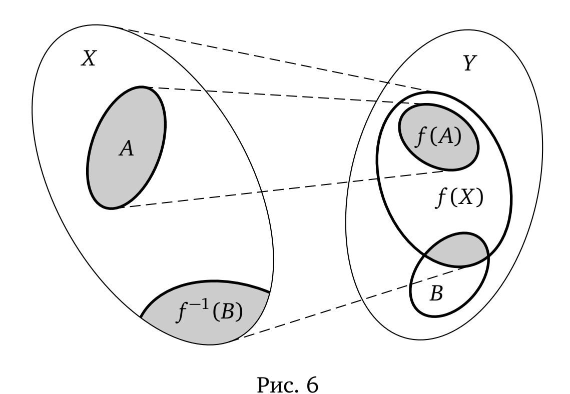


Рис. 6

Про отображение $f : X \to Y$ говорят, что оно

сюръективно (или есть отображение X *на* Y), если $f(X) = Y$;

инъективно (или есть *вложение, инъекция*), если для любых элементов x_1, x_2 множества X

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2),$$

т. е. различные элементы имеют различные образы;

биективно (или *взаимно однозначно*), если оно сюръективно и инъективно одновременно.

Если отображение $f : X \to Y$ биективно, т. е. является взаимно однозначным соответствием между элементами множеств X и Y, то естественно возникает отображение

$$f^{-1} : Y \to X,$$

которое определяется следующим образом: если $f(x) = y$, то $f^{-1}(y) = x$, т. е. элементу $y \in Y$ ставится в соответствие тот элемент $x \in X$, образом которого при отображении f является y. В силу сюръективности f такой элемент $x \in X$ найдется, а ввиду инъективности f он единственный. Таким образом, отображение f^{-1} определено корректно. Это отображение называют *обратным* по отношению к исходному отображению f.

Из построения обратного отображения видно, что $f^{-1} : Y \to X$ само является биективным и что обратное к нему отображение $(f^{-1})^{-1} : X \to Y$ совпадает с $f : X \to Y$.

Таким образом, свойство двух отображений быть обратными является взаимным: если f^{-1} — обратное для f, то, в свою очередь, f — обратное для f^{-1}.

Заметим, что символ $f^{-1}(B)$ прообраза множества $B \subset Y$ ассоциируется с символом f^{-1} обратной функции, однако следует иметь в виду, что прообраз множества определен для любого отображения $f : X \to Y$, даже если оно не является биективным и, следовательно, не имеет обратного.

3. Композиция функций и взаимно обратные отображения. Богатым источником новых функций, с одной стороны, и способом расчленения сложных функций на более простые — с другой, является операция композиции отображений.

Если отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ таковы, что одно из них (в нашем случае g) определено на множестве значений другого (f), то можно построить новое отображение

$$g \circ f: X \to Z,$$

значения которого на элементах множества X определяются формулой

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Построенное составное отображение $g \circ f$ называют *композицией* отображения f и отображения g (в таком порядке!).

Рисунок 7 иллюстрирует конструкцию композиции отображений f и g.

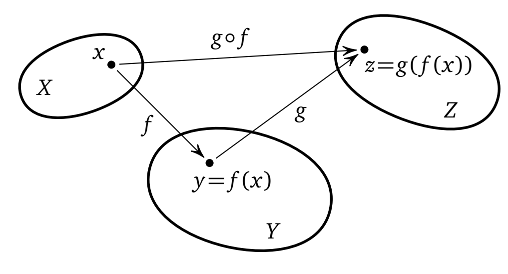


Рис. 7

С композицией отображений вы уже неоднократно встречались как в геометрии, рассматривая композицию движений плоскости или пространства, так и в алгебре при исследовании «сложных» функций, полученных композицией простейших элементарных функций.

Операцию композиции иногда приходится проводить несколько раз подряд, и в этой связи полезно отметить, что она ассоциативна, т. е.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

◄ Действительно,

$$h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x). \ ►$$

Это обстоятельство, как и в случае сложения или умножения нескольких чисел, позволяет опускать скобки, предписывающие порядок спаривания.

Если в композиции $f_n \circ \ldots \circ f_1$ все члены одинаковы и равны f, то ее обозначают коротко f^n.

Хорошо известно, например, что корень квадратный из положительного числа a можно вычислить последовательными приближениями по формуле

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

начиная с любого начального приближения $x_0 > 0$. Это не что иное, как последовательное вычисление $f^n(x_0)$, где $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Такая процедура, когда вычисленное на предыдущем шаге значение функции на следующем шаге становится ее аргументом, называется *итерационным процессом*. Итерационные процессы широко используются в математике.

Отметим также, что даже в том случае, когда обе композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ определены, вообще говоря,

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Действительно, возьмем, например, двухэлементное множество $\{a, b\}$ и отображения $f\colon \{a, b\} \to a$, $g\colon \{a, b\} \to b$. Тогда, очевидно, $g \circ f\colon \{a, b\} \to b$, в то время как $f \circ g\colon \{a, b\} \to a$.

Отображение $f\colon X \to X$, сопоставляющее каждому элементу множества X его самого, т. е. $x \overset{f}{\mapsto} x$, будем обозначать через e_X и называть *тождественным отображением множества* X.

Лемма.

$$(g \circ f = e_X) \Rightarrow (g \text{ сюръективно}) \wedge (f \text{ инъективно}).$$

◄ Действительно, если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ и $g \circ f = e_X\colon X \to X$, то

$$X = e_X(X) = (g \circ f)(X) = g(f(X)) \subset g(Y)$$

и, значит, g сюръективно.

Далее, если $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, то

$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (e_X(x_1) \neq e_X(x_2)) \Rightarrow ((g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)),$$

следовательно, f инъективно. ►

Через операцию композиции отображений можно описать взаимно обратные отображения.

Утверждение. *Отображения $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ являются биективными и взаимно обратными в том и только в том случае, когда $g \circ f = e_X$ и $f \circ g = e_Y$.*

◄ В силу леммы одновременное выполнение условий $g \circ f = e_X$ и $f \circ g = e_Y$ гарантирует сюръективность и инъективность, т. е. биективность каждого из отображений f, g.

Эти же условия показывают, что $y = f(x)$ в том и только в том случае, когда $x = g(y)$. ►

Выше мы исходили из явного построения обратного отображения. Из доказанного утверждения следует, что мы могли бы дать менее наглядное, но зато более симметричное определение взаимно обратных отображений как таких, которые удовлетворяют двум условиям: $g \circ f = e_X$ и $f \circ g = e_Y$ (см. в этой связи задачу 6 в конце параграфа).

4. Функция как отношение. График функции. В заключение вернемся вновь к самому понятию функции. Отметим, что оно претерпело длительную и довольно сложную эволюцию.

Термин «функция» впервые появился в период 1673—1692 г. у Г. Лейбница (правда, в некотором более узком смысле). В смысле, близком к современному, этот термин установился к 1698 г. в переписке Иоганна Бернулли[1] с Лейбницем.

Описание функции, почти совпадающее с приведенным в начале параграфа, встречается уже у Эйлера (середина XVIII столетия). К началу XIX века оно появляется уже в учебниках математики С. Лакруа,[2] переведенных на русский язык. Активным сторонником такого понимания функции был Н. И. Лобачевский[3]. Более того, Н. И. Лобачевский указал, что «обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа одни с другими в связи понимать как бы *данными вместе*»[4]. Это и есть идея точного определения понятия функции, которое мы теперь собираемся изложить.

Приведенное в начале параграфа описание понятия функции представляется весьма динамичным и отражающим суть дела. Однако с точки зрения современных канонов оно не может быть названо определением, ибо использует эквивалентное функции понятие соответствия. Для сведения читателя мы укажем здесь, каким образом дается определение функции на языке теории множеств. (Интересно, что понятие отношения, к которому мы сейчас обратимся, и у Лейбница предшествовало понятию функции.)

a. Отношение. *Отношением* $\mathcal{R}$ называют любое множество упорядоченных пар (x, y).

Множество X первых элементов упорядоченных пар, составляющих $\mathcal{R}$, называют *областью определения отношения* $\mathcal{R}$, а множество Y вторых элементов этих пар — *областью значений отношения* $\mathcal{R}$.

Таким образом, отношение $\mathcal{R}$ можно интерпретировать как подмножество $\mathcal{R}$ прямого произведения $X \times Y$. Если $X \subset X'$ и $Y \subset Y'$, то, разумеется, $\mathcal{R} \subset X \times Y \subset X' \times Y'$, поэтому одно и то же отношение может задаваться как подмножество различных множеств.

---

[1] И. Бернулли (1667—1748) — один из ранних представителей знаменитого семейства швейцарских ученых Бернулли; аналитик, геометр, механик. Стоял у истоков вариационного исчисления. Дал первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчисления.

[2] С. Ф. Лакруа (1765—1843) — французский математик и педагог (профессор Нормальной и Политехнической школ, член Парижской академии наук).

[3] Н. И. Лобачевский (1792—1856) — великий русский ученый, которому, наряду с великим немецким естествоиспытателем К. Ф. Гауссом (1777—1855) и выдающимся венгерским математиком Я. Бойяи (1802—1860), принадлежит честь открытия неевклидовой геометрии, носящей его имя.

[4] *Лобачевский Н. И.* Полное собр. соч. Т. 5. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. С. 44.

Любое множество, содержащее область определения отношения, называют *областью отправления* этого отношения. Множество, содержащее область значений отношения, называют *областью прибытия* отношения.

Вместо того чтобы писать $(x, y) \in \mathcal{R}$, часто пишут $x \mathcal{R} y$ и говорят, что x *связано с* y *отношением* $\mathcal{R}$.

Если $\mathcal{R} \subset X^2$, то говорят, что *отношение* $\mathcal{R}$ *задано на* X.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 13. Диагональ

$$\Delta = \{(a, b) \in X^2 \mid a = b\}$$

есть подмножество X^2, задающее отношение равенства между элементами множества X. Действительно, $a \Delta b$ означает, что $(a, b) \in \Delta$, т. е. $a = b$.

Пример 14. Пусть X — множество прямых в плоскости.

Две прямые $a \in X$ и $b \in X$ будем считать находящимися в отношении $\mathcal{R}$ и будем писать $a \mathcal{R} b$, если прямая b параллельна прямой a. Ясно, что тем самым в X^2 выделяется множество $\mathcal{R}$ пар (a, b) таких, что $a \mathcal{R} b$. Из курса геометрии известно, что отношение параллельности между прямыми обладает следующими свойствами:

$a \mathcal{R} a$ (рефлексивность);
$a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$ (симметричность);
$(a \mathcal{R} b) \wedge (b \mathcal{R} c) \Rightarrow a \mathcal{R} c$ (транзитивность).

Любое отношение $\mathcal{R}$, обладающее перечисленными тремя свойствами, т. е. рефлексивное[1], симметричное и транзитивное, принято называть *отношением эквивалентности*. Отношение эквивалентности обозначается специальным символом $\sim$, который в этом случае ставится вместо буквы $\mathcal{R}$, обозначающей отношение. Итак, в случае отношения эквивалентности будем писать $a \sim b$ вместо $a \mathcal{R} b$ и говорить, что *a эквивалентно b*.

Пример 15. Пусть M — некоторое множество, а $X = \mathcal{P}(M)$ — совокупность всех его подмножеств. Для двух произвольных элементов a и b множества $X = \mathcal{P}(M)$, т. е. для двух подмножеств a и b множества M, всегда выполнена одна из следующих трех возможностей: a содержится в b; b содержится в a; a не является подмножеством b и b не является подмножеством a.

Рассмотрим в качестве отношения $\mathcal{R}$ в X^2 отношение включения для подмножеств X, т. е. положим по определению

$$a \mathcal{R} b := (a \subset b).$$

Это отношение, очевидно, обладает следующими свойствами:

---

[1]Полезно для полноты отметить, что отношение $\mathcal{R}$ называется *рефлексивным*, если его область определения и область значений совпадают и для любого элемента a из области определения отношения $\mathcal{R}$ выполнено $a \mathcal{R} a$.

$a \mathscr{R} a$ (рефлексивность);
$(a \mathscr{R} b) \wedge (b \mathscr{R} c) \Rightarrow a \mathscr{R} c$ (транзитивность);
$(a \mathscr{R} b) \wedge (b \mathscr{R} a) \Rightarrow a \Delta b$, т. е. $a = b$ (антисимметричность).

Отношение между парами элементов некоторого множества X, обладающее указанными тремя свойствами, принято называть отношением *частичного порядка* на множестве X. Для отношения частичного порядка вместо $a \mathscr{R} b$ часто пишут $a \preccurlyeq b$ и говорят, что b *следует за* a.

Если кроме отмеченных двух свойств, определяющих отношение частичного порядка, выполнено условие, что

$$\forall a \ \forall b \ ((a \mathscr{R} b) \vee (b \mathscr{R} a)),$$

т. е. любые два элемента множества X сравнимы, то отношение $\mathscr{R}$ называется *отношением порядка*, а множество X с определенным на нем отношением порядка называется *линейно упорядоченным*.

Происхождение этого термина связано с наглядным образом числовой прямой $\mathbb{R}$, на которой действует отношение $a \leqslant b$ между любой парой вещественных чисел.

b. Функция и график функции. Отношение $\mathscr{R}$ называется *функциональным*, если

$$(x \mathscr{R} y_1) \wedge (x \mathscr{R} y_2) \Rightarrow (y_1 = y_2).$$

Функциональное отношение называют *функцией*.

В частности, если X и Y — два не обязательно различных множества, то определенное на X отношение $\mathscr{R} \subset X \times Y$ между элементами x из X и y из Y *функционально*, если для любого $x \in X$ существует и притом единственный элемент $y \in Y$, находящийся с x в рассматриваемом отношении, т. е. такой, для которого $x \mathscr{R} y$.

Такое функциональное отношение $\mathscr{R} \subset X \times Y$ и есть *отображение из* X *в* Y, или *функция из* X *в* Y.

Функции мы чаще всего будем обозначать символом f. Если f — функция, то вместо $x f y$ мы по-прежнему будем писать $y = f(x)$ или $x \overset{f}{\mapsto} y$, называя $y = f(x)$ *значением* функции f на элементе x или *образом* элемента x при отображении f.

Сопоставление по «закону» f элементу $x \in X$ «соответствующего» элемента $y \in Y$, о чем говорилось в исходном описании понятия функции, как видим, состоит в том, что для каждого $x \in X$ указывается тот единственный элемент $y \in Y$, что $x f y$, т. е. $(x, y) \in f \subset X \times Y$.

Графиком функции $f\colon X \to Y$, понимаемой в смысле исходного описания, называют подмножество Γ прямого произведения $X \times Y$, элементы которого имеют вид $(x, f(x))$. Итак,

$$\Gamma := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

В новом описании понятия функции, когда мы ее задаем как подмножество $f \subset X \times Y$, конечно, уже нет разницы между функцией и ее графиком.

Мы указали на принципиальную возможность формального теоретико-множественного определения функции, сводящуюся по существу к отождествлению функции и ее графика. Однако мы не собираемся в дальнейшем ограничиваться только такой формой задания функции. Функциональное отношение иногда удобно задать в аналитической форме, иногда таблицей значений, иногда словесным описанием процесса (алгоритма), позволяющего по данному $x \in X$ находить соответствующий элемент $y \in Y$. При каждом таком способе задания функции имеет смысл вопрос о ее задании с помощью графика, что формулируют так: построить график функции. Задание числовых функций хорошим графическим изображением часто бывает полезно тем, что делает наглядным основные качественные особенности функциональной зависимости. Для расчетов графики тоже можно использовать (номограммы), но, как правило, в тех случаях, когда расчет не требует высокой точности. Для точных расчетов используют табличное задание функции, а чаще — алгоритмическое, реализуемое в вычислительных машинах.

Упражнения

1. *Композиция* $\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1$ *отношений* $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$ определяется следующим образом:

$$\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1 := \{(x, z) \mid \exists y \ (x \mathscr{R}_1 y) \wedge (y \mathscr{R}_2 z)\}.$$

В частности, если $\mathscr{R}_1 \subset X \times Y$ и $\mathscr{R}_2 \subset Y \times Z$, то $\mathscr{R} = \mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1 \subset X \times Z$, причем

$$x \mathscr{R} z := \exists y \ ((y \in Y) \wedge (x \mathscr{R}_1 y) \wedge (y \mathscr{R}_2 z)).$$

a) Пусть Δ_X — диагональ множества X^2, а Δ_Y — диагональ множества Y^2. Покажите, что если отношения $\mathscr{R}_1 \subset X \times Y$ и $\mathscr{R}_2 \subset Y \times X$ таковы, что $(\mathscr{R}_2 \circ \mathscr{R}_1 = \Delta_X) \wedge \wedge (\mathscr{R}_1 \circ \mathscr{R}_2 = \Delta_Y)$, то оба они функциональны и задают взаимно обратные отображения множеств X, Y.

b) Пусть $\mathscr{R} \subset X^2$. Покажите, что условие транзитивности отношения $\mathscr{R}$ равносильно тому, что $\mathscr{R} \circ \mathscr{R} \subset \mathscr{R}$.

c) Отношение $\mathscr{R}' \subset Y \times X$ называется *транспонированным* отношением $\mathscr{R} \subset X \times Y$, если $(y \mathscr{R}' x) \Leftrightarrow (x \mathscr{R} y)$.

Покажите, что антисимметричность отношения $\mathscr{R} \subset X^2$ равносильна условию $\mathscr{R} \cap \mathscr{R}' \subset \Delta_X$.

d) Проверьте, что любые два элемента множества X связаны (в том или ином порядке) отношением $\mathscr{R} \subset X^2$, если и только если $\mathscr{R} \cup \mathscr{R}' = X^2$.

2. Пусть $f: X \to Y$ — отображение. Прообраз $f^{-1}(y) \subset X$ элемента $y \in Y$ называется *слоем* над y.

a) Укажите слои для отображений

$$\mathrm{pr}_1 : X_1 \times X_2 \to X_1, \quad \mathrm{pr}_2 : X_1 \times X_2 \to X_2.$$

b) Элемент $x_1 \in X$ будем считать связанным с элементом $x_2 \in X$ отношением $\mathscr{R} \subset \subset X^2$ и писать $x_1 \mathscr{R} x_2$, если $f(x_1) = f(x_2)$, т. е. если x_1 и x_2 лежат в одном слое.

Проверьте, что $\mathscr{R}$ есть отношение эквивалентности.

c) Покажите, что слои отображения $f: X \to Y$ не пересекаются, а объединением слоев является все множество X.

d) Проверьте, что любое отношение эквивалентности между элементами множества позволяет представить это множество в виде объединения непересекающихся классов эквивалентных элементов.

3. Пусть $f: X \to Y$ — отображение из X в Y. Покажите, что если A и B — подмножества X, то

a) $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B)) \not\Leftarrow (A \subset B)$, b) $(A \neq \varnothing) \Rightarrow (f(A) \neq \varnothing)$,

c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, d) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

если A' и B' — подмножества Y, то

e) $(A' \subset B') \Rightarrow (f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B'))$, f) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$,

g) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$;

если $Y \supset A' \supset B'$, то

h) $f^{-1}(A' \setminus B') = f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B')$, i) $f^{-1}(C_Y A') = C_X f^{-1}(A')$;

для любого множества $A \subset X$ и любого множества $B' \subset Y$

j) $f^{-1}(f(A)) \supset A$, k) $f(f^{-1}(B')) \subset B'$.

4. Покажите, что отображение $f: X \to Y$

a) сюръективно, если и только если для любого множества $B' \subset Y$ справедливо $f(f^{-1}(B')) = B'$;

b) биективно, если и только если для любого множества $A \subset X$ и любого множества $B' \subset Y$ справедливо

$$(f^{-1}(f(A)) = A) \wedge (f(f^{-1}(B')) = B').$$

5. Проверьте эквивалентность следующих утверждений относительно отображения $f: X \to Y$:

a) f инъективно;

b) $f^{-1}(f(A)) = A$ для любого множества $A \subset X$;

c) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ для любой пары A, B подмножеств X;

d) $f(A) \cap f(B) = \varnothing \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;

e) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$, если $X \supset A \supset B$.

6. a) Если отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to X$ таковы, что $g \circ f = e_X$, где e_X — тождественное отображение множества X, то g называется *левым обратным отображением* для f, а f — *правым обратным* для g. Покажите, что, в отличие от единственного обратного отображения, может существовать много односторонних обратных отображений.

Рассмотрите, например, отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to X$, где X — одноэлементное, а Y — двухэлементное множества, или отображения последовательностей

$$(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \xmapsto{f_a} (a, x_1, \ldots, x_n, \ldots),$$
$$(y_2, \ldots, y_n, \ldots) \xleftarrow{g} (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots).$$

b) Пусть $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ — биективные отображения. Покажите, что отображение $g \circ f: X \to Z$ биективно и что $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

c) Покажите, что для любых отображений $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ и любого множества $C \subset Z$ справедливо равенство

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

d) Проверьте, что отображение $F: X \times Y \to Y \times X$, задаваемое соответствием $(x, y) \mapsto (y, x)$, биективно. Опишите взаимосвязь графиков взаимно обратных отображений $f: X \to Y$ и $f^{-1}: Y \to X$.

7. a) Покажите, что при любом отображении $f: X \to Y$ отображение $F: X \to X \times Y$, определяемое соответствием $x \overset{F}{\longmapsto} (x, f(x))$, является инъективным.

b) Пусть частица движется равномерно по окружности Y; пусть X — ось времени и $x \overset{f}{\longmapsto} y$ — соответствие между моментом времени $x \in X$ и положением $y = f(x) \in Y$ частицы. Изобразите график функции $f: X \to Y$ в $X \times Y$.

8. a) Для каждого из разобранных в § 3 примеров 1—12 выясните, является ли указанное в нем отображение сюръективным, инъективным, биективным или оно не принадлежит ни одному из указанных классов.

b) Закон Ома $I = V/R$ связывает силу тока I в проводнике с напряжением V на концах проводника и сопротивлением R проводника. Укажите, отображение $O: X \to Y$ каких множеств соответствует закону Ома. Подмножеством какого множества является отношение, отвечающее закону Ома?

c) Найдите преобразования G^{-1}, L^{-1}, обратные к преобразованиям Галилея и Лоренца.

9. a) Множество $S \subset X$ называется *устойчивым* относительно отображения $f: X \to X$, если $f(S) \subset S$. Опишите множества, устойчивые относительно сдвига плоскости на данный лежащий в ней вектор.

b) Множество $I \subset X$ называется *инвариантным* относительно отображения $f: X \to X$, если $f(I) = I$. Опишите множества, инвариантные относительно поворота плоскости вокруг фиксированной точки.

c) Точка $p \in X$ называется *неподвижной* точкой отображения $f: X \to X$, если $f(p) = p$. Проверьте, что любая композиция сдвига, вращения и гомотетии плоскости имеет неподвижную точку, если коэффициент гомотетии меньше единицы.

d) Считая преобразования Галилея и преобразования Лоренца отображениями плоскости на себя, при которых точка с координатами (x, t) переходит в точку с координатами (x', t'), найдите инвариантные множества этих преобразований.

10. Рассмотрим установившийся поток жидкости (т. е. скорость в каждой точке потока не меняется со временем). За время t частица, находящаяся в точке x потока, переместится в некоторую новую точку $f_t(x)$ пространства. Возникающее отображение $x \mapsto f_t(x)$ точек пространства, занимаемого потоком, зависит от времени t и называется *преобразованием за время* t. Покажите, что $f_{t_2} \circ f_{t_1} = f_{t_1} \circ f_{t_2} = f_{t_1+t_2}$ и $f_t \circ f_{-t} = f_0 = e_X$.

§ 4. Некоторые дополнения

1. Мощность множества (кардинальные числа). Говорят, что множество X *равномощно* множеству Y, если существует биективное отображение X на Y, т. е. каждому элементу $x \in X$ сопоставляется элемент $y \in Y$, причем различным элементам множества X отвечают различные элементы множества Y и каждый элемент $y \in Y$ сопоставлен некоторому элементу множества X.

Описательно говоря, каждый элемент $x \in X$ сидит на своем месте $y \in Y$, все элементы X сидят и свободных мест $y \in Y$ нет.

Ясно, что введенное отношение $X \mathscr{R} Y$ является *отношением эквивалентности*, поэтому мы будем, как и договаривались, писать в этом случае $X \sim Y$ вместо $X \mathscr{R} Y$.

Отношение равномощности разбивает совокупность всех множеств на классы эквивалентных между собой множеств. Множества одного класса эквивалентности имеют одинаковое количество элементов (равномощны), а разных — разное.

Класс, которому принадлежит множество X, называется *мощностью множества* X, а также *кардиналом* или *кардинальным числом множества* X и обозначается символом $\operatorname{card} X$. Если $X \sim Y$, то пишут $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.

Смысл этой конструкции в том, что она позволяет сравнивать количества элементов множеств, не прибегая к промежуточному счету, т. е. к измерению количества путем сравнения с натуральным рядом чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Последнее, как мы вскоре увидим, иногда принципиально невозможно.

Говорят, что кардинальное число множества X *не больше* кардинального числа множества Y, и пишут $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$, если X равномощно некоторому подмножеству множества Y.

Итак,

$$(\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) := (\exists Z \subset Y \mid \operatorname{card} X = \operatorname{card} Z).$$

Если $X \subset Y$, то ясно, что $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$. Однако, оказывается, соотношение $X \subset Y$ не мешает неравенству $\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} X$, даже если X есть собственное подмножество Y.

Например, соответствие $x \mapsto \frac{x}{1-|x|}$ есть биективное отображение промежутка $-1 < x < 1$ числовой оси $\mathbb{R}$ на всю эту ось.

Возможность для множества быть равномощным своей части является характерным признаком бесконечных множеств, который Дедекинд[1] даже предложил считать определением бесконечного множества. Таким образом, множество называется *конечным* (по Дедекинду), если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству; в противном случае оно называется *бесконечным*.

Подобно тому, как отношение неравенства упорядочивает действительные числа на числовой прямой, введенное отношение неравенства упорядочивает мощности или кардинальные числа множеств. А именно, можно доказать, что справедливы следующие свойства построенного отношения:

1° $(\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) \wedge (\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} Z) \Rightarrow (\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Z)$ (очевидно);

2° $(\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) \wedge (\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} X) \Rightarrow (\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y)$ (теорема Шрёдера—Бернштейна[2]);

3° $\forall X\ \forall Y\ (\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) \vee (\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} X)$ (теорема Кантора).

---

[1] Р. Дедекинд (1831—1916) — немецкий математик-алгебраист, принявший активное участие в развитии теории действительного числа. Впервые предложил аксиоматику множества натуральных чисел, называемую обычно аксиоматикой Пеано — по имени Дж. Пеано (1858—1932), итальянского математика, сформулировавшего ее несколько позже.

[2] Ф. Бернштейн (1878—1956) — немецкий математик, ученик Г. Кантора; Э. Шрёдер (1841—1902) — немецкий математик.

Таким образом, класс кардинальных чисел оказывается линейно упорядоченным.

Говорят, что мощность множества X *меньше* мощности множества Y, и пишут $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$, если $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y$ и в то же время $\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} Y$. Итак, $(\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y) := (\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) \wedge (\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} Y)$.

Пусть, как и прежде, $\varnothing$ — знак пустого множества, а $\mathscr{P}(X)$ — символ множества всех подмножеств множества X. Имеет место следующая открытая Кантором

Теорема. $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathscr{P}(X)$.

◄ Для пустого множества $\varnothing$ утверждение очевидно, поэтому в дальнейшем можно считать, что $X \neq \varnothing$.

Поскольку $\mathscr{P}(X)$ содержит все одноэлементные подмножества X, $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathscr{P}(X)$.

Для доказательства теоремы теперь достаточно установить, что $\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} \mathscr{P}(X)$, если $X \neq \varnothing$.

Пусть, вопреки утверждению, существует биективное отображение $f \colon X \to \mathscr{P}(X)$. Рассмотрим множество $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ тех элементов $x \in X$, которые не содержатся в сопоставленном им множестве $f(x) \in \mathscr{P}(X)$. Поскольку $A \in \mathscr{P}(X)$, то найдется элемент $a \in X$ такой, что $f(a) = A$. Для элемента $a \in X$ невозможно ни соотношение $a \in A$ (по определению A), ни соотношение $a \notin A$ (опять-таки по определению A). Мы вступаем в противоречие с законом исключенного третьего. ►

Эта теорема, в частности, показывает, что если бесконечные множества существуют, то и «бесконечности» бывают разные.

2. Об аксиоматике теории множеств. Цель настоящего пункта — дать интересующемуся читателю представление о системе аксиом, описывающих свойства математического объекта, называемого *множеством*, и продемонстрировать простейшие следствия этих аксиом.

1° Аксиома объемности. *Множества A и B равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы.*

Это означает, что мы отвлекаемся от всех прочих свойств объекта «множество», кроме свойства иметь данные элементы. На практике это означает, что если мы желаем установить, что $A = B$, то мы должны проверить, что $\forall x\ ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$.

2° Аксиома выделения. *Любому множеству A и свойству P отвечает множество B, элементы которого суть те и только те элементы множества A, которые обладают свойством P.*

Короче, утверждается, что если A — множество, то и $B = \{x \in A \mid P(x)\}$ — тоже множество.

Эта аксиома очень часто используется в математических конструкциях, когда мы выделяем из множеств подмножества, состоящие из элементов, обладающих тем или иным свойством.

Например, из аксиомы выделения следует, что существует пустое подмножество $\varnothing_X = \{x \in X \mid x \neq x\}$ в любом множестве X, а с учетом аксиомы объемности заключаем, что для любых множеств X и Y выполнено $\varnothing_X = \varnothing_Y$, т. е. пустое множество единственно. Его обозначают символом $\varnothing$.

Из аксиомы выделения следует также, что если A и B — множества, то $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ — тоже множество. В частности, если M — множество и A — его подмножество, то $C_M A$ — тоже множество.

3° Аксиома объединения. *Для любого множества M множеств существует множество $\bigcup M$, называемое объединением множества M, состоящее из тех и только тех элементов, которые содержатся в элементах множества M.*

Если вместо слов «множество множеств» сказать «семейство множеств», то аксиома объединения приобретает несколько более привычное звучание: существует множество, состоящее из элементов множеств семейства. Таким образом, объединение множества есть множество, причем $x \in \bigcup M \Leftrightarrow \exists X\ ((X \in M) \wedge (x \in X))$.

Аксиома объединения с учетом аксиомы выделения позволяет определить *пересечение множества M* (семейства множеств) как множество

$$\bigcap M := \{x \in \bigcup M \mid \forall X\ ((X \in M) \Rightarrow (x \in X))\}.$$

4° Аксиома пары. *Для любых множеств X и Y существует множество Z такое, что X и Y являются его единственными элементами.*

Множество Z обозначается через $\{X, Y\}$ и называется *неупорядоченной парой* множеств X и Y. Множество Z состоит из одного элемента, если $X = Y$.

Как мы уже отмечали, *упорядоченная* пара (X, Y) множеств отличается от неупорядоченной наличием какого-либо признака у одного из множеств пары. Например, $(X, Y) := \{\{X, X\}, \{X, Y\}\}$.

Итак, неупорядоченная пара позволяет ввести упорядоченную пару, а упорядоченная пара позволяет ввести прямое произведение множеств, если воспользоваться аксиомой выделения и следующей важной аксиомой.

5° Аксиома множества подмножеств. *Для любого множества X существует множество $\mathscr{P}(X)$, состоящее из тех и только тех элементов, которые являются подмножествами множества X.*

Короче говоря, существует множество всех подмножеств данного множества.

Теперь можно проверить, что упорядоченные пары (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$, действительно образуют множество

$$X \times Y := \{p \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(X) \cup \mathscr{P}(Y)) \mid p = (x, y) \wedge (x \in X) \wedge (y \in Y)\}.$$

Аксиомы 1°—5° ограничивают возможность формирования новых множеств. Так, в множестве $\mathscr{P}(X)$ по теореме Кантора (о том, что $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathscr{P}(X)$) имеется элемент, не принадлежащий X, поэтому *«множества» всех множеств* не существует. А ведь именно на этом «множестве» держится парадокс Рассела.

Для того чтобы сформулировать следующую аксиому, введем понятие *последователя* X^+ множества X. Положим по определению $X^+ = X \cup \{X\}$. Короче, к X добавлено одноэлементное множество $\{X\}$.

Далее, множество назовем *индуктивным*, если оно содержит в качестве элемента пустое множество и последователь любого своего элемента.

6° Аксиома бесконечности. *Индуктивные множества существуют.*

Аксиома бесконечности позволяет с учетом аксиом 1°—4° создать эталонную модель множества $\mathbb{N}_0$ натуральных чисел (по фон Нейману[1]), определив $\mathbb{N}_0$ как пересе-

[1] Дж. фон Нейман (1903—1957) — американский математик. Работы по функциональному анализу, математическим основаниям квантовой механики, топологическим группам, теории игр, математической логике. Руководил созданием первых ЭВМ.

чение индуктивных множеств, т. е. как наименьшее индуктивное множество. Элементами $\mathbb{N}_0$ являются множества

$$\varnothing, \quad \varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing\}^+ = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}, \quad \ldots,$$

которые и являются моделью того, что мы обозначаем символами 0, 1, 2, … и называем натуральными числами.

7° Аксиома подстановки. *Пусть $\mathcal{F}(x, y)$ — такое высказывание (точнее, формула), что при любом x_0 из множества X существует и притом единственный объект y_0 такой, что $\mathcal{F}(x_0, y_0)$ истинно. Тогда объекты y, для каждого из которых существует элемент $x \in X$ такой, что $\mathcal{F}(x, y)$ истинно, образуют множество.*

Этой аксиомой при построении анализа мы пользоваться не будем.

Аксиомы 1°—7° составляют аксиоматику теории множеств, известную как аксиоматика Цермело—Френкеля[1].

К ней обычно добавляется еще одна, независимая от аксиом 1°—7° и часто используемая в анализе

8° Аксиома выбора. *Для любого семейства непустых попарно непересекающихся множеств существует множество C такое, что, каково бы ни было множество X данного семейства, множество $X \cap C$ состоит из одного элемента.*

Иными словами, из каждого множества семейства можно выбрать в точности по одному представителю так, что выбранные элементы составят множество C.

Аксиома выбора, известная в математике как аксиома Цермело, вызвала горячие дискуссии специалистов.

3. Замечания о структуре математических высказываний и записи их на языке теории множеств. В языке теории множеств имеются два базисных или, как говорят, атомарных типа математических высказываний: утверждение $x \in A$ о том, что объект x есть элемент множества A, и утверждение $A = B$ о том, что множества A и B совпадают. (Впрочем, с учетом аксиомы объемности второе утверждение является комбинацией утверждений первого типа: $(x \in A) \Longleftrightarrow (x \in B)$.)

Сложное высказывание или сложная логическая формула строятся из атомарных посредством логических операторов — связок $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ и кванторов $\forall$, $\exists$ с использованием скобок ( ). При этом формирование сколь угодно сложного высказывания и его записи сводится к выполнению следующих элементарных логических операций:

a) образование нового высказывания путем постановки отрицания перед некоторым высказыванием и заключение результата в скобки;

b) образование нового высказывания путем постановки необходимой связки $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ между двумя высказываниями и заключение результата в скобки;

c) образование высказывания «для любого объекта x выполнено свойство P» (что записывают в виде $\forall x\, P(x)$) или высказывания «найдется объект x, обладающий свойством P» (что записывают в виде $\exists x\, P(x)$).

[1]Э. Цермело (1871—1953) — немецкий математик; А. Френкель (1891—1965) — немецкий, затем израильский математик.

Например, громоздкая запись

$$\exists x\ (P(x) \wedge (\forall y\ ((P(y)) \Rightarrow (y = x))))$$

означает, что найдется объект x, обладающий свойством P и такой, что если y — любой объект, обладающий свойством P, то $y = x$. Короче: существует и притом единственный объект x, обладающий свойством P. Обычно это высказывание обозначают в виде $\exists!\ x\ P(x)$, и мы будем использовать такое сокращение.

Для упрощения записи высказывания, как уже отмечалось, стараются опустить столько скобок, сколько это возможно без потери однозначного толкования записи. С этой целью кроме указанного ранее приоритета операторов $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ считают, что наиболее жестко символы в формуле связываются знаками $\in$, $=$, затем $\exists$, $\forall$ и потом связками $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$.

С учетом такого соглашения теперь можно было бы написать

$$\exists!\ x\ P(x) := \exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (P(y) \Rightarrow y = x)).$$

Условимся также о следующих широко используемых сокращениях:

$$(\forall x \in X)\ P := \forall x\ (x \in X \Rightarrow P(x)),$$
$$(\exists x \in X)\ P := \exists x\ (x \in X \wedge P(x)),$$
$$(\forall x > a)\ P := \forall x\ (x \in \mathbb{R} \wedge x > a \Rightarrow P(x)),$$
$$(\exists x > a)\ P := \exists x\ (x \in \mathbb{R} \wedge x > a \wedge P(x)).$$

Здесь $\mathbb{R}$, как всегда, есть символ множества действительных чисел.

С учетом этих сокращений и правил a), b), c) построения сложного высказывания, например, можно будет дать однозначно трактуемую запись

$$\Big(\lim_{x\to a} f(x) = A\Big) := \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon)$$

того, что число A является пределом функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}$.

Быть может, наиболее важным из всего сказанного в этом параграфе являются для нас следующие правила построения отрицания к высказыванию, содержащему кванторы.

Отрицание к высказыванию «для некоторого x истинно $P(x)$» означает, что «для любого x неверно $P(x)$», а отрицание к высказыванию «для любого x истинно $P(x)$» означает, что «найдется x, что неверно $P(x)$».

Итак,

$$\neg \exists x\ P(x) \iff \forall x\ \neg P(x),$$
$$\neg \forall x\ P(x) \iff \exists x\ \neg P(x).$$

Напомним также (см. упражнения к § 1), что

$$\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q,$$
$$\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q,$$
$$\neg(P \Rightarrow Q) \iff P \wedge \neg Q.$$

На основании сказанного можно заключить, что, например,

$$\neg((\forall x > a)\ P) \iff (\exists x > a)\ \neg P.$$

Написать в правой части последнего соотношения $(\exists x \leqslant a)\ \neg P$ было бы, конечно, ошибочно.

В самом деле,

$$\neg((\forall x > a)\ P) := \neg(\forall x\ (x \in \mathbb{R} \land x > a \Rightarrow P(x))) \iff$$
$$\iff \exists x\ \neg(x \in \mathbb{R} \land x > a \Rightarrow P(x)) \iff$$
$$\iff \exists x\ ((x \in \mathbb{R} \land x > a) \land \neg P(x)) =: (\exists x > a)\ \neg P.$$

Если учесть указанную выше структуру произвольного высказывания, то теперь с использованием построенных отрицаний простейших высказываний можно было бы построить отрицание любого конкретного высказывания.

Например,

$$\neg\Big(\lim_{x\to a} f(x) = A\Big) \iff \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\ (0 < |x-a| < \delta \land |f(x)-A| \geqslant \varepsilon).$$

Практическая важность правильного построения отрицания связана, в частности, с методом доказательства от противного, когда истинность некоторого утверждения P извлекают из того, что утверждение $\neg P$ ложно.

Упражнения

1. a) Установите равномощность отрезка $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ и интервала $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ числовой прямой $\mathbb{R}$ как с помощью теоремы Шрёдера—Бернштейна, так и непосредственным предъявлением нужной биекции.

b) Разберите следующее доказательство теоремы Шрёдера—Бернштейна:

$$(\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} Y) \land (\operatorname{card} Y \leqslant \operatorname{card} X) \Rightarrow (\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y).$$

◄ Достаточно доказать, что если множества X, Y, Z таковы, что $X \supset Y \supset Z$ и $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Z$, то $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$. Пусть $f\colon X \to Z$ — биективное отображение. Тогда биекция $g\colon X \to Y$ может быть задана, например, следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in f^n(X) \setminus f^n(Y) \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $f^n = f \circ \ldots \circ f$ — n-я итерация отображения f, а $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. ►

2. a) Исходя из определения пары, проверьте, что данное в пункте 2 определение прямого произведения $X \times Y$ множеств X, Y корректно, т. е. множество $\mathscr{P}(\mathscr{P}(X) \cup \mathscr{P}(Y))$ содержит все упорядоченные пары (x, y), в которых $x \in X$ и $y \in Y$.

b) Покажите, что всевозможные отображения $f\colon X \to Y$ одного фиксированного множества X в другое фиксированное множество Y сами образуют множество $M(X, Y)$.

c) Проверьте, что если $\mathscr{R}$ — множество упорядоченных пар (т. е. отношение), то первые элементы пар, принадлежащих множеству $\mathscr{R}$ (как и вторые), сами образуют множество.

3. a) Используя аксиомы объемности, пары, выделения, объединения и бесконечности, проверьте, что для элементов множества $\mathbb{N}_0$ натуральных чисел по фон Нейману справедливы следующие утверждения:

1° $x = y \Rightarrow x^+ = y^+$; 2° $(\forall x \in \mathbb{N}_0)\ (x^+ \neq \varnothing)$;
3° $x^+ = y^+ \Rightarrow x = y$; 4° $(\forall x \in \mathbb{N}_0)\ (x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{N}_0)\ (x = y^+))$.

b) Используя то, что $\mathbb{N}_0$ — индуктивное множество, покажите, что для любых его элементов x и y (а они в свою очередь являются множествами) справедливы следующие соотношения:

1° $\operatorname{card} x \leqslant \operatorname{card} x^+$; 2° $\operatorname{card} \varnothing < \operatorname{card} x^+$;
3° $\operatorname{card} x < \operatorname{card} y \Leftrightarrow \operatorname{card} x^+ < \operatorname{card} y^+$; 4° $\operatorname{card} x < \operatorname{card} x^+$;
5° $\operatorname{card} x < \operatorname{card} y \Rightarrow \operatorname{card} x^+ \leqslant \operatorname{card} y$; 6° $x = y \Leftrightarrow \operatorname{card} x = \operatorname{card} y$;
7° $(x \subset y) \vee (x \supset y)$.

c) Покажите, что в любом подмножестве X множества $\mathbb{N}_0$ найдется такой (наименьший) элемент x_m, что $(\forall x \in X)\ (\operatorname{card} x_m \leqslant \operatorname{card} x)$. (В случае затруднений к этой задаче можно вернуться после прочтения главы II.)

4. Мы будем иметь дело только с множествами. Поскольку множество, состоящее из различных элементов, само может быть элементом другого множества, логики все множества обычно обозначают строчными буквами. В настоящей задаче это очень удобно.

a) Проверьте, что запись

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow \exists w\ (z \in w \wedge w \in x))$$

выражает аксиому объединения, по которой существует множество y — объединение множества x.

b) Укажите, какие аксиомы теории множеств представлены записями

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Leftrightarrow x = y),$$
$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall v\ (v \in z \Leftrightarrow (v = x \vee v = y)),$$
$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow \forall u\ (u \in z \Rightarrow u \in x)),$$
$$\exists x\ (\forall y\ (\neg \exists z\ (z \in y) \Rightarrow y \in x) \wedge$$
$$\wedge \forall w\ (w \in x \Rightarrow \forall u\ (\forall v\ (v \in u \Leftrightarrow (v = w \vee v \in w)) \Rightarrow u \in x))).$$

c) Проверьте, что формула

$$\forall z\ (z \in f \Rightarrow (\exists x_1\ \exists y_1\ (x_1 \in x \wedge y_1 \in y \wedge z = (x_1, y_1)))) \wedge$$
$$\wedge \forall x_1\ (x_1 \in x \Rightarrow \exists y_1\ \exists z\ (y_1 \in y \wedge z = (x_1, y_1) \wedge z \in f)) \wedge$$
$$\wedge \forall x_1\ \forall y_1\ \forall y_2\ (\exists z_1\ \exists z_2\ (z_1 \in f \wedge z_2 \in f \wedge z_1 = (x_1, y_1) \wedge z_2 = (x_1, y_2)) \Rightarrow y_1 = y_2)$$

последовательно накладывает на множество f три ограничения: f есть подмножество $x \times y$; проекция f на x совпадает с x; каждому элементу x_1 из x отвечает ровно один элемент y_1 из y такой, что $(x_1, y_1) \in f$.

Таким образом, перед нами определение отображения $f : x \to y$.

Этот пример еще раз показывает, что формальная запись высказывания отнюдь не всегда бывает более короткой и прозрачной в сравнении с его записью на разго-

ворном языке. Учитывая это обстоятельство, мы будем в дальнейшем использовать логическую символику лишь в той мере, в какой она будет нам представляться полезной для достижения большей компактности или ясности изложения.

5. Пусть $f: X \to Y$ — отображение. Запишите логическое отрицание каждого из следующих высказываний:

a) f сюръективно; b) f инъективно; c) f биективно.

6. Пусть X и Y — множества и $f \subset X \times Y$. Запишите, что значит, что множество f не является функцией.

Глава II

Действительные (вещественные) числа

Математические теории, как правило, находят свой выход в том, что позволяют перерабатывать один набор чисел (исходные данные) в другой набор чисел, составляющий промежуточную или окончательную цель вычислений. По этой причине особое место в математике и ее приложениях занимают числовые функции. Они (точнее, так называемые дифференцируемые числовые функции) составляют главный объект исследования классического анализа. Но сколь-нибудь полное с точки зрения современной математики описание свойств этих функций, как вы уже могли почувствовать в школе и в чем вскоре убедитесь, невозможно без точного определения множества вещественных чисел, на котором эти функции действуют.

Число в математике, как время в физике, известно каждому, но непонятно лишь специалистам. Это одна из основных математических абстракций, которой, по-видимому, еще предстоит существенная эволюция и рассказу о которой может быть посвящен самостоятельный насыщенный курс. Здесь же мы имеем в виду только свести воедино то, что читателю в основном известно о действительных числах из средней школы, выделив в виде аксиом фундаментальные и независимые свойства чисел. При этом наша цель состоит в том, чтобы дать точное, пригодное для последующего математического использования определение вещественных чисел и обратить особое внимание на их свойство полноты, или непрерывности, являющееся зародышем предельного перехода — основной неарифметической операции анализа.

§ 1. Аксиоматика и некоторые общие свойства множества действительных чисел

1. Определение множества действительных чисел

Определение 1. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством *действительных* (*вещественных*) *чисел*, а его элементы — *действительными* (*вещественными*) *числами*, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

(I) Аксиомы сложения. Определено отображение (операция сложения)

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbb{R}$, называемый *суммой* x и y. При этом выполнены следующие условия:

1_+. Существует *нейтральный* элемент 0 (называемый в случае сложения *нулем*) такой, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$x + 0 = 0 + x = x.$$

2_+. Для любого элемента $x \in \mathbb{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbb{R}$, называемый *противоположным* к x, такой, что

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

3_+. Операция + ассоциативна, т. е. для любых элементов x, y, z из $\mathbb{R}$ выполнено

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

4_+. Операция + коммутативна, т. е. для любых элементов x, y из $\mathbb{R}$ выполнено

$$x + y = y + x.$$

Если на каком-то множестве G определена операция, удовлетворяющая аксиомам 1_+, 2_+, 3_+, то говорят, что на G задана структура группы или что G есть *группа*. Если операцию называют сложением, то группу называют *аддитивной*. Если, кроме того, известно, что операция коммутативна, т. е. выполнено условие 4_+, то группу называют *коммутативной* или *абелевой*[1].

Итак, аксиомы 1_+—4_+ говорят, что $\mathbb{R}$ есть аддитивная абелева группа.

(II) Аксиомы умножения. Определено отображение (операция умножения)

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbb{R}$, называемый *произведением* x и y, причем так, что выполнены следующие условия:

$1_\bullet$. Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R} \setminus 0$ (называемый в случае умножения *единицей*) такой, что $\forall x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

$2_\bullet$. Для любого элемента $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ имеется элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$, называемый *обратным*, такой, что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

---

[1]Н. Х. Абель (1802—1829) — замечательный норвежский математик, доказавший неразрешимость в радикалах алгебраических уравнений степени выше четвертой.

$3_{\bullet}$. Операция $\bullet$ ассоциативна, т. е. для любых x, y, z из $\mathbb{R}$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

$4_{\bullet}$. Операция $\bullet$ коммутативна, т. е. для любых x, y из $\mathbb{R}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Заметим, что по отношению к операции умножения множество $\mathbb{R} \setminus 0$, как можно проверить, является (*мультипликативной*) группой.

(I, II) Связь сложения и умножения. Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, т. е. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Отметим, что ввиду коммутативности умножения последнее равенство сохранится, если в обеих его частях поменять порядок множителей.

Если на каком-то множестве G действуют две операции, удовлетворяющие всем перечисленным аксиомам, то G называется *алгебраическим полем* или просто *полем*.

(III) Аксиомы порядка. Между элементами $\mathbb{R}$ имеется отношение $\leqslant$, т. е. для элементов x, y из $\mathbb{R}$ установлено, выполняется ли $x \leqslant y$ или нет. При этом должны удовлетворяться следующие условия:

$0_{\leqslant}$. $\forall x \in \mathbb{R}\ (x \leqslant x)$.

$1_{\leqslant}$. $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x) \Rightarrow (x = y)$.

$2_{\leqslant}$. $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant z)$.

$3_{\leqslant}$. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)$.

Отношение $\leqslant$ в $\mathbb{R}$ называется отношением *неравенства*.

Множество, между некоторыми элементами которого имеется отношение, удовлетворяющее аксиомам $0_{\leqslant}$, $1_{\leqslant}$, $2_{\leqslant}$, как известно, называют *частично упорядоченным*, а если, сверх того, выполнена аксиома $3_{\leqslant}$, т. е. любые два элемента множества сравнимы, то множество называется *линейно упорядоченным*.

Таким образом, множество действительных чисел линейно упорядочено отношением неравенства между его элементами.

(I, III) Связь сложения и порядка в $\mathbb{R}$. Если x, y, z — элементы $\mathbb{R}$, то

$$(x \leqslant y) \Rightarrow (x + z \leqslant y + z).$$

(II, III) Связь умножения и порядка в $\mathbb{R}$. Если x, y — элементы $\mathbb{R}$, то

$$(0 \leqslant x) \wedge (0 \leqslant y) \Rightarrow (0 \leqslant x \cdot y).$$

(IV) Аксиома полноты (непрерывности). Если X и Y — непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leqslant y$, то существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant c \leqslant y$ для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$.

Этим завершается список аксиом, выполнение которых на каком бы то ни было множестве $\mathbb{R}$ позволяет считать это множество конкретной реализацией или, как говорят, *моделью действительных чисел*.

Это определение формально не предполагает никакой предварительной информации о числах, и из него, «включив математическую мысль», опять-таки формально мы должны получить уже в качестве теорем остальные свойства действительных чисел. По поводу этого аксиоматического формализма хотелось бы сделать несколько неформальных замечаний.

Представьте себе, что вы не прошли стадию от складывания яблок, кубиков или других именованных величин к сложению абстрактных натуральных чисел; что вы не занимались измерением отрезков и не пришли к рациональным числам; что вам неизвестно великое открытие древних о том, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной и потому ее длина не может быть рациональным числом, т. е. нужны иррациональные числа; что у вас нет возникающего в процессе измерений понятия «больше» («меньше»); что вы не иллюстрируете себе порядок, например, образом числовой прямой. Если бы всего этого предварительно не было, то перечисленный набор аксиом не только не воспринимался бы как определенный итог духовного развития, но, скорее, показался бы по меньшей мере странным и во всяком случае произвольным плодом фантазии.

Относительно любой абстрактной системы аксиом сразу же возникают по крайней мере два вопроса.

Во-первых, совместимы ли эти аксиомы, т. е. существует ли множество, удовлетворяющее всем перечисленным условиям. Это вопрос о *непротиворечивости аксиоматики*.

Во-вторых, однозначно ли данная система аксиом определяет математический объект, т. е., как сказали бы логики, *категорична* ли система аксиом. Однозначность здесь надо понимать следующим образом. Если лица A и B независимо построили свои модели, к примеру, числовых систем $\mathbb{R}_A$ и $\mathbb{R}_B$, удовлетворяющие аксиоматике, то между множествами $\mathbb{R}_A$, $\mathbb{R}_B$ можно установить биективное соответствие, пусть $f\colon \mathbb{R}_A \to \mathbb{R}_B$, сохраняющее арифметические операции и отношение порядка, т. е.

$$\begin{gathered} f(x+y) = f(x) + f(y), \\ f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y), \\ x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y). \end{gathered}$$

С математической точки зрения $\mathbb{R}_A$ и $\mathbb{R}_B$ в таком случае являются всего-навсего различными (совершенно равноправными) реализациями (моделями) действительных чисел (например, $\mathbb{R}_A$ — бесконечные десятичные дроби, а $\mathbb{R}_B$ — точки на числовой прямой). Такие реализации называются *изоморфными*, а отображение f — *изоморфизмом*. Результаты математической деятельности относятся, таким образом, не к индивидуальной реализации, а к каждой модели из класса изоморфных моделей данной аксиоматики.

Мы не будем здесь обсуждать поставленные выше вопросы и ограничимся только информативными ответами на них.

Положительный ответ на вопрос о непротиворечивости аксиоматики всегда носит условный характер. В отношении чисел он выглядит так: исходя из принятой нами аксиоматики теории множеств (см. гл. I, § 4, п. 2), можно построить множество натуральных, затем множество рациональных и, наконец, множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, удовлетворяющее всем перечисленным свойствам.

Вопрос о категоричности системы аксиом действительных чисел имеет положительный ответ. Желающие получат его самостоятельно, решив задачи 23, 24, помещенные в конце следующего параграфа.

2. Некоторые общие алгебраические свойства действительных чисел. Покажем на примерах, как известные свойства чисел получаются из приведенных аксиом.

а. Следствия аксиом сложения

1° *В множестве действительных чисел имеется только один нуль.*

◄ Если 0_1 и 0_2 — нули в $\mathbb{R}$, то по определению нуля

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2. \ ►$$

2° *В множестве действительных чисел у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент.*

◄ Если x_1 и x_2 — элементы, противоположные $x \in \mathbb{R}$, то

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2. \ ►$$

Здесь мы использовали последовательно определение нуля, определение противоположного элемента, ассоциативность сложения, снова определение противоположного элемента и, наконец, снова определение нуля.

3° *Уравнение*

$$a + x = b$$

в $\mathbb{R}$ имеет и притом единственное решение

$$x = b + (-a).$$

◄ Это вытекает из существования и единственности у каждого элемента $a \in \mathbb{R}$ противоположного ему элемента:

$$(a + x = b) \Leftrightarrow ((x + a) + (-a) = b + (-a)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + (a + (-a)) = b + (-a)) \Leftrightarrow (x + 0 = b + (-a)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = b + (-a)). \ ►$$

Выражение $b + (-a)$ записывают также в виде $b - a$. Этой более короткой и привычной записи мы, как правило, и будем придерживаться.

b. Следствия аксиом умножения

1° *В множестве действительных чисел имеется только одна единица.*

2° *Для каждого числа* $x \neq 0$ *имеется только один обратный элемент* x^{-1}.

3° *Уравнение* $a \cdot x = b$ *при* $a \in \mathbb{R} \setminus 0$ *имеет и притом единственное решение* $x = b \cdot a^{-1}$.

Доказательства этих утверждений, разумеется, повторяют доказательства соответствующих утверждений для сложения (с точностью до замены символа и названия операции), поэтому мы их опустим.

c. Следствия аксиомы связи сложения и умножения. Привлекая дополнительно аксиому (I, II), связывающую сложение и умножение, получаем дальнейшие следствия.

1° *Для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

◄ $(x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0) \Rightarrow (x \cdot 0 = x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = 0)$. ►

Отсюда, между прочим, видно, что если $x \in \mathbb{R} \setminus 0$, то $x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus 0$.

2° $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.

◄ Если, например, $y \neq 0$, то из единственности решения уравнения $x \cdot y = 0$ относительно x находим $x = 0 \cdot y^{-1} = 0$. ►

3° *Для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$-x = (-1) \cdot x.$$

◄ $x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, и утверждение следует из единственности противоположного элемента. ►

4° *Для любого числа* $x \in \mathbb{R}$

$$(-1)(-x) = x.$$

◄ Следует из 3° и единственности элемента x, противоположного $-x$. ►

5° *Для любого числа* $x \in \mathbb{R}$

$$(-x)(-x) = x \cdot x.$$

◄ $(-x)(-x) = ((-1) \cdot x)(-x) = (x \cdot (-1))(-x) = x((-1)(-x)) = x \cdot x$. Мы последовательно воспользовались двумя предыдущими утверждениями, а также коммутативностью и ассоциативностью умножения. ►

d. Следствия аксиом порядка. Отметим сначала, что отношение $x \leqslant y$ (читается «x меньше или равно y») записывают также в виде $y \geqslant x$ («y больше или равно x»); отношение $x \leqslant y$ при $x \neq y$ записывают в виде $x < y$ (читается «x меньше y») или в виде $y > x$ («y больше x») и называют *строгим неравенством.*

1° *Для любых* $x, y \in \mathbb{R}$ *всегда имеет место в точности одно из соотношений*:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

◄ Это следует из приведенного определения строгого неравенства и аксиом $1_{\leqslant}$ и $3_{\leqslant}$. ►

2° *Для любых чисел x, y, z из* $\mathbb{R}$

$$(x < y) \wedge (y \leqslant z) \Rightarrow (x < z),$$
$$(x \leqslant y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z).$$

◄ Приведем для примера доказательство последнего утверждения.
По аксиоме $2_{\leqslant}$ транзитивности отношения неравенства имеем

$$(x \leqslant y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \wedge (y \neq z) \Rightarrow (x \leqslant z).$$

Осталось проверить, что $x \neq z$. Но в противном случае

$$(x \leqslant y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (z \leqslant y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (z \leqslant y) \wedge (y \leqslant z) \wedge (y \neq z).$$

В силу аксиомы $1_{\leqslant}$ отсюда следует

$$(y = z) \wedge (y \neq z)$$

— противоречие. ►

e. Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением. Если в дополнение к аксиомам сложения, умножения и порядка использовать аксиомы (I, III), (II, III), связывающие порядок с арифметическими операциями, то можно получить, например, следующие утверждения:

1° *Для любых чисел x, y, z, w из* $\mathbb{R}$

$$(x < y) \Rightarrow (x + z) < (y + z),$$
$$(0 < x) \Rightarrow (-x < 0),$$
$$(x \leqslant y) \wedge (z \leqslant w) \Rightarrow (x + z \leqslant y + w),$$
$$(x \leqslant y) \wedge (z < w) \Rightarrow (x + z < y + w).$$

◄ Проверим первое из этих утверждений.
По определению строгого неравенства и аксиоме (I, III) имеем

$$(x < y) \Rightarrow (x \leqslant y) \Rightarrow (x + z) \leqslant (y + z).$$

Остается проверить, что $x + z \neq y + z$. В самом деле,

$$((x + z) = (y + z)) \Rightarrow (x = (y + z) - z = y + (z - z) = y),$$

что несовместимо с условием $x < y$. ►

2° *Если x, y, z — числа из $\mathbb{R}$, то*

$$(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < xy),$$
$$(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow (0 < xy),$$
$$(x < 0) \wedge (0 < y) \Rightarrow (xy < 0),$$
$$(x < y) \wedge (0 < z) \Rightarrow (xz < yz),$$
$$(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (yz < xz).$$

◄ Проверим первое из этих утверждений. По определению строгого неравенства и аксиоме (II, III)

$$(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 \leqslant x) \wedge (0 \leqslant y) \Rightarrow (0 \leqslant xy).$$

Кроме того, $0 \neq xy$, поскольку, как уже было показано,

$$(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0).$$

Проверим еще, например, и третье утверждение:

$$(x < 0) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < -x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < (-x) \cdot y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (0 < ((-1) \cdot x)y) \Rightarrow (0 < (-1) \cdot (xy)) \Rightarrow (0 < -(xy)) \Rightarrow (xy < 0). \quad ►$$

Читателю предоставляется возможность доказать самостоятельно остальные соотношения, а также проверить, что если в одной из скобок левой части наших утверждений стоит нестрогое неравенство, то следствием его также будет нестрогое неравенство в правой части.

3° $0 < 1$.

◄ $1 \in \mathbb{R} \setminus 0$, т. е. $0 \neq 1$.

Если предположить, что $1 < 0$, то по только что доказанному

$$(1 < 0) \wedge (1 < 0) \Rightarrow (0 < 1 \cdot 1) \Rightarrow (0 < 1).$$

Но мы знаем, что для любой пары чисел $x, y \in \mathbb{R}$ реализуется и притом только одна из возможностей: $x < y$, $x = y$, $x > y$. Поскольку $0 \neq 1$, а предположение $1 < 0$ ведет к несовместимому с ним соотношению $0 < 1$, то остается единственная возможность, указанная в утверждении. ►

4° $(0 < x) \Rightarrow (0 < x^{-1})$ и $(0 < x) \wedge (x < y) \Rightarrow (0 < y^{-1}) \wedge (y^{-1} < x^{-1})$.

◄ Проверим первое из этих утверждений.

Прежде всего, $x^{-1} \neq 0$. Предположив, что $x^{-1} < 0$, получим

$$(x^{-1} < 0) \wedge (0 < x) \Rightarrow (x \cdot x^{-1} < 0) \Rightarrow (1 < 0).$$

Это противоречие завершает доказательство. ►

Напомним, что числа, которые больше нуля, называются *положительными*, а числа меньшие нуля — *отрицательными*.

Таким образом, мы доказали, например, что единица — положительное число, что произведение положительного и отрицательного чисел есть число отрицательное, а величина, обратная положительному числу, также положительна.

3. Аксиома полноты и существование верхней (нижней) грани числового множества

Определение 2. Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}$ *ограничено сверху* (*снизу*), если существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leqslant c$ (соответственно, $c \leqslant x$) для любого $x \in X$.

Число c в этом случае называют *верхней* (соответственно, *нижней*) *границей* множества X или также *мажорантой* (*минорантой*) множества X.

Определение 3. Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется *ограниченным.*

Определение 4. Элемент $a \in X$ называется *наибольшим* или *максимальным* (*наименьшим* или *минимальным*) элементом множества $X \subset \mathbb{R}$, если $x \leqslant a$ (соответственно, $a \leqslant x$) для любого элемента $x \in X$.

Введем обозначения и заодно приведем формальную запись определения максимального и минимального элементов соответственно:

$$(a = \max X) := (a \in X \wedge \forall x \in X \ (x \leqslant a)),$$
$$(a = \min X) := (a \in X \wedge \forall x \in X \ (a \leqslant x)).$$

Наряду с обозначениями $\max X$ (читается «максимум X») и $\min X$ (читается «минимум X»), в том же смысле используются соответственно символы $\max\limits_{x \in X} x$ и $\min\limits_{x \in X} x$.

Из аксиомы $1_{\leqslant}$ порядка сразу следует, что если в числовом множестве есть максимальный (минимальный) элемент, то он только один.

Однако не во всяком, даже ограниченном, множестве имеется максимальный (минимальный) элемент.

Например, множество $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$ имеет минимальный элемент, но, как легко проверить, не имеет максимального элемента.

Определение 5. Наименьшее из чисел, ограничивающих множество $X \subset \mathbb{R}$ сверху, называется *верхней гранью* (или *точной верхней границей*) множества X и обозначается $\sup X$ (читается «супремум X») или $\sup\limits_{x \in X} x$.

Это основное определение настоящего пункта. Итак,

$$(s = \sup X) := \forall x \in X \ ((x \leqslant s) \wedge (\forall s' < s \ \exists x' \in X \ (s' < x'))).$$

В первой скобке, стоящей справа от определяемого понятия, написано, что s ограничивает X сверху; вторая скобка говорит, что s — минимальное из чисел, обладающих этим свойством. Точнее, вторая скобка утверждает, что любое число, меньшее s, уже не является верхней границей X.

Аналогично вводится понятие *нижней грани* (*точной нижней границы*) множества X как наибольшей из нижних границ множества X.

Определение 6.

$$(i = \inf X) := \forall x \in X \ ((i \leqslant x) \wedge (\forall i' > i \ \exists x' \in X \ (x' < i'))).$$

Наряду с обозначением $\inf X$ (читается «инфимум X») для нижней грани X употребляется также обозначение $\inf\limits_{x \in X} x$.

Таким образом, даны следующие определения:

$$\sup X := \min\{c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X \ (x \leqslant c)\},$$
$$\inf X := \max\{c \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X \ (c \leqslant x)\}.$$

Но выше мы говорили, что не всякое множество обладает минимальным или максимальным элементом, поэтому принятые определения верхней и

нижней граней числового множества нуждаются в аргументации, которую доставляет следующая

Лемма (принцип верхней грани). *Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества вещественных чисел имеет и притом единственную верхнюю грань.*

◄ Поскольку единственность минимального элемента числового множества нам уже известна, необходимо лишь убедиться в существовании верхней грани.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — данное подмножество, а $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in X \ (x \leqslant y)\}$ — множество верхних границ X. По условию, $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$. Тогда в силу аксиомы полноты существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall x \in X \ \forall y \in Y \ (x \leqslant c \leqslant y)$. Число c, таким образом, является мажорантой X и минорантой Y. Как мажоранта X, число c является элементом Y, но как миноранта Y, число c является минимальным элементом множества Y. Итак, $c = \min Y = \sup X$. ►

Конечно, аналогично доказывается существование и единственность нижней грани у ограниченного снизу числового множества, т. е. имеет место

Лемма. (X *не пусто и ограничено снизу*) $\Rightarrow (\exists! \ \inf X)$.

На доказательстве мы не останавливаемся.

Теперь вернемся к множеству $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$. В силу доказанной леммы оно должно иметь верхнюю грань. По самому определению множества X и определению верхней грани очевидно, что $\sup X \leqslant 1$.

Для того чтобы доказать, что $\sup X = 1$, таким образом, необходимо проверить, что для любого числа $q < 1$ найдется число $x \in X$ такое, что $q < x$, т. е., попросту, что между q и 1 есть еще числа. Это, конечно, легко доказать и независимо (например, показав, что $q < 2^{-1}(q+1) < 1$), но мы сейчас этого делать не станем, поскольку в следующем параграфе подобные вопросы будут обсуждаться последовательно и подробно.

Что же касается нижней грани, то она всегда совпадает с минимальным элементом множества, если множество таковым обладает. Так что уже из этого соображения в рассматриваемом примере имеем $\inf X = 0$.

Другие, более содержательные примеры использования введенных здесь понятий встретятся уже в следующем параграфе.

§ 2. Важнейшие классы действительных чисел и вычислительные аспекты операций с действительными числами

1. Натуральные числа и принцип математической индукции

a. Определение множества натуральных чисел. Числа вида 1, $1+1$, $(1+1)+1$ и т. д. обозначают соответственно символами 1, 2, 3 и т. д. и называют *натуральными* числами.

Принять такое определение может только тот, кто и без него имеет полное представление о натуральных числах, включая их запись, например, в десятичной системе счисления.

Продолжение какого-то процесса далеко не всегда бывает однозначным, поэтому вездесущее «и так далее» на самом деле требует уточнения, которое доставляет фундаментальный принцип математической индукции.

Определение 1. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если вместе с каждым числом $x \in X$ ему принадлежит также число $x+1$.

Например, $\mathbb{R}$ является индуктивным множеством; множество положительных чисел также является индуктивным множеством.

Пересечение $X = \bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ любого семейства индуктивных множеств X_α, если оно непусто, является индуктивным множеством.

Действительно,

$$\Big(x \in X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\Big) \Rightarrow (\forall \alpha \in A\ (x \in X_\alpha)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\forall \alpha \in A\ ((x+1) \in X_\alpha)) \Rightarrow \Big((x+1) \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = X\Big).$$

Теперь примем следующее

Определение 2. Множеством *натуральных чисел* называется наименьшее индуктивное множество, содержащее 1, т. е. пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число 1.

Множество натуральных чисел обозначают символом $\mathbb{N}$; его элементы называются *натуральными числами*.

С теоретико-множественной точки зрения, быть может, разумнее натуральные числа начинать с 0, т. е. вводить множество натуральных чисел как наименьшее индуктивное множество, содержащее 0, однако нам удобнее начинать нумерацию числом 1.

Следующий фундаментальный и широко используемый принцип является прямым следствием определения множества натуральных чисел.

b. Принцип математической индукции

Если подмножество E множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ таково, что $1 \in E$ и вместе с числом $x \in E$ множеству E принадлежит число $x+1$, то $E = \mathbb{N}$.

Итак,

$$(E \subset \mathbb{N}) \wedge (1 \in E) \wedge (\forall x \in E\ (x \in E \Rightarrow (x+1) \in E)) \Rightarrow E = \mathbb{N}.$$

Проиллюстрируем этот принцип в действии, доказав с его помощью несколько полезных и постоянно в дальнейшем используемых свойств натуральных чисел.

1° *Сумма и произведение натуральных чисел являются натуральными числами.*

◄ Пусть $m, n \in \mathbb{N}$; покажем, что $(m+n) \in \mathbb{N}$. Обозначим через E множество тех натуральных чисел n, для которых $(m+n) \in \mathbb{N}$ при любом $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$1 \in E$, поскольку $(m \in \mathbb{N}) \Rightarrow ((m+1) \in \mathbb{N})$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Если $n \in E$, т. е. $(m+n) \in \mathbb{N}$, то и $(n+1) \in E$, так как $(m+(n+1)) = ((m+n)+1) \in \mathbb{N}$. По принципу индукции $E = \mathbb{N}$, и мы доказали, что сложение не выводит за пределы $\mathbb{N}$.

Аналогично, обозначив через E множество тех натуральных чисел n, для которых $(m \cdot n) \in \mathbb{N}$ при любом $m \in \mathbb{N}$, находим, что $1 \in E$, так как $m \cdot 1 = m$, и если $n \in E$, т. е. $m \cdot n \in \mathbb{N}$, то $m \cdot (n+1) = mn + m$ есть сумма натуральных чисел, которая по доказанному принадлежит $\mathbb{N}$. Таким образом, $(n \in E) \Rightarrow ((n+1) \in E)$ и по принципу индукции $E = \mathbb{N}$. ►

2° Покажем, что $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \neq 1) \Rightarrow ((n-1) \in \mathbb{N})$.

◄ Рассмотрим множество E натуральных чисел вида $n-1$, где n — натуральное число, отличное от 1, и покажем, что $E = \mathbb{N}$.

Поскольку $1 \in \mathbb{N}$, то $2 := (1+1) \in \mathbb{N}$, а значит, $1 = (2-1) \in E$.

Если $m \in E$, то $m = n-1$, где $n \in \mathbb{N}$; тогда $m+1 = (n+1)-1$ и, поскольку $(n+1) \in \mathbb{N}$, имеем $(m+1) \in E$. По принципу индукции заключаем: $E = \mathbb{N}$. ►

3° *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *в множестве* $\{x \in \mathbb{N} \mid n < x\}$ *есть минимальный элемент, причем*

$$\min\{x \in \mathbb{N} \mid n < x\} = n+1.$$

◄ Покажем, что множество E тех $n \in \mathbb{N}$, для которых утверждение справедливо, совпадает с $\mathbb{N}$.

Сначала проверим, что $1 \in E$, т. е.

$$\min\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x\} = 2.$$

Это утверждение тоже будем проверять по принципу индукции. Пусть

$$M = \{x \in \mathbb{N} \mid (x = 1) \vee (2 \leqslant x)\}.$$

По определению M имеем $1 \in M$. Далее, если $x \in M$, то либо $x = 1$ и тогда $x+1 = 2 \in M$, либо $2 \leqslant x$, тогда $2 \leqslant (x+1)$ и снова $(x+1) \in M$. Таким образом, $M = \mathbb{N}$ и, значит, если $(x \neq 1) \wedge (x \in \mathbb{N})$, то $2 \leqslant x$, т. е. действительно $\min\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x\} = 2$. Итак, $1 \in E$.

Покажем теперь, что если $n \in E$, то и $(n+1) \in E$.

Заметим сначала, что если $x \in \{x \in \mathbb{N} \mid n+1 < x\}$, то

$$(x-1) = y \in \{y \in \mathbb{N} \mid n < y\},$$

ибо по доказанному все натуральные числа не меньше 1, поэтому $(n+1 < x) \Rightarrow (1 < x) \Rightarrow (x \neq 1)$, а тогда в силу утверждения 2° $(x-1) = y \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь $n \in E$, т. е. $\min\{y \in \mathbb{N} \mid n < y\} = n+1$. Тогда $x-1 \geqslant y \geqslant n+1$ и $x \geqslant n+2$. Значит,

$$(x \in \{x \in \mathbb{N} \mid n+1 < x\}) \Rightarrow (x \geqslant n+2)$$

и, следовательно, $\min\{x \in \mathbb{N} \mid n+1 < x\} = n+2$, т. е. $(n+1) \in E$.

По принципу индукции $E = \mathbb{N}$, и утверждение 3° доказано. ►

В качестве прямых следствий доказанных утверждений 2° и 3° получаем следующие свойства 4°, 5°, 6° натуральных чисел:

4° $(m \in \mathbb{N}) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (n < m) \Rightarrow (n+1 \leqslant m)$.

5° *Число $(n+1) \in \mathbb{N}$ непосредственно следует в $\mathbb{N}$ за натуральным числом n, т. е. нет натуральных чисел x, удовлетворяющих условию $n < x < n+1$, если $n \in \mathbb{N}$.*

6° *Если $n \in \mathbb{N}$ и $n \neq 1$, то число $(n-1) \in \mathbb{N}$ и $(n-1)$ непосредственно предшествует числу n в $\mathbb{N}$, т. е. нет натуральных чисел x, удовлетворяющих условию $n-1 < x < n$, если $n \in \mathbb{N}$.*

7° Покажем теперь, что *в любом непустом подмножестве множества натуральных чисел имеется минимальный элемент.*

◄ Пусть $M \subset \mathbb{N}$. Если $1 \in M$, то $\min M = 1$, поскольку $\forall n \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant n)$.

Пусть теперь $1 \notin M$, т. е. $1 \in E = \mathbb{N} \setminus M$. В множестве E должно найтись такое натуральное число $n \in E$, что все натуральные числа, не превосходящие n, лежат в E, а $(n+1) \in M$. Если бы такого n не было, то множество $E \subset \mathbb{N}$, содержащее единицу, вместе с $n \in E$ содержало бы и $(n+1)$ и по принципу индукции совпадало бы с $\mathbb{N}$. Последнее невозможно, поскольку $\mathbb{N} \setminus E = M \neq \varnothing$.

Найденное число $(n+1) \in M$ и будет минимальным в M, поскольку между n и $n+1$, как мы видели, уже нет натуральных чисел. ►

2. Рациональные и иррациональные числа

a. Целые числа

Определение 3. Объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным числам, и нуля называется множеством *целых чисел* и обозначается символом $\mathbb{Z}$.

Поскольку, как уже было доказано, сложение и умножение натуральных чисел не выводят за пределы $\mathbb{N}$, то эти же операции над целыми числами не выводят за пределы множества $\mathbb{Z}$.

◄ Действительно, если $m, n \in \mathbb{Z}$, то либо одно из этих чисел равно нулю и тогда сумма $m+n$ равна другому числу, т. е. $(m+n) \in \mathbb{Z}$, а произведение $m \cdot n = 0 \in \mathbb{Z}$, либо оба числа отличны от нуля. В последнем случае либо $m, n \in \mathbb{N}$ и тогда $(m+n) \in N \subset \mathbb{Z}$ и $(m \cdot n) \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, либо $(-m), (-n) \in \mathbb{N}$ и тогда $m \cdot n = ((-1)m)((-1)n) \in \mathbb{N}$, либо $(-m), n \in \mathbb{N}$ и тогда $(-m \cdot n) \in \mathbb{N}$, т. е. $m \cdot n \in \mathbb{Z}$, либо, наконец, $m, -n \in \mathbb{N}$ и тогда $(-m \cdot n) \in \mathbb{N}$ и снова $m \cdot n \in Z$. ►

Таким образом, $\mathbb{Z}$ есть абелева группа по отношению к операции сложения. По отношению к операции умножения множество $\mathbb{Z}$ и даже $\mathbb{Z} \setminus 0$ не является группой, поскольку числа, обратные целым, не лежат в $\mathbb{Z}$ (кроме числа, обратного единице и минус единице).

◄ Действительно, если $m \in \mathbb{Z}$ и $m \neq 0, 1$, то, считая сначала $m \in \mathbb{N}$, имеем $0 < 1 < m$ и, поскольку $m \cdot m^{-1} = 1 > 0$, должно быть $0 < m^{-1} < 1$ (см. в предыдущем параграфе следствия аксиом порядка). Таким образом, $m^{-1} \notin \mathbb{Z}$. Случай, когда m — отрицательное целое число, отличное от -1, непосредственно сводится к уже разобранному. ►

В том случае, когда для чисел $m, n \in \mathbb{Z}$ число $k = m \cdot n^{-1} \in Z$, т. е. когда $m = k \cdot n$, где $k \in \mathbb{Z}$, говорят, что целое число m *делится* на целое число n или *кратно* n, или что n есть *делитель* m.

Делимость целых чисел путем надлежащих изменений знаков, т. е. домножением на -1, если в этом есть необходимость, немедленно приводится к делимости соответствующих натуральных чисел, в рамках которых она и изучается в арифметике.

Напомним без доказательства так называемую основную теорему арифметики, которой при рассмотрении некоторых примеров мы будем пользоваться.

Число $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 1$, называется *простым*, если в $\mathbb{N}$ у него нет делителей, отличных от 1 и p.

Основная теорема арифметики. *Каждое натуральное число допускает и притом единственное (с точностью до порядка сомножителей) представление в виде произведения*

$$n = p_1 \ldots p_k,$$

где $p_1, \ldots, p_k$ *— простые числа.*

Числа $m, n \in \mathbb{Z}$ называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, отличных от 1 и -1.

Из приведенной теоремы, в частности, видно, что если произведение $m \cdot n$ взаимно простых чисел m, n делится на простое число p, то одно из чисел m, n также делится на p.

b. Рациональные числа

Определение 4. Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, называются *рациональными*.

Множество рациональных чисел обозначается знаком $\mathbb{Q}$.

Таким образом, упорядоченная пара (m, n) целых чисел определяет рациональное число $q = m \cdot n^{-1}$, если $n \neq 0$.

Число $q = m \cdot n^{-1}$ записывают также в виде отношения[1] m и n или так называемой рациональной дроби $\frac{m}{n}$.

Правила действий с рациональными числами, относящиеся к такой форме их представления дробями, изучавшиеся в школе, немедленно вытекают из определения рационального числа и аксиом действительных чисел. В частности, «от умножения числителя и знаменателя дроби на одно и то же отличное от нуля целое число величина дроби не изменяется», т. е. дроби $\frac{mk}{nk}$ и $\frac{m}{n}$ представляют одно и то же рациональное число. В самом деле, поскольку $(nk)(k^{-1}n^{-1}) = 1$, т. е. $(n \cdot k)^{-1} = k^{-1} \cdot n^{-1}$, то $(mk)(nk)^{-1} = (mk)(k^{-1}n^{-1}) = m \cdot n^{-1}$.

---

[1]Обозначение $\mathbb{Q}$ — по начальной букве англ. quotient — отношение (от лат. quota — часть, приходящаяся на единицу чего-либо, и quot — сколько).

Таким образом, различные упорядоченные пары (m, n) и (mk, nk) задают одно и то же рациональное число. Следовательно, после соответствующих сокращений любое рациональное число можно задать упорядоченной парой взаимно простых целых чисел.

С другой стороны, если пары (m_1, n_1) и (m_2, n_2) задают одно и то же рациональное число, т. е. $m_1 \cdot n_1^{-1} = m_2 \cdot n_2^{-1}$, то $m_1 n_2 = m_2 n_1$, и если, например, m_1 и n_1 взаимно просты, то в силу упомянутого следствия основной теоремы арифметики $n_2 \cdot n_1^{-1} = m_2 \cdot m_1^{-1} = k \in \mathbb{Z}$.

Мы показали, таким образом, что две упорядоченные пары (m_1, n_1), (m_2, n_2) задают одно и то же рациональное число тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. существует число $k \in \mathbb{Z}$ такое, что, например, $m_2 = km_1$ и $n_2 = kn_1$.

c. Иррациональные числа

Определение 5. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются *иррациональными*.

Классическим примером иррационального действительного числа является $\sqrt{2}$, т. е. число $s \in \mathbb{R}$ такое, что $s > 0$ и $s^2 = 2$. Иррациональность $\sqrt{2}$ в силу теоремы Пифагора эквивалентна утверждению о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

Итак, проверим, во-первых, что *существует положительное действительное число $s \in \mathbb{R}$, квадрат которого равен двум*, и, во-вторых, что $s \notin \mathbb{Q}$.

◄ Пусть X и Y — множества положительных действительных чисел такие, что $\forall x \in X\ (x^2 < 2)$, $\forall y \in Y\ (2 < y^2)$. Поскольку $1 \in X$, а $2 \in Y$, то X и Y — непустые множества.

Далее, поскольку для положительных x и y $(x < y) \Leftrightarrow (x^2 < y^2)$, то любой элемент $x \in X$ меньше любого элемента $y \in Y$. По аксиоме полноты существует число $s \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leqslant s \leqslant y$ для $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$.

Покажем, что $s^2 = 2$.

Если бы было $s^2 < 2$, то, например, квадрат числа $s + \frac{2-s^2}{3s}$, большего чем s, был бы меньше 2. Действительно, ведь $1 \in X$, поэтому $1^2 \leqslant s^2 < 2$ и $0 < \Delta = 2 - s^2 < 1$. Значит,

$$\left(s + \frac{\Delta}{3s}\right)^2 = s^2 + 2 \cdot \frac{\Delta}{3} + \left(\frac{\Delta}{3s}\right)^2 < s^2 + 3 \cdot \frac{\Delta}{3} = s^2 + \Delta = 2.$$

Следовательно, $\left(s + \frac{\Delta}{3s}\right) \in X$, что несовместимо с неравенством $x \leqslant s$ для любого элемента $x \in X$.

Если бы было $2 < s^2$, то, например, квадрат числа $s - \frac{s^2-2}{3s}$, меньшего чем s, был бы больше 2. Действительно, ведь $2 \in Y$, поэтому $2 < s^2 \leqslant 2^2$ или $0 < \Delta = s^2 - 2 < 3$ и $0 < \frac{\Delta}{3} < 1$. Отсюда

$$\left(s - \frac{\Delta}{3s}\right)^2 = s^2 - 2 \cdot \frac{\Delta}{3} + \left(\frac{\Delta}{3s}\right)^2 > s^2 - 3 \cdot \frac{\Delta}{3} = s^2 - \Delta = 2.$$

и мы вступаем в противоречие с тем, что s ограничивает множество Y снизу.

Таким образом, реализуется только одна оставшаяся возможность: $s^2 = 2$.

Покажем, наконец, что $s \notin \mathbb{Q}$. Предположим, что $s \in \mathbb{Q}$, и пусть $\frac{m}{n}$ — несократимое представление s. Тогда $m^2 = 2 \cdot n^2$, следовательно, m^2, а значит, и m делится на 2. Но если $m = 2k$, то $2k^2 = n^2$ и по той же причине n должно делиться на 2, что противоречит несократимости дроби $\frac{m}{n}$. ►

Сейчас мы трудились над тем, чтобы доказать существование иррациональных чисел. Вскоре мы увидим, что в некотором смысле почти все действительные числа иррациональны. Будет показано, что мощность множества иррациональных чисел больше мощности множества всех рациональных чисел и совпадает с мощностью множества всех действительных чисел.

Среди иррациональных чисел выделяют еще так называемые алгебраические иррациональности и трансцендентные числа.

Вещественное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого алгебраического уравнения

$$a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

с рациональными (или, что эквивалентно, с целыми) коэффициентами.

В противном случае число называется *трансцендентным*.

Мы увидим, что мощность множества алгебраических чисел такая же, как мощность множества рациональных чисел, а мощность множества трансцендентных чисел такая же, как мощность всех действительных чисел; поэтому на первый взгляд кажутся парадоксальными и неестественными трудности в предъявлении конкретного трансцендентного числа, точнее, в доказательстве его трансцендентности.

Так, например, только в 1882 г. было доказано, что классическое геометрическое число π является трансцендентным[1], а одна из знаменитых проблем Гильберта[2] состояла в том, чтобы доказать трансцендентность числа α^β, где α — алгебраическое, $(\alpha > 0) \wedge (\alpha \neq 1)$, а β — алгебраическое иррациональное число (например, $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$).

---

[1] π — число, равное в евклидовой геометрии отношению длины окружности к ее диаметру. Отсюда общепринятое с XVIII века после Эйлера обозначение этого числа начальной буквой греческого слова περιφέρεια — периферия (окружность). Трансцендентность π доказана немецким математиком Ф. Линдеманом (1852—1939). Из трансцендентности π, в частности, вытекает невозможность построения циркулем и линейкой отрезка длины π (задача о спрямлении окружности), как и неразрешимость этими средствами древней задачи о квадратуре круга.

[2] Д. Гильберт (1862—1943) — выдающийся немецкий математик, сформулировавший в 1900 г. на Международном конгрессе математиков в Париже двадцать три относящиеся к различным областям математики проблемы, получившие впоследствии название «проблем Гильберта». Вопрос, о котором идет речь в тексте (седьмая проблема Гильберта), был положительно решен в 1934 г. советским математиком А. О. Гельфондом (1906—1968) и немецким математиком Т. Шнайдером (1911—1989).

3. Принцип Архимеда. Переходим к важному как в теоретическом отношении, так и в плане конкретного использования чисел при измерениях и вычислениях принципу Архимеда[1]. Мы докажем его, опираясь на аксиому полноты (точнее, на эквивалентную ей лемму о верхней грани). При другой аксиоматике множества действительных чисел этот фундаментальный принцип часто включают в список аксиом.

Заметим, что утверждения, которые мы до сих пор доказывали о натуральных и целых числах, совершенно не использовали аксиому полноты. Как будет видно из дальнейшего, принцип Архимеда, в сущности, отражает свойства натуральных и целых чисел, связанные с аксиомой полноты. С этих свойств мы и начнем.

1° *В любом непустом ограниченном сверху подмножестве множества натуральных чисел имеется максимальный элемент.*

◄ Если $E \subset \mathbb{N}$ — рассматриваемое множество, то по лемме о верхней грани $\exists!\ \sup E = s \in \mathbb{R}$. По определению верхней грани, в E найдется натуральное число $n \in E$, удовлетворяющее условию $s - 1 < n \leqslant s$. Тогда $n = \max E$, поскольку все натуральные числа, которые больше n, не меньше $n + 1$, а $n + 1 > s$. ►

Следствия. 2° *Множество натуральных чисел не ограничено сверху.*

◄ В противном случае существовало бы максимальное натуральное число. Но $n < n + 1$. ►

3° *В любом непустом ограниченном сверху подмножестве множества целых чисел имеется максимальный элемент.*

◄ Можно дословно повторить доказательство утверждения 1°, заменяя $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$. ►

4° *В любом непустом ограниченном снизу подмножестве множества целых чисел имеется минимальный элемент.*

◄ Можно, например, повторить доказательство утверждения 1°, заменяя $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$ и используя вместо леммы о верхней грани лемму о существовании нижней грани у ограниченного снизу числового множества.

Можно также перейти к противоположным числам («поменять знаки») и воспользоваться уже доказанным в 3°. ►

5° *Множество целых чисел не ограничено ни сверху, ни снизу.*

◄ Вытекает из 3° и 4° или прямо из 2°. ►

Теперь сформулируем

6° Принцип Архимеда. *Если фиксировать произвольное положительное число h, то для любого действительного числа x найдется и притом единственное целое число k такое, что $(k-1)h \leqslant x < kh$.*

◄ Поскольку $\mathbb{Z}$ не ограничено сверху, множество $\{n \in \mathbb{Z} \mid x/h < n\}$ — непустое ограниченное снизу подмножество множества целых чисел. Тогда

---

[1] Архимед (287—212 гг. до н. э.) — гениальный греческий ученый, про которого один из основоположников анализа Лейбниц в свое время сказал: «Изучая труды Архимеда, перестаешь удивляться успехам современных математиков».

(см. 4°) в нем есть минимальный элемент k, т. е. $(k-1)\leqslant x/h<k$. Поскольку $h>0$, эти неравенства эквивалентны приведенным в формулировке принципа Архимеда. Единственность $k\in\mathbb{Z}$, удовлетворяющего двум последним неравенствам, следует из единственности минимального элемента числового множества (см. § 1, п. 3). ►

Некоторые следствия:

7° *Для любого положительного числа ε существует натуральное число n такое, что* $0<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

◄ По принципу Архимеда найдется $n\in\mathbb{Z}$ такое, что $1<\varepsilon\cdot n$. Поскольку $0<1$ и $0<\varepsilon$, имеем $0<n$. Таким образом, $n\in\mathbb{N}$ и $0<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$. ►

8° *Если число $x\in\mathbb{R}$ таково, что $0\leqslant x$ и для любого $n\in\mathbb{N}$ выполнено $x<\dfrac{1}{n}$, то $x=0$.*

◄ Соотношение $0<x$ невозможно в силу утверждения 7°. ►

9° *Для любых чисел $a, b\in\mathbb{R}$ таких, что $a<b$, найдется рациональное число $r\in\mathbb{Q}$ такое, что $a<r<b$.*

◄ Учитывая 7°, подберем $n\in\mathbb{N}$ так, что $0<\dfrac{1}{n}<b-a$. По принципу Архимеда найдем такое число $m\in\mathbb{Z}$, что $\dfrac{m-1}{n}\leqslant a<\dfrac{m}{n}$. Тогда $\dfrac{m}{n}<b$, ибо в противном случае мы имели бы $\dfrac{m-1}{n}\leqslant a<b\leqslant\dfrac{m}{n}$, откуда следовало бы, что $\dfrac{1}{n}\geqslant b-a$. Таким образом, $r=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ и $a<\dfrac{m}{n}<b$. ►

10° *Для любого числа $x\in\mathbb{R}$ существует и притом единственное целое число $k\in\mathbb{Z}$ такое, что $k\leqslant x<k+1$.*

◄ Это непосредственно вытекает из принципа Архимеда. ►

Указанное число k обозначается $[x]$ и называется *целой частью числа* x. Величина $\{x\}:=x-[x]$ называется *дробной частью числа* x. Итак, $x=[x]+$ $+\{x\}$, причем $\{x\}\geqslant 0$.

4. Геометрическая интерпретация множества действительных чисел и вычислительные аспекты операций с действительными числами

а. Числовая ось. По отношению к действительным числам часто используется образный геометрический язык, связанный с тем обстоятельством, что, как в общих чертах известно из школы, в силу аксиом геометрии между точками прямой $\mathbb{L}$ и множеством $\mathbb{R}$ вещественных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие $f:\mathbb{L}\to\mathbb{R}$. Причем это соответствие связано с движениями прямой. А именно, если T — параллельный перенос прямой $\mathbb{L}$ по себе, то существует число $t\in\mathbb{R}$ (зависящее только от T) такое, что $f(T(x))=f(x)+t$ для любой точки $x\in\mathbb{L}$.

Число $f(x)$, соответствующее точке $x\in\mathbb{L}$, называется *координатой* точки x. Ввиду взаимной однозначности отображения $f:\mathbb{L}\to\mathbb{R}$ координату точки часто называют просто точкой. Например, вместо фразы «отметим точку, координата которой 1», говорят «отметим точку 1». Прямую $\mathbb{L}$ при наличии указанного соответствия $f:\mathbb{L}\to\mathbb{R}$ называют *координатной осью, числовой*

осью или *числовой прямой*. Ввиду биективности f само множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел также часто называют числовой прямой, а его элементы — точками числовой прямой.

Как отмечалось, биективное отображение $f: \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, задающее на $\mathbb{L}$ координаты, таково, что при параллельном переносе T координаты образов точек прямой $\mathbb{L}$ отличаются от координат самих точек на одну и ту же величину $t \in \mathbb{R}$. Ввиду этого f полностью определяется указанием точки с координатой 0 и точки с координатой 1 или, короче, точки нуль, называемой *началом координат*, и точки 1. Отрезок, определяемый этими точками, называется *единичным отрезком*. Направление, определяемое лучом с вершиной 0, содержащим точку 1, называется положительным, а движение в этом направлении (от 0 к 1) — движением слева направо. В соответствии с этим соглашением 1 лежит правее 0, а 0 — левее 1.

При параллельном переносе T, переводящем начало координат x_0 в точку $x_1 = T(x_0)$ с координатой 1, координаты образов всех точек на единицу больше координат прообразов, поэтому мы находим точку $x_2 = T(x_1)$ с координатой 2, точку $x_3 = T(x_2)$ координатой 3, …, точку $x_{n+1} = T(x_n)$ с координатой $n+1$, а также точку $x_{-1} = T^{-1}(x_0)$ с координатой -1, …, точку $x_{-n-1} = T^{-1}(x_{-n})$ с координатой $-n-1$. Таким образом, получаем все точки с целыми координатами $m \in \mathbb{Z}$.

Умея удваивать, утраивать, … единичный отрезок, по теореме Фалеса его же можно разбить на соответствующее число n конгруэнтных отрезков. Беря тот из них, одним концом которого является начало координат, для координаты x другого конца имеем уравнение $n \cdot x = 1$, т. е. $x = 1/n$. Отсюда находим все точки с рациональными координатами $m/n \in \mathbb{Q}$.

Но останутся еще точки $\mathbb{L}$, ведь есть же отрезки, несоизмеримые с единичным. Каждая такая точка (как и любая другая точка прямой) разбивает прямую на два луча, на каждом из которых есть точки с целыми (рациональными) координатами (это следствие исходного геометрического принципа Архимеда). Таким образам, точка производит разбиение или, как говорят, *сечение* $\mathbb{Q}$ на два непустых множества X и Y, отвечающие рациональным точкам (точкам с рациональными координатами) левого и правого лучей. По аксиоме полноты найдется число c, разделяющее X и Y, т. е. $x \leqslant c \leqslant y$ для $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$. Поскольку $X \cup Y = \mathbb{Q}$, то $\sup X = s = i = \inf Y$, ибо в противном случае $s < i$ и между s и i нашлось бы рациональное число, не лежащее ни в X, ни в Y. Таким образом, $s = i = c$. Это однозначно определенное число c и ставится в соответствие указанной точке прямой.

Описанное сопоставление точкам прямой их координат доставляет наглядную модель как отношению порядка в $\mathbb{R}$ (отсюда и термин «линейная упорядоченность»), так и аксиоме полноты, или непрерывности $\mathbb{R}$, которая на геометрическом языке означает, что в прямой $\mathbb{L}$ «нет дыр», разбивающих ее на два не имеющих общих точек куска (такое разбиение осуществляется некоторой точкой прямой $\mathbb{L}$).

Мы не станем вдаваться в дальнейшие детали конструкции отображения $f : \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, поскольку геометрическую интерпретацию множества действительных чисел мы будем привлекать исключительно для наглядности и для возможного подключения весьма полезной геометрической интуиции читателя. Что же касается формальных доказательств, то, как и до сих пор, они будут опираться либо на тот набор фактов, который мы уже получили из аксиоматики действительных чисел, либо непосредственно на эту аксиоматику.

Геометрический же язык мы будем использовать постоянно.

Введем следующие обозначения и названия для перечисленных ниже числовых множеств:

$]a, b[\ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ — интервал ab;

$[a, b] \ := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок ab;

$]a, b] \ := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ — полуинтервал ab, содержащий конец b;

$[a, b[\ := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ — полуинтервал ab, содержащий конец a.

Определение 6. Интервалы, отрезки и полуинтервалы называются *числовыми промежутками* или просто *промежутками*. Числа, определяющие промежуток, называются его концами.

Величина $b - a$ называется *длиной* промежутка ab. Если I — некоторый промежуток, то длину его мы будем обозначать через $|I|$ (происхождение такого обозначения вскоре станет понятным).

Множества

$$
\begin{aligned}
]a, +\infty[\ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},\\
]-\infty, b[\ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\},\\
[a, +\infty[\ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\},\\
]-\infty, b] \ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\},
\end{aligned}
$$

а также $]-\infty, +\infty[:= \mathbb{R}$, принято называть *неограниченными промежутками*.

В соответствии с таким употреблением символов $+\infty$ (читается «плюс бесконечность») и $-\infty$ (читается «минус бесконечность») для обозначения неограниченности числового множества X сверху (снизу), принято писать $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$).

Определение 7. Интервал, содержащий точку $x \in \mathbb{R}$, будем называть *окрестностью* этой точки.

В частности, при $\delta > 0$ интервал $]x - \delta, x + \delta[$ называется *δ-окрестностью* точки x. Его длина 2δ.

Расстояние между числами $x, y \in \mathbb{R}$ измеряется длиной промежутка, концами которого они являются.

Чтобы не разбираться при этом, «где лево, а где право», т. е. $x < y$ или $y < x$, и чему равна длина, $y - x$ или $x - y$, можно использовать полезную

функцию

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -x & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

называемую *модулем* или *абсолютной величиной* числа.

Определение 8. *Расстоянием* между $x, y \in \mathbb{R}$ называется величина $|x-y|$.

Расстояние неотрицательно и равно нулю только при совпадении x и y; расстояние от x до y и от y до x одно и то же, ибо $|x-y| = |y-x|$; наконец, если $z \in \mathbb{R}$, то $|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$, т. е. имеет место так называемое неравенство треугольника.

Неравенство треугольника следует из свойства абсолютной величины числа, которое также называется неравенством треугольника (ибо получается из предыдущего при $z=0$ и замене y на $-y$). А именно, *для любых чисел x, y справедливо неравенство*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|,$$

причем равенство в нем имеет место в том и только в том случае, когда оба числа x, y неотрицательны или неположительны.

◀ Если $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, то $0 \leqslant x+y$, $|x+y| = x+y$, $|x| = x$, $|y| = y$ и равенство установлено.

Если $x \leqslant 0$ и $y \leqslant 0$, то $x+y \leqslant 0$, $|x+y| = -(x+y) = -x-y$, $|x| = -x$, $|y| = -y$ и опять равенство имеет место.

Пусть теперь одно из чисел отрицательно, а другое положительно, например, $x < 0 < y$. Тогда либо $x < x+y \leqslant 0$, либо $0 \leqslant x+y < y$. В первом случае $|x+y| < |x|$, во втором $|x+y| < |y|$, т. е. в обоих случаях $|x+y| < |x| + |y|$. ▶

Используя принцип индукции, можно проверить, что

$$|x_1 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + \ldots + |x_n|,$$

причем равенство имеет место, если и только если все числа $x_1, \ldots, x_n$ одновременно неотрицательны или одновременно неположительны.

Число $\frac{a+b}{2}$ часто называется *серединой* или *центром* промежутка с концами a, b, поскольку оно равноудалено от концов промежутка. В частности, точка $x \in \mathbb{R}$ является центром своей δ-окрестности $]x-\delta, x+\delta[$ и все точки δ-окрестности удалены от x меньше чем на δ.

b. Задание числа последовательностью приближений. Измеряя реальную физическую величину, мы получаем число, которое, как правило, меняется при повторном измерении, особенно если изменить инструмент или метод измерения. Таким образом, результатом измерения обычно является некоторое приближенное значение искомой величины. Качество или точность измерения характеризуется, например, величиной возможного уклонения истинного значения величины от ее значения, полученного в резуль-

тате измерения. При этом может случиться, что точное значение величины (если оно в принципе существует) мы так никогда и не предъявим. Встав, однако, на более конструктивную позицию, можно (или следует) считать, что мы вполне знаем искомую величину, если в состоянии измерить ее с любой наперед заданной точностью. Такая позиция означает отождествление числа с последовательностью[1] все более точных его приближений числами, получаемыми при измерении. Но всякое измерение есть конечная совокупность сравнений с некоторым эталоном или с соизмеримой с ним его частью, поэтому результат измерения должен выражаться натуральными, целыми или, более общо, рациональными числами. Значит, последовательностями рациональных чисел в принципе можно описать все множество вещественных чисел, построив после должного анализа математическую копию или, лучше сказать, модель того, что делают с числами люди, не подозревающие об их аксиоматическом описании. А они вместо сложения и умножения неизвестных им измеряемых величин складывают и умножают их приближенные значения (не всегда, правда, умея сказать, какое отношение имеет результат таких действий к тому, что получилось бы, если бы эти действия производились с точными значениями величин; ниже мы обсудим этот вопрос).

Отождествив число с последовательностью его приближенных значений, мы, таким образом, желая, например, сложить два числа, должны складывать последовательности их приближенных значений. Получающуюся при этом новую последовательность чисел надо считать новым числом, называемым суммой первых двух. Но число ли это? Деликатность вопроса состоит в том, что не каждая случайным образом построенная последовательность служит последовательностью сколь угодно точных приближений некоторой величины. То есть необходимо еще научиться по самой последовательности узнавать, представляет она некоторое число или нет. Другой вопрос, который возникает при попытке математического копирования операций с приближенными числами, состоит в том, что разные последовательности могут быть последовательностями приближений одной и той же величины. Соотношение между последовательностями приближений, определяющими число, и самими числами примерно такое же, как между точкой на карте и указкой, которая указывает нам эту точку. Положение указки определяет точку, но точка определяет положение только конца указки, не мешая взять указку по-другому, поудобнее.

Этим вопросам дал точное описание и реализовал всю намеченную здесь в общих чертах программу построения модели вещественных чисел еще

[1]Если n — номер измерения, а x_n — результат измерения, то соответствие $n \mapsto x_n$ есть не что иное, как функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ натурального аргумента, т. е., по определению, *последовательность* (в данном случае последовательность чисел). Подробному изучению числовых последовательностей посвящен § 1 гл. III.

О. Коши[1]. Надо надеяться, что после изучения теории пределов вы будете в состоянии самостоятельно повторить эти конструкции Коши.

Сказанное до сих пор, разумеется, не претендует на математическую строгость. Цель этого неформального отступления — обратить внимание читателя на принципиальную возможность одновременного существования различных естественных моделей действительных чисел; я пытался также дать некоторое представление об отношении чисел к тому, что нас окружает, и пояснить фундаментальную роль натуральных и рациональных чисел; наконец, мне хотелось показать естественность и необходимость приближенных вычислений.

Последующая часть настоящего пункта посвящена используемым в дальнейшем и представляющим самостоятельный интерес простым, но важным оценкам погрешностей, возникающих при арифметических операциях над приближенными величинами.

Переходим к точным формулировкам.

Определение 9. Если x — точное значение некоторой величины, а $\tilde{x}$ — известное приближенное значение той же величины, то числа

$$\Delta(\tilde{x}) := |x - \tilde{x}|,$$
$$\delta(\tilde{x}) := \frac{\Delta(\tilde{x})}{|\tilde{x}|}$$

называются соответственно *абсолютной* и *относительной погрешностью приближения* $\tilde{x}$. Относительная погрешность при $\tilde{x} = 0$ не определена.

Поскольку значение x неизвестно, значения $\Delta(\tilde{x})$ и $\delta(\tilde{x})$ также неизвестны. Однако обычно бывают известны оценки сверху $\Delta(\tilde{x}) < \Delta$, $\delta(\tilde{x}) < \delta$ этих величин. В этом случае говорят, что абсолютная или относительная погрешность приближения $\tilde{x}$ не превосходит Δ или δ соответственно. На практике приходится иметь дело только с оценками погрешностей, поэтому сами величины Δ и δ часто называют *абсолютной* и *относительной* погрешностями приближения, но мы этого делать не будем.

Запись $x = \tilde{x} \pm \Delta$ означает, что $\tilde{x} - \Delta \leqslant x \leqslant \tilde{x} + \Delta$.

Например,

гравитационная постоянная	$G = (6{,}67259 \pm 0{,}00085) \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2,
скорость света в вакууме	$c = 299792458$ м/с (точно),
постоянная Планка	$h = (6{,}6260755 \pm 0{,}0000040) \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с,
заряд электрона	$e = (1{,}60217733 \pm 0{,}00000049) \cdot 10^{-19}$ Кл,
масса покоя электрона	$m_e = (9{,}1093897 \pm 0{,}0000054) \cdot 10^{-31}$ кг.

Основным показателем точности измерения является величина относительной погрешности приближения, обычно выражаемая в процентах.

---

[1] О. Коши (1789—1857) — французский математик, один из наиболее активных творцов современного языка и аппарата классического анализа.

Так, в приведенных примерах относительные погрешности не превосходят соответственно

$$13\cdot 10^{-5};\quad 0;\quad 6\cdot 10^{-7};\quad 31\cdot 10^{-8};\quad 6\cdot 10^{-7}$$

или, в процентах от результата измерения,

$$13\cdot 10^{-3}\,\%;\quad 0\,\%;\quad 6\cdot 10^{-5}\,\%;\quad 31\cdot 10^{-6}\,\%;\quad 6\cdot 10^{-5}\,\%.$$

Оценим теперь погрешности, возникающие при арифметических операциях с приближенными величинами.

Утверждение. *Если*

$$|x-\tilde{x}|=\Delta(\tilde{x}),\quad |y-\tilde{y}|=\Delta(\tilde{y}),$$

то

$$\Delta(\tilde{x}+\tilde{y}):=|(x+y)-(\tilde{x}+\tilde{y})|\leqslant \Delta(\tilde{x})+\Delta(\tilde{y}), \tag{1}$$

$$\Delta(\tilde{x}\cdot\tilde{y}):=|x\cdot y-\tilde{x}\cdot\tilde{y}|\leqslant |\tilde{x}|\Delta(\tilde{y})+|\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})+\Delta(\tilde{x})\cdot\Delta(\tilde{y}); \tag{2}$$

если, кроме того,

$$y\neq 0,\quad \tilde{y}\neq 0\quad \text{и}\quad \delta(\tilde{y})=\frac{\Delta(\tilde{y})}{|\tilde{y}|}<1,$$

то

$$\Delta\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right):=\left|\frac{x}{y}-\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|\leqslant \frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y})+|\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2}\cdot\frac{1}{1-\delta(\tilde{y})}. \tag{3}$$

◄ Пусть $x=\tilde{x}+\alpha$, $y=\tilde{y}+\beta$. Тогда

$$\Delta(\tilde{x}+\tilde{y})=|(x+y)-(\tilde{x}+\tilde{y})|=|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|=\Delta(\tilde{x})+\Delta(\tilde{y}),$$

$$\Delta(\tilde{x}\cdot\tilde{y})=|xy-\tilde{x}\tilde{y}|=|(\tilde{x}+\alpha)(\tilde{y}+\beta)-\tilde{x}\tilde{y}|=|\tilde{x}\beta+\tilde{y}\alpha+\alpha\beta|\leqslant$$
$$\leqslant|\tilde{x}||\beta|+|\tilde{y}||\alpha|+|\alpha\beta|=\Delta(\tilde{x})\cdot\Delta(\tilde{y}),$$

$$\Delta\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right)=\left|\frac{x}{y}-\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right|=\left|\frac{x\tilde{y}-y\tilde{x}}{y\tilde{y}}\right|=\left|\frac{(\tilde{x}+\alpha)\tilde{y}-(\tilde{y}+\beta)\tilde{x}}{\tilde{y}^2}\right|\cdot\left|\frac{1}{1+\beta/\tilde{y}}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|\tilde{x}||\beta|+|\tilde{y}||\alpha|}{\tilde{y}^2}\cdot\frac{1}{1-\delta(\tilde{y})}=\frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y})+|\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2}\cdot\frac{1}{1-\delta(\tilde{y})}.\ ►$$

Из полученных оценок абсолютных погрешностей вытекают следующие оценки относительных погрешностей:

$$\delta(\tilde{x}+\tilde{y})\leqslant\frac{\Delta(\tilde{x})+\Delta(\tilde{y})}{|\tilde{x}+\tilde{y}|}, \tag{1'}$$

$$\delta(\tilde{x}\cdot\tilde{y})\leqslant\delta(\tilde{x})+\delta(\tilde{y})+\delta(\tilde{x})\cdot\delta(\tilde{y}), \tag{2'}$$

$$\delta\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right)\leqslant\frac{\delta(\tilde{x})+\delta(\tilde{y})}{1-\delta(\tilde{y})}. \tag{3'}$$

На практике, при работе с достаточно хорошими приближениями, $\Delta(\tilde{x})\cdot\Delta(\tilde{y})\approx 0$, $\delta(\tilde{x})\cdot\delta(\tilde{y})\approx 0$, $1-\delta(\tilde{y})\approx 1$, поэтому пользуются соответствующими упрощенными, полезными, но формально неверными вариантами

формул (2), (3), (2′), (3′):

$$\Delta(\tilde{x}\cdot\tilde{y}) \leqslant |\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x}),$$

$$\Delta\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right) \leqslant \frac{|\tilde{x}|\Delta(\tilde{y}) + |\tilde{y}|\Delta(\tilde{x})}{\tilde{y}^2},$$

$$\delta(\tilde{x}\cdot\tilde{y}) \leqslant \delta(\tilde{x}) + \delta(\tilde{y}),$$

$$\delta\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right) \leqslant \delta(\tilde{x}) + \delta(\tilde{y}).$$

Формулы (3), (3′) показывают, что надо избегать деления на близкие к нулю или довольно грубые приближения, когда $\tilde{y}$ или $1-\delta(\tilde{y})$ малы по абсолютной величине.

Формула (1′) предостерегает от сложения приближенных величин, если они близки по абсолютной величине и противоположны по знаку, поскольку тогда $|\tilde{x}+\tilde{y}|$ близко к нулю.

Во всех этих случаях погрешности могут резко возрасти.

Например, пусть ваш рост дважды измерили некоторым прибором. Точность измерения ±0,5 см. Перед вторым измерением вам под ноги подложили лист бумаги. Тем не менее может случиться, что результаты измерений будут такими: $H_1 = (200 \pm 0{,}5)$ см и $H_2 = (199{,}8 \pm 0{,}5)$ см соответственно.

Таким образом, бессмысленно искать толщину бумаги в виде разности $H_2 - H_1$, из которой только следует, что толщина не больше 0,8 см, что, конечно, очень грубо отражает (если это вообще можно назвать «отражает») истинное положение вещей.

Стоит, однако, обратить внимание и на другой, более оптимистичный вычислительный эффект, благодаря которому грубыми приборами удается провести сравнительно тонкие измерения. Например, если на том приборе, где только что измерили ваш рост, измерили высоту пачки в 1000 листов той же бумаги и получили результат $(20 \pm 0{,}5)$ см, то толщина одного листа $(0{,}02 \pm 0{,}0005)$ см $= (0{,}2 \pm 0{,}005)$ мм, что вытекает из формулы (1).

То есть с абсолютной погрешностью, не превышающей 0,005 мм, толщина одного листа равна 0,2 мм. Относительная погрешность этого измерения не превышает 0,025 или 2,5 %.

Эту идею можно развить и предложить, например, способ выделения слабого периодического сигнала из превышающих его случайных радиопомех, называемых обычно белым шумом.

c. Позиционная система счисления. Выше говорилось о том, что каждое число можно задать последовательностью приближающих его рациональных чисел.

Теперь напомним важный в вычислительном отношении метод, который позволяет единообразно для каждого действительного числа строить такую последовательность рациональных приближений. Этот метод ведет к позиционной системе счисления.

Лемма. *Если фиксировать число $q > 1$, то для любого положительного числа $x \in \mathbb{R}$ найдется и притом единственное целое число $k \in \mathbb{Z}$ такое, что*

$$q^{k-1} \leqslant x < q^k.$$

◄ Проверим сначала, что множество чисел вида q^k, $k \in \mathbb{N}$, не ограничено сверху. В противном случае оно имело бы верхнюю грань s и по определению верхней грани нашлось бы натуральное число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{s}{q} < q^m \leqslant s$. Но тогда $s < q^{m+1}$ и s — не верхняя грань нашего множества.

Поскольку $1 < q$, то $q^m < q^n$ при $m < n$, $m, n \in \mathbb{Z}$, поэтому мы заодно показали, что для любого числа $c \in \mathbb{R}$ найдется такое натуральное число $N \in \mathbb{N}$, что при любом натуральном $n > N$ будет $c < q^n$.

Отсюда вытекает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $M \in \mathbb{N}$ такое, что при всех натуральных $m > M$ будет $\frac{1}{q^m} < \varepsilon$.

Действительно, достаточно положить $c = \frac{1}{\varepsilon}$, а $N = M$; тогда $\frac{1}{\varepsilon} < q^m$ при $m > M$.

Итак, множество целых чисел $m \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих неравенству $x < q^m$ при $x > 0$, ограничено снизу. Тогда в нем есть минимальный элемент k, который, очевидно, и будет искомым, так как для него $q^{k-1} \leqslant x < q^k$.

Единственность такого целого числа k следует из того, что если $m, n \in \mathbb{Z}$ и, например, $m < n$, то $m \leqslant n - 1$, и поэтому если $q > 1$, то $q^m \leqslant q^{n-1}$.

Действительно, из этого замечания видно, что неравенства $q^{m-1} \leqslant x < q^m$ и $q^{n-1} \leqslant x < q^n$, из которых следует $q^{n-1} \leqslant x < q^m$, несовместны при $m \neq n$. ►

Воспользуемся этой леммой в следующей конструкции.

Фиксируем $q > 1$ и возьмем произвольное положительное число $x \in \mathbb{R}$.

По лемме найдем единственное число $p \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$q^p \leqslant x < q^{p+1}. \tag{1}$$

Определение 10. Число p, удовлетворяющее соотношению (1), называется *порядком числа x по основанию q* или (при фиксированном q) просто *порядком числа x*.

По принципу Архимеда найдем единственное натуральное число $\alpha_p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\alpha_p q^p \leqslant x < \alpha_p q^p + q^p. \tag{2}$$

Учитывая (1), можно утверждать, что $\alpha_p \in \{1, \ldots, q-1\}$.

Все дальнейшие шаги нашего построения будут повторять тот шаг, который мы сейчас сделаем, исходя из соотношения (2).

Из соотношения (2) и принципа Архимеда следует, что существует и притом единственное число $\alpha_{p-1} \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ такое, что

$$\alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} \leqslant x < \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + q^{p-1}. \tag{3}$$

Если уже сделано n таких шагов и получено, что

$$\alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-n} q^{p-n} \leqslant \\ \leqslant x < \alpha_p q^p + \alpha_{p-1} q^{p-1} + \ldots + \alpha_{p-n} q^{p-n} + q^{p-n},$$

то по принципу Архимеда найдется единственное число $\alpha_{p-n-1} \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ такое, что

$$\alpha_p q^p + \ldots + \alpha_{p-n} q^{p-n} + \alpha_{p-n-1} q^{p-n-1} \leqslant \\ \leqslant x < \alpha_p q^p + \ldots + \alpha_{p-n} q^{p-n} + \alpha_{p-n-1} q^{p-n-1} + q^{p-n-1}.$$

Таким образом, указан алгоритм, по которому положительному числу x однозначно ставится в соответствие последовательность чисел $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots, \alpha_{p-n}, \ldots$ из множества $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ или, менее формально, последовательность рациональных чисел r_n специального вида:

$$r_n = \alpha_p q^p + \ldots + \alpha_{p-n} q^{p-n}, \tag{4}$$

причем так, что

$$r_n \leqslant x < r_n + \frac{1}{q^{n-p}}. \tag{5}$$

Иными словами, мы строим всё лучшие приближения снизу и сверху для числа x посредством специальной последовательности рациональных чисел (4). Символ $\alpha_p \ldots \alpha_{p-n} \ldots$ есть шифр всей последовательности $\{r_n\}$. Чтобы по нему можно было восстановить последовательность $\{r_n\}$, необходимо как-то отметить величину p — порядок числа x.

Условились при $p \geqslant 0$ после α_0 ставить точку или запятую; при $p < 0$ слева от α_p дописывать $|p|$ нулей и после крайнего левого ставить точку или запятую (напомним, что $\alpha_p \neq 0$).

Например, при $q = 10$

$$123{,}45 := 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2},$$
$$0{,}00123 := 1 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5};$$

при $q = 2$

$$1000{,}001 := 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^{-3}.$$

Таким образом, значение цифры в символе $\alpha_p \ldots \alpha_{p-n} \ldots$ зависит от позиции, которую она занимает по отношению к точке или запятой.

После этого соглашения символ $\alpha_p \ldots \alpha_0, \ldots$ позволяет однозначно восстановить всю последовательность приближений.

Из неравенств (5) видно (проверьте!), что двум различным числам x, x' отвечают различные последовательности $\{r_n\}$, $\{r'_n\}$, а значит, и разные символы $\alpha_p \ldots \alpha_0, \ldots$, $\alpha'_p \ldots \alpha'_0, \ldots$

Теперь решим вопрос, всякому ли символу вида $\alpha_p \ldots \alpha_0, \ldots$ отвечает некоторое число $x \in \mathbb{R}$. Оказывается, нет.

Заметим, что в силу описанного алгоритма последовательного получения чисел $\alpha_{p-n} \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ не может случиться так, что все они, начиная с некоторого, будут одинаковы и равны $q-1$.

Действительно, если при $n > k$

$$r_n = \alpha_p q^p + \ldots + \alpha_{p-k} q^{p-k} + (q-1)q^{p-k-1} + \ldots + (q-1)q^{p-n},$$

т. е.

$$r_n = r_k + \frac{1}{q^{k-p}} - \frac{1}{q^{n-p}}, \tag{6}$$

то в силу (5)

$$r_k + \frac{1}{q^{k-p}} - \frac{1}{q^{n-p}} \leqslant x < r_k + \frac{1}{q^{k-p}}.$$

Тогда для любого $n > k$

$$0 < r_k + \frac{1}{q^{k-p}} - x < \frac{1}{q^{n-p}},$$

что, как мы знаем из доказанной выше леммы, невозможно.

Полезно также отметить, что если среди чисел $\alpha_{p-k-1}, \ldots, \alpha_{p-n}$ хотя бы одно меньше $q-1$, то вместо (6) можно написать, что

$$r_n < r_k + \frac{1}{q^{k-p}} - \frac{1}{q^{n-p}}$$

или, что то же самое,

$$r_n + \frac{1}{q^{n-p}} < r_k + \frac{1}{q^{k-p}}. \tag{7}$$

Теперь мы в состоянии доказать, что любой символ $\alpha_n \ldots \alpha_0, \ldots$, составленный из чисел $\alpha_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, в котором как угодно далеко встречаются числа, отличные от $q-1$, соответствует некоторому числу $x \geqslant 0$.

В самом деле, по символу $\alpha_p \ldots \alpha_{p-n} \ldots$ построим последовательность $\{r_n\}$ вида (4). В силу того, что $r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_n \leqslant \ldots$, а также учитывая (6) и (7), имеем

$$r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant \ldots < \ldots \leqslant r_n + \frac{1}{q^{n-p}} \leqslant \ldots \leqslant r_1 + \frac{1}{q^{1-p}} \leqslant r_0 + \frac{1}{q^{-p}}. \tag{8}$$

Знак строгого неравенства в последнем соотношении следует понимать так: любой элемент левой последовательности меньше любого элемента правой последовательности. Это вытекает из (7).

Если теперь взять $x = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n \quad (= \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (r_n + q^{-(n-p)}))$, то последовательность r_n будет удовлетворять условиям (4), (5), т. е. символ $\alpha_p \ldots \alpha_{p-n} \ldots$ отвечает найденному числу $x \in \mathbb{R}$.

Итак, каждому положительному числу $x \in \mathbb{R}$ мы взаимно однозначно сопоставили символ вида $\alpha_p \ldots \alpha_0, \ldots$, если $p \geqslant 0$, или $\underbrace{0{,}0\ldots0}_{|p| \text{ нулей}} \alpha_p \ldots$, если $p < 0$. Он называется *q-ичной позиционной записью числа* x; цифры, входящие в символ, называют *знаками*; позиции знаков относительно запятой называются *разрядами*.

Числу $x < 0$ условимся сопоставлять взятый со знаком минус символ положительного числа $-x$. Наконец, числу 0 отнесем символ 0,0…0…

Тем самым завершено построение *позиционной q-ичной системы записи действительных чисел*.

Наиболее употребительными являются десятичная система (в обиходе) и по техническим причинам двоичная (в электронных вычислительных машинах). Менее распространены, но также используются в элементах вычислительной техники троичная и восьмеричная системы.

Формулы (4), (5) показывают, что если в q-ичной записи числа x оставить только конечное число знаков (или, если угодно, заменить остальные знаки нулями), то абсолютная погрешность получающегося при этом приближения (4) числа x не превысит единицы последнего сохраняемого разряда.

Это наблюдение позволяет в соответствии с полученными в подпункте $\mathfrak{b}$ формулами оценивать погрешности, возникающие при арифметических операциях над числами в результате замены точных значений чисел соответствующими приближенными значениями вида (4).

Последнее замечание имеет также определенную теоретическую ценность. А именно, если в соответствии с идеей подпункта $\mathfrak{b}$ мы отождествим вещественное число x с его q-ичной записью, то, научившись выполнять арифметические действия непосредственно над q-ичными символами, мы построим новую модель действительных чисел, по-видимому, наиболее ценную с вычислительной точки зрения.

Основные задачи, которые пришлось бы решать на этом пути, таковы.

Надо двум q-ичным символам поставить в соответствие новый символ — сумму исходных. Он, естественно, строится постепенно, а именно, складывая все более точные рациональные приближения исходных чисел, будем получать соответствующие рациональные приближения их суммы. Пользуясь сделанным выше замечанием, можно показать, что по мере увеличения точности приближений слагаемых мы будем получать все больше таких q-ичных знаков суммы, которые уже не меняются при последующем уточнении приближений.

Тот же вопрос надо решать и относительно умножения.

Другой, менее конструктивный путь перехода от рациональных чисел ко всем действительным числам принадлежит Дедекинду.

Дедекинд отождествляет действительное число с сечением в множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, т. е. с разбиением $\mathbb{Q}$ на два не имеющих общих элементов множества A, B таких, что $\forall a \in A\ \forall b \in B\ (a < b)$. При таком подходе к действительным числам принятая нами аксиома полноты (непрерывности) становится известной теоремой Дедекинда. По этой причине аксиому полноты в принятой нами форме часто называют аксиомой Дедекинда.

Итак, в настоящем параграфе выделены важнейшие классы чисел. Показана фундаментальная роль натуральных и рациональных чисел. Показано,

как из принятой нами аксиоматики[1] вытекают основные свойства этих чисел. Дано представление о различных моделях множества действительных чисел. Обсуждены вычислительные аспекты теории действительных чисел: оценки погрешностей при арифметических операциях с приближенными величинами; q-ичная позиционная система счисления.

Задачи и упражнения

1. Опираясь на принцип индукции, покажите, что

a) сумма $x_1 + \ldots + x_n$ вещественных чисел определена независимо от расстановки скобок, предписывающих порядок сложения;

b) то же для произведения $x_1 \ldots x_n$;

c) $|x_1 + \ldots + x_n| \leqslant |x_1| + \ldots + |x_n|$;

d) $|x_1 \ldots x_n| = |x_1| \ldots |x_n|$;

e) $((m, n \in \mathbb{N}) \wedge (m < n)) \Rightarrow ((n - m) \in \mathbb{N})$;

f) $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$, причем равенство возможно либо при $n = 1$, либо при $x = 0$ (*неравенство Бернулли*);

g) $(a + b)^n = a^n + \dfrac{n}{1!}a^{n-1}b + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + \dfrac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2}{(n-1)!}ab^{n-1} + b^n$ (*бином Ньютона*).

2. a) Проверьте, что $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ — индуктивные множества.

b) Приведите примеры индуктивных множеств, отличных от $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

3. Покажите, что любое индуктивное множество не ограничено сверху.

4. a) Любое индуктивное множество бесконечно (т. е. равномощно своему подмножеству, отличному от него самого).

b) Множество $E_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant n\}$ конечно ($\operatorname{card} E_n$ обозначают через n).

5. a) *Алгоритм Евклида*. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$ и $m > n$. Наибольший общий делитель (НОД$(m, n) = d \in \mathbb{N}$) можно за конечное число шагов найти, пользуясь следующим алгоритмом Евклида последовательного деления с остатком:

$$\begin{aligned} m &= q_1 n + r_1 \quad (r_1 < n), \\ n &= q_2 r_1 + r_2 \quad (r_2 < r_1), \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \quad (r_3 < r_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{k-1} &= q_{k+1} r_k + 0, \end{aligned}$$

и $d = r_k$.

b) Если $d =$ НОД(m, n), то можно подобрать числа $p, q \in \mathbb{Z}$ так, что $pm + qn = d$; в частности, если m, n взаимно просты, то $pm + qn = 1$.

6. Попробуйте самостоятельно доказать основную теорему арифметики (формулировка в тексте § 2, п. 2a).

7. Если произведение $m \cdot n$ натуральных чисел делится на простое число p, т. е. $m \cdot n = p \cdot k$, где $k \in \mathbb{N}$, то либо m, либо n делится на p.

8. Из основной теоремы арифметики следует, что множество простых чисел бесконечно.

---

[1]Почти в приведенном выше виде она была сформулирована на рубеже XX века Гильбертом; см., например, в кн.: *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.: Гостехиздат, 1948. (Добавление VI: О понятии числа.)

9. Покажите, что если натуральное число n не имеет вида k^m, где $k, m \in \mathbb{N}$, то уравнение $x^m = n$ не имеет рациональных корней.

10. Покажите, что запись рационального числа в любой q-ичной системе счисления периодична, т. е., начиная с некоторого разряда, состоит из периодически повторяющейся группы цифр.

11. Иррациональное число $\alpha \in \mathbb{R}$ назовем *хорошо приближаемым* рациональными числами, если для любых натуральных чисел $n, N \in \mathbb{N}$ существует рациональное число $\frac{p}{q}$ такое, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq^n}$.

a) Постройте пример хорошо приближаемого иррационального числа.

b) Докажите, что хорошо приближаемое иррациональное число не может быть алгебраическим, т. е. оно трансцендентно (*теорема Лиувилля*[1]).

12. Зная, что по определению дроби $\frac{m}{n} := m \cdot n^{-1}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, вывести «правила» сложения, умножения, деления дробей, а также условие равенства двух дробей.

13. Проверьте, что рациональные числа $\mathbb{Q}$ удовлетворяют всем аксиомам действительных чисел, кроме аксиомы полноты.

14. Принимая геометрическую модель множества действительных чисел — числовую ось, покажите, как в этой модели строить числа $a+b$, $a-b$, ab, $\frac{a}{b}$.

15. a) Проиллюстрируйте аксиому полноты на числовой оси.

b) Докажите, что принцип верхней грани эквивалентен аксиоме полноты.

16. a) Если $A \subset B \subset \mathbb{R}$, то $\sup A \leqslant \sup B$, a $\inf A \geqslant \inf B$.

b) Пусть $\mathbb{R} \supset X \neq \varnothing$ и $\mathbb{R} \supset Y \neq \varnothing$. Если $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ выполнено $x \leqslant y$, то X ограничено сверху, Y — снизу и $\sup X \leqslant \inf Y$.

c) Если множества X, Y из b) таковы, что $X \cup Y = \mathbb{R}$, то $\sup X = \inf Y$.

d) Если X, Y — множества, определенные в c), то либо $\exists \max X$, либо $\exists \min Y$ (*теорема Дедекинда*).

e) (Продолжение.) Покажите, что теорема Дедекинда эквивалентна аксиоме полноты.

17. Пусть $A+B$ — множество чисел вида $a+b$ и $A \cdot B$ — множество чисел вида $a \cdot b$, где $a \in A \subset \mathbb{R}$ и $b \in B \subset \mathbb{R}$. Проверьте, всегда ли

a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$; b) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

18. Пусть $-A$ есть множество чисел вида $-a$, где $a \in A \subset \mathbb{R}$. Покажите, что $\sup(-A) = -\inf A$.

19. a) Покажите, что уравнение $x^n = a$ при $n \in \mathbb{N}$ и $a > 0$ имеет положительный корень (обозначаемый $\sqrt[n]{a}$ или $a^{1/n}$).

b) Проверьте, что при $a > 0$, $b > 0$ и $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}.$$

c) $(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n} =: a^{m/n}$ и $a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{1/n+1/m}$.

d) $(a^{m/n})^{-1} = (a^{-1})^{m/n} =: a^{-m/n}$.

e) Покажите, что для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2} \quad \text{и} \quad (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}.$$

20. a) Покажите, что отношение включения есть отношение частичной (но не полной!) упорядоченности множеств.

---

[1] Ж. Лиувилль (1809—1882) — французский математик; работы по комплексному анализу, геометрии, дифференциальным уравнениям, теории чисел, механике.

b) Пусть A, B, C — такие множества, что $A \subset C$, $B \subset C$, $A \setminus B \neq \varnothing$ и $B \setminus A \neq \varnothing$. Частичный порядок в этой тройке введем, как в a). Укажите максимальный и минимальные элементы множества $\{A, B, C\}$. (Обратите внимание на неединственность!)

21. a) Покажите, что так же, как и множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, множество $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ чисел вида $a + b\sqrt{n}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, а n — фиксированное натуральное число, не являющееся квадратом целого числа, есть упорядоченное поле, удовлетворяющее принципу Архимеда, но не удовлетворяющее аксиоме полноты.

b) Проверьте, какие из аксиом действительных чисел не будут удовлетворяться для $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$, если в $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ оставить прежние арифметические операции, а отношение порядка ввести по правилу $(a + b\sqrt{n} \leqslant a' + b'\sqrt{n}) := ((b \leqslant b') \vee ((b = b') \wedge (a \leqslant a')))$. Будет ли тогда для $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ выполнен принцип Архимеда?

c) Упорядочите множество $\mathbb{P}[x]$ многочленов с рациональными или действительными коэффициентами, считая

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \succ 0, \quad \text{если } a_m > 0.$$

d) Покажите, что множество $\mathbb{Q}(x)$ всех рациональных дробей

$$R_{m,n} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n}$$

с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ или из $\mathbb{R}$ после введения в нем порядка $R_{m,n} \succ 0$, если $\frac{a_m}{b_n} > 0$, и обычных арифметических операций становится упорядоченным, но не архимедовым полем. Это означает, что принцип Архимеда не может быть выведен из аксиом $\mathbb{R}$, минуя аксиому полноты.

22. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n > 1$. В множестве $E_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ определим сумму и произведение элементов как остаток от деления на n «обычной» суммы и произведения этих чисел в $\mathbb{R}$. Множество E_n с так определенными в нем операциями обозначают символом $\mathbb{Z}_n$.

a) Покажите, что если n не простое число, то в $\mathbb{Z}_n$ есть такие отличные от нуля числа m, k, что $m \cdot k = 0$. (Такие числа называются *делителями нуля*.) Это значит, что из $a \cdot b = c \cdot b$ даже при $b \neq 0$ в $\mathbb{Z}_n$ не следует, что $a = c$.

b) Покажите, что при простом p в $\mathbb{Z}_p$ отсутствуют делители нуля и $\mathbb{Z}_p$ есть поле.

c) Покажите, что ни при каком простом p поле $\mathbb{Z}_p$ нельзя упорядочить так, чтобы этот порядок был согласован с арифметическими операциями $\mathbb{Z}_p$.

23. Покажите, что если $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ — две модели множества действительных чисел, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ — такое отображение, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$, то:

a) $f(0) = 0'$;

b) $f(1) = 1'$, если $f(x) \not\equiv 0'$, что мы дальше будем считать выполненным;

c) $f(m) = m'$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $m' \in \mathbb{Z}'$, причем отображение $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}'$ биективно и сохраняет порядок;

d) $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m'}{n'}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $m', n' \in \mathbb{Z}'$, $n' \neq 0'$, $f(m) = m'$, $f(n) = n'$. Таким образом, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}'$ есть сохраняющая порядок биекция.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ есть биективное, сохраняющее порядок отображение.

24. Опираясь на предыдущую задачу и аксиому полноты, покажите, что аксиоматика множества действительных чисел определяет его полностью с точностью до изоморфизма (до способа реализации), т. е. что если $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ — два множества, удовлетворяющие аксиоматике, то существует взаимно однозначное отображение

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$, сохраняющее арифметические операции и порядок: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ и $(x \leqslant y) \Leftrightarrow (f(x) \leqslant f(y))$.

25. В ЭВМ число x представляется в виде

$$x = \pm q^p \sum_{n=1}^{k} \frac{\alpha_n}{q^n},$$

где p — порядок x, а $M = \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{\alpha_n}{q^n}$ — мантисса числа x $\left(\frac{1}{q} \leqslant M < 1\right)$.

При этом машина оперирует только с определенным диапазоном чисел: при $q = 2$ обычно $|p| \leqslant 64$, а $k = 35$. Оцените этот диапазон в десятичной системе.

26. a) Напишите таблицу умножения (размера 6×6) для шестеричной системы счисления.

b) Пользуясь результатом задачи a), перемножьте «столбиком» в шестеричной системе

$$\times \frac{(532)_6}{(145)_6}$$

и проверьте свои действия, повторив вычисления в десятичной системе.

c) Поделите «уголком»

$$(1301)_6 \,\big|\, (25)_6$$

и проверьте свои действия, повторив вычисления в десятичной системе.

d) Проведите сложение «столбиком»

$$+ \frac{(4052)_6}{(3125)_6}$$

27. Запишите $(100)_{10}$ в двоичной и троичной системах.

28. a) Покажите, что наряду с единственностью записи целого числа в виде

$$(\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_0)_3,$$

где $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$, возможна и также единственна его запись в виде

$$(\beta_n \beta_{n-1} \ldots \beta_0)_3,$$

где $\beta \in \{-1, 0, 1\}$.

b) Каково наибольшее число монет, из которых тремя взвешиваниями на чашечных весах можно выделить одну фальшивую, если известно только, что она отличается от остальных монет по весу?

29. Какое наименьшее количество вопросов с ответами «да» или «нет» надо задать, чтобы узнать любой из семизначных телефонных номеров?

30. a) Сколько различных чисел можно задать с помощью 20 десятичных знаков (например, два разряда по 10 возможных знаков в каждом)? Тот же вопрос для двоичной системы (10 разрядов по 2 возможных знака в каждом). В пользу экономичности какой из этих систем говорит сравнение результатов?

b) Оцените количество различных чисел, которые можно записать, располагая n знаками q-ичной системы. (*Ответ*: $q^{n/q}$.)

c) Нарисуйте график функции $f(x) = x^{n/x}$ над множеством натуральных значений аргумента и сравните экономичность различных систем счисления.

§ 3. Основные леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел

Здесь мы установим несколько простых полезных принципов, каждый из которых можно было бы положить в основу построения теории вещественных чисел в качестве аксиомы полноты[1].

Эти принципы мы назвали основными леммами в соответствии с их широким использованием во всевозможных доказательствах теорем анализа.

1. Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши—Кантора)

Определение 1. Функцию $f: \mathbb{N} \to X$ натурального аргумента называют *последовательностью* или, полнее, *последовательностью элементов множества* X.

Значение $f(n)$ функции f, соответствующее числу $n \in \mathbb{N}$, часто обозначают через x_n и называют n-м членом последовательности.

Определение 2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность каких-то множеств. Если $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$, т. е. $\forall n \in \mathbb{N}$ $(X_n \supset X_{n+1})$, то говорят, что имеется последовательность *вложенных* множеств.

Лемма (Коши—Кантор). *Для любой последовательности* $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ *вложенных отрезков найдется точка* $c \in \mathbb{R}$, *принадлежащая всем этим отрезкам.*

Если, кроме того, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ *в последовательности можно найти отрезок* I_k, *длина которого* $|I_k| < \varepsilon$, *то* c — *единственная общая точка всех отрезков.*

◄ Заметим прежде всего, что для любых двух отрезков $I_m = [a_m, b_m]$, $I_n = [a_n, b_n]$ нашей последовательности имеет место $a_m \leqslant b_n$. Действительно, в противном случае мы получили бы $a_n \leqslant b_n < a_m \leqslant b_m$, т. е. отрезки I_m, I_n не имели бы общих точек, в то время как один из них (имеющий больший номер) должен содержаться в другом.

Таким образом, для числовых множеств $A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ выполнены условия аксиомы полноты, в силу которой найдется число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a_m \in A$, $\forall b_n \in B$ выполнено $a_m \leqslant c \leqslant b_n$. В частности, $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Но это и означает, что точка c принадлежит всем отрезкам I_n.

Пусть теперь c_1 и c_2 — две точки, обладающие этим свойством. Если они различны и, например, $c_1 < c_2$, то при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем $a_n \leqslant c_1 < c_2 \leqslant b_n$, поэтому $0 < c_2 - c_1 < b_n - a_n$ и длина каждого отрезка нашей последовательности не может быть меньше положительной величины $c_2 - c_1$. Значит, если в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины, то общая точка у них единственная. ►

---

[1] См. задачу 4 в конце параграфа.

2. Лемма о конечном покрытии (принцип Бореля—Лебега)

Определение 3. Говорят, что система $S=\{X\}$ множеств X *покрывает* множество Y, если $Y\subset\bigcup\limits_{X\in S}X$ (т. е. если любой элемент y множества Y содержится по крайней мере в одном из множеств X системы S).

Подмножество множества $S=\{X\}$, являющегося системой множеств, будем называть *подсистемой* системы S. Таким образом, подсистема системы множеств сама является системой множеств того же типа.

Лемма (Борель—Лебег[1]). *В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.*

◄ Пусть $S=\{U\}$ — система интервалов U, покрывающая отрезок $[a,b]=I_1$. Если бы отрезок I_1 не допускал покрытия конечным набором интервалов системы S, то, поделив I_1 пополам, мы получили бы, что по крайней мере одна из его половинок, которую мы обозначим через I_2, тоже не допускает конечного покрытия. С отрезком I_2 проделаем ту же процедуру деления пополам, получим отрезок I_3 и т. д.

Таким образом, возникает последовательность $I_1\supset I_2\supset\ldots\supset I_n\supset\ldots$ вложенных отрезков, не допускающих конечного покрытия интервалами системы S. Поскольку длина отрезка, полученного на n-м шаге, по построению равна $|I_n|=|I_1|\cdot 2^{-n}$, то в последовательности $\{I_n\}$ есть отрезки сколь угодно малой длины (см. лемму из § 2, п. 4c). По лемме о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам I_n, $n\in\mathbb{N}$. Поскольку $c\in I_1=[a,b]$, то найдется интервал $]\alpha,\beta[=U\in S$ системы S, содержащий точку c, т. е. $\alpha<c<\beta$. Пусть $\varepsilon=\min\{c-\alpha,\beta-c\}$. Найдем в построенной последовательности такой отрезок I_n, что $|I_n|<\varepsilon$. Поскольку $c\in I_n$ и $|I_n|<\varepsilon$, заключаем, что $I_n\subset U=]\alpha,\beta[$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы. ►

3. Лемма о предельной точке (принцип Больцано—Вейерштрасса). Напомним, что окрестностью точки $x\in\mathbb{R}$ мы назвали интервал, содержащий эту точку; δ-окрестностью точки x — интервал $]x-\delta,x+\delta[$.

Определение 4. Точка $p\in\mathbb{R}$ называется *предельной точкой* множества $X\subset\mathbb{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества X.

Это условие, очевидно, равносильно тому, что в любой окрестности точки p есть по крайней мере одна не совпадающая с p точка множества X. (Проверьте!)

Приведем несколько примеров.

Если $X=\left\{\frac{1}{n}\in\mathbb{R}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$, то предельной для X является только точка $0\in\mathbb{R}$.

---

[1] Э. Борель (1871—1956), А. Лебег (1875—1941) — известные французские математики, специалисты в области теории функций.

Для интервала $]a, b[$ предельной является каждая точка отрезка $[a, b]$, и других предельных точек в этом случае нет.

Для множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел предельной является каждая точка $\mathbb{R}$, ибо, как мы знаем, в любом интервале вещественных чисел имеются рациональные числа.

Лемма (Больцано—Вейерштрасс[1]). *Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет по крайней мере одну предельную точку.*

◄ Пусть X — данное подмножество $\mathbb{R}$. Из определения ограниченности множества X следует, что X содержится в некотором отрезке $[a, b] = I \subset \mathbb{R}$. Покажем, что по крайней мере одна из точек отрезка I является предельной для X.

Если бы это было не так, то каждая точка $x \in I$ имела бы окрестность $U(x)$, в которой либо вообще нет точек множества X, либо их там конечное число. Совокупность $\{U(x)\}$ таких окрестностей, построенных для каждой точки $x \in I$, образует покрытие отрезка I интервалами $U(x)$, из которого по лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему $U(x_1), \ldots, U(x_n)$ интервалов, покрывающую отрезок I. Но, поскольку $X \subset I$, эта же система покрывает все множество X. Однако в каждом интервале $U(x_i)$ только конечное число точек множества X, значит, и в их объединении тоже конечное число точек X, т. е. X — конечное множество. Полученное противоречие завершает доказательство. ►

Задачи и упражнения

1. Покажите, что

a) если I — произвольная система вложенных отрезков, то

$$\sup\{a \in \mathbb{R} \mid [a, b] \in I\} = \alpha \leqslant \beta = \inf\{b \in \mathbb{R} \mid [a, b] \in I\} \quad \text{и} \quad [\alpha, \beta] = \bigcap_{[a,b] \in I} [a, b];$$

b) если I — система вложенных интервалов $]a, b[$, то пересечение $\bigcap\limits_{]a,b[\in I}]a, b[$ может оказаться пустым.

Указание: $]a_n, b_n[= \left]0, \frac{1}{n}\right[$.

2. Покажите, что

a) из системы отрезков, покрывающей отрезок, не всегда можно выделить конечную подсистему, покрывающую этот отрезок;

b) из системы интервалов, покрывающей интервал, не всегда можно выделить конечную подсистему, покрывающую этот интервал;

c) из системы отрезков, покрывающей интервал, не всегда можно выделить конечную подсистему, покрывающую этот интервал.

3. Покажите, что если вместо полного множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел взять только множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, а под отрезком, интервалом и

[1] Б. Больцано (1781—1848) — чешский математик и философ; К. Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик, уделявший большое внимание логическому обоснованию математического анализа.

окрестностью точки $r \in \mathbb{Q}$ понимать соответствующие подмножества $\mathbb{Q}$, то ни одна из доказанных выше трех основных лемм не останется в силе.

4. Покажите, что если в качестве аксиомы полноты множества действительных чисел взять

a) принцип Больцано—Вейерштрасса

или

b) принцип Бореля—Лебега,

то получится равносильная прежней система аксиом $\mathbb{R}$.

Указание. Из a) следует принцип Архимеда и аксиома полноты в прежней форме.

c) Замена аксиомы полноты принципом Коши—Кантора приводит к системе аксиом, которая становится равносильной исходной, если кроме принципа Коши—Кантора постулировать также принцип Архимеда (см. задачу 21 предыдущего параграфа).

§ 4. Счетные и несчетные множества

Сейчас мы сделаем небольшое, полезное для дальнейшего добавление к тем сведениям о множествах, которые уже были изложены в главе I.

1. Счетные множества

Определение 1. Множество X называется *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел, т. е. $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Утверждение. a) *Бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

b) *Объединение множеств конечной или счетной системы счетных множеств есть множество счетное.*

◄ a) Достаточно проверить, что всякое бесконечное подмножество E множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел равномощно $\mathbb{N}$. Нужное биективное отображение $f : \mathbb{N} \to E$ построим следующим образом. В $E_1 := E$ имеется минимальный элемент, который мы сопоставим числу $1 \in \mathbb{N}$ и обозначим $e_1 \in E$. Множество E бесконечно, поэтому $E_2 := E \setminus e_1$ непусто. Минимальный элемент множества E_2 сопоставим числу 2 и назовем его $e_2 \in E_2$. Затем рассмотрим $E_3 := E \setminus \{e_1, e_2\}$ и т. д. Поскольку E — бесконечное множество, то построение не может оборваться ни на каком шаге с номером $n \in \mathbb{N}$, и, как следует из принципа индукции, таким способом каждому числу $n \in \mathbb{N}$ будет сопоставлено некоторое число $e_n \in E$. Построенное отображение $f : \mathbb{N} \to E$, очевидно, инъективно.

Остается проверить его сюръективность, т. е. что $f(\mathbb{N}) = E$. Пусть $e \in E$. Множество $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant e\}$ конечно, и тем более конечно его подмножество $\{n \in E \mid n \leqslant e\}$. Пусть k — число элементов в последнем множестве. Тогда по построению $e = e_k$.

b) Если $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — счетная система множеств, причем каждое множество $X_m = \{x_m^1, \ldots, x_m^n, \ldots\}$ само счетно, то поскольку мощность множества $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$, состоящего из элементов x_m^n, где $m, n \in \mathbb{N}$, не меньше мощно-

сти каждого из множеств X_m, то X — бесконечное множество. Элемент $x_m^n \in$ $\in X_m$ можно отождествить с задающей его упорядоченной парой (m, n) натуральных чисел. Тогда мощность X не больше мощности множества таких упорядоченных пар. Но отображение $f: \mathbb{N} \times \ N \to \mathbb{N}$, задаваемое формулой

$(m, n) \mapsto \dfrac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m$, как легко проверить, биективно (оно имеет наглядный смысл: мы нумеруем точки плоскости с координатами (m, n), последовательно переходя от точек одной диагонали, где $m+n$ постоянно, к точкам следующей, где эта сумма на 1 больше).

Таким образом, множество упорядоченных пар (m, n) натуральных чисел счетно. Но тогда $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathbb{N}$ и, поскольку X — бесконечное множество, на основании доказанного в а) заключаем, что $\operatorname{card} X = \operatorname{card} \mathbb{N}$. ►

Из доказанного утверждения следует, что любое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно. Если про множество известно, что оно либо конечно, либо счетно, то говорят, что оно *не более чем счетно* (равносильная запись: $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card} \mathbb{N}$).

Мы можем, в частности, утверждать теперь, что *объединение не более чем счетного семейства не более чем счетных множеств само не более чем счетно*.

Следствия. 1) $\operatorname{card} \mathbb{Z} = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

2) $\operatorname{card} \mathbb{N}^2 = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Этот результат означает, что прямое произведение счетных множеств счетно.

3) $\operatorname{card} \mathbb{Q} = \operatorname{card} \mathbb{N}$, *т. е. множество рациональных чисел счетно.*

◄ Рациональное число $\frac{m}{n}$ задается упорядоченной парой (m, n) целых чисел.

Две пары (m, n), (m', n') задают одно и то же рациональное число в том и только в том случае, когда они пропорциональны. Таким образом, выбирая каждый раз для записи рационального числа единственную пару (m, n) с минимальным возможным натуральным знаменателем $n \in \mathbb{N}$, мы получим, что множество $\mathbb{Q}$ равномощно некоторому бесконечному подмножеству множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Но $\operatorname{card} \mathbb{Z}^2 = \operatorname{card} \mathbb{N}$ и, значит, $\operatorname{card} \mathbb{Q} = \operatorname{card} \mathbb{N}$. ►

4) *Множество алгебраических чисел счетно.*

◄ Заметим сначала, что из равенства $\operatorname{card} \mathbb{Q} \times \ Q = \operatorname{card} \mathbb{N}$ по индукции получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\operatorname{card} \mathbb{Q}^k = \operatorname{card} \mathbb{N}$.

Элемент $r \in \mathbb{Q}^k$ есть упорядоченный набор $(r_1, \ldots, r_k)$ k рациональных чисел.

Алгебраическое уравнение степени k с рациональными коэффициентами можно записать в приведенном виде $x^k + r_1 x^{k-1} + \ldots + r_k = 0$, где коэффициент при старшей степени равен 1. Таким образом, различных алгебраических уравнений степени k столько же, сколько различных упорядоченных наборов $(r_1, \ldots, r_k)$ рациональных чисел, т. е. счетное множество.

Алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами (произвольных степеней) тоже счетное множество как счетное объединение (по степеням) счетных множеств. У каждого такого уравнения лишь конечное число корней, значит, множество алгебраических чисел не более чем счетно. Но оно бесконечно и, значит, счетно. ►

2. Мощность континуума

Определение 2. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел называют также *числовым континуумом*[1], а его мощность — *мощностью континуума*.

Теорема (Кантор). $\operatorname{card}\mathbb{N} < \operatorname{card}\mathbb{R}$.

Теорема утверждает, что бесконечное множество $\mathbb{R}$ имеет мощность бо́льшую, чем бесконечное множество $\mathbb{N}$.

◄ Покажем, что уже множество точек отрезка $[0, 1]$ несчетно.

Предположим, что оно счетно, т. е. может быть записано в виде последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Возьмем точку x_1 и на отрезке $[0, 1] = I_0$ фиксируем отрезок ненулевой длины, не содержащий точку x_1. В отрезке I_1 строим отрезок I_2, не содержащий x_2, и если уже построен отрезок I_n, то, поскольку $|I_n| > 0$, в нем строим отрезок I_{n+1} так, что $x_{n+1} \notin I_{n+1}$ и $|I_{n+1}| > 0$. По лемме о вложенных отрезках найдется точка c, принадлежащая всем отрезкам $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ Но эта точка отрезка $I_0 = [0, 1]$ по построению не может совпадать ни с одной из точек последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ►

Следствия. 1) $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ *и существуют иррациональные числа.*

2) *Существуют трансцендентные числа, поскольку множество алгебраических чисел счетно.*

(После решения задачи 3, помещенной в конце параграфа, читатель, наверное, захочет переиначить последнее утверждение и сформулировать его так: «В множестве действительных чисел иногда встречаются также и алгебраические числа».)

Уже на заре теории множеств возник вопрос о том, существуют ли множества промежуточной мощности между счетными множествами и множествами мощности континуума, и было высказано предположение, называемое *гипотезой континуума*, что промежуточные мощности отсутствуют.

Вопрос оказался глубоко затрагивающим основания математики. Он был окончательно решен в 1963 г. американским математиком П. Коэном. Коэн доказал неразрешимость гипотезы континуума, показав, что и она сама, и ее отрицание порознь не противоречат принятой в теории множеств аксиоматике, а потому гипотеза континуума не может быть ни доказана, ни опровергнута в рамках этой аксиоматики, — ситуация, вполне аналогичная независимости пятого постулата Евклида о параллельных от остальных аксиом геометрии.

---

[1] Continuum (*лат.*) — непрерывное, сплошное.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что множество всех действительных чисел равномощно множеству точек интервала $]-1, 1[$.

2. Установите непосредственно взаимно однозначное соответствие между

a) точками двух интервалов;

b) точками двух отрезков;

c) точками отрезка и интервала;

d) точками отрезка $[0, 1]$ и множеством $\mathbb{R}$.

3. Покажите, что

a) любое бесконечное множество содержит счетное подмножество;

b) множество четных чисел равномощно множеству всех натуральных чисел;

c) объединение бесконечного множества и не более чем счетного множества имеет ту же мощность, что и исходное бесконечное множество;

d) множество иррациональных чисел имеет мощность континуума;

e) множество трансцендентных чисел имеет мощность континуума.

4. Покажите, что

a) множество $\{n_1 < n_2 < \ldots\}$ возрастающих последовательностей натуральных чисел равномощно множеству дробей вида $0,\alpha_1\alpha_2\ldots$;

b) множество всех подмножеств счетного множества имеет мощность континуума.

5. Покажите, что

a) множество $\mathscr{P}(X)$ подмножеств множества X равномощно множеству всех функций на X со значениями 0, 1, т. е. множеству отображений $f: X \to \{0, 1\}$;

b) для конечного множества X из n элементов $\operatorname{card}\mathscr{P}(X) = 2^n$;

c) учитывая результаты задач 4b) и 5a), можно писать, что $\operatorname{card}\mathscr{P}(X) = 2^{\operatorname{card} X}$ и, в частности, $\operatorname{card}\mathscr{P}(\mathbb{N}) = 2^{\operatorname{card}\mathbb{N}} = \operatorname{card}\mathbb{R}$;

d) для любого множества X

$$\operatorname{card} X < 2^{\operatorname{card} X}, \text{ в частности, } n < 2^n \text{ при любом } n \in \mathbb{N}.$$

Указание. См. теорему Кантора в п. 1 § 4, гл. I.

6. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — конечная система конечных множеств. Покажите, что

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\Big) = \sum_{i_1} \operatorname{card} X_{i_1} - \sum_{i_1<i_2} \operatorname{card}(X_{i_1} \cap X_{i_2}) + \sum_{i_1<i_2<i_3} \operatorname{card}(X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_{i_3}) - \\ - \ldots + (-1)^{m-1} \operatorname{card}(X_1 \cap \ldots \cap X_m),$$

причем суммирование ведется по всевозможным наборам индексов в пределах $1, \ldots, m$, удовлетворяющих указанным под знаком суммы неравенствам.

7. На отрезке $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ изобразите множество чисел $x \in [0, 1]$, троичная запись которых $x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, где $\alpha_i \in \{0, 1, 2\}$, обладает свойством:

a) $\alpha_1 \neq 1$;

b) $(\alpha_1 \neq 1) \wedge (\alpha_2 \neq 1)$;

c) $\forall i \in \mathbb{N}\ (\alpha_i \neq 1)$ (*канторово множество*).

8. (Продолжение задачи 7.) Покажите, что

a) множество тех чисел $x \in [0, 1]$, троичная запись которых не содержит 1, равномощно множеству всех чисел, двоичное представление которых имеет вид $0,\beta_1\beta_2\ldots$;

b) канторово множество равномощно множеству всех точек отрезка $[0, 1]$.

Глава III

Предел

Обсуждая различные стороны понятия действительного числа, мы, в частности, отметили, что при измерении реальных физических величин получаются последовательности их приближенных значений, с которыми затем и приходится работать.

Такое положение дел немедленно вызывает по крайней мере три следующих вопроса:

1) Какое отношение имеет полученная последовательность приближений к измеряемой величине? Мы имеем в виду математическую сторону дела, т. е. мы хотим получить точную запись того, что вообще означает выражение «последовательность приближенных значений» и в какой мере такая последовательность описывает значение величины; однозначно ли это описание или одна и та же последовательность может отвечать разным значениям измеряемой величины.

2) Как связаны операции над приближенными значениями величин с теми же операциями над их точными значениями и чем характеризуются те операции, при выполнении которых допустима подмена точных значений величин приближенными?

3) Как по самой последовательности чисел определить, может ли она быть последовательностью сколь угодно точных приближений значения некоторой величины?

Ответом на эти и близкие к ним вопросы служит понятие предела функции — одно из основных понятий анализа.

Изложение теории предела мы начнем с рассмотрения предела функций натурального аргумента (последовательностей) ввиду уже выяснившейся фундаментальной роли этих функций и потому, что на самом деле все основные факты теории предела отчетливо видны уже в этой простейшей ситуации.

§ 1. Предел последовательности

1. Определения и примеры. Напомним следующее

Определение 1. Функция $f:\mathbb{N}\to X$, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется *последовательностью.*

Значения $f(n)$ функции f называются членами последовательности. Их принято обозначать символом элемента того множества, в которое идет отображение, наделяя символ соответствующим индексом аргумента, $x_n := f(n)$. Саму последовательность в связи с этим обозначают символом $\{x_n\}$, а также записывают в виде $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и называют *последовательностью в X* или *последовательностью элементов множества X*.

Элемент x_n называется *n-м членом последовательности*.

Всюду дальше в ближайших параграфах будут рассматриваться только последовательности $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ действительных чисел.

Определение 2. Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любой окрестности $V(A)$ точки A существует такой номер N (выбираемый в зависимости от $V(A)$), что все члены последовательности, номера которых больше N, содержатся в указанной окрестности точки A.

Ниже мы приведем формально-логическую запись этого определения, но прежде укажем другую распространенную формулировку определения предела числовой последовательности:

Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при всех $n > N$ имеем $|x_n - A| < \varepsilon$.

Эквивалентность этих формулировок легко проверить (проверьте!), если заметить, что в любой окрестности $V(A)$ точки A содержится некоторая ε-окрестность этой же точки.

Последняя формулировка определения предела означает, что, какую бы точность $\varepsilon > 0$ мы ни задали, найдется номер N такой, что абсолютная погрешность приближения числа A членами последовательности $\{x_n\}$ меньше чем ε, как только $n > N$.

Запишем теперь приведенные формулировки определения предела в логической символике, договорившись, что запись «$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$» означает, что A — предел последовательности $\{x_n\}$. Итак,

$$\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} x_n = A\right) := \forall V(A)\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (x_n \in V(A))}$$

и соответственно

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = A\right) := \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (|x_n - A| < \varepsilon).$$

Определение 3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится* к A или *стремится* к A и пишут $x_n \to A$ при $n \to \infty$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, так как $\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ при $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$[1].

Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$, так как $\left|\frac{n+1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ при $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Пример 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$, так как $\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ при $n>$ $>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Пример 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$, так как $\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$ при $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Пример 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{q^n}=0$, если $|q|>1$.

Проверим это по определению предела. Как было доказано в гл. II, § 2, п. 4c, для любого $\varepsilon>0$ можно найти число $N\in\mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{|q|^N}<\varepsilon$. Поскольку $|q|>1$, то для любого $n>N$ будем иметь $\left|\frac{1}{q^n}-0\right|=\frac{1}{|q|^n}<\frac{1}{|q|^N}<\varepsilon$ и определение предела удовлетворено.

Пример 6. Последовательность $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, \ldots$ с n-м членом $x_n=$ $=n^{(-1)^n}$, $n\in\mathbb{N}$, — расходящаяся.

Действительно, если A — предел последовательности, то, как следует из определения предела, в любой окрестности A лежат все члены последовательности, за исключением, быть может, конечного их числа.

Число $A\neq 0$ не может быть пределом данной последовательности, ибо вне ε-окрестности A при $\varepsilon=\frac{|A|}{2}>0$ лежат все члены нашей последовательности вида $\frac{1}{2k+1}$, для которых $\frac{1}{2k+1}<\frac{|A|}{2}$.

Число 0 тоже не может быть пределом этой последовательности, поскольку, например, вне единичной окрестности нуля, очевидно, тоже имеется бесконечно много членов нашей последовательности.

Пример 7. Аналогично можно проверить, что последовательность $1, -1, +1, -1, \ldots$, для которой $x_n=(-1)^n$, не имеет предела.

2. Свойства предела последовательности

a. Общие свойства. Мы выделим в эту группу те свойства, которыми обладают, как будет видно из дальнейшего, не только числовые последовательности, хотя здесь мы эти свойства будем рассматривать только для числовых последовательностей.

Последовательность, принимающую только одно значение, будем называть *постоянной*.

Определение 4. Если существуют число A и номер N такие, что $x_n=$ $=A$ при любом $n>N$, то последовательность $\{x_n\}$ будем называть *финально постоянной*.

[1] $[x]$ — целая часть числа x; см. следствие 10° принципа Архимеда, гл. II, § 2, п. 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует число M такое, что $|x_n| < M$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 1. a) *Финально постоянная последовательность сходится.*

b) *Любая окрестность предела последовательности содержит все члены последовательности, за исключением конечного их числа.*

c) *Последовательность не может иметь двух различных пределов.*

d) *Сходящаяся последовательность ограничена.*

◄ a) Если $x_n = A$ при $n > N$, то для любой окрестности $V(A)$ точки A имеем $x_n \in V(A)$ при $n > N$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

b) Утверждение непосредственно следует из определения предела последовательности.

c) Это важнейший пункт теоремы. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A_2$. Если $A_1 \neq A_2$, то фиксируем непересекающиеся окрестности $V(A_1)$, $V(A_2)$ точек A_1, A_2.

В качестве таковых можно взять, например, δ-окрестности этих точек при $\delta < \frac{1}{2}|A_1 - A_2|$. По определению предела найдем числа N_1 и N_2 так, что $\forall n > N_1$ $(x_n \in V(A_1))$ и $\forall n > N_2$ $(x_n \in V(A_2))$. Тогда при $n > \max\{N_1, N_2\}$ получим $x_n \in V(A_1) \cap V(A_2)$. Но это невозможно, поскольку $V(A_1) \cap V(A_2) = \varnothing$.

d) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Полагая в определении предела $\varepsilon = 1$, найдем номер N такой, что $\forall n > N$ $(|x_n - A| < 1)$. Значит, при $n > N$ имеем $|x_n| < |A| + 1$. Если теперь взять $M > \max\{|x_1|, \dots, |x_n|, |A| + 1\}$, то получим, что $\forall n > N$ $(|x_n| < M)$. ►

b. Предельный переход и арифметические операции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две числовые последовательности, то их *суммой, произведением* и *частным* (в соответствии с общим определением суммы, произведения и частного функций) называются соответственно последовательности

$$\{(x_n + y_n)\}, \quad \{(x_n \cdot y_n)\}, \quad \left\{\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\right\}.$$

Частное, разумеется, определено лишь при $y_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — числовые последовательности. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = A + B$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$, *если* $y_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ *и* $B \neq 0$.

◄ В качестве упражнения воспользуемся уже известными нам (см. гл. II, § 2, п. 4) оценками абсолютных погрешностей, возникающих при арифметических операциях с приближенными значениями величин.

Положим $|A - x_n| = \Delta(x_n)$, $|B - y_n| = \Delta(y_n)$. Тогда для случая a) имеем

$$|(A + B) - (x_n + y_n)| \leqslant \Delta(x_n) + \Delta(y_n).$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, найдется номер N' такой, что $\forall n > N'$ $(\Delta(x_n) < \varepsilon/2)$. Аналогично, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, найдется номер N'' такой, что $\forall n > N''$ $(\Delta(y_n) < \varepsilon/2)$. Тогда при $n > \max\{N', N''\}$ будем иметь

$$|(A+B)-(x_n+y_n)| < \varepsilon,$$

что в соответствии с определением предела доказывает утверждение a).

b) Мы знаем, что

$$|(A\cdot B)-(x_n\cdot y_n)| \leqslant |x_n|\Delta(y_n)+|y_n|\Delta(x_n)+\Delta(x_n)\cdot\Delta(y_n).$$

По заданному $\varepsilon > 0$ найдем числа N' и N'' такие, что

$$\forall n > N' \ \left(\Delta(x_n) < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3(|B|+1)}\right\}\right),$$
$$\forall n > N'' \ \left(\Delta(y_n) < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3(|A|+1)}\right\}\right).$$

Тогда при $n > N = \max\{N', N''\}$ будем иметь

$$|x_n| < |A| + \Delta(x_n) < |A| + 1,$$
$$|y_n| < |B| + \Delta(y_n) < |B| + 1,$$
$$\Delta(x_n)\cdot\Delta(y_n) < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}\cdot\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, при $n > N$

$$|x_n|\Delta(y_n) < (|A|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{3(|A|+1)} = \frac{\varepsilon}{3},$$
$$|y_n|\Delta(x_n) < (|B|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{3(|B|+1)} = \frac{\varepsilon}{3},$$
$$\Delta(x_n)\cdot\Delta(y_n) < \frac{\varepsilon}{3},$$

поэтому $|AB - x_n y_n| < \varepsilon$ при $n > N$.

c) Воспользуемся оценкой

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{x_n}{y_n}\right| \leqslant \frac{|x_n|\Delta(y_n)+|y_n|\Delta(x_n)}{y_n^2}\cdot\frac{1}{1-\delta(y_n)},$$

где $\delta(y_n) = \dfrac{\Delta(y_n)}{|y_n|}$.

При заданном $\varepsilon > 0$ найдем числа N' и N'' так, что

$$\forall n > N' \ \left(\Delta(x_n) < \min\left\{1, \frac{\varepsilon|B|}{8}\right\}\right),$$
$$\forall n > N'' \ \left(\Delta(y_n) < \min\left\{\frac{|B|}{4}, \frac{\varepsilon\cdot B^2}{16(|A|+1)}\right\}\right).$$

Тогда при $n > \max\{N', N''\}$ будем иметь

$$|x_n| < |A| + \Delta(x_n) < |A| + 1,$$

$$|y_n| > |B| - \Delta(y_n) > |B| - \frac{|B|}{4} > \frac{|B|}{2},$$

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|B|},$$

$$0 < \delta(y_n) = \frac{\Delta(y_n)}{|y_n|} < \frac{|B|/4}{|B|/2} = \frac{1}{2},$$

$$1 - \delta(y_n) > \frac{1}{2},$$

поэтому

$$|x_n| \cdot \frac{1}{y_n^2}\Delta(y_n) < (|A|+1) \cdot \frac{4}{B^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot B^2}{16(|A|+1)} = \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| \Delta(x_n) < \frac{2}{|B|} \cdot \frac{\varepsilon|B|}{8} = \frac{\varepsilon}{4},$$

$$0 < \frac{1}{1 - \delta(y_n)} < 2$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{x_n}{y_n}\right| < \varepsilon \quad \text{при } n > N. \ ►$$

Замечание. Формулировка теоремы допускает и другой, менее конструктивный путь доказательства, вероятно, известный читателю по школьному курсу начал анализа. Мы напомним его, когда будем говорить о пределе произвольных функций. Но здесь, рассматривая предел последовательности, нам хотелось обратить внимание на то, как именно по ограничениям на погрешность результата арифметической операции ищутся допустимые погрешности значений величин, над которыми эта операция производится.

c. Предельный переход и неравенства

Теорема 3. a) *Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две сходящиеся последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. Если $A < B$, то найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ выполнено неравенство $x_n < y_n$.*

b) *Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что при любом $n > N \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Если при этом последовательности $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то последовательность $\{y_n\}$ также сходится и к этому же пределу.*

◄ a) Возьмем число C такое, что $A < C < B$. По определению предела найдем числа N' и N'' так, чтобы при любом $n > N'$ иметь $|x_n - A| < C - A$ и при любом $n > N''$ иметь $|y_n - B| < B - C$. Тогда при $n > N = \max\{N', N''\}$ получим $x_n < A + (C - A) = C = B - (B - C) < y_n$.

b) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$. По $\varepsilon > 0$ найдем числа N' и N'' так, чтобы при любом $n > N'$ иметь $A - \varepsilon < x_n$ и при любом $n > N''$ иметь $z_n < A + \varepsilon$. Тогда

при $n>N=\max\{N', N''\}$ получим $A-\varepsilon<x_n\leqslant y_n\leqslant z_n<A+\varepsilon$ или $|y_n-A|<\varepsilon$, т. е. $A=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. ►

Следствие. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$.

Если существует номер N такой, что при любом $n>N$

a) $x_n>y_n$, *то* $A\geqslant B$;

b) $x_n\geqslant y_n$, *то* $A\geqslant B$;

c) $x_n>B$, *то* $A\geqslant B$;

d) $x_n\geqslant B$, *то* $A\geqslant B$.

◄ Рассуждая от противного, из пункта a) теоремы немедленно получаем первые два утверждения. Третье и четвертое утверждения суть частные случаи первых двух, получающиеся при $y_n\equiv B$. ►

Стоит заметить, что строгое неравенство в пределе может перейти в равенство. Например, $\frac{1}{n}>0$ при любом $n\in\mathbb{N}$, но $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

3. Вопросы существования предела последовательности

a. Критерий Коши

Определение 7. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*[1]), если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такой номер $N\in\mathbb{N}$, что из $n>N$ и $m>N$ следует $|x_m-x_n|<\varepsilon$.

Теорема 4 (критерий Коши сходимости последовательности). *Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

◄ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$. По числу $\varepsilon>0$ найдем номер N так, чтобы при $n>N$ иметь $|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. Если теперь $m>N$ и $n>N$, то $|x_m-x_n|<|x_m-A|+|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ и, таким образом, проверено, что сходящаяся последовательность фундаментальна.

Пусть теперь $\{x_k\}$ — фундаментальная последовательность. По заданному $\varepsilon>0$ найдем номер N такой, что из $m\geqslant N$ и $k\geqslant N$ следует $|x_m-x_k|<\frac{\varepsilon}{3}$. Фиксировав $m=N$, получаем, что при любом $k>N$

$$x_N-\frac{\varepsilon}{3}<x_k<x_N+\frac{\varepsilon}{3}, \qquad (1)$$

но поскольку имеется всего конечное число членов последовательности $\{x_n\}$ с номерами, не превосходящими N, то мы доказали, что фундаментальная последовательность ограничена.

Для $n\in\mathbb{N}$ положим теперь $a_n:=\inf\limits_{k\geqslant n} x_k$, $b_n:=\sup\limits_{k\geqslant n} x_k$.

Из этих определений видно, что $a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n$ (поскольку при переходе к меньшему множеству нижняя грань не уменьшается, а верхняя не

[1] Последовательности Коши ввел Больцано, пытавшийся, не располагая точным понятием вещественного числа, доказать сходимость фундаментальной последовательности. Коши дал такое доказательство, приняв за очевидное принцип вложенных отрезков, обоснованный впоследствии Кантором.

увеличивается). Последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ имеет, по лемме о вложенных отрезках, общую точку A.

Поскольку при любом $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leqslant A \leqslant b_n,$$

а при $k \geqslant n$

$$a_n = \inf_{k \geqslant n} x_k \leqslant x_k \leqslant \sup_{k \geqslant n} x_k = b_n,$$

то при $k \geqslant n$ имеем

$$|A - x_k| \leqslant b_n - a_n. \tag{2}$$

Но из (1) следует, что при $n > N$

$$x_N - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \inf_{k \geqslant n} x_k = a_n \leqslant b_n = \sup_{k \geqslant n} x_k \leqslant x_N + \frac{\varepsilon}{3},$$

поэтому при $n > m$

$$b_n - a_n \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), находим, что при любом $k > N$

$$|A - x_k| < \varepsilon,$$

и мы показали, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = A$. ►

Пример 8. Последовательность $(-1)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не имеет предела, поскольку она не является фундаментальной. Хотя это и очевидно, но все же проведем формальную проверку. Отрицание утверждения, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, выглядит так:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ \exists m > N \ (|x_m - x_n| \geqslant \varepsilon),$$

т. е. найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при любом $N \in \mathbb{N}$ найдутся числа n, m, бóльшие N, для которых $|x_m - x_n| \geqslant \varepsilon$.

В нашем случае достаточно положить $\varepsilon = 1$. Тогда при любом $N \in \mathbb{N}$ будем иметь $|x_{N+1} - x_{N+2}| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon$.

Пример 9. Пусть

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0{,}\alpha_1, \quad x_3 = 0{,}\alpha_1\alpha_2, \quad \ldots, \quad x_n = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n, \quad \ldots$$

— некоторая последовательность конечных двоичных дробей, причем каждая следующая дробь получается дописыванием знака 0 или 1 к предыдущей. Покажем, что такая последовательность всегда сходится. Пусть $m > n$. Оценим разность $x_m - x_n$:

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\alpha_m}{2^m}\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}.$$

Таким образом, подобрав по заданному $\varepsilon > 0$ число N так, что $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$ для любых $m > n > N$, получаем оценку $|x_m - x_n| < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \varepsilon$, доказывающую фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

Пример 10. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

то в силу критерия Коши эта последовательность не имеет предела.

b. Критерий существования предела монотонной последовательности

Определение 8. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n < x_{n+1})$; *неубывающей*, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n \leqslant x_{n+1})$; *невозрастающей*, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n \geqslant x_{n+1})$; *убывающей*, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n > x_{n+1})$. Последовательности этих четырех типов называют *монотонными последовательностями*.

Определение 9. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если существует число M такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_n < M)$.

Аналогично определяется последовательность, *ограниченная снизу*.

Теорема 5 (Вейерштрасс). *Для того чтобы неубывающая последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной сверху.*

◄ То, что любая сходящаяся последовательность ограничена, было доказано при рассмотрении общих свойств предела последовательности, поэтому интерес представляет только второе утверждение теоремы.

По условию множество значений последовательности $\{x_n\}$ ограничено сверху, значит, оно имеет верхнюю грань $s = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

По определению верхней грани, для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x_N \in \{x_n\}$ такой, что $s - \varepsilon < x_N \leqslant s$. Поскольку последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, при любом $n > N$ теперь получаем $s - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant s$, т. е. $|s - x_n| = s - x_n < \varepsilon$. Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = s$. ►

Разумеется, аналогичную теорему можно сформулировать и доказать для невозрастающей последовательности, ограниченной снизу. В этом случае $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$.

Замечание. Ограниченность сверху (снизу) неубывающей (невозрастающей) последовательности на самом деле, очевидно, равносильна ограниченности этой последовательности.

Рассмотрим несколько полезных примеров.

Пример 11. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{q^n} = 0$, если $q > 1$.

◄ Действительно, если $x_n = \frac{n}{q^n}$, то $x_{n+1} = \frac{n+1}{nq} x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{q} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q} = 1 \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{q} < 1,$$

то найдется номер N такой, что при $n > N$ будет $\frac{n+1}{nq} < 1$. Таким образом, при $n > N$ будем иметь $x_{n+1} < x_n$, т. е. после члена x_N наша последовательность монотонно убывает. Поскольку конечное число членов последовательности, как видно из определения предела, не влияет на сходимость последовательности и ее предел, то достаточно теперь найти предел последовательности $x_{N+1} > x_{N+2} > \ldots$

Члены последовательности положительны, т. е. последовательность ограничена снизу. Значит, она имеет предел.

Пусть $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Из соотношения $x_{n+1} = \frac{n+1}{nq} x_n$ теперь следует

$$x = \lim_{n\to\infty} (x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{nq} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{q} x,$$

откуда находим $\left(1 - \frac{1}{q}\right) x = 0$ и $x = 0$. ►

Следствие 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

◄ При фиксированном $\varepsilon > 0$ по доказанному найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > N$ будем иметь $1 \leqslant n < (1+\varepsilon)^n$. Тогда при $n > N$ получим $1 \leqslant \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ и, значит, действительно $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ►

Следствие 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ *при любом* $a > 0$.

◄ Пусть $a \geqslant 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем $N \in \mathbb{N}$ так, что при $n > N$ $1 \leqslant a < (1+\varepsilon)^n$, и тогда при $n > N$ получаем $1 \leqslant \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Если $0 < a < 1$, то $1 < \frac{1}{a}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1. \ ►$$

Пример 12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$; здесь q — любое действительное число, $n \in \mathbb{N}$, $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

◄ Если $q = 0$, то утверждение очевидно. Далее, поскольку $\left|\frac{q^n}{n!}\right| = \frac{|q|^n}{n!}$, то достаточно доказать утверждение для $q > 0$. Рассуждая в этом случае, как и в предыдущем, замечаем, что $x_{n+1} = \frac{q}{n+1} x_n$. Поскольку множество натуральных чисел не ограничено сверху, найдется номер N такой, что при $n > N$ будет $0 < \frac{q}{n+1} < 1$. Тогда при $n > N$ будем иметь $x_{n+1} < x_n$ и, учитывая положительность членов последовательности, можно теперь гарантировать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Но тогда

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n+1} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \cdot x = 0. \ ►$$

c. Число e

Пример 13. Докажем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Пределом в данном случае является число, обозначаемое после Эйлера буквой e, столь же характерное для анализа, как для арифметики 1 или для геометрии π. К нему мы еще неоднократно будем возвращаться по очень разным поводам.

Проверим сначала следующее неравенство:

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha \quad \text{при } n\in\mathbb{N} \text{ и } \alpha\geqslant -1$$

(называемое иногда неравенством Я. Бернулли[1]).

◄ При $n=1$ утверждение справедливо. Если оно справедливо для $n\in\mathbb{N}$, то и для $n+1$ тоже, поскольку тогда

$$(1+\alpha)^{n+1}=(1+\alpha)(1+\alpha)^n\geqslant(1+\alpha)(1+n\alpha)=1+(n+1)\alpha+n\alpha^2\geqslant 1+(n+1)\alpha.$$

По принципу индукции утверждение, таким образом, справедливо для любого $n\in\mathbb{N}$.

Из выкладки, кстати, видно, что при $\alpha\neq 0$ имеет место строгое неравенство. ►

Покажем теперь, что последовательность $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывающая.

◄ Пусть $n\geqslant 2$. Используя доказанное неравенство, находим, что

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\frac{n}{n+1}\geqslant$$
$$\geqslant\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1}=1.$$

Поскольку члены последовательности положительны, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \ ►$$

Итак,

Определение 10.

$$\boxed{e:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.}$$

[1] Якоб Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик, представитель знаменитого семейства ученых Бернулли; стоял у истоков вариационного исчисления и теории вероятностей.

d. Подпоследовательность и частичный предел последовательности

Определение 11. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — некоторая последовательность, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$.

Например, последовательность 1, 3, 5, … нечетных натуральных чисел, взятых в их естественном порядке, является подпоследовательностью последовательности 1, 2, 3, … Но последовательность 3, 1, 5, 7, 9, … уже не является подпоследовательностью последовательности 1, 2, 3, …

Лемма 1 (Больцано—Вейерштрасс). *Каждая ограниченная последовательность действительных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность.*

◄ Пусть E — множество значений ограниченной последовательности $\{x_n\}$. Если E конечно, то существуют по крайней мере одна точка $x \in E$ и последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$ номеров такие, что $x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x$. Подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ постоянна и, значит, сходится.

Если E бесконечно, то по принципу Больцано—Вейерштрасса оно обладает по крайней мере одной предельной точкой x. Поскольку x — предельная точка E, можно выбрать $n_1 \in \mathbb{N}$ так, что $|x_{n_1} - x| < 1$. Если $n_k \in \mathbb{N}$ уже выбрано так, что $|x_{n_k} - x| < \frac{1}{k}$, то, учитывая, что x — предельная точка E, найдем $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ так, что $n_k < n_{k+1}$ и $|x_{n_{k+1}} - x| < \frac{1}{k+1}$.

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, построенная подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ сходится к x. ►

Определение 12. Условимся писать $x_n \to +\infty$ и говорить, что *последовательность $\{x_n\}$ стремится к плюс бесконечности*, если для каждого числа c найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $x_n > c$ при любом $n > N$.

Запишем это и два аналогичных определения в логических обозначениях:

$$(x_n \to +\infty) := \forall c \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (c < x_n),$$
$$(x_n \to -\infty) := \forall c \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (x_n < c),$$
$$(x_n \to \infty) := \forall c \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ (c < |x_n|).$$

В последних двух случаях говорят соответственно: *последовательность $\{x_n\}$ стремится к минус бесконечности* и *последовательность $\{x_n\}$ стремится к бесконечности*.

Заметим, что последовательность может быть неограниченной, но не стремиться ни к плюс, ни к минус, ни просто к бесконечности. Например, $x_n = n^{(-1)^n}$.

Последовательности, стремящиеся к бесконечности, мы не причисляем к сходящимся.

Легко видеть, что в соответствии с этими определениями можно дополнить только что доказанную лемму, сформулировав ее несколько иначе.

Лемма 2. *Из каждой последовательности действительных чисел можно извлечь сходящуюся подпоследовательность или подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности.*

◄ Новым является только тот случай, когда последовательность $\{x_n\}$ не ограничена. Тогда по $k \in \mathbb{N}$ будем выбирать $n_k \in \mathbb{N}$ так, что $|x_{n_k}| > k$ и $n_k < n_{k+1}$. Получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая стремится к бесконечности. ►

Пусть $\{x_k\}$ — произвольная последовательность действительных чисел. Если она ограничена снизу, то можно рассмотреть (уже встречавшуюся нам при доказательстве критерия Коши) последовательность $i_n = \inf\limits_{k \geqslant n} x_k$. Поскольку $i_n \leqslant i_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то либо последовательность $\{i_n\}$ имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = l$, либо $i_n \to +\infty$.

Определение 13. Число $l = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$ называется *нижним пределом последовательности* $\{x_k\}$ и обозначается $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k$ или $\liminf\limits_{k\to\infty} x_k$. Если $i_n \to +\infty$, то принято говорить, что нижний предел последовательности равен плюс бесконечности, и писать $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$ или $\liminf\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$. Если исходная последовательность $\{x_k\}$ не ограничена снизу, то при любом $n \in \mathbb{N}$ будем иметь $i_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k = -\infty$. В этом случае говорят, что нижний предел последовательности равен минус бесконечности, и пишут $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$ или $\liminf\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$.

Итак, с учетом всех перечисленных возможностей запишем теперь кратко определение нижнего предела последовательности $\{x_k\}$:

$$\boxed{\varliminf_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k.}$$

Аналогично, рассматривая последовательность $s_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$, приходим к определению верхнего предела последовательности $\{x_k\}$.

Определение 14.

$$\boxed{\varlimsup_{k\to\infty} x_k := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k.}$$

Приведем несколько примеров.

Пример 14. $x_k = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\varliminf_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1,$$
$$\varlimsup_{k\to\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Пример 15. $x_k = k^{(-1)^k}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$
$$\overline{\lim}_{k\to\infty} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} k^{(-1)^k} = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty.$$

Пример 16. $x_k = k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} k = \lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$
$$\overline{\lim}_{k\to\infty} k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} k = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty.$$

Пример 17. $x_k = \frac{(-1)^k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \left\{\begin{matrix} -\frac{1}{n}, & \text{если } n = 2m+1 \\ -\frac{1}{n+1}, & \text{если } n = 2m \end{matrix}\right\} = 0,$$

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \left\{\begin{matrix} \frac{1}{n}, & \text{если } n = 2m \\ \frac{1}{n+1}, & \text{если } n = 2m+1 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Пример 18. $x_k = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} (-k^2) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} (-k^2) = -\infty.$$

Пример 19. $x_k = (-1)^k k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} (-1)^k k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} (-1)^k k = \lim_{n\to\infty} (-\infty) = -\infty,$$
$$\overline{\lim}_{k\to\infty} (-1)^k k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} (-1)^k k = \lim_{n\to\infty} (+\infty) = +\infty.$$

Чтобы разобраться в происхождении терминов «верхний» и «нижний» пределы последовательности, введем следующее

Определение 15. Число (или символ $-\infty$ или $+\infty$) называют *частичным пределом* последовательности, если в ней есть подпоследовательность, стремящаяся к этому числу.

Утверждение 1. *Нижний и верхний пределы ограниченной последовательности являются соответственно наименьшим и наибольшим из ее частичных пределов*[1].

◄ Докажем это, например, для нижнего предела $i = \underline{\lim}_{k\to\infty} x_k$. Про последовательность $i_n = \inf_{k\geqslant n} x_k$ нам известно, что она неубывающая и $\lim_{n\to\infty} i_n = i \in \mathbb{R}$.

---

[1]При этом считаются принятыми естественные соотношения $-\infty < x < +\infty$ между символами $-\infty$, $+\infty$ и числами $x \in \mathbb{R}$.

Для чисел $n \in \mathbb{N}$, используя определение нижней грани, по индукции подберем числа $k_n \in \mathbb{N}$ так, что $k_n < k_{n+1}$ и $i_{k_n} \leqslant x_{k_n} < i_{k_n} + \frac{1}{n}$. (Взяв i_1, найдем k_1; взяв i_{k_1+1}, найдем k_2; и т. д.) Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(i_n + \frac{1}{n}\right) = i$, то, опираясь на свойства предела, можем утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = i$. Мы доказали, что i — частичный предел последовательности $\{x_k\}$. Это наименьший частичный предел, поскольку для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $i - \varepsilon < i_n$, т. е. $i - \varepsilon < i_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k \leqslant x_k$ при любом $k \geqslant n$.

Неравенство $i - \varepsilon < x_k$ при $k > n$ означает, что ни один частичный предел нашей последовательности не может быть меньше $i - \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ произвольно, поэтому он также не может быть меньше i.

Для верхнего предела доказательство, разумеется, аналогично проведенному. ►

Заметим теперь, что если последовательность не ограничена снизу, то из нее можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $-\infty$. Но в этом случае и $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$ и можно условиться считать, что снова нижний предел есть наименьший из частичных пределов. Верхний предел при этом может быть конечным, и тогда по доказанному он является наибольшим из частичных пределов; он может быть и бесконечным. Если $\varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, то последовательность не ограничена также и сверху и можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$. Если же $\varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$, что тоже возможно, то это означает, что $\sup\limits_{k\geqslant n} x_k = s_n \to -\infty$, т. е. и сама последовательность $\{x_k\}$ стремится к $-\infty$, ибо $s_n \geqslant x_n$. Аналогично, если $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, то $x_k \to +\infty$.

Учитывая сказанное, можно, таким образом, заключить, что справедливо

Утверждение 1′. *Для любой последовательности нижний предел есть наименьший из ее частичных пределов, а верхний предел последовательности — наибольший из ее частичных пределов.*

Следствие 1. *Последовательность имеет предел или стремится к минус или плюс бесконечности в том и только в том случае, когда нижний и верхний пределы последовательности совпадают.*

◄ Случай, когда $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = \varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, и случай, когда $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = \varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = -\infty$, уже разобраны выше, поэтому можно считать, что $\varliminf\limits_{k\to\infty} x_k = \varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k = A \in \mathbb{R}$. Поскольку $i_n = \inf\limits_{k\geqslant n} x_k \leqslant x_n \leqslant \sup\limits_{k\geqslant n} x_k = s_n$ и по условию $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$, то по свойствам предела также $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. ►

Следствие 2. *Последовательность сходится тогда и только тогда, когда сходится любая ее подпоследовательность.*

◄ Нижний и верхний пределы подпоследовательности заключены между нижним и верхним пределами самой последовательности. Если последовательность сходится, то ее нижний и верхний пределы совпадают. Тогда совпадают нижний и верхний пределы подпоследовательности, откуда вытекает ее сходимость, причем, разумеется, к пределу всей последовательности.

Обратное утверждение очевидно, поскольку в качестве подпоследовательности можно взять саму последовательность. ►

Следствие 3. *Лемма Больцано—Вейерштрасса как в узкой, так и в расширенной формулировке вытекает из утверждения* 1 *и утверждения* 1′ *соответственно.*

◄ Действительно, если последовательность $\{x_k\}$ ограничена, то точки $i = \varliminf\limits_{k\to\infty} x_k$ и $s = \varlimsup\limits_{k\to\infty} x_k$ конечны и по доказанному являются частичными пределами последовательности. Только при $i = s$ последовательность имеет лишь одну предельную точку; при $i < s$ их уже по крайней мере две.

Если последовательность не ограничена с какой-то стороны, то существует подпоследовательность, стремящаяся к соответствующей бесконечности. ►

Заключительные замечания. Мы выполнили (и даже с некоторым превышением) все три пункта намеченной перед началом параграфа программы: дали точное определение предела последовательности, доказали единственность предела, выяснили связь операции предельного перехода со структурой множества действительных чисел, получили критерий сходимости последовательности.

Теперь рассмотрим один специальный часто встречающийся и очень полезный вид последовательностей — ряды.

4. Начальные сведения о рядах

a. Сумма ряда и критерий Коши сходимости ряда. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел. Напомним, что сумму $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$ ($p \leqslant q$) принято обозначать символом $\sum\limits_{n=p}^{q} a_n$. Мы хотим теперь придать точный смысл выражению $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, подразумевающему суммирование всех членов последовательности $\{a_n\}$.

Определение 16. Выражение $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ обозначают символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и обычно называют *рядом* или *бесконечным рядом* (чтобы подчеркнуть отличие его от суммы конечного числа слагаемых).

Определение 17. Элементы последовательности $\{a_n\}$, рассматриваемые как элементы ряда, называют *членами ряда*; элемент a_n называют *n-м членом ряда*.

Определение 18. Сумму $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ называют *частичной суммой ряда* или, когда желают указать ее номер, n-й *частичной суммой ряда*[1].

Определение 19. Если последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм ряда сходится, то ряд называется *сходящимся*. Если последовательность $\{s_n\}$ не имеет предела, то ряд называют *расходящимся*.

Определение 20. Предел $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ последовательности частичных сумм, если он существует, называется *суммой ряда*.

Именно в этом смысле мы и будем в дальнейшем понимать запись

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Поскольку сходимость ряда равносильна сходимости последовательности его частичных сумм $\{s_n\}$, то применением к $\{s_n\}$ критерия Коши сразу получается

Теорема 6 (критерий Коши сходимости ряда). *Ряд $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N \in \mathbb{N}$, что из $m \geqslant n > N$ следует $|a_n + \ldots + a_m| < \varepsilon$.*

Следствие 1. *Если в ряде изменить только конечное число членов, то получающийся при этом новый ряд будет сходиться, если сходился исходный ряд, и будет расходиться, если исходный ряд расходился.*

◄ Для доказательства достаточно в критерии Коши считать число N превышающим максимальный из номеров измененных членов ряда. ►

Следствие 2. *Для того чтобы ряд $a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ сходился, необходимо, чтобы его члены стремились к нулю при $n \to \infty$, т. е. необходимо $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

◄ Достаточно положить в критерии $m = n$ и воспользоваться определением предела последовательности. ►

Вот другое доказательство: $a_n = s_n - s_{n-1}$ и, коль скоро $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, имеем $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

Пример 20. Ряд $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$ часто называют суммой бесконечной геометрической прогрессии. Исследуем его сходимость.

Поскольку $|q^n| = |q|^n$, то при $|q| \geqslant 1$ будет $|q^n| \geqslant 1$ и в этом случае не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Пусть теперь $|q| < 1$. Тогда

$$s_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

и $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$, поскольку $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$.

---

[1] Таким образом, на самом деле под рядом мы подразумеваем упорядоченную пару $(\{a_n\}, \{s_n\})$ последовательностей, связанных соотношением $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left(s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ сходится тогда и только тогда, когда $|q|<1$ и в этом случае его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

Пример 21. Ряд $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ называется гармоническим, поскольку каждый член этого ряда, начиная со второго, является средним гармоническим соседних с ним членов (см. задачу 6 в конце этого параграфа).

Члены ряда стремятся к нулю, но последовательность его частичных сумм

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n},$$

как было показано с помощью критерия Коши в примере 10, расходится. Это означает в данном случае, что $s_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Итак, гармонический ряд расходится.

Пример 22. Рассмотрим теперь следующий пример.

Ряд $1-1+1-\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots$ расходится, что видно и по последовательности $1, 0, 1, 0, \ldots$ его частичных сумм, и по тому, что члены ряда не стремятся к нулю.

Если расставить скобки и рассмотреть новый ряд

$$(1-1)+(1-1)+\ldots,$$

членами которого являются суммы, заключенные в скобки, то этот новый ряд уже сходится, причем его сумма, очевидно, равна нулю.

Если скобки расставить иначе и рассмотреть ряд

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots,$$

то получится сходящийся ряд с суммой, равной 1.

Если в исходном ряде переставить все члены, равные -1, на две позиции вправо, то получим ряд

$$1+1-1+1-1+1-\ldots,$$

расставив в котором скобки, придем к ряду

$$(1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots,$$

сумма которого равна двум.

Эти наблюдения показывают, что привычные законы обращения с конечными суммами, вообще говоря, не распространяются на ряды.

И все-таки есть важный тип рядов, с которыми, как это потом выяснится, можно обращаться так же, как с конечными суммами. Это так называемые абсолютно сходящиеся ряды. Именно с ними мы главным образом и будем работать.

b. Абсолютная сходимость; теорема сравнения и ее следствия

Определение 21. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно* сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Поскольку $|a_n+\ldots+a_m| \leqslant |a_n|+\ldots+|a_m|$, из критерия Коши следует, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

То, что обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места, т. е. что абсолютная сходимость есть требование более сильное, чем просто сходимость ряда, можно продемонстрировать на примере.

Пример 23. Ряд $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots$, частичные суммы которого равны либо $\frac{1}{n}$, либо 0, сходится к нулю.

Вместе с тем ряд из абсолютных величин его членов

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots$$

расходится, что, как и для гармонического ряда, следует из критерия Коши:

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}\right| = 2\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right) > 2n\cdot\frac{1}{n+n} = 1.$$

Для того чтобы научиться отвечать на вопрос, сходится ли ряд абсолютно или нет, достаточно научиться исследовать на сходимость ряды с неотрицательными членами. Имеет место

Теорема 7 (критерий сходимости рядов с неотрицательными членами). *Ряд $a_1+\ldots+a_n+\ldots$, члены которого — неотрицательные числа, сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.*

◄ Это следует из определения сходимости ряда и критерия сходимости неубывающей последовательности, каковой в данном случае является последовательность $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \ldots$ частичных сумм нашего ряда. ►

Из этого критерия вытекает следующая простая, но на практике очень полезная

Теорема 8 (теорема сравнения). *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряда с неотрицательными членами. Если существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ имеет место неравенство $a_n \leqslant b_n$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

◄ Поскольку конечное число членов не влияет на сходимость ряда, можно без ограничения общности считать, что $a_n \leqslant b_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = B_n$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то последовательность $\{B_n\}$,

не убывая, стремится к пределу B. Тогда $A_n \leqslant B_n \leqslant B$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, последовательность $\{A_n\}$ частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена. В силу критерия сходимости ряда с неотрицательными членами (теорема 7) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Второе утверждение теоремы, рассуждая от противного, немедленно получаем из уже доказанного. ►

Пример 24. Поскольку $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$ при $n \geqslant 2$, по теореме сравнения заключаем, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходятся или расходятся одновременно.

Но последний ряд можно просуммировать непосредственно, заметив, что $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$ и поэтому $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Значит, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ также является сходящимся. Любопытно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. В дальнейшем это будет доказано.

Пример 25. Следует обратить внимание на то, что теорема сравнения относится только к рядам с неотрицательными членами. Действительно, положим, например, $a_n = -n$, а $b_n = 0$, тогда $a_n < b_n$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Следствие 1 (мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной сходимости ряда). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— два ряда. Пусть существует номер* $N \in \mathbb{N}$ *такой, что при любом* $n > N$ *имеет место соотношение* $|a_n| \leqslant b_n$. *При этих условиях для абсолютной сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *достаточно, чтобы ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходился.*

◄ Действительно, по теореме сравнения тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ будет сходиться, что и означает абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ►

Этот важный достаточный признак абсолютной сходимости часто формулируют кратко: *если члены ряда* (по абсолютной величине) *мажорируются членами сходящегося числового ряда, то исходный ряд сходится абсолютно.*

Пример 26. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ абсолютно сходится, так как $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, как мы выяснили в примере 24, сходится.

Следствие 2 (признак Коши). *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — *данный ряд и* $\alpha = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

a) *если* $\alpha < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится*;

b) *если* $\alpha > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится*;

c) *существуют как абсолютно сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых* $\alpha = 1$.

◄ a) Если $\alpha < 1$, то можно выбрать число $q \in \mathbb{R}$ так, что $\alpha < q < 1$. Фиксировав число q, в соответствии с определением верхнего предела найдем номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при $n > N$ выполнено $\sqrt[n]{|a_n|} < q$. Таким образом, при $n > N$ будем иметь $|a_n| < q^n$ и, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ при $|q| < 1$ сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (по теореме сравнения или признаку Вейерштрасса) сходится абсолютно.

b) Поскольку α является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$ (см. утверждение 1), то найдется подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = \alpha$. Если $\alpha > 1$, то найдется номер $K \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $k > K$ будет $|a_{n_k}| > 1$, тем самым необходимое условие сходимости ($a_n \to 0$) для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не выполнено и он расходится.

c) Мы уже знаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (абсолютно, так как $\left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$). Вместе с тем $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1. \ ►$$

Пример 27. Исследуем, при каких значениях $x \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n x^n$$

сходится.

Подсчитаем $\alpha = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(2 + (-1)^n)^n x^n|} = |x| \varlimsup\limits_{n\to\infty} |2 + (-1)^n| = 3|x|$. Таким образом, при $|x| < \frac{1}{3}$ ряд сходится и даже абсолютно, а при $|x| > \frac{1}{3}$ ряд расходится. Случай $|x| = \frac{1}{3}$ требует специального рассмотрения. В нашем примере оно элементарно, ибо при $|x| = \frac{1}{3}$ для четных значений n имеем $(2 + (-1)^{2k})x^{2k} = 3^{2k}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k} = 1$ и ряд расходится, поскольку для него не выполнено необходимое условие сходимости.

Следствие 3 (признак Даламбера[1]). *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

a) *если* $\alpha < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно*;

b) *если* $\alpha > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится*;

c) *существуют как абсолютно сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых* $\alpha = 1$.

◄ a) Если $\alpha < 1$, то найдется такое число q, что $\alpha < q < 1$; фиксировав q и учитывая свойства предела, найдем номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > N$ будет $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$. Поскольку конечное число членов не влияет на характер сходимости ряда, без ограничения общности будем считать, что $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Поскольку

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_2}{a_1}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_1}\right|,$$

мы получаем, что $|a_{n+1}| \leqslant |a_1| \cdot q^n$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_1| q^n$ сходится (его сумма, очевидно, равна $\frac{|a_1|}{1-q}$), поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится.

b) Если $\alpha > 1$, то, начиная с некоторого номера $N \in \mathbb{N}$, при любом $n > N$ будем иметь $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, т. е. $|a_n| < |a_{n+1}|$, и, следовательно, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не выполнено условие $a_n \to 0$, необходимое для сходимости.

c) Примерами в данном случае, как и в признаке Коши, могут служить ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ►

Пример 28. Выясним, при каких значениях $x \in \mathbb{R}$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

При $x = 0$ он, очевидно, сходится и даже абсолютно.

При $x \neq 0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$.

Таким образом, этот ряд абсолютно сходится при любом значении $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим, наконец, еще один более специальный, но часто встречающийся класс рядов: ряды, члены которых образуют монотонную последова-

[1]Ж. Л. Даламбер (д'Аламбер) (1717—1783) — французский ученый, прежде всего механик, входивший в группу философов-энциклопедистов.

тельность. Для таких рядов имеет место следующий необходимый и достаточный признак сходимости.

Утверждение 2 (Коши). *Если* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$

◄ Поскольку

$$\begin{gathered} a_2 \leqslant a_2 \leqslant a_1, \\ 2a_4 \leqslant a_3 + a_4 \leqslant 2a_2, \\ 4a_8 \leqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leqslant 4a_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2^n a_{2^{n+1}} \leqslant a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}} \leqslant 2^n a_{2^n}, \end{gathered}$$

то, складывая эти неравенства, получим

$$\frac{1}{2}(S_{n+1} - a_1) \leqslant A_{2^{n+1}} - a_1 \leqslant S_n,$$

где $A_k = a_1 + \ldots + a_k$, $S_n = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^n a_{2^n}$ — частичные суммы рассматриваемых рядов. Последовательности $\{A_k\}$ и $\{S_n\}$ неубывающие, и потому из полученных неравенств можно заключить, что они либо одновременно ограничены, либо одновременно не ограничены сверху. Но по критерию сходимости рядов с неотрицательными членами отсюда следует, что рассматриваемые два ряда действительно сходятся или расходятся одновременно. ►

Отсюда вытекает полезное

Следствие. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *сходится при* $p > 1$ *и расходится при* $p \leqslant 1$.[1]

◄ Если $p \geqslant 0$, то по доказанному наш ряд сходится или расходится вместе с рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k,$$

а для сходимости последнего ряда необходимо и достаточно, чтобы было $q = 2^{1-p} < 1$, т. е. $p > 1$.

Если $p \leqslant 0$, то расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ очевидна, поскольку в этом случае все члены ряда больше 1. ►

Важность этого следствия состоит в том, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ часто служит основой для сравнения при исследовании сходимости рядов.

---

[1] Формально в нашей книге мы пока определили n^p только для рациональных значений p, поэтому читатель тоже пока вправе понимать это утверждение только для тех p, для которых определено n^p.

c. Число *e* как сумма ряда. Заканчивая рассмотрение рядов, вернемся еще раз к числу e и получим ряд, доставляющий уже довольно удобный способ вычисления e.

Мы будем использовать формулу бинома Ньютона при разложении выражения $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Те, кто не знаком с этой формулой из школы или не решил задачу 1g) из гл. II, § 2, могут, без потери связности изложения, опустить настоящее добавление о числе e и вернуться к нему после формулы Тейлора, частным случаем которой можно считать формулу бинома Ньютона.

Нам известно, что $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

По формуле бинома Ньютона

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$
$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Полагая $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e_n$ и $1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}=s_n$, таким образом, имеем $e_n<s_n$ $(n=1, 2, \ldots)$.

С другой стороны, при любом фиксированном k и $n\geqslant k$, как видно из того же разложения, имеем

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<e_n.$$

При $n\to\infty$ левая часть этого неравенства стремится к s_k, а правая — к e, поэтому мы теперь можем заключить, что $s_k\leqslant e$ для любого $k\in\mathbb{N}$.

Но тогда из соотношения

$$e_n<s_n\leqslant e$$

при $n\to\infty$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=e$.

В соответствии с определением суммы ряда мы теперь можем записать

$$\boxed{e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots}$$

Это уже вполне пригодное для вычисления представление числа e.

Оценим разность $e-s_n$:

$$0<e-s_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right]<$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right]=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{n+2}{n!(n+1)^2}<\frac{1}{n!\,n}.$$

Таким образом, чтобы абсолютная погрешность приближения числа e числом s_n не превосходила, например, 10^{-3}, достаточно, чтобы было $\frac{1}{n!\,n}<$ $<\frac{1}{1000}$. Этому условию удовлетворяет уже s_6.

Выпишем несколько первых десятичных знаков числа e:

$$e = 2{,}7182818284590\ldots$$

Полученную оценку разности $e - s_n$ можно записать в виде равенства

$$e = s_n + \frac{\theta_n}{n!\,n}, \quad \text{где } 0 < \theta_n < 1.$$

Из такого представления числа e немедленно следует его иррациональность. В самом деле, если предположить, что $e = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$, то число $q!\,e$ должно быть целым, а вместе с тем

$$q!\,e = q!\left(s_q + \frac{\theta_q}{q!\,q}\right) = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \ldots + \frac{q!}{q!} + \frac{\theta_q}{q}$$

и тогда число $\frac{\theta_q}{q}$ тоже должно быть целым, что невозможно.

Для сведения читателя отметим, что число e не только иррационально, но даже трансцендентно.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что число $x \in \mathbb{R}$ рационально тогда и только тогда, когда его запись в любой q-ичной системе счисления периодична, т. е., начиная с некоторого разряда, состоит из периодически повторяющейся группы цифр.

2. Мяч, упав с высоты h, подскакивает на высоту qh, где q — постоянный коэффициент, $0 < q < 1$. Найти время, за которое он окажется покоящимся на земле, и путь, который он к этому моменту пролетит.

3. На окружности отмечаются точки, получающиеся из некоторой фиксированной ее точки поворотами окружности на всевозможные углы в $n \in \mathbb{Z}$ радиан. Укажите все предельные точки построенного множества.

4. Выражение

$$n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots \cfrac{1}{n_{k-1} + \cfrac{1}{n_k}}}},$$

где $n_i \in \mathbb{N}$, называется конечной *цепной* или *непрерывной дробью*, а выражение

$$n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \ddots}}$$

— бесконечной цепной дробью. Дроби, получающиеся из цепной дроби при отбрасывании всех ее звеньев, начиная с некоторого звена, называют *подходящими дробями*. Бесконечной цепной дроби в качестве значения сопоставляется предел последовательности ее подходящих дробей.

Покажите, что:

a) Каждое рациональное число $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$, может быть разложено и притом единственным способом в конечную цепную дробь

$$\frac{m}{n} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}},$$

считая, что $q_n \neq 1$ при $n > 1$.

Указание. Числа $q_1, \dots, q_n$, называемые неполными частными, получаются из алгоритма Евклида

$$\begin{aligned} m &= n \cdot q_1 + r_1, \\ n &= r_1 \cdot q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

если его записать в виде

$$\frac{m}{n} = q_1 + \frac{1}{n/r_1} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}.$$

b) Подходящие дроби $R_1 = q_1$, $R_2 = q_1 + \frac{1}{q_2}$, … удовлетворяют неравенствам

$$R_1 < R_3 < \ldots < R_{2k-1} < \frac{m}{n} < R_{2k} < R_{2k-2} < \ldots < R_2.$$

c) Числители P_k и знаменатели Q_k подходящих дробей R_k формируются по закону

$$\begin{aligned} P_k &= P_{k-1}q_k + P_{k-2}, \quad & P_2 &= q_1 q_2, \quad & P_1 &= q_1, \\ Q_k &= Q_{k-1}q_k + Q_{k-2}, \quad & Q_2 &= q_2, \quad & Q_1 &= 1. \end{aligned}$$

d) Разность соседних подходящих дробей вычисляется по формуле

$$R_k - R_{k-1} = \frac{(-1)^k}{Q_k Q_{k-1}} \quad (k > 1).$$

e) Каждая бесконечная цепная дробь имеет определенное значение.

f) Значение бесконечной цепной дроби иррационально.

g) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$.

h) Числа Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, … (т. е. $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ и $u_1 = u_2 = 1$), получающиеся как знаменатели подходящих дробей в g), задаются формулой

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

i) Подходящие дроби $R_k = \frac{P_k}{Q_k}$ в g) таковы, что $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{P_k}{Q_k}\right| > \frac{1}{Q_k^2\sqrt{5}}$. Сравните этот результат с утверждениями задачи 11, § 2, гл. II.

5. Покажите, что

a) при $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!\,n} = 3 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2!} - \ldots - \frac{1}{(n-1)n \cdot n!};$$

b) $e = 3 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+2)!}$;

c) для приближенного вычисления числа e значительно лучше формула $e \approx 1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{n!\,n}$, а не исходная формула $e \approx 1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ (оцените погрешности, посчитайте и сравните результат со значением e, приведенным на с. 96).

6. Если a и b — положительные числа, а p — произвольное отличное от нуля вещественное число, то *средним порядка* p чисел a и b называется величина

$$S_p(a, b) = \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}.$$

В частности, получаем при $p = 1$ среднее арифметическое, при $p = 2$ — среднее квадратическое, при $p = -1$ — среднее гармоническое чисел a, b.

a) Покажите, что среднее $S_p(a, b)$ любого порядка заключено между числами a и b.

b) Найдите пределы последовательностей

$$\{S_n(a, b)\}, \quad \{S_{-n}(a, b)\}.$$

7. Покажите, что если $a > 0$, то последовательность $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(x_n + \dfrac{a}{x_n}\Big)$ при любом $x_1 > 0$ сходится к арифметическому квадратному корню из a.

Оцените скорость сходимости, т. е. величину абсолютной погрешности $|x_n - \sqrt{a}| = |\Delta_n|$ в зависимости от n.

8. Покажите, что

a)

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= 1^0 + \ldots + n^0 = n,\\
S_1(n) &= 1^1 + \ldots + n^1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,\\
S_2(n) &= 1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,\\
S_3(n) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2,
\end{aligned}$$

и вообще

$$S_k(n) = a_{k+1}n^{k+1} + \ldots + a_1 n + a_0$$

— многочлен от n степени $k + 1$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_k(n)}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$.

§ 2. Предел функции

1. Определения и примеры. Пусть E — некоторое подмножество множества $\mathbb{R}$ действительных чисел и a — предельная точка множества E. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на E.

Мы хотим записать, что значит, что при приближении точки $x \in E$ к a значения $f(x)$ функции f приближаются к некоторому числу A, которое естественно назвать пределом значений функции f или пределом функции f при x, стремящемся к a.

Определение 1. Будем (следуя Коши) говорить, что *функция* $f: E \to \mathbb{R}$ *стремится к A при x, стремящемся к a*, или что *A является пределом функции f при x, стремящемся к a*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in E$ такой, что $0 < |x - a| < \delta$, выполнено соотношение $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В логической символике сформулированные условия запишутся в виде

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Если A — предел функции $f(x)$ при x, стремящемся по множеству E к точке a, то пишут $f(x) \to A$ при $x \to a$, $x \in E$, или $\lim\limits_{x \to a,\, x \in E} f(x) = A$. Вместо символа $x \to a$, $x \in E$, мы, как правило, будем использовать более короткое обозначение $E \ni x \to a$ и вместо $\lim\limits_{x \to a,\, x \in E} f(x)$ будем писать $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$.

Пример 1. Пусть $E = \mathbb{R} \setminus 0$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. Проверим, что

$$\lim_{E \ni x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Действительно, при заданном $\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \varepsilon$, тогда при $0 < |x| < \delta = \varepsilon$, учитывая, что $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$, будем иметь $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$.

Из этого примера, кстати, видно, что функция $f: E \to \mathbb{R}$ может иметь предел при $E \ni x \to a$, даже не будучи определенной в самой точке a. Как раз эта ситуация чаще всего имеет место при вычислении пределов и, если вы обратили внимание, это обстоятельство учтено в определении предела в виде неравенства $0 < |x - a|$.

Напомним, что окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ мы назвали любой интервал, содержащий эту точку.

Определение 2. *Проколотой окрестностью* точки называется окрестность точки, из которой исключена сама эта точка.

Если $U(a)$ — обозначение окрестности точки a, то проколотую окрестность этой точки будем обозначать символом $\overset{\circ}{U}(a)$.

Множества

$$U_E(a) := E \cap U(a),$$
$$\overset{\circ}{U}_E(a) := E \cap \overset{\circ}{U}(a)$$

будем называть соответственно *окрестностью* и *проколотой окрестностью точки a в множестве E*.

Если a — предельная точка E, то $\overset{\circ}{U}_E(a) \neq \varnothing$, какова бы ни была окрестность $U(a)$.

Если на минуту принять громоздкие символы $\overset{\circ}{U}{}^{\delta}_E(a)$ и $V^{\varepsilon}_{\mathbb{R}}(A)$ для обозначения проколотой δ-окрестности точки a в множестве E и ε-окрестности точки A в $\mathbb{R}$, то приведенное выше так называемое «ε-δ-определение» Коши предела функции можно переписать в виде

$$\Bigl(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = A\Bigr) := \forall V^{\varepsilon}_{\mathbb{R}}(A)\ \exists \overset{\circ}{U}{}^{\delta}_E(a)\ \bigl(f(\overset{\circ}{U}{}^{\delta}_E(a)) \subset V^{\varepsilon}_{\mathbb{R}}(A)\bigr).$$

Эта запись говорит, что A является пределом функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ при x, стремящемся к a по множеству E, если для любой ε-окрестности $V^\varepsilon_{\mathbb{R}}(A)$ точки A найдется проколотая δ-окрестность $\mathring{U}^\delta_E(a)$ точки a в множестве E, образ которой $f(\mathring{U}^\delta_E(a))$ при отображении $f\colon E \to \mathbb{R}$ полностью содержится в окрестности $V^\varepsilon_{\mathbb{R}}(A)$.

Учитывая, что в любой окрестности точки числовой оси содержится также некоторая симметричная окрестность (δ-окрестность) этой же точки, мы теперь приходим к следующей форме записи определения предела, которую и будем считать основной.

Определение 3.

$$\boxed{\Big(\lim_{E\ni x\to a} f(x) = A\Big) := \forall V_{\mathbb{R}}(A)\ \exists \mathring{U}_E(a)\ \big(f(\mathring{U}_E(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A)\big).}$$

Итак, число A называется пределом функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ при x, стремящемся по множеству E к точке a (предельной для E), если для любой окрестности точки A найдется проколотая окрестность точки a в множестве E, образ которой при отображении $f\colon E \to \mathbb{R}$ содержится в заданной окрестности точки A.

Мы привели несколько формулировок определения предела функции. Для числовых функций, когда $a, A \in \mathbb{R}$, как мы видели, эти формулировки эквивалентны. Вместе с тем для разных целей бывает удобна то одна, то другая из них. Например, при численных оценках удобна исходная форма, указывающая допустимую величину отклонения x от a, при которой уклонение $f(x)$ от A не превысит заданной величины. А вот с точки зрения распространения понятия предела на более общие функции, определенные не на числовом множестве, наиболее удобной является последняя формулировка, которую мы и выделили. Из нее, кстати, видно, что мы сможем определить понятие предела отображения $f\colon X \to Y$, если нам будет сказано, что такое окрестность точки в X и в Y, или, как говорят, если в X и Y будет задана *топология*.

Рассмотрим еще некоторые, поясняющие основное определение примеры.

Пример 2. Функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0,\\ 0 & \text{при } x = 0,\\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

(читается «сигнум x»[1]) определена на всей числовой оси. Покажем, что у нее нет предела при x, стремящемся к 0.

Это значит, что

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists V(A)\ \forall \mathring{U}(0)\ \exists x \in \mathring{U}(0)\ (f(x) \notin V(A)),$$

[1] Signum (*лат.*) — знак.

т. е., какое бы A (претендующее на то, чтобы быть пределом $\operatorname{sgn} x$ при $x \to 0$) мы ни взяли, найдется такая окрестность $V(A)$ точки A, что, какую бы (малую) проколотую окрестность $\mathring{U}(0)$ точки 0 ни взять, в ней есть по крайней мере одна точка $x \in \mathring{U}(0)$, значение функции в которой не лежит в $V(A)$.

Поскольку функция $\operatorname{sgn} x$ принимает только значения -1, 0, 1, то ясно, что никакое число A, отличное от них, не может быть пределом функции, ибо оно имеет окрестность $V(A)$, не содержащую ни одно из этих трех чисел.

Если же $A \in \{-1, 0, 1\}$, то возьмем в качестве $V(A)$ ε-окрестность точки A при $\varepsilon = 1/2$. В такую окрестность заведомо не могут попасть одновременно обе точки -1 и 1. Но, какую бы проколотую окрестность $\mathring{U}(0)$ точки 0 ни взять, в ней есть как положительные, так и отрицательные числа, т. е. есть и точки x, где $f(x) = 1$, и точки, где $f(x) = -1$.

Значит, найдется точка $x \in \mathring{U}(0)$ такая, что $f(x) \notin V(A)$.

Условимся, если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ определена во всей проколотой окрестности некоторой точки $a \in \mathbb{R}$, т. е. когда $\mathring{U}_E(a) = \mathring{U}_{\mathbb{R}}(a) = \mathring{U}(a)$, вместо записи $E \ni x \to a$ употреблять более короткую запись $x \to a$.

Пример 3. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$.

Действительно, при $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ имеем $|\operatorname{sgn} x| = 1$, т. е. функция постоянна и равна 1 в любой проколотой окрестности $\mathring{U}(0)$ точки 0. Значит, для любой окрестности $V(1)$ получим $f(\mathring{U}(0)) = 1 \in V(1)$.

Обратите внимание, что хотя в данном случае функция $|\operatorname{sgn} x|$ и определена в самой точке 0 и $|\operatorname{sgn} 0| = 0$, но это значение не имеет никакого влияния на величину рассматриваемого предела.

Таким образом, не следует смешивать значение $f(a)$ функции в точке a с пределом $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ функции при x, стремящемся к a.

Пусть $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ — множества отрицательных и положительных чисел соответственно.

Пример 4. В примере 2 мы видели, что предел $\lim\limits_{\mathbb{R}\ni x\to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует. Замечая, однако, что ограничение $\operatorname{sgn}|_{\mathbb{R}_-}$ функции sgn на $\mathbb{R}_-$ есть постоянная функция, равная -1, а $\operatorname{sgn}|_{\mathbb{R}_+}$ есть постоянная, равная 1, можно, как и в примере 3, показать, что

$$\lim_{\mathbb{R}_-\ni x\to 0} \operatorname{sgn} x = -1, \qquad \lim_{\mathbb{R}_+\ni x\to 0} \operatorname{sgn} x = 1,$$

т. е. ограничение одной и той же функции на различные множества может иметь различные пределы в одной и той же точке или даже не иметь его, как это было в примере 2.

Пример 5. Развивая идею примера 2, можно аналогично показать, что функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Действительно, в любой проколотой окрестности $\mathring{U}(0)$ точки 0 всегда есть точки вида $\frac{1}{-\pi/2 + 2\pi n}$ и $\frac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$, где $n \in \mathbb{N}$, в которых функция принимает значения -1 и 1 соответственно. Но оба эти числа не могут одновре-

менно содержаться в ε-окрестности $V(A)$ точки $A \in \mathbb{R}$, если $\varepsilon < 1$. Значит, ни одно число $A \in \mathbb{R}$ не может быть пределом этой функции при $x \to 0$.

Пример 6. Если

$$E_{-} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{1}{-\pi/2 + 2\pi n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

и

$$E_{+} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n},\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

то, подобно рассмотренному в примере 4, получаем, что

$$\lim_{E_{-} \ni x \to 0} \sin \frac{1}{x} = -1 \quad \text{и} \quad \lim_{E_{+} \ni x \to 0} \sin \frac{1}{x} = 1.$$

Между изученным в предыдущем параграфе понятием предела последовательности и введенным здесь понятием предела произвольной числовой функции имеется тесная связь, которую выражает следующее

Утверждение 1 [1]. *Соотношение* $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$ *имеет место тогда и только тогда, когда для любой последовательности* $\{x_n\}$ *точек* $x_n \in E \setminus a$, *сходящейся к* a, *последовательность* $\{f(x_n)\}$ *сходится к* A.

◄ То, что $\left(\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A\right)$, сразу следует из определений. Действительно, если $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A$, то для любой окрестности $V(A)$ точки A найдется проколотая окрестность $\mathring{U}_E(a)$ точки a в E такая, что для $x \in \in \mathring{U}_E(a)$ имеем $f(x) \in V(A)$. Если последовательность $\{x_n\}$ точек множества $E \setminus a$ сходится к a, то найдется номер N такой, что при $n > N$ будет $x_n \in \mathring{U}_E(a)$ и, значит, $f(x_n) \in V(A)$. На основании определения предела последовательности, таким образом, заключаем, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Если A не является пределом $f(x)$ при $E \ni x \to a$, то найдется окрестность $V(A)$ такая, что при любом $n \in \mathbb{N}$ в $1/n$-окрестности точки a найдется точка $x_n \in E \setminus a$ такая, что $f(x_n) \notin V(A)$. Но это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ не сходится к A, хотя последовательность $\{x_n\}$ стремится к a. ►

2. Свойства предела функции. Теперь установим ряд постоянно используемых свойств предела функции, многие из которых аналогичны уже доказанным свойствам предела последовательности и потому, в сущности, нам уже знакомы. Более того, на основании только что доказанного утверждения 1 многие важные свойства предела функции, очевидно, немедленно следуют из соответствующих свойств предела последовательности: единственность предела, арифметические свойства предела, предельный переход

---

[1] Его иногда называют утверждением о равносильности определений предела по Коши (через окрестности) и по Гейне (через последовательности).

Э. Гейне (Хайне) (1821—1881) — немецкий математик.

в неравенствах. Тем не менее мы вновь проведем все доказательства. В этом, как выяснится, есть определенный смысл.

Мы хотим обратить внимание читателя на то, что для установления всех свойств предела функции требуются всего два свойства проколотых окрестностей предельной точки множества: B_1) $\mathring{U}_E(a) \neq \varnothing$, т. е. проколотая окрестность непуста, и B_2) $\forall \mathring{U}'_E(a)\ \forall \mathring{U}''_E(a)\ \exists \mathring{U}_E(a) (\mathring{U}_E(a) \subset \mathring{U}'_E(a) \cap \mathring{U}''_E(a))$, т. е. в пересечении любой пары проколотых окрестностей содержится проколотая окрестность. Это наблюдение приведет нас к общему понятию предела функции и возможности в будущем использовать теорию предела уже не только для функций, определенных на числовых множествах. Чтобы изложение не было простым повторением сказанного в § 1, мы используем здесь некоторые новые полезные приемы и понятия, которые не демонстрировались в § 1.

a. Общие свойства предела функции. Сначала несколько определений.

Определение 4. Функцию $f: E \to \mathbb{R}$, принимающую только одно значение, будем, как и прежде, называть *постоянной*. Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется *финально постоянной* при $E \ni x \to a$, если она постоянна в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}_E(a)$ точки a, предельной для множества E.

Определение 5. Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной*, *ограниченной сверху*, *ограниченной снизу*, если найдется число $C \in \mathbb{R}$ такое, что для любого $x \in E$ выполнено соответственно $|f(x)| < C$, $f(x) < C$, $C < f(x)$.

В случае, если первое, второе или третье из этих соотношений выполнено лишь в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}_E(a)$ точки a, функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется соответственно *финально ограниченной при $E \ni x \to a$*, *финально ограниченной сверху при $E \ni x \to a$*, *финально ограниченной снизу при $E \ni x \to a$*.

Пример 7. Функция

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x},$$

определенная этой формулой при $x \neq 0$, не является ограниченной на области определения, но она финально ограничена при $x \to 0$.

Пример 8. То же самое относится к функции $f(x) = x$ на $\mathbb{R}$.

Теорема 1. a) *($f: E \to \mathbb{R}$ при $E \ni x \to a$ есть финально постоянная A)* $\Rightarrow$ $\Rightarrow \big(\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A\big)$.

b) $\big(\exists \lim\limits_{E \ni x \to a} f(x)\big) \Rightarrow$ *($f: E \to \mathbb{R}$ финально ограничена при $E \ni x \to a$)*.

c) $\big(\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A_1\big) \wedge \big(\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = A_2\big) \Rightarrow (A_1 = A_2)$.

◄ Утверждение a) о наличии предела у финально постоянной функции и утверждение b) о финальной ограниченности функции, имеющей предел, вытекают прямо из соответствующих определений. Обратимся к доказательству единственности предела.

Предположим, что $A_1 \neq A_2$. Возьмем тогда окрестности $V(A_1)$, $V(A_2)$ так, чтобы они не имели общих точек, т. е. $V(A_1) \cap V(A_2) = \varnothing$. По определению

предела имеем

$$\lim_{E\ni x\to a} f(x)=A_1 \Rightarrow \exists \mathring{U}'_E(a)\ \big(f(\mathring{U}'_E(a))\subset V(A_1)\big),$$
$$\lim_{E\ni x\to a} f(x)=A_2 \Rightarrow \exists \mathring{U}''_E(a)\ \big(f(\mathring{U}''_E(a))\subset V(A_2)\big).$$

Возьмем теперь проколотую окрестность $\mathring{U}_E(a)$ точки a (предельной для E) такую, что $\mathring{U}_E(a)\subset \mathring{U}'_E(a)\cap \mathring{U}''_E(a)$ (например, можно взять $\mathring{U}_E(a)= \mathring{U}'_E(a)\cap \mathring{U}''_E(a)$, поскольку это пересечение тоже есть проколотая окрестность).

Поскольку $\mathring{U}_E(a)\neq\varnothing$, берем $x\in\mathring{U}_E(a)$. Тогда $f(x)\in V(A_1)\cap V(A_2)$, что невозможно, так как окрестности $V(A_1)$, $V(A_2)$ по построению не имеют общих точек. ►

b. Предельный переход и арифметические операции

Определение 6. Если две числовые функции $f\colon E\to\mathbb{R}$, $g\colon E\to\mathbb{R}$ имеют общую область определения E, то их *суммой, произведением* и *частным* называются соответственно функции, определенные на том же множестве следующими формулами:

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x),$$
$$(f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x):=\frac{f(x)}{g(x)},\quad \text{если } g(x)\neq 0 \text{ при } x\in E.$$

Теорема 2. *Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ и $g\colon E\to\mathbb{R}$ — две функции с общей областью определения.*

Если $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x)=B$, то

a) $\lim\limits_{E\ni x\to a}(f+g)(x)=A+B$;

b) $\lim\limits_{E\ni x\to a}(f\cdot g)(x)=A\cdot B$;

c) $\lim\limits_{E\ni x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{A}{B}$, *если $B\neq 0$ и $g(x)\neq 0$ при $x\in E$.*

Эта теорема, как уже отмечалось в начале пункта 2, непосредственно вытекает из соответствующей теоремы о пределах последовательностей, если учесть утверждение, доказанное в пункте 1.

Теорему можно получить также, повторив доказательство теоремы об арифметических свойствах предела последовательности. Все изменения в доказательстве, которые при этом придется провести, сведутся к тому, что всюду, где раньше мы выбирали «$N\in\mathbb{N}$, начиная с которого…», нужно будет выбирать некоторую проколотую окрестность $\mathring{U}_E(a)$ точки a в множестве E. Советуем читателю проверить это.

Здесь же мы получим эту теорему из ее простейшего частного случая, когда $A=B=0$ (утверждение c) при этом, разумеется, не рассматривается).

Функцию $f\colon E\to\mathbb{R}$ принято называть *бесконечно малой при $E\ni x\to a$*, если $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=0$.

Утверждение 2. a) *Если* $\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ *и* $\beta\colon E \to \mathbb{R}$ — *бесконечно малые функции при* $E \ni x \to a$, *то их сумма* $\alpha + \beta\colon E \to \mathbb{R}$ — *также бесконечно малая функция при* $E \ni x \to a$.

b) *Если* $\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ *и* $\beta\colon E \to \mathbb{R}$ — *бесконечно малые функции при* $E \ni x \to a$, *то их произведение* $\alpha \cdot \beta\colon E \to \mathbb{R}$ — *также бесконечно малая функция при* $E \ni x \to a$.

c) *Если* $\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ — *бесконечно малая функция при* $E \ni x \to a$, *а* $\beta\colon E \to \mathbb{R}$ — *финально ограниченная функция при* $E \ni x \to a$, *то произведение* $\alpha \cdot \beta\colon E \to \mathbb{R}$ *есть бесконечно малая функция при* $E \ni x \to a$.

◄ a) Проверим, что

$$\Big(\lim_{E \ni x \to a} \alpha(x) = 0\Big) \wedge \Big(\lim_{E \ni x \to a} \beta(x) = 0\Big) \Rightarrow \Big(\lim_{E \ni x \to a} (\alpha + \beta)(x) = 0\Big).$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. По определению предела имеем

$$\Big(\lim_{E \ni x \to a} \alpha(x) = 0\Big) \Rightarrow \Big(\exists \mathring{U}'_E(a)\ \forall x \in \mathring{U}'_E(a)\ \Big(|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big),$$
$$\Big(\lim_{E \ni x \to a} \beta(x) = 0\Big) \Rightarrow \Big(\exists \mathring{U}''_E(a)\ \forall x \in \mathring{U}''_E(a)\ \Big(|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big).$$

Тогда для проколотой окрестности $\mathring{U}_E(a) \subset \mathring{U}'_E(a) \cap \mathring{U}''_E(a)$ получаем

$$\forall x \in \mathring{U}_E(a)\ |(\alpha + \beta)(x)| = |\alpha(x) + \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon,$$

т. е. проверено, что $\lim\limits_{E \ni x \to a} (\alpha + \beta)(x) = 0$.

b) Это утверждение есть частный случай утверждения c), поскольку всякая функция, имеющая предел, финально ограничена.

c) Проверим, что

$$\Big(\lim_{E \ni x \to a} \alpha(x) = 0\Big) \wedge \Big(\exists M \in \mathbb{R}\ \exists \mathring{U}_E(a)\ \forall x \in \mathring{U}_E(a)\ (|\beta(x)| < M)\Big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Big(\lim_{E \ni x \to a} \alpha(x)\beta(x) = 0\Big).$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. По определению предела имеем

$$\Big(\lim_{E \ni x \to a} \alpha(x) = 0\Big) \Rightarrow \Big(\exists \mathring{U}'_E(a)\ \forall x \in \mathring{U}'_E(a)\ \Big(|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\Big)\Big).$$

Тогда для проколотой окрестности $\mathring{U}''_E(a) \subset \mathring{U}'_E(a) \cap \mathring{U}_E(a)$ получаем

$$\forall x \in \mathring{U}''_E(a)\ |(\alpha \cdot \beta)(x)| = |\alpha(x)\beta(x)| = |\alpha(x)||\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Тем самым проверено, что $\lim\limits_{E \ni x \to a} \alpha(x)\beta(x) = 0$. ►

Теперь сделаем следующее полезное

Замечание.

$$\boxed{\Big(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = A\Big) \Leftrightarrow (f(x) = A + \alpha(x)) \wedge \Big(\lim_{E \ni x \to a} \alpha(x) = 0\Big).}$$

Иными словами, функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ стремится к A тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде суммы $A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $E \ni x \to a$ функция (уклонение $f(x)$ от A)[1].

Это непосредственно следует из определения предела, в силу которого

$$\lim_{E\ni x\to a} f(x) = A \iff \lim_{E\ni x\to a} (f(x)-A) = 0.$$

Приведем теперь доказательство теоремы об арифметических свойствах предела функции, основанное на этом замечании и установленных свойствах бесконечно малых функций.

◄ a) Если $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x) = B$, то $f(x) = A+\alpha(x)$ и $g(x) = B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $E\ni x\to a$. Тогда $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = A+\alpha(x)+B+\beta(x) = (A+B)+\gamma(x)$, где $\gamma(x) = \alpha(x)+\beta(x)$, как сумма бесконечно малых, есть бесконечно малая функция при $E\ni x\to a$. Таким образом, $\lim\limits_{E\ni x\to a}(f+g)(x) = A+B$.

b) Вновь представив $f(x)$ и $g(x)$ в виде $f(x) = A+\alpha(x)$ и $g(x) = B+\beta(x)$, имеем

$$(f\cdot g)(x) = f(x)g(x) = (A+\alpha(x))(B+\beta(x)) = A\cdot B+\gamma(x),$$

где $\gamma(x) = A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$ по свойствам бесконечно малых есть бесконечно малая функция при $E\ni x\to a$.

Таким образом, $\lim\limits_{E\ni x\to a}(f\cdot g)(x) = A\cdot B$.

c) Вновь запишем, что $f(x) = A+\alpha(x)$ и $g(x) = B+\beta(x)$, где $\lim\limits_{E\ni x\to a}\alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{E\ni x\to a}\beta(x) = 0$.

Поскольку $B\neq 0$, существует проколотая окрестность $\mathring{U}_E(a)$, в любой точке которой $|\beta(x)| < \frac{|B|}{2}$, и потому $|g(x)| = |B+\beta(x)| \geqslant |B|-|\beta(x)| > \frac{|B|}{2}$. Тогда в $\mathring{U}_E(a)$ будем иметь также $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|B|}$, т. е. функция $\frac{1}{g(x)}$ финально ограничена при $E\ni x\to a$. Теперь запишем

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\frac{A}{B} = \frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B} = \frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{B}(B\alpha(x)+A\beta(x)) = \gamma(x).$$

По свойствам бесконечно малых (с учетом доказанной финальной ограниченности $\frac{1}{g(x)}$) функция $\gamma(x)$ есть бесконечно малая при $E\ni x\to a$. Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{E\ni x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$. ►

---

[1]Любопытная деталь: это почти очевидное, но очень полезное в вычислительном плане и важное в идейном отношении представление особо отмечалось французским математиком и механиком Лазаром Карно (1753—1823), революционным генералом и академиком, отцом родоначальника термодинамики Сади Карно (1796—1832).

c. Предельный переход и неравенства

ТЕОРЕМА 3. a) *Если функции* $f\colon E\to\mathbb{R}$ *и* $g\colon E\to\mathbb{R}$ *таковы, что* $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x) = B$ *и* $A<B$, *то найдется проколотая окрестность* $\overset{\circ}{U}_E(a)$ *точки* a *в множестве* E, *в любой точке которой выполнено неравенство* $f(x)<g(x)$.

b) *Если между функциями* $f\colon E\to\mathbb{R}$, $g\colon E\to\mathbb{R}$ *и* $h\colon E\to\mathbb{R}$ *на множестве* E *имеет место соотношение* $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ *и если* $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{E\ni x\to a} h(x) = C$, *то существует также предел* $g(x)$ *при* $E\ni x\to a$, *причем* $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x)=C$.

◄ a) Возьмем число C такое, что $A<C<B$. По определению предела найдем проколотые окрестности $\overset{\circ}{U}{}'_E(a)$ и $\overset{\circ}{U}{}''_E(a)$ точки a в множестве E так, чтобы при $x\in\overset{\circ}{U}{}'_E(a)$ иметь $|f(x)-A|<C-A$ и при $x\in\overset{\circ}{U}{}''_E(a)$ иметь $|g(x)-B|<B-C$. Тогда в любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_E(a)$, содержащейся в $\overset{\circ}{U}{}'_E(a)\cap\overset{\circ}{U}{}''_E(a)$, получим

$$f(x) < A+(C-A) = C = B-(B-C) < g(x).$$

b) Если $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{E\ni x\to a} h(x) = C$, то по любому фиксированному $\varepsilon>0$ найдутся такие проколотые окрестности $\overset{\circ}{U}{}'_E(a)$ и $\overset{\circ}{U}{}''_E(a)$ точки a в множестве E, что при $x\in\overset{\circ}{U}{}'_E(a)$ имеем $C-\varepsilon<f(x)$ и при $x\in\overset{\circ}{U}{}''_E(a)$ имеем $h(x)<C+\varepsilon$. Тогда в любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_E(a)$, содержащейся в $\overset{\circ}{U}{}'_E(a)\cap\overset{\circ}{U}{}''_E(a)$, будем иметь $C-\varepsilon<f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)<C+\varepsilon$, т. е. $|g(x)-C|<\varepsilon$, и, следовательно, $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x)=C$. ►

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть* $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x)=A$ *и* $\lim\limits_{E\ni x\to a} g(x)=B$. *Если в некоторой проколотой окрестности* $\overset{\circ}{U}_E(a)$ *точки* a

a) *выполнено* $f(x)>g(x)$, *то* $A\geqslant B$;

b) *выполнено* $f(x)\geqslant g(x)$, *то* $A\geqslant B$;

c) *выполнено* $f(x)>B$, *то* $A\geqslant B$;

d) *выполнено* $f(x)\geqslant B$, *то* $A\geqslant B$.

◄ Рассуждая от противного, из утверждения a) теоремы 3 немедленно получаем утверждения a), b) доказываемого следствия. Утверждения c), d) получаются из первых двух при $g(x)\equiv B$. ►

d. Два важных примера. Прежде чем переходить к дальнейшему изложению теории предела функции, продемонстрируем на двух важных примерах использование уже доказанных теорем.

ПРИМЕР 9.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

Здесь мы будем апеллировать к школьному определению $\sin x$ как ординаты точки, в которую переходит точка $(1,0)$ при повороте (с центром в начале координат) на угол x (радиан). Полнота такого определения всецело

зависит от того, насколько тщательно установлена связь между поворотами и действительными числами. Поскольку сама система действительных чисел в школе не была описана достаточно подробно, надо считать, что нам необходимо уточнить определение $\sin x$ (то же самое относится и к функции $\cos x$).

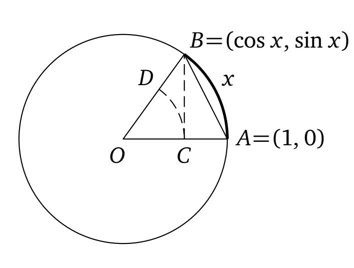


Рис. 8

В свое время мы это сделаем и обоснуем те рассуждения, которые сейчас будут опираться на наглядность.

a) Покажем, что

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{при } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

◄ Так как $\cos^2 x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ — четные функции, то достаточно рассмотреть случай $0 < x < \pi/2$. Из рис. 8 и определения $\cos x$ и $\sin x$, сравнивая площади сектора $\sphericalangle OCD$, треугольника $\triangle OAB$ и сектора $\sphericalangle OAB$, имеем

$$S_{\sphericalangle OCD} = \frac{1}{2}|OC|\cdot|\overset{\frown}{CD}| = \frac{1}{2}(\cos x)(x\cos x) = \frac{1}{2}x\cos^2 x < S_{\triangle OAB} =$$
$$= \frac{1}{2}|OA|\cdot|BC| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x < S_{\sphericalangle OAB} = \frac{1}{2}|OA|\cdot|\overset{\frown}{AB}| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x = \frac{1}{2}x.$$

Разделив эти неравенства на $\frac{1}{2}x$, получаем то, что и утверждалось. ►

b) Из a) следует, что

$$|\sin x| \leqslant |x|$$

при любом $x \in \mathbb{R}$, причем равенство имеет место только для $x = 0$.

◄ При $0 < |x| < \pi/2$, как показано в a), имеем

$$|\sin x| < |x|.$$

Но $|\sin x| \leqslant 1$, поэтому для $|x| \geqslant \pi/2 > 1$ также выполнено последнее неравенство. И только при $x = 0$ имеем $\sin x = x = 0$. ►

c) Из b) следует, что

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

◄ Поскольку $0 \leqslant |\sin x| \leqslant |x|$ и поскольку $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, на основании теоремы о связи предела функции с неравенствами получаем, что $\lim\limits_{x\to 0}|\sin x| = 0$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$. ►

d) Теперь докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

◄ Считая, что $|x| < \pi/2$, в силу полученного в a) неравенства имеем

$$1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Но $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \sin^2 x) = 1 - \lim\limits_{x\to 0}\sin x \cdot \lim\limits_{x\to 0}\sin x = 1 - 0 = 1$, значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах можем заключить, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. ►

Пример 10. *Определение показательной, логарифмической и степенной функций на основе теории предела.* Мы продемонстрируем сейчас, чем и как можно было бы дополнить школьное определение показательной и логарифмической функций, если располагать теорией действительного числа и теорией предела.

Для удобства ссылок и полноты картины проделаем всё с самого начала.

а) *Показательная функция.* Пусть $a > 1$.

1° Для $n \in \mathbb{N}$ полагаем по индукции $a^1 := a$, $a^{n+1} := a^n \cdot a$.

Таким образом, на $\mathbb{N}$ возникает функция a^n, которая, как видно из определения, обладает свойством

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

если $m, n \in \mathbb{N}$ и $m > n$.

2° Это свойство приводит к естественным определениям

$$a^0 := 1, \qquad a^{-n} := \frac{1}{a^n} \quad \text{при } n \in \mathbb{N},$$

после которых функция a^n оказывается распространенной на множество $\mathbb{Z}$ целых чисел и для любых $m, n \in \mathbb{Z}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

3° В теории действительных чисел мы отметили, что для $a > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует единственный арифметический корень n-й степени из a, т. е. число $x > 0$ такое, что $x^n = a$. Для него принято обозначение $a^{1/n}$. Оно удобно, если мы желаем сохранить закон сложения показателей:

$$a = a^1 = (a^{1/n})^n = a^{1/n} \dots a^{1/n} = a^{1/n + \dots + 1/n}.$$

По той же причине естественно положить $a^{m/n} := (a^{1/n})^m$ и $a^{-1/n} := (a^{1/n})^{-1}$ для $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}$. Если окажется, что $a^{(mk)/(nk)} = a^{m/n}$ для $k \in \mathbb{Z}$, то можно считать, что мы определили a^r для $r \in \mathbb{Q}$.

4° Для чисел $0 < x$, $0 < y$ по индукции проверяем, что для $n \in \mathbb{N}$

$$(x < y) \Leftrightarrow (x^n < y^n),$$

поэтому, в частности,

$$(x = y) \Leftrightarrow (x^n = y^n).$$

5° Это позволяет доказать правила действий с рациональными показателями, в частности, что

$$a^{(mk)/(nk)} = a^{m/n} \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}$$

и

$$a^{m_1/n_1} \cdot a^{m_2/n_2} = a^{m_1/n_1 + m_2/n_2}.$$

◄ Действительно, $a^{(mk)/(nk)} > 0$ и $a^{m/n} > 0$. Далее, поскольку

$$(a^{(mk)/(nk)})^{nk} = \left((a^{1/(nk)})^{mk}\right)^{nk} = (a^{1/(nk)})^{mk \cdot nk} = \left((a^{1/(nk)})^{nk}\right)^{mk} = a^{mk}$$

и

$$(a^{m/n})^{nk} = \big((a^{1/n})^n\big)^{mk} = a^{mk},$$

то первое из проверяемых равенств в соответствии с 4° установлено.

Аналогично,

$$\big(a^{m_1/n_1} \cdot a^{m_2/n_2}\big)^{n_1 n_2} = (a^{m_1/n_1})^{n_1 n_2} \cdot (a^{m_2/n_2})^{n_1 n_2} = \\ = \big((a^{1/n_1})^{n_1}\big)^{m_1 n_2} \cdot \big((a^{1/n_2})^{n_2}\big)^{m_2 n_1} = a^{m_1 n_2} \cdot a^{m_2 n_1} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1}$$

и

$$(a^{m_1/n_1 + m_2/n_2})^{n_1 n_2} = (a^{(m_1 n_2 + m_2 n_1)/(n_1 n_2)})^{n_1 n_2} = \\ = \big((a^{1/(n_1 n_2)})^{n_1 n_2}\big)^{m_1 n_2 + m_2 n_1} = a^{m_1 n_2 + m_2 n_1},$$

поэтому второе равенство также доказано. ►

Таким образом, мы определили a^r для $r \in \mathbb{Q}$, причем $a^r > 0$ и для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}.$$

6° Из 4° следует, что для $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

$$(r_1 < r_2) \Rightarrow (a^{r_1} < a^{r_2}).$$

◄ Поскольку $(1 < a) \Leftrightarrow (1 < a^{1/n})$ для $n \in \mathbb{N}$, что сразу следует из 4°, то $\big(a^{1/n}\big)^m = a^{m/n} > 1$ при $n, m \in \mathbb{N}$, что опять-таки следует из 4°. Таким образом, при $1 < a$ для $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$ имеем $a^r > 1$.

Тогда при $r_1 < r_2$ на основе 5° получаем

$$a^{r_2} = a^{r_1} \cdot a^{r_2 - r_1} > a^{r_1} \cdot 1 = a^{r_1}. \ ►$$

7° Покажем, что для $r_0 \in \mathbb{Q}$

$$\lim_{\mathbb{Q} \ni r \to r_0} a^r = a^{r_0}.$$

◄ Проверим, что $a^p \to 1$ при $\mathbb{Q} \ni p \to 0$. Это следует из того, что при $|p| < \dfrac{1}{n}$ имеем в силу 6°

$$a^{-1/n} < a^p < a^{1/n}.$$

Мы знаем, что $a^{1/n} \to 1$ (и $a^{-1/n} \to 1$) при $n \to \infty$. Тогда стандартным рассуждением проверяем, что для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|p| < \delta$ будет

$$1 - \varepsilon < a^p < 1 + \varepsilon.$$

В качестве δ можно взять $\dfrac{1}{n}$, если $1 - \varepsilon < a^{-1/n}$ и $a^{1/n} < 1 + \varepsilon$.

Теперь докажем основное утверждение.

По $\varepsilon > 0$ подберем δ так, что при $|p| < \delta$

$$1 - \varepsilon a^{-r_0} < a^p < 1 + \varepsilon a^{-r_0}.$$

Если теперь $|r-r_0|<\delta$, то

$$a^{r_0}(1-\varepsilon a^{-r_0}) < a^r = a^{r_0}\cdot a^{r-r_0} < a^{r_0}(1+\varepsilon a^{-r_0}),$$

или

$$a^{r_0}-\varepsilon < a^r < a^{r_0}+\varepsilon. \ ►$$

Итак, на $\mathbb{Q}$ определена функция a^r со свойствами:

$$a^1 = a > 1;$$
$$a^{r_1}\cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2};$$
$$a^{r_1} < a^{r_2} \quad \text{при } r_1<r_2;$$
$$a^{r_1}\to a^{r_2} \quad \text{при } \mathbb{Q}\ni r_1\to r_2.$$

Продолжим ее на всю числовую ось следующим образом.

8° Пусть $x\in\mathbb{R}$, $s=\sup\limits_{\mathbb{Q}\ni r<x} a^r$ и $i=\inf\limits_{\mathbb{Q}\ni r>x} a^r$. Ясно, что $s, i\in\mathbb{R}$, так как при $r_1<x<r_2$ имеем $a^{r_1}<a^{r_2}$.

Покажем, что на самом деле $s=i$ (и тогда эту величину мы обозначим через a^x).

◄ По определению s и i, при $r_1<x<r_2$ имеем

$$a^{r_1}\leqslant s\leqslant i\leqslant a^{r_2}.$$

Тогда $0\leqslant i-s\leqslant a^{r_2}-a^{r_1}=a^{r_1}(a^{r_2-r_1}-1)<s(a^{r_2-r_1}-1)$. Но $a^p\to 1$ при $\mathbb{Q}\ni p\to 0$, поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что при $0<r_2-r_1<\delta$ будет $a^{r_2-r_1}-1<\varepsilon/s$. Тогда получим, что $0\leqslant i-s<\varepsilon$, и, поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, заключаем, что $i=s$. ►

Положим $a^x:=s=i$.

9° Покажем, что $a^x=\lim\limits_{\mathbb{Q}\ni r\to x} a^r$.

◄ Учитывая 8°, для $\varepsilon>0$ найдем $r'<x$ так, что $s-\varepsilon<a^{r'}\leqslant s=a^x$, и r'' так, что $a^x=i\leqslant a^{r''}<i+\varepsilon$. Поскольку $r'<r<r''$ влечет $a^{r'}<a^r<a^{r''}$, для всех $r\in\mathbb{Q}$, лежащих в интервале $]r', r''[$, будем тогда иметь

$$a^x-\varepsilon<a^r<a^x+\varepsilon. \ ►$$

Займемся теперь свойствами построенной функции a^x на $\mathbb{R}$.

10° Для $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ при $a>1$ $(x_1<x_2)\Rightarrow(a^{x_1}<a^{x_2})$.

◄ На интервале $]x_1, x_2[$ найдутся два рациональных числа $r_1<r_2$. Если $x_1\leqslant r_1<r_2\leqslant x_2$, то по определению a^x, данному в 8°, и свойствам функции a^x на $\mathbb{Q}$ имеем

$$a^{x_1}\leqslant a^{r_1}<a^{r_2}\leqslant a^{x_2}. \ ►$$

11° Для любых $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ верно $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$.

◄ В силу известных нам оценок абсолютной погрешности произведения и свойства 9° можно утверждать, что для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta'>0$ такое, что при $|x_1-r_1|<\delta'$, $|x_2-r_2|<\delta'$ будет

$$a^{x_1}\cdot a^{x_2}-\frac{\varepsilon}{2}<a^{r_1}\cdot a^{r_2}<a^{x_1}\cdot a^{x_2}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Уменьшая, если нужно, δ', можно подобрать $\delta < \delta'$ так, что при $|x_1 - r_1| < \delta$, $|x_2 - r_2| < \delta$, т. е. при $|(x_1 + x_2) - (r_1 + r_2)| < 2\delta$, будем иметь также

$$a^{r_1+r_2} - \frac{\varepsilon}{2} < a^{x_1+x_2} < a^{r_1+r_2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$ для $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, значит, из полученных неравенств вытекает, что

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} - \varepsilon < a^{x_1+x_2} < a^{x_1} \cdot a^{x_2} + \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, заключаем, что

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}. \ \blacktriangleright$$

12° $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. (Напомним, что «$x \to x_0$» — принятое сокращение для «$\mathbb{R} \ni x \to x_0$».)

◄ Проверим сначала, что $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$. По $\varepsilon > 0$ найдем $n \in \mathbb{N}$ так, что

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n} < a^{1/n} < 1 + \varepsilon.$$

Тогда в силу 10° при $|x| < 1/n$ будем иметь

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n} < a^x < a^{1/n} < 1 + \varepsilon,$$

т. е. проверено, что $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

Если теперь взять $\delta > 0$, чтобы при $|x - x_0| < \delta$ было $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon a^{-x_0}$, то получим

$$a^{x_0} - \varepsilon < a^x = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) < a^{x_0} + \varepsilon$$

и тем самым проверено, что $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$. ►

13° Покажем, что множеством значений построенной функции $x \mapsto a^x$ является множество $\mathbb{R}_+$ всех положительных действительных чисел.

◄ Пусть $y_0 \in \mathbb{R}_+$. Если $a > 1$, то, как нам известно, найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $a^{-n} < y_0 < a^n$.

В силу этого оба множества

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid a^x < y_0\} \quad \text{и} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid y_0 < a^x\}$$

непусты. Но поскольку $(x_1 < x_2) \Leftrightarrow (a^{x_1} < a^{x_2})$ (при $a > 1$), то для любых чисел $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $x_1 \in A$ и $x_2 \in B$, имеем $x_1 < x_2$. Следовательно, к множествам A и B применима аксиома полноты, из которой следует существование числа x_0 такого, что $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$ для любых элементов $x_1 \in A$ и $x_2 \in B$. Покажем, что $a^{x_0} = y_0$.

Если бы было $a^{x_0} < y_0$, то, поскольку $a^{x_0+1/n} \to a^{x_0}$ при $n \to \infty$, нашлось бы число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $a^{x_0+1/n} < y_0$. Получилось бы, что $\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) \in A$, в то время как точка x_0 разделяет A и B. Значит, предположение $a^{x_0} < y_0$ неверно. Аналогично проверяем, что неравенство $a^{x_0} > y_0$ тоже невозможно. По свойствам действительных чисел отсюда заключаем, что $a^{x_0} = y_0$. ►

14° Мы пока считали, что $a > 1$. Но все построения можно было бы повторить и для $0 < a < 1$. При этом условии $0 < a^r < 1$, если $r > 0$; поэтому в 6°, а затем окончательно в 10° теперь получим, что при $0 < a < 1$ $(x_1 < < x_2) \Rightarrow (a^{x_1} > a^{x_2})$.

Итак, при $a > 0$, $a \neq 1$ на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел мы построили действительнозначную функцию $x \mapsto a^x$ со следующими свойствами:

1) $a^1 = a$;
2) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$;
3) $a^x \to a^{x_0}$ при $x \to x_0$;
4) $(a^{x_1} < a^{x_2}) \Leftrightarrow (x_1 < x_2)$, если $a > 1$,
   $(a^{x_1} > a^{x_2}) \Leftrightarrow (x_1 < x_2)$, если $0 < a < 1$;
5) множеством значений функции $x \mapsto a^x$ является множество $\mathbb{R}_+ = \{y \in \in \mathbb{R} \mid 0 < y\}$ всех положительных чисел.

Определение 7. Отображение $x \mapsto a^x$ называется *показательной* или *экспоненциальной* функцией при основании a. Особенно часто встречается функция $x \mapsto e^x$, когда $a = e$, которую нередко обозначают через $\exp x$. В связи с этим для обозначения функции $x \mapsto a^x$ также иногда используется символ $\exp_a x$.

b) *Логарифмическая функция.* Поскольку отображение $\exp_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, как видно из свойств показательной функции, биективно, оно имеет обратное отображение.

Определение 8. Отображение, обратное к $\exp_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, называется *логарифмической функцией при основании a* $(0 < a,\ a \neq 1)$ и обозначается символом

$$\log_a \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}.$$

Определение 9. При основании $a = e$ логарифмическая функция, или логарифм, называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Причина такой терминологии прояснится при другом, во многом даже более естественном и прозрачном подходе к логарифмам, который мы изложим после построения основ дифференциального и интегрального исчисления.

По определению логарифма как функции, обратной экспоненциальной, имеем

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\log_a (a^x) = x),$$
$$\forall y \in \mathbb{R}_+ \quad (a^{\log_a y} = y).$$

Из этого определения и свойств показательной функции, в частности, получается, что в области $\mathbb{R}_+$ своего определения логарифм обладает следующими свойствами:

1′) $\log_a a = 1$;
2′) $\log_a (y_1 \cdot y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$;

3′) $\log_a y \to \log_a y_0$ при $\mathbb{R}_+ \ni y \to y_0 \in \mathbb{R}_+$;
4′) $(\log_a y_1 < \log_a y_2) \Leftrightarrow (y_1 < y_2)$, если $a > 1$,
$(\log_a y_1 > \log_a y_2) \Leftrightarrow (y_1 < y_2)$, если $0 < a < 1$;
5′) множество значений функции $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ совпадает с множеством $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

◄ Из свойства 1) показательной функции и определения логарифма получаем 1′).

Из свойства 2) показательной функции получаем 2′). Действительно, пусть $x_1 = \log_a y_1$ и $x_2 = \log_a y_2$. Тогда $y_1 = a^{x_1}$, $y_2 = a^{x_2}$ и по 2) $y_1 \cdot y_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, откуда $\log_a(y_1 \cdot y_2) = x_1 + x_2$.

Аналогично, свойство 4) показательной функции влечет свойство 4′) логарифмической.

Очевидно, 5) ⇒ 5′).

Осталось доказать 3′).

В силу свойства 2′) логарифма

$$\log_a y - \log_a y_0 = \log_a \left(\frac{y}{y_0}\right),$$

поэтому неравенства

$$-\varepsilon < \log_a y - \log_a y_0 < \varepsilon$$

равносильны соотношению

$$\log_a(a^{-\varepsilon}) = -\varepsilon < \log_a \left(\frac{y}{y_0}\right) < \varepsilon = \log_a(a^{\varepsilon}),$$

которое по свойству 4′) логарифма равносильно

$$-a^{\varepsilon} < \frac{y}{y_0} < a^{\varepsilon} \quad \text{при } a > 1,$$
$$a^{\varepsilon} < \frac{y}{y_0} < a^{-\varepsilon} \quad \text{при } 0 < a < 1.$$

В любом случае мы получаем, что если

$$y_0 a^{-\varepsilon} < y < y_0 a^{\varepsilon} \quad \text{при } a > 1$$

или

$$y_0 a^{\varepsilon} < y < y_0 a^{-\varepsilon} \quad \text{при } 0 < a < 1,$$

то

$$-\varepsilon < \log_a y - \log_a y_0 < \varepsilon.$$

Таким образом, проверено, что

$$\lim_{\mathbb{R}_+ \ni y \to y_0 \in \mathbb{R}_+} \log_a y = \log_a y_0. \text{ ►}$$

На рис. 9 изображены графики функций e^x, 10^x, $\ln x$, $\log_{10} x =: \log x$, а на рис. 10 — графики функций $\left(\frac{1}{e}\right)^x$, $0{,}1^x$, $\log_{1/e} x$, $\log_{0,1} x$.

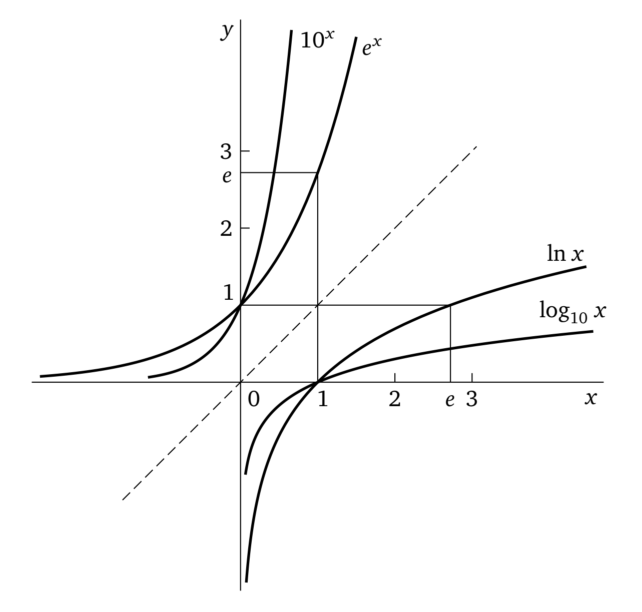


Рис. 9

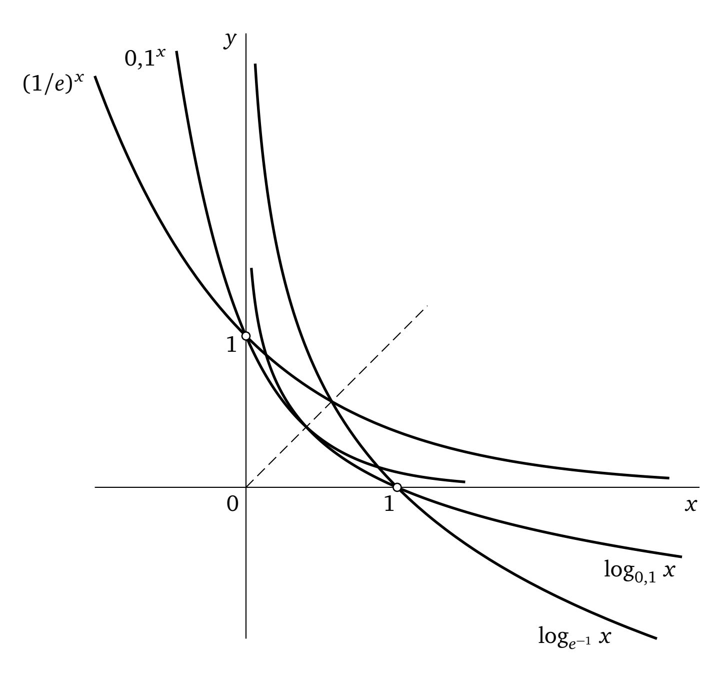


Рис. 10

Остановимся еще на одном свойстве логарифма, которым тоже часто приходится пользоваться.

Покажем, что для любого $b>0$ и любого $\alpha\in\mathbb{R}$ справедливо равенство

6′) $\log_a(b^\alpha)=\alpha\log_a b$.

◄ 1° Равенство справедливо при $\alpha=n\in\mathbb{N}$, ибо из свойства 2′) логарифма по индукции получаем $\log_a(y_1\dots y_n)=\log_a y_1+\dots+\log_a y_n$, значит,

$$\log_a(b^n)=\log_a b+\dots+\log_a b=n\log_a b.$$

2° $\log_a(b^{-1})=-\log_a b$, ибо если $\beta=\log_a b$, то

$$b=a^\beta,\quad b^{-1}=a^{-\beta}\quad \text{и}\quad \log_a(b^{-1})=-\beta.$$

3° Из 1° и 2° теперь заключаем, что для $\alpha\in\mathbb{Z}$ равенство $\log_a(b^\alpha)=$ $=\alpha\log_a b$ справедливо.

4° $\log_a(b^{1/n})=\frac{1}{n}\log_a b$ при $n\in\mathbb{Z}$. Действительно,

$$\log_a b=\log_a(b^{1/n})^n=n\log_a(b^{1/n}).$$

5° Теперь можно проверить, что для любого рационального числа $\alpha=$ $=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ утверждение справедливо. В самом деле,

$$\frac{m}{n}\log_a b=m\log_a(b^{1/n})=\log_a(b^{1/n})^m=\log_a(b^{m/n}).$$

6° Но если равенство $\log_a b^r=r\log_a b$ справедливо для любого $r\in\mathbb{Q}$, то, устремляя r по $\mathbb{Q}$ к α, на основании свойства 3) показательной и свойства 3′) логарифмической функций получаем, что если r достаточно близко к α, то b^r близко к b^α и $\log_a b^r$ близко к $\log_a b^\alpha$. Это означает, что

$$\lim_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha}\log_a b^r=\log_a b^\alpha.$$

Но $\log_a b^r=r\log_a b$, поэтому

$$\log_a b^\alpha=\lim_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha}\log_a b^r=\lim_{\mathbb{Q}\ni r\to\alpha}r\log_a b=\alpha\log_a b.\ ►$$

Из доказанного свойства логарифма можно сделать вывод, что для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и $a>0$ имеет место равенство

6) $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$.

◄ При $a=1$ считаем, по определению, $1^\alpha=1$ для $\alpha\in\mathbb{R}$. Таким образом, в этом случае равенство тривиально.

Если же $a\neq1$, то по доказанному

$$\log_a((a^\alpha)^\beta)=\beta\log_a(a^\alpha)=\beta\cdot\alpha\log_a a=\beta\cdot\alpha=\log_a(a^{\alpha\beta}),$$

что в силу свойства 4′) логарифма доказывает справедливость указанного равенства. ►

c) *Степенная функция*. Если считать $1^\alpha=1$, то при любом $x>0$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ мы определили величину x^α (читается «x в степени α»).

Определение 10. Функция $x \mapsto x^\alpha$, определенная на множестве $\mathbb{R}_+$ положительных чисел, называется *степенной функцией*, а число α называется *показателем степени*.

Степенная функция, очевидно, является композицией показательной и логарифмической функций, точнее,

$$x^\alpha = a^{\log_a(x^\alpha)} = a^{\alpha \log_a x}.$$

На рис. 11 изображены графики функции $y = x^\alpha$ при различных значениях показателя степени.

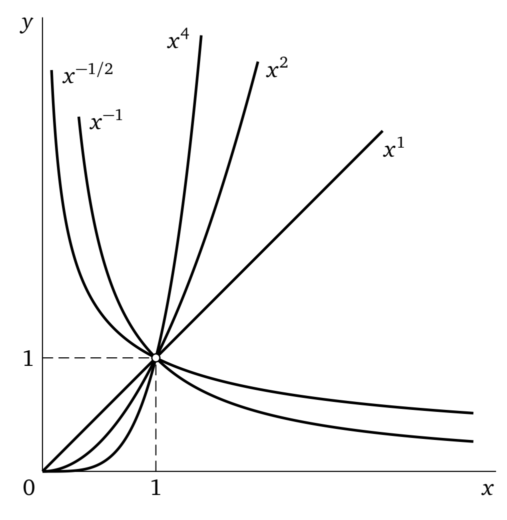


Рис. 11

3. Общее определение предела функции (предел по базе). Доказывая свойства предела функции, мы убедились, что от проколотых окрестностей, в которых были определены наши функции и которые возникали в процессе доказательств, кроме свойств B_1), B_2), указанных во введении к предыдущему пункту 2, действительно ничего не потребовалось. Это обстоятельство служит оправданием для выделения следующего математического объекта.

а. База; определение и основные примеры

Определение 11. Совокупность $\mathcal{B}$ подмножеств $B \subset X$ множества X будем называть *базой в множестве* X, если выполнены два условия:

B_1) $\forall B \in \mathcal{B} \quad (B \neq \varnothing)$;

B_2) $\forall B_1 \in \mathcal{B} \quad \forall B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad (B \subset B_1 \cap B_2)$.

Иными словами, элементы совокупности $\mathcal{B}$ суть непустые множества и в пересечении любых двух из них содержится некоторый элемент из той же совокупности.

Укажем некоторые наиболее употребительные в анализе базы.

Обозначение базы	Чтение обозначения	Из каких множеств (элементов) состоит база	Определение и обозначение элементов базы
$x \to a$	x стремится к a	База проколотых окрестностей точки $a \in \mathbb{R}$	$\overset{\circ}{U}(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid a - \delta_1 < < x < a + \delta_2 \wedge x \neq a\}$, где $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$
$x \to \infty$	x стремится к бесконечности	База окрестностей бесконечности	$U(\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid \delta < \lvert x \rvert\}$, где $\delta \in \mathbb{R}$
$x \to a$, $x \in E$ или $E \ni x \to a$ или $x \underset{\in E}{\longrightarrow} a$	x стремится к a по множеству E	База* проколотых окрестностей точки a в множестве E	$\overset{\circ}{U}_E(a) := E \cap \overset{\circ}{U}(a)$
$x \to \infty$, $x \in E$ или $E \ni x \to \infty$ или $x \underset{\in E}{\longrightarrow} \infty$	x стремится к бесконечности по множеству E	База** окрестностей бесконечности в множестве E	$U_E(\infty) := E \cap U(\infty)$

* Предполагается, что a — предельная точка множества E.
** Предполагается, что множество E не ограничено.

Если $E = E_a^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ $(E = E_a^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\})$, то вместо $x \to a$, $x \in E$ пишут $x \to a + 0$ $(x \to a - 0)$ и говорят, что *x стремится к a справа* или *со стороны бо́льших значений* (соответственно, *слева* или *со стороны меньших значений*). При $a = 0$ принята краткая запись $x \to +0$ $(x \to -0)$ вместо $x \to 0 + 0$ $(x \to 0 - 0)$.

Запись $E \ni x \to a + 0$ $(E \ni x \to a - 0)$ будет употребляться вместо $x \to a$, $x \in E \cap E_a^+$ $(x \to a,\ x \in E \cap E_a^-)$. Она означает, что x стремится по множеству E к a, оставаясь больше (меньше), чем a.

Если

$$E = E_\infty^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid c < x\} \quad (E = E_\infty^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\}),$$

то вместо $x \to \infty$, $x \in E$ пишут $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ и говорят, что *x стремится к плюс бесконечности* (соответственно, *к минус бесконечности*).

Запись $E \ni x \to +\infty$ $(E \ni x \to -\infty)$ будет употребляться вместо $x \to \infty$, $x \in E \cap E_\infty^+$ $(x \to \infty,\ x \in E \cap E_\infty^-)$.

При $E = \mathbb{N}$ вместо $x \to \infty$, $x \in \mathbb{N}$ мы (если это не ведет к недоразумению) будем, как это принято в теории предела последовательности, писать $n \to \infty$.

Заметим, что все перечисленные базы обладают той особенностью, что пересечение любых двух элементов базы само является элементом этой базы, а не только содержит некоторый элемент базы. С другими базами мы встретимся при изучении функций, заданных не на числовой оси[1].

[1] Например, совокупность открытых (без граничной окружности) кругов, содержащих данную точку плоскости, является базой. Пересечение двух элементов базы не всегда круг, но всегда содержит круг из нашей совокупности.

Отметим также, что используемый здесь термин «база» есть краткое обозначение того, что в математике называется «базисом фильтра», а введенный ниже предел по базе есть наиболее существенная для анализа часть созданного современным французским математиком А. Картаном понятия предела по фильтру[1].

b. Предел функции по базе

Определение 12. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — функция на множестве X; $\mathscr{B}$ — база в X. Число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *по базе* $\mathscr{B}$, если для любой окрестности $V(A)$ точки A найдется элемент $B \in \mathscr{B}$ базы, образ которого $f(B)$ содержится в окрестности $V(A)$.

Если A — предел функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ по базе $\mathscr{B}$, то пишут

$$\lim_{\mathscr{B}} f(x) = A.$$

Повторим определение предела по базе в логической символике:

$$\boxed{\Bigl(\lim_{\mathscr{B}} f(x) = A\Bigr) := \forall V(A)\ \exists B \in \mathscr{B}\ \bigl(f(B) \subset V(A)\bigr).}$$

Поскольку мы сейчас рассматриваем функции с числовыми значениями, полезно иметь в виду и следующую форму этого основного определения:

$$\Bigl(\lim_{\mathscr{B}} f(x) = A\Bigr) := \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathscr{B}\ \forall x \in B\ \bigl(|f(x) - A| < \varepsilon\bigr).$$

В этой формулировке вместо произвольной окрестности $V(A)$ берется симметричная (относительно точки A) окрестность (ε-окрестность). Эквивалентность этих определений для вещественнозначных функций вытекает из того, что, как уже говорилось, в любой окрестности точки содержится некоторая симметричная окрестность этой же точки (проведите доказательство полностью!).

Мы дали общее определение предела функции по базе. Выше были рассмотрены примеры наиболее употребительных в анализе баз. В конкретной задаче, где появляется та или иная из этих баз, необходимо уметь расшифровать общее определение и записать его для конкретной базы.

Так,

$$\Bigl(\lim_{x \to a-0} f(x) = A\Bigr) := \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in\ ]a - \delta, a[\ \bigl(|f(x) - A| < \varepsilon\bigr),$$

$$\Bigl(\lim_{x \to -\infty} f(x) = A\Bigr) := \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}\ \forall x < \delta\ \bigl(|f(x) - A| < \varepsilon\bigr).$$

Рассматривая примеры баз, мы, в частности, ввели понятие окрестности бесконечности. Если использовать это понятие, то в соответствии с общим определением предела разумно принять следующие соглашения:

$$\Bigl(\lim_{\mathscr{B}} f(x) = \infty\Bigr) := \forall V(\infty)\ \exists B \in \mathscr{B}\ \bigl(f(B) \subset V(\infty)\bigr)$$

---

[1]Подробнее об этом см.: *Бурбаки Н.* Общая топология. М.: ИЛ, 1958.

или, что то же самое,

$$\left(\lim_{\mathscr{B}} f(x) = \infty\right) := \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathscr{B}\ \forall x \in B\ (\varepsilon < |f(x)|),$$

$$\left(\lim_{\mathscr{B}} f(x) = +\infty\right) := \forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathscr{B}\ \forall x \in B\ (\varepsilon < f(x)),$$

$$\left(\lim_{\mathscr{B}} f(x) = -\infty\right) := \forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathscr{B}\ \forall x \in B\ (f(x) < \varepsilon).$$

Обычно под ε подразумевают малую величину. В приведенных определениях это, разумеется, не так. В соответствии с принятыми соглашениями, например, можем записать

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\right) := \forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists \delta \in \mathbb{R}\ \forall x > \delta\ (f(x) < \varepsilon).$$

Советуем читателю самостоятельно написать полное определение предела для различных баз в случае конечных (числовых) и бесконечных пределов.

Для того чтобы можно было считать доказанными и в общем случае предела по произвольной базе все те теоремы о пределах, которые мы доказали в пункте 2 для специальной базы $E \ni x \to a$, необходимо дать соответствующие определения: финально постоянной, финально ограниченной и бесконечно малой при данной базе функций.

Определение 13. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *финально постоянной при базе* $\mathscr{B}$, если существуют число $A \in \mathbb{R}$ и такой элемент $B \in \mathscr{B}$ базы, в любой точке $x \in B$ которого $f(x) = A$.

Определение 14. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной при базе* $\mathscr{B}$ или *финально ограниченной при базе* $\mathscr{B}$, если существуют число $c \in \mathbb{R}$ и такой элемент $B \in \mathscr{B}$ базы, в любой точке $x \in B$ которого $|f(x)| < c$.

Определение 15. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой при базе* $\mathscr{B}$, если $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) = 0$.

После этих определений и основного наблюдения о том, что для доказательства теорем о пределах нужны только свойства B_1) и B_2) базы, можно считать, что все свойства предела, установленные в пункте 2, справедливы для пределов по любой базе.

В частности, мы можем теперь говорить о пределе функции при $x \to \infty$, или при $x \to -\infty$, или при $x \to +\infty$.

Кроме того, мы обеспечили себе возможность применения теории пределов и в том случае, когда функции будут определены не на числовых множествах; в дальнейшем это окажется особенно ценным. К примеру, длина кривой есть числовая функция, определенная на некотором классе кривых. Если мы знаем эту функцию на ломаных, то потом предельным переходом определяем ее для более сложных кривых, например для окружности.

В данный же момент основная польза от сделанного наблюдения и введенного в связи с ним понятия базы состоит в том, что они избавляют нас от проверок и формальных доказательств теорем о пределах для каждого

конкретного вида предельных переходов или, в нашей нынешней терминологии, для каждого конкретного вида баз.

Для того чтобы окончательно освоиться с понятием предела по произвольной базе, доказательства дальнейших свойств предела функции мы проведем в общем виде.

4. Вопросы существования предела функции

а. Критерий Коши. Прежде чем формулировать критерий Коши, дадим следующее полезное

Определение 16. *Колебанием* функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ на множестве $E \subset X$ называется величина

$$\omega(f; E) := \sup_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|,$$

т. е. верхняя грань модуля разности значений функции на всевозможных парах точек $x_1, x_2 \in E$.

Примеры. 11. $\omega(x^2; [-1, 2]) = 4$.

12. $\omega(x; [-1, 2]) = 3$.

13. $\omega(x;]-1, 2[) = 3$.

14. $\omega(\operatorname{sgn} x; [-1, 2]) = 2$.

15. $\omega(\operatorname{sgn} x; [0, 2]) = 1$.

16. $\omega(\operatorname{sgn} x;]0, 2]) = 0$.

Теорема 4 (критерий Коши существования предела функции). *Пусть X — множество и $\mathcal{B}$ — база в X.*

Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ имеет предел по базе $\mathcal{B}$ в том и только в том случае, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется элемент $B \in \mathcal{B}$ базы, на котором колебание функции меньше ε.

Итак,

$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B}\ (\omega(f; B) < \varepsilon).$$

◄ *Необходимость.* Если $\lim_{\mathcal{B}} f(x) = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент B базы $\mathcal{B}$, в любой точке x которого $|f(x) - A| < \varepsilon/3$. Но тогда для любых x_1, x_2 из B

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{2}{3}\varepsilon$$

и, значит, $\omega(f; B) < \varepsilon$.

Достаточность. Докажем теперь основную часть критерия, утверждающую, что если для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент B базы $\mathcal{B}$, на котором $\omega(f; B) < \varepsilon$, то функция f имеет предел по базе $\mathcal{B}$.

Придавая ε последовательно значения $1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots$, получим последовательность $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ элементов базы таких, что $\omega(f; B_n) < 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $B_n \neq \varnothing$, в каждом B_n можно взять по точке x_n. Последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ фундаментальная. Действительно, $B_n \cap$

$\cap B_m \neq \varnothing$, и, взяв вспомогательную точку $x \in B_n \cap B_m$, получим, что

$$|f(x_n) - f(x_m)| < |f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(x_m)| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

По доказанному для последовательностей критерию Коши, последовательность $\{f(x_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ имеет некоторый предел A. Из установленного выше неравенства при $m \to \infty$ следует, что $|f(x_n) - A| \leqslant 1/n$, а отсюда, учитывая, что $\omega(f; B_n) < 1/n$, заключаем теперь, что если $n > N = [2/\varepsilon] + 1$, то в любой точке $x \in B_n$ будет $|f(x) - A| < \varepsilon$. ►

Замечание. Проведенное доказательство, как мы увидим позже, остается в силе для функций со значениями в любом так называемом *полном* пространстве Y. Если же $Y = \mathbb{R}$, а этот случай нас сейчас в первую очередь и интересует, то при желании можно пользоваться той же идеей, что и в доказательстве достаточности критерия Коши для последовательностей.

◄ Полагая $m_B = \inf\limits_{x \in B} f(x)$, $M_B = \sup\limits_{x \in B} f(x)$ и замечая, что для любых элементов B_1, B_2 базы $\mathscr{B}$ выполнено $m_{B_1} \leqslant m_{B_1 \cap B_2} \leqslant M_{B_1 \cap B_2} \leqslant M_{B_2}$, по аксиоме полноты найдем число $A \in \mathbb{R}$, разделяющее числовые множества $\{m_B\}$ и $\{M_B\}$, где $B \in \mathscr{B}$. Поскольку $\omega(f; B) = M_B - m_B$, то теперь можно заключить, что как только $\omega(f; B) < \varepsilon$, так $|f(x) - A| < \varepsilon$ в любой точке $x \in B$. ►

Пример 17. Покажем, что в случае, когда $X = \mathbb{N}$ и $\mathscr{B}$ есть база $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$, доказанный общий критерий Коши существования предела функции совпадает с рассмотренным ранее критерием Коши существования предела последовательности.

Действительно, элементом базы $n \to \infty$, $n \in \mathbb{N}$ является множество $B = \mathbb{N} \cap U(\infty) = \{n \in \mathbb{N} \mid n > N\}$ тех натуральных чисел $n \in \mathbb{N}$, которые больше некоторого числа $N \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности можно считать, что $N \in \mathbb{N}$. Соотношение $\omega(f; B) < \varepsilon$ в нашем случае означает, что $\forall n_1, n_2 > N$ имеем $|f(n_1) - f(n_2)| < \varepsilon$.

Таким образом, условие, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $B \in \mathscr{B}$ базы, на котором колебание $\omega(f; B)$ функции f меньше ε, для функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ равносильно условию фундаментальности последовательности $\{f(n)\}$.

b. Предел композиции функций

Теорема 5 (о пределе композиции функций). *Пусть Y — множество; $\mathscr{B}_Y$ — база в Y; $g\colon Y \to \mathbb{R}$ — отображение, имеющее предел по базе $\mathscr{B}_Y$.*

Пусть X — множество, $\mathscr{B}_X$ — база в X и $f\colon X \to Y$ — такое отображение X в Y, что для любого элемента $B_Y \in \mathscr{B}_Y$ базы $\mathscr{B}_Y$ найдется элемент $B_X \in \mathscr{B}_X$ базы $\mathscr{B}_X$, образ которого $f(B_X)$ содержится в B_Y.

При этих условиях композиция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ отображений f и g определена, имеет предел по базе $\mathscr{B}_X$ и $\lim\limits_{\mathscr{B}_X} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{\mathscr{B}_Y} g(y)$.

◄ Композиция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ определена, поскольку $f(X) \subset Y$.

Пусть $\lim\limits_{\mathscr{B}_Y} g(y) = A$. Покажем, что $\lim\limits_{\mathscr{B}_X} (g \circ f)(x) = A$. По заданной окрестности $V(A)$ точки A найдем элемент $B_Y \in \mathscr{B}_Y$ базы $\mathscr{B}_Y$ такой, что $g(B_Y) \subset V(A)$. По условию найдется элемент $B_X \in \mathscr{B}_X$ базы $\mathscr{B}_X$ такой, что $f(B_X) \subset B_Y$. Но

тогда $(g\circ f)(B_X)=g(f(B_X))\subset g(B_Y)\subset V(A)$ и мы, таким образом, проверили, что A является пределом функции $(g\circ f)\colon X\to\mathbb{R}$ по базе $\mathscr{B}_X$. ►

Пример 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}=?$

Если положить $g(y)=\dfrac{\sin y}{y}$, а $f(x)=7x$, то $(g\circ f)(x)=\dfrac{\sin 7x}{7x}$. В нашем случае $Y=\mathbb{R}\setminus 0$, $X=\mathbb{R}$. Поскольку $\lim\limits_{y\to 0}g(y)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$, то для применения теоремы надо проверить, что, какой бы элемент базы $y\to 0$ мы ни взяли, найдется элемент базы $x\to 0$, образ которого при отображении $f(x)=7x$ содержится в указанном элементе базы $y\to 0$. Элементами базы $y\to 0$ являются проколотые окрестности $\mathring{U}_Y(0)$ точки $0\in\mathbb{R}$.

Элементами базы $x\to 0$ также являются проколотые окрестности $\mathring{U}_X(0)$ точки $0\in\mathbb{R}$. Пусть $\mathring{U}_Y(0)=\{y\in\mathbb{R}\mid \alpha<y<\beta,\ y\neq 0\}$ (где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, причем $\alpha<0$, $\beta>0$) — произвольная проколотая окрестность нуля в Y. Если взять $\mathring{U}_X(0)=\{x\in\mathbb{R}\mid \alpha/7<x<\beta/7,\ x\neq 0\}$, то эта проколотая окрестность нуля в X уже обладает тем свойством, что $f(\mathring{U}_X)(0)=\mathring{U}_Y(0)\subset\mathring{U}_Y(0)$.

Условия теоремы выполнены, и теперь можно утверждать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$

Пример 19. Функция $g(y)=|\operatorname{sgn} y|$, как мы уже видели (см. пример 3), имеет предел $\lim\limits_{y\to 0}|\operatorname{sgn} y|=1$.

Функция $y=f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, определенная при $x\neq 0$, также имеет предел $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ (см. пример 1).

Однако функция $(g\circ f)(x)=\left|\operatorname{sgn}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)\right|$ при $x\to 0$ не имеет предела.

Действительно, в любой проколотой окрестности точки $x=0$ имеются нули функции $\sin\dfrac{1}{x}$, поэтому функция $\left|\operatorname{sgn}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)\right|$ в любой такой окрестности принимает и значение 1, и значение 0 и по критерию Коши не может иметь предел при $x\to 0$.

Не противоречит ли это доказанной теореме?

Проверьте, как мы сделали это в предыдущем примере, выполнены ли здесь условия теоремы.

Пример 20. Покажем, что

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.}$$

◄ Пусть

$$Y=\mathbb{N},\ \mathscr{B}_Y\text{ — база } n\to\infty,\ n\in\mathbb{N};$$
$$X=\mathbb{R}_+=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\},\ \mathscr{B}_X\text{ — база } x\to+\infty;$$
$$f\colon X\to Y\text{ есть отображение } x\overset{f}{\longmapsto}[x],$$

где $[x]$ — целая часть числа x (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее числа x).

Тогда для любого элемента $B_Y=\{n\in\mathbb{N} \mid n>N\}$ базы $n\to\infty$, $n\in\mathbb{N}$, очевидно, найдется элемент $B_X=\{x\in\mathbb{R} \mid x>N+1\}$ базы $x\to+\infty$, образ которого при отображении $x\to[x]$ содержится в B_Y.

Функции $g(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $g_1(n)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$, $g_2(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, как нам уже известно, имеют своим пределом по базе $n\to\infty$, $n\in\mathbb{N}$, число e.

По теореме о пределе композиции функций можно утверждать, что тогда функции

$$(g\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}, \quad (g_1\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]},$$
$$(g_2\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

также имеют своим пределом по базе $x\to+\infty$ число e.

Теперь остается заметить, что при $x\geqslant 1$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

и так как при $x\to+\infty$ крайние члены стремятся к e, то по свойствам предела (теорема 3) получаем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Используя теорему о пределе композиции функций, покажем теперь, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Запишем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{(-t)\to-\infty}\left(1+\frac{1}{(-t)}\right)^{(-t)}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}=\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e.$$

Написанные равенства с учетом произведенных замен $u=t-1$ и $t=-x$ обосновываются с конца (!) на основе теоремы о пределе композиции функций. Действительно, только тогда, когда мы пришли к пределу $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u$, существование которого уже доказано, теорема позволяет утверждать, что предыдущий предел тоже существует и равен этому. Тогда и стоящий перед ним предел существует, и конечным числом таких переходов придем к исходному пределу. Это довольно типичный пример процедуры использования теоремы о пределе сложной функции при вычислении пределов.

Итак, мы имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Действительно, пусть задано число $\varepsilon>0$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, найдется число $c_1\in\mathbb{R}$ такое, что при $x<c_1$ будет $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, найдется число $c_2\in\mathbb{R}$ такое, что при $c_2<x$ будет $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$.

Тогда при $|x|>c=\max\{|c_1|,|c_2|\}$ будем иметь $\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$. Тем самым проверено, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. ►

ПРИМЕР 21.

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t}=e.$$

◄ После замены $x=1/t$ возвращаемся к пределу, рассмотренному в предыдущем примере. ►

ПРИМЕР 22.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{q^x}=0,\quad \text{если } q>1.$$

◄ Мы знаем (см. § 1, пример 11), что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{q^n}=0$, если $q>1$.

Теперь, как и в примере 3, можно рассмотреть вспомогательное отображение $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{N}$, осуществляемое функцией $[x]$ (целая часть x).

Воспользовавшись неравенствами

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{[x]}{q^{[x]}}<\frac{x}{q^x}<\frac{[x]+1}{q^{[x]+1}}\cdot q$$

и учитывая, что по теореме о пределе сложной функции крайние члены стремятся к нулю при $x\to+\infty$, заключаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{q^x}=0$. ►

ПРИМЕР 23.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=0.$$

◄ Пусть $a>1$. Полагаем $t=\log_a x$, находим $x=a^t$. По свойствам показательной и логарифмической функций (учитывая неограниченность a^n, $n\in\mathbb{N}$) имеем $(x\to+\infty)\Leftrightarrow(t\to+\infty)$. Используя теорему о пределе сложной функции и результат примера 22, получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{a^t}=0.$$

Если $0<a<1$, то положим $-t=\log_a x$, $x=a^{-t}$. Тогда $(x\to+\infty)\Leftrightarrow(t\to\to+\infty)$, и так как $1/a>1$, то снова

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t}{a^{-t}}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{(1/a)^t}=0. \text{ ►}$$

c. Предел монотонной функции. Рассмотрим теперь один частный, но весьма полезный класс числовых функций — монотонные функции.

Определение 17. Функция $f: E \to \mathbb{R}$, определенная на числовом множестве $E \subset \mathbb{R}$, называется

возрастающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2));$$

неубывающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2));$$

невозрастающей на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2));$$

убывающей

$$\forall x_1, x_2 \in E \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

Функции перечисленных типов называются *монотонными* на множестве E.

Предположим, что числа (или символы $-\infty$, $+\infty$) $i = \inf E$ и $s = \sup E$ являются предельными точками множества E и $f: E \to \mathbb{R}$ — монотонная функция на E. Имеет место следующая

Теорема 6 (критерий существования предела монотонной функции). *Для того чтобы неубывающая на множестве E функция $f: E \to \mathbb{R}$ имела предел при $x \to s$, $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху, а для того чтобы она имела предел при $x \to i$, $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена снизу.*

◄ Докажем теорему для предела $\lim\limits_{E \ni x \to s} f(x)$.

Если этот предел существует, то, как и всякая функция, имеющая предел, функция f оказывается финально ограниченной при базе $E \ni x \to s$.

Поскольку f — неубывающая на E функция, отсюда следует, что f ограничена сверху. На самом деле можно утверждать даже, что $f(x) \leqslant \lim\limits_{E \ni x \to s} f(x)$ для любого $x \in E$. Это будет видно из дальнейшего.

Перейдем к доказательству существования предела $\lim\limits_{E \ni x \to s} f(x)$ при условии ограниченности f сверху.

Если f ограничена сверху, то существует верхняя грань значений, которые функция принимает на множестве $E \setminus s$. Пусть $A = \sup\limits_{x \in E \setminus s} f(x)$; покажем, что $\lim\limits_{E \ni x \to s} f(x) = A$. По $\varepsilon > 0$, на основании определения верхней грани множества, найдем точку $x_0 \in E \setminus s$, для которой $A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant A$. Тогда ввиду неубывания f на E получаем, что при $x_0 < x \in E \setminus s$ будет $A - \varepsilon < f(x) \leqslant A$. Но множество $\{x \in E \setminus s \mid x_0 < x\}$, очевидно, есть элемент базы $x \to s$, $x \in E$ (ибо $s = \sup E$). Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{E \ni x \to s} f(x) = A$.)

Для предела $\lim\limits_{E\ni x\to i} f(x)$ все рассуждения аналогичны. В этом случае имеем $\lim\limits_{E\ni x\to i} f(x) = \inf\limits_{x\in E\setminus i} f(x)$. ►

d. Сравнение асимптотического поведения функций. Этот пункт мы начнем поясняющими тему примерами.

Пусть $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих данного вещественного числа $x\in\mathbb{R}$. Имея возможность при любом фиксированном x найти (хотя бы перебором) значение $\pi(x)$, мы тем не менее не в состоянии сразу ответить, например, на вопрос о том, как ведет себя функция $\pi(x)$ при $x\to+\infty$ или, что то же самое, каков асимптотический закон распределения простых чисел. От Евклида нам известно, что $\pi(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$, но доказать, что $\pi(x)$ растет примерно как $\frac{x}{\ln x}$, удалось только в XIX веке П. Л. Чебышёву[1].

Когда возникает вопрос об описании поведения функции вблизи некоторой точки (или бесконечности), в которой, как правило, сама функция не определена, говорят, что интересуются *асимптотикой* или *асимптотическим поведением* функции в окрестности этой точки.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуют с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Так, $\pi(x)$ при $x\to+\infty$ ведет себя как $\frac{x}{\ln x}$; функция $\frac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$ ведет себя как постоянная функция, равная 1; говоря о поведении функции $x^2 + x + \sin\frac{1}{x}$ при $x\to\infty$, мы, ясно, скажем, что она в основном ведет себя как функция x^2, а при $x\to 0$ — как $\sin\frac{1}{x}$.

Дадим теперь точные определения некоторых элементарных понятий, относящихся к асимптотическому поведению функций. Этими понятиями мы будем систематически пользоваться уже на первом этапе изучения анализа.

Определение 18. Условимся говорить, что некоторое свойство функций или соотношение между функциями *выполнено финально при данной базе* $\mathcal{B}$, если найдется элемент $B\in\mathcal{B}$ базы, на котором оно имеет место.

Именно в этом смысле мы до сих пор понимали финальное постоянство или финальную ограниченность функции при данной базе. В этом же смысле мы дальше будем говорить, например, о том, что финально выполнено соотношение $f(x) = g(x)h(x)$ между некоторыми функциями f, g, h. Эти функции могут даже иметь разные исходные области определения, но если мы интересуемся их асимптотическим поведением при базе $\mathcal{B}$, то нам важно только, чтобы все они были определены на некотором элементе базы $\mathcal{B}$.

---

[1] П. Л. Чебышёв (1821—1894) — великий русский математик и механик, основатель большой математической школы в России.

Определение 19. Говорят, что функция f есть *бесконечно малая по сравнению с функцией g при базе $\mathcal{B}$* и пишут $f \underset{\mathcal{B}}{=} o(g)$ или $f = o(g)$ при $\mathcal{B}$, если финально при базе $\mathcal{B}$ выполнено соотношение $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где α — функция, бесконечно малая при базе $\mathcal{B}$.

Пример 24. $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, так как $x^2 = x \cdot x$.

Пример 25. $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$, так как финально, когда уже $x \neq 0$, $x = \frac{1}{x} \cdot x^2$.

Из этих примеров надо сделать вывод, что указание базы, при которой $f = o(g)$, совершенно необходимо.

Обозначение $f = o(g)$ читается «f есть o малое от g».

Из определения следует, в частности, что получающаяся при $g(x) \equiv 1$ запись $f \underset{\mathcal{B}}{=} o(1)$ означает просто, что f есть бесконечно малая при базе $\mathcal{B}$.

Определение 20. Если $f \underset{\mathcal{B}}{=} o(g)$ и функция g сама есть бесконечно малая при базе $\mathcal{B}$, то говорят, что f есть *бесконечно малая более высокого по сравнению с g порядка при базе $\mathcal{B}$*.

Пример 26. $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ при $x \to \infty$ есть бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с бесконечно малой $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Определение 21. Функцию, стремящуюся к бесконечности при данной базе, называют *бесконечно большой функцией* или просто *бесконечно большой при данной базе*.

Определение 22. Если f и g — бесконечно большие при базе $\mathcal{B}$ и $f \underset{\mathcal{B}}{=} o(g)$, то говорят, что g есть *бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с f*.

Пример 27. $\frac{1}{x} \to \infty$ при $x \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to \infty$ при $x \to 0$ и $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \to 0$, поэтому $\frac{1}{x^2}$ есть бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с $\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Вместе с тем при $x \to \infty$ функция x^2 есть бесконечно большая более высокого порядка, чем x.

Не следует думать, что, выбрав степени x^n для описания асимптотического поведения функций, мы сможем каждую бесконечно малую или бесконечно большую характеризовать некоторым числом n — ее степенью.

Пример 28. Покажем, что при $a > 1$ и любом $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0,$$

т. е. $x^n = o(a^x)$ при $x \to +\infty$.

◄ Если $n \leqslant 0$, то утверждение очевидно. Если же $n \in \mathbb{N}$, то, полагая $q = \sqrt[n]{a}$, имеем $q > 1$ и $\frac{x^n}{a^x} = \left(\frac{x}{q^x}\right)^n$, поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{q^x}\right)^n = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{q^x} \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{q^x}}_{n \text{ раз}} = 0.$$

Мы воспользовались, по индукции, теоремой о пределе произведения и результатом примера 22. ►

Таким образом, при любом $n \in \mathbb{Z}$ получаем $x^n = o(a^x)$ при $x \to +\infty$, если $a > 1$.

Пример 29. Развивая предыдущий пример, покажем, что при $a > 1$ и любом $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0,$$

т. е. $x^\alpha = o(a^x)$ при $x \to +\infty$.

◄ Действительно, возьмем число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > \alpha$. Тогда при $x > 1$ получим

$$0 < \frac{x^\alpha}{a^x} < \frac{x^n}{a^x}.$$

Опираясь на свойства предела и результат предыдущего примера, получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$. ►

Пример 30. Покажем, что при $a > 1$ и любом $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\mathbb{R}_+ \ni x\to 0} \frac{a^{-1/x}}{x^\alpha} = 0,$$

т. е. $a^{-1/x} = o(x^\alpha)$ при $x \to 0$, $x \in \mathbb{R}_+$.

◄ Полагая в этом случае $x = -1/t$, по теореме о пределе сложной функции, используя результат предыдущего примера, находим

$$\lim_{\mathbb{R}_+ \ni x\to 0} \frac{a^{-1/x}}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^\alpha}{a^t} = 0. \text{ ►}$$

Пример 31. Покажем, что при $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0,$$

т. е. при любом положительном показателе степени α имеем $\log_a x = o(x^\alpha)$ при $x \to +\infty$.

◄ Если $a > 1$, то положим $x = a^{t/\alpha}$. Тогда по свойствам показательной функции и логарифма, опираясь на теорему о пределе композиции функций и результат примера 29, находим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(t/\alpha)}{a^t} = \frac{1}{\alpha} \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{a^t} = 0.$$

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и после замены $x = a^{-t/\alpha}$ получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{(-t/\alpha)}{a^{-t}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{(1/a)^t} = 0. \text{ ►}$$

Пример 32. Покажем еще, что при любом $\alpha > 0$

$$x^\alpha \log_a x = o(1) \quad \text{при } x \to 0,\ x \in \mathbb{R}_+.$$

◄ Нам нужно показать, что $\lim\limits_{\mathbb{R}_+\ni x\to 0} x^\alpha \log_a x = 0$ при $\alpha > 0$. Полагая $x = 1/t$, применяя теорему о пределе композиции функций и результат предыдущего примера, находим

$$\lim_{\mathbb{R}_+\ni x\to 0} x^\alpha \log_a x = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log_a (1/t)}{t^\alpha} = -\lim_{t\to+\infty} \frac{\log_a t}{t^\alpha} = 0. \text{ ►}$$

Определение 23. Условимся, что запись $f \underset{\mathscr{B}}{=} O(g)$ или $f = O(g)$ при базе $\mathscr{B}$ (читается «f есть O большое от g при базе $\mathscr{B}$») будет означать, что финально при базе $\mathscr{B}$ выполнено соотношение $f(x) = \beta(x)g(x)$, где $\beta(x)$ — финально ограниченная при базе $\mathscr{B}$ функция.

В частности, запись $f \underset{\mathscr{B}}{=} O(1)$ означает, что функция f финально ограничена при базе $\mathscr{B}$.

Пример 33. $\left(\frac{1}{x} + \sin x\right) x = O(x)$ при $x \to \infty$.

Определение 24. Говорят, что функции f и g *одного порядка при базе* $\mathscr{B}$ и пишут $f \asymp g$ при базе $\mathscr{B}$, если одновременно $f \underset{\mathscr{B}}{=} O(g)$ и $g \underset{\mathscr{B}}{=} O(f)$.

Пример 34. Функции $(2 + \sin x)x$ и x одного порядка при $x \to \infty$, но $(1 + \sin x)x$ и x не являются функциями одного порядка при $x \to \infty$.

Условие, что функции f и g одного порядка при базе $\mathscr{B}$, очевидно, равносильно тому, что найдутся числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и элемент B базы $\mathscr{B}$ такие, что на B имеют место соотношения

$$c_1|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant c_2|g(x)|$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{c_2}|f(x)| \leqslant |g(x)| \leqslant \frac{1}{c_1}|f(x)|.$$

Определение 25. Если между функциями f и g финально при базе $\mathscr{B}$ выполнено соотношение $f(x) = \gamma(x)g(x)$, где $\lim\limits_{\mathscr{B}} \gamma(x) = 1$, то говорят, что *при базе $\mathscr{B}$ функция f асимптотически ведет себя как функция g* или, короче, что *f эквивалентна g при базе $\mathscr{B}$*.

Будем в этом случае писать $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g$ или $f \sim g$ при базе $\mathscr{B}$.

Употребление термина «эквивалентна» оправдано тем, что

$$(f \underset{\mathscr{B}}{\sim} f),$$

$$(f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g) \Rightarrow (g \underset{\mathscr{B}}{\sim} f),$$

$$(f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g) \wedge (g \underset{\mathscr{B}}{\sim} h) \Rightarrow (f \underset{\mathscr{B}}{\sim} h).$$

Действительно, соотношение $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} f$ очевидно, в этом случае $\gamma(x) \equiv 1$. Далее, если $\lim\limits_{\mathscr{B}} \gamma(x) = 1$, то $\lim\limits_{\mathscr{B}} \frac{1}{\gamma(x)} = 1$ и $g(x) = \frac{1}{\gamma(x)} f(x)$. Здесь надо только объяснить, почему можно считать, что $\gamma(x) \neq 0$. Если соотношение $f(x) = \gamma(x)g(x)$ имеет место на элементе $B_1 \in \mathscr{B}$, а соотношение $\frac{1}{2} < |\gamma(x)| < \frac{3}{2}$ —

на элементе $B_2 \in \mathscr{B}$, то мы можем взять элемент $B \subset B_1 \cap B_2$, на котором будет выполнено и то и другое. Всюду вне B, если угодно, можно вообще считать, что $\gamma(x) \equiv 1$. Таким образом, действительно $(f \sim g) \Rightarrow (g \sim f)$.

Наконец, если $f(x) = \gamma_1(x)g(x)$ на $B_1 \in \mathscr{B}$ и $g(x) = \gamma_2(x)h(x)$ на $B_2 \in \mathscr{B}$, то на элементе $B \in \mathscr{B}$ базы $\mathscr{B}$ таком, что $B \subset B_1 \cap B_2$, оба эти соотношения выполнены одновременно, поэтому $f(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)h(x)$ на B. Но $\lim\limits_{\mathscr{B}} \gamma_1(x)\gamma_2(x) = \lim\limits_{\mathscr{B}} \gamma_1(x) \cdot \lim\limits_{\mathscr{B}} \gamma_2(x) = 1$ и тем самым проверено, что $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} h$.

Полезно заметить, что поскольку соотношение $\lim\limits_{\mathscr{B}} \gamma(x) = 1$ равносильно тому, что $\gamma(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{\mathscr{B}} \alpha(x) = 0$, то соотношение $f \underset{\mathscr{B}}{\sim} g$ равносильно тому, что $f(x) = g(x) + \alpha(x)g(x) = g(x) + o(g(x))$ при базе $\mathscr{B}$.

Мы видим, что относительная погрешность $|\alpha(x)| = \left|\frac{f(x) - g(x)}{g(x)}\right|$ приближения функции с помощью функции $g(x)$, эквивалентной $f(x)$ при базе $\mathscr{B}$, есть величина бесконечно малая при базе $\mathscr{B}$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 35. $x^2 + x = \left(1 + \frac{1}{x}\right) x^2 \sim x^2$ при $x \to \infty$.

Абсолютная величина разности этих функций

$$|(x^2 + x) - x^2| = |x|$$

стремится к бесконечности, однако относительная погрешность $\frac{|x|}{x^2} = \frac{1}{|x|}$ замены функции $x^2 + x$ на эквивалентную величину x^2 стремится к нулю при $x \to \infty$.

Пример 36. В начале этого пункта мы говорили о знаменитом асимптотическом законе распределения простых чисел. Теперь мы в состоянии записать его точную формулировку:

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad \text{при } x \to \infty.$$

Пример 37. Поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, что можно написать также в виде равенства $\sin x = x + o(x)$ при $x \to 0$.

Пример 38. Покажем, что $\ln(1 + x) \sim x$ при $x \to 0$.

◄ $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = \ln\Bigl(\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}\Bigr) = \ln e = 1.$$

Мы воспользовались в первом равенстве тем, что $\log_a(b^\alpha) = \alpha \log_a b$, а во втором тем, что $\lim\limits_{t \to b} \log_a t = \log_a b = \log_a\Bigl(\lim\limits_{t \to b} t\Bigr)$. ►

Итак, $\ln(1 + x) = x + o(x)$ при $x \to 0$.

Пример 39. Покажем, что $e^x = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$.

◄ $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = 1.$$

Мы сделали замену $x = \ln(1 + t)$, $e^x - 1 = t$ и воспользовались тем, что $e^x \to e^0 = 1$ при $x \to 0$, причем $e^x \neq 1$ при $x \neq 0$. Таким образом, на основании

теоремы о пределе композиции и результата предыдущего примера утверждение доказано. ►

Итак, $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Пример 40. Покажем, что $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ при $x \to 0$.

$$◄ \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

В этой выкладке мы, предполагая $\alpha \neq 0$, сделали замену $\alpha \ln(1+x) = t$ и воспользовались результатами двух предыдущих примеров.

Если же $\alpha = 0$, то утверждение очевидно. ►

Таким образом, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ при $x \to 0$.

При вычислении пределов иногда бывает полезно следующее простое

Утверждение 3. *Если $f \underset{\mathcal{B}}{\sim} \tilde{f}$, то $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x)g(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}} \tilde{f}(x)g(x)$, если один из этих пределов существует.*

◄ Действительно, коль скоро $f(x) = \gamma(x)\tilde{f}(x)$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} \gamma(x) = 1$, то

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x)g(x) = \lim_{\mathcal{B}} \gamma(x)\tilde{f}(x)g(x) = \lim_{\mathcal{B}} \gamma(x) \cdot \lim_{\mathcal{B}} \tilde{f}(x)g(x) = \lim_{\mathcal{B}} \tilde{f}(x)g(x). \quad ►$$

Пример 41.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{\sin x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{x^2} = $$
$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Мы воспользовались тем, что $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, $\frac{1}{\sin \beta} \sim \frac{1}{\beta}$ при $\beta \to 0$ и $\sin^2 x \sim x^2$ при $x \to 0$.

Мы доказали, что в одночленах при вычислении пределов можно заменять функции на им эквивалентные при данной базе. Не следует распространять это правило на суммы и разности функций.

Пример 42. $\sqrt{x^2 + x} \sim x$ при $x \to +\infty$, но

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) \neq \lim_{x\to+\infty} (x - x) = 0.$$

В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Отметим еще следующие широко используемые в анализе правила обращения с символами $o(\cdot)$, $O(\cdot)$.

Утверждение 4. *При данной базе*

a) $o(f) + o(f) = o(f)$;

b) $o(f)$ *есть также* $O(f)$;

c) $o(f) + O(f) = O(f)$;

d) $O(f)+O(f)=O(f)$;

e) *если* $g(x)\neq 0$*, то* $\dfrac{o(f(x))}{g(x)}=o\Big(\dfrac{f(x)}{g(x)}\Big)$ *и* $\dfrac{O(f(x))}{g(x)}=O\Big(\dfrac{f(x)}{g(x)}\Big)$.

Обратите внимание на особенности действий с символами $o(\cdot)$, $O(\cdot)$, вытекающие из смысла этих символов. Например, $2o(f)=o(f)$, или $o(f)+O(f)=O(f)$ (хотя, вообще говоря, $o(f)\neq 0$), или $o(f)=O(f)$, но $O(f)\neq o(f)$. Здесь знак равенства всюду имеет значение слова «есть». Сами символы $o(\cdot)$, $O(\cdot)$ обозначают не столько функцию, сколько указание на характер ее асимптотического поведения, которым, кстати, обладают сразу многие функции, например, и f, и $2f$, и т. п.

◄ a) После сделанного уточнения утверждение a) перестает выглядеть неожиданным. Первый символ $o(f)$ в нем означает некоторую функцию вида $\alpha_1(x)f(x)$, где $\lim\limits_{\mathscr{B}}\alpha_1(x)=0$. Второй символ $o(f)$, который можно (или нужно) было бы снабдить пометкой, отличающей его от первого, означает некоторую функцию вида $\alpha_2(x)f(x)$, где $\lim\limits_{\mathscr{B}}\alpha_2(x)=0$. Тогда

$$\alpha_1(x)f(x)+\alpha_2(x)f(x)=(\alpha_1(x)+\alpha_2(x))f(x)=\alpha_3(x)f(x),$$

где $\lim\limits_{\mathscr{B}}\alpha_3(x)=0$.

b) Следует из того, что всякая функция, имеющая предел, является финально ограниченной.

c) Следует из b) и d).

d) Следует из того, что сумма финально ограниченных функций финально ограничена.

e) $\dfrac{o(f(x))}{g(x)}=\dfrac{\alpha(x)f(x)}{g(x)}=\alpha(x)\dfrac{f(x)}{g(x)}=o\Big(\dfrac{f(x)}{g(x)}\Big)$.

Аналогично проверяется и вторая часть утверждения e). ►

Пользуясь этими правилами и эквивалентностями, полученными в примере 40, теперь можно следующим прямым методом искать предел из примера 42:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+x}-x\big)=\lim_{x\to+\infty}x\Big(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\Big)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=\frac{1}{2}.$$

Несколько позже мы докажем следующие важные соотношения, которые уже сейчас стоит запомнить как таблицу умножения:

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots \qquad \text{при } x\in\mathbb{R},$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+\ldots \qquad \text{при } x\in\mathbb{R},$$
$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\ldots \qquad \text{при } x\in\mathbb{R},$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots \qquad \text{при } |x|<1,$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+ \\ +\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad \text{при } |x|<1.$$

Эти соотношения, с одной стороны, уже могут служить вычислительными формулами, а с другой стороны, как будет видно, содержат в себе следующие асимптотические формулы, обобщающие формулы, полученные в примерах 37—40:

$$e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+O(x^{n+1}) \qquad \text{при } x\to 0,$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+O(x^{2k+2}) \qquad \text{при } x\to 0,$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+O(x^{2k+3}) \qquad \text{при } x\to 0,$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+O(x^{n+1}) \qquad \text{при } x\to 0,$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+ \\ +\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+O(x^{n+1}) \quad \text{при } x\to 0.$$

Эти формулы обычно являются наиболее эффективным средством при отыскании пределов элементарных функций. При этом полезно иметь в виду, что $O(x^{m+1}) = x^{m+1}\cdot O(1) = x^m\cdot x\cdot O(1) = x^m\cdot o(1) = o(x^m)$ при $x\to 0$.

Рассмотрим в заключение несколько примеров, показывающих эти формулы в работе.

Пример 43.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+O(x^5)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}+O(x^2)\right) = \frac{1}{3!}.$$

Пример 44. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{1+x^3}}-\cos\frac{1}{x}\right) = ?$

Имеем при $x\to\infty$:

$$\frac{x^3+x}{1+x^3} = \frac{1+x^{-2}}{1+x^{-3}} = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{-1} = \\ = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^3}+O\left(\frac{1}{x^6}\right)\right) = 1+\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{1+x^3}} = \left(1+\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{1/7} = 1+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\cos\frac{1}{x} = 1-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

откуда получаем

$$\sqrt[7]{\frac{x^3+x}{1+x^3}}-\cos\frac{1}{x} = \frac{9}{14}\cdot\frac{1}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{при } x\to\infty.$$

Таким образом, искомый предел равен

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{9}{14x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=\frac{9}{14}.$$

Пример 45.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x &= \lim_{x\to\infty}\exp\left\{x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right)\right\}=\\ &=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right\}=\\ &=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x\right\}=\\ &=\lim_{x\to\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=e^{-1/2}.\end{aligned}$$

Задачи и упражнения

1. a) Докажите, что существует и притом единственная определенная на $\mathbb{R}$ функция, удовлетворяющая требованиям

$$\begin{gathered} f(1)=a\quad (a>0,\ a\neq 1),\\ f(x_1)\cdot f(x_2)=f(x_1+x_2),\\ f(x)\to f(x_0)\quad \text{при } x\to x_0. \end{gathered}$$

b) Докажите, что существует и притом единственная определенная на $\mathbb{R}_+$ функция, удовлетворяющая требованиям

$$\begin{gathered} f(a)=1\quad (a>0,\ a\neq 1),\\ f(x_1)+f(x_2)=f(x_1\cdot x_2),\\ f(x)\to f(x_0)\quad \text{при } x_0\in\mathbb{R}_+ \text{ и } \mathbb{R}_+\ni x\to x_0. \end{gathered}$$

Указание. Просмотрите еще раз конструкцию показательной и логарифмической функций, разобранную в примере 10.

2. a) Установите взаимно однозначное соответствие $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ так, чтобы для любых $x, y\in\mathbb{R}$ было $\varphi(x+y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$, т. е. чтобы операции сложения в прообразе (в $\mathbb{R}$) отвечала операция умножения в образе (в $\mathbb{R}_+$). Наличие такого отображения означает, что группы $(\mathbb{R},+)$ и $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ как алгебраические объекты одинаковы, или, как говорят, *изоморфны*.

b) Докажите, что группы $(\mathbb{R},+)$ и $(\mathbb{R}\setminus 0_+,\cdot)$ не изоморфны.

3. Найдите пределы

a) $\lim\limits_{x\to+0} x^x$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

4. Покажите, что

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+c+o(1)\quad \text{при } n\to\infty,$$

где c — постоянная. (Число $c=0{,}57721\ldots$ называется постоянной Эйлера.)

Указание. Можно воспользоваться тем, что

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad \text{при } n\to\infty.$$

5. Покажите, что

a) если два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ с положительными членами таковы, что $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно;

b) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{1}{n^p}$ сходится только при $p > 1$.

6. Покажите, что

a) если $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$;

b) если $b_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, то всегда можно построить сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что $b_n = o(a_n)$ при $n \to \infty$;

c) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n = \sqrt{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k} - \sqrt{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k}$, тоже сходится, причем $a_n = o(A_n)$ при $n \to \infty$;

d) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами расходится, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n$, где $A_n = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k} - \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k}$, тоже расходится, причем $A_n = o(a_n)$ при $n \to \infty$.

Из c) и d) следует, что никакой сходящийся (расходящийся) ряд не может служить универсальным эталоном для установления сходимости (расходимости) других рядов путем сравнения с ним.

7. Покажите, что

a) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$, где $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, сходится тогда и только тогда, когда последовательность $\{\Pi_n = a_1 \ldots a_n\}$ имеет отличный от нуля предел;

b) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$, где $|\alpha_n| < 1$, абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходится абсолютно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Указание. См. задачу 5а).

8. Говорят, что бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} e_k$ сходится, если последовательность чисел $\Pi_n = \prod\limits_{k=1}^{n} e_k$ имеет конечный, отличный от нуля предел Π. Тогда полагают $\Pi = \prod\limits_{k=1}^{\infty} e_k$.

Покажите, что

a) если бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ сходится, то $e_n \to 1$ при $n \to \infty$;

b) если $\forall n \in \mathbb{N}$ $(e_n > 0)$, то бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln e_n$;

c) если $e_n = 1 + \alpha_n$ и все α_n одного знака, то бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + \alpha_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

9. a) Найдите $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^{n-1}})$.

b) Найдите $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$ и докажите следующую формулу Виета[1]:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots}.$$

c) Найдите функцию $f(x)$, если

$$f(0)=1,$$
$$f(2x)=\cos^2 x\cdot f(x),$$
$$f(x)\to f(0)\quad \text{при } x\to 0.$$

Указание: $x=2\cdot\frac{x}{2}$.

10. Покажите, что

a) если $\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\beta_n$, $n=1, 2, \ldots$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ абсолютно сходится, то существует предел $\lim_{n\to\infty}b_n=b\in\mathbb{R}$;

b) если $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+\alpha_n$, $n=1, 2, \ldots$, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ абсолютно сходится, то $a_n\sim\frac{c}{n^p}$ при $n\to\infty$;

c) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ таков, что $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+\alpha_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ абсолютно сходится при $p>1$ и расходится при $p\leqslant 1$ (*признак Гаусса абсолютной сходимости ряда*).

11. Покажите, что для любой последовательности $\{a_n\}$ с положительными членами

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geqslant e$$

и эта оценка неулучшаема.

---

[1] Ф. Виет (1540—1603) — французский математик, один из создателей современной алгебраической символики.

Глава IV

Непрерывные функции

§ 1. Основные определения и примеры

1. Непрерывность функции в точке. Пусть f — вещественнозначная функция, определенная в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$.

Описательно говоря, функция f *непрерывна* в точке a, если ее значения $f(x)$ по мере приближения аргумента x к точке a приближаются к значению $f(a)$ функции в самой точке a.

Уточним теперь это описание понятия непрерывности функции в точке.

Определение 0. Функция f называется *непрерывной в точке* a, если для любой окрестности $V(f(a))$ значения $f(a)$ функции в точке a найдется такая окрестность $U(a)$ точки a, образ которой при отображении f содержится в $V(f(a))$.

Приведем формально-логическую запись этого определения вместе с двумя его вариациями, часто используемыми в анализе:

$$(f \text{ непрерывна в точке } a) := \big(\forall V(f(a))\ \exists U(a)\ \ (f(U(a)) \subset V(f(a)))\big),$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists U(a)\ \forall x \in U(a)\ (|f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Эквивалентность этих формулировок для вещественнозначных функций следует из того, что (как уже неоднократно отмечалось) любая окрестность точки содержит некоторую симметричную окрестность этой точки.

Например, если по любой ε-окрестности $V^\varepsilon(f(a))$ точки $f(a)$ можно подобрать окрестность $U(a)$ точки a так, что $\forall x \in U(a)\ (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$, т. е. $f(U(a)) \subset V^\varepsilon(f(a))$, то и для любой окрестности $V(f(a))$ тоже можно подобрать соответствующую окрестность точки a. Действительно, достаточно сначала взять $V^\varepsilon(f(a)) \subset V(f(a))$, а затем по $V^\varepsilon(f(a))$ найти $U(a)$. Тогда $f(U(a)) \subset V^\varepsilon(f(a)) \subset V(f(a))$.

Таким образом, если функция непрерывна в точке a в смысле второго из приведенных определений, то она непрерывна в ней и в смысле исходного определения. Обратное очевидно, поэтому эквивалентность первых двух формулировок проверена.

Дальнейшую проверку оставляем читателю.

Чтобы не отвлекаться от основного определяемого понятия непрерывности функции в точке, мы сначала для простоты предположили, что функция

f определена в целой окрестности точки a. Рассмотрим теперь общий случай.

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}$, и a — точка области определения функции.

Определение 1. Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной в точке* $a \in E$, если для любой окрестности $V(f(a))$ значения $f(a)$ функции, принимаемого ею в точке a, найдется такая окрестность $U_E(a)$ точки a в множестве[1] E, образ которой $f(U_E(a))$ содержится в $V(f(a))$.

Итак,

$$(f: E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в } a \in E) := \\ = \big(\forall V(f(a))\ \exists U_E(a)\ (f(U_E(a)) \subset V(f(a)))\big).$$

Разумеется, определение 1 тоже можно записать в ε-δ-форме, рассмотренной выше. Там, где нужны числовые оценки, это бывает полезно и даже необходимо.

Запишем эти вариации определения 1:

$$(f: E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в } a \in E) := \\ = \big(\forall \varepsilon > 0\ \exists U_E(a)\ \forall x \in U_E(a)\ (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)\big),$$

или

$$(f: E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в } a \in E) := \\ = \big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\big).$$

Обсудим теперь детально понятие непрерывности функции в точке.

1° Если a — изолированная, т. е. не предельная, точка множества E, то найдется такая окрестность $U(a)$ точки a, в которой нет других точек множества E, кроме самой точки a. В этом случае $U_E(a) = a$, и поэтому $f(U_E(a)) = f(a) \subset V(f(a))$, какова бы ни была окрестность $V(f(a))$. Таким образом, в любой изолированной точке области определения функция, очевидно, непрерывна. Но это вырожденный случай.

2° Содержательная часть понятия непрерывности относится, таким образом, к тому случаю, когда $a \in E$ и a — предельная точка множества E. Из определения 1 видно, что

$$(f: E \to \mathbb{R} \textit{ непрерывна в } a \in E\textit{, где } a \textit{ — предельная точка } E) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \big(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)\big).$$

---

[1]Напомним, что $U_E(a) = E \cap U(a)$.

◄ В самом деле, если a — предельная точка E, то определена база $E \ni x \to a$ проколотых окрестностей $\overset{\circ}{U}_E(a) = U_E(a) \setminus a$ точки a.

Если f непрерывна в точке a, то, найдя для окрестности $V(f(a))$ окрестность $U_E(a)$ такую, что $f(U_E(a)) \subset V(f(a))$, мы одновременно будем иметь $f(\overset{\circ}{U}_E(a)) \subset V(f(a))$ и в силу определения предела $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)$.

Обратно, если известно, что $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)$, то по окрестности $V(f(a))$ найдем проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}_E(a)$ так, что $f(\overset{\circ}{U}_E(a)) \subset V(f(a))$. Но поскольку $f(a) \in V(f(a))$, то тогда и $f(U_E(a)) \subset V(f(a))$. В силу определения 1 это означает, что функция f непрерывна в точке $a \in E$. ►

3° Поскольку соотношение $\lim\limits_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)$ можно переписать в форме

$$\boxed{\lim_{E \ni x \to a} f(x) = f\Bigl(\lim_{E \ni x \to a} x\Bigr),}$$

мы теперь приходим к полезному заключению, что непрерывные в точке функции (операции) и только они перестановочны с операцией предельного перехода. Это означает, что то число $f(a)$, которое получается при выполнении операции f над числом a, можно сколь угодно точно аппроксимировать значениями, получаемыми при выполнении операции f над соответствующими заданной точности приближенными значениями x величины a.

4° Если заметить, что при $a \in E$ окрестности $U_E(a)$ точки a образуют базу $\mathscr{B}_a$ (независимо от того, является ли a предельной или изолированной точкой множества), то мы увидим, что само определение 1 непрерывности функции в точке a совпадает с определением того, что число $f(a)$ — значение функции в точке a — является пределом функции f по этой базе, т. е.

$$(f : E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в } a \in E) \iff \Bigl(\lim_{\mathscr{B}_a} f(x) = f(a)\Bigr).$$

5° Заметим, однако, что если $\lim\limits_{\mathscr{B}_a} f(x)$ существует, то, поскольку $a \in U_E(a)$ для любой окрестности $U_E(a)$, этот предел неизбежно оказывается равным $f(a)$.

Таким образом, непрерывность функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $a \in E$ равносильна существованию предела этой функции по базе $\mathscr{B}_a$ окрестностей (но не проколотых окрестностей) $U_E(a)$ точки a в E.

Итак,

$$(f : E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна в } a \in E) \iff \Bigl(\exists \lim_{\mathscr{B}_a} f(x)\Bigr).$$

6° В силу критерия Коши существования предела теперь можно сказать, что функция непрерывна в точке $a \in E$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $U_E(a)$ точки a в E такая, на которой колебание $\omega(f; U_E(a))$ функции меньше ε.

Определение 2. Величина $\omega(f;a)=\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(f;U_E^\delta(a))$ (где $U_E^\delta(a)$ есть δ-окрестность точки a в множестве E) называется *колебанием функции* $f\colon E\to\mathbb{R}$ *в точке* a.

Формально символ $\omega(f;X)$ уже занят, он обозначает колебание функции на множестве X. Однако мы никогда не будем рассматривать колебание функции на множестве, состоящем из одной точки (это колебание, очевидно, равно нулю); поэтому символ $\omega(f;a)$, где a — точка, всегда будет обозначать то понятие колебания функции в точке, которое мы только что ввели определением 2.

Колебание функции на подмножестве не превышает колебания функции на множестве, поэтому величина $\omega(f;U_E^\delta(a))$ есть неубывающая функция от δ. Поскольку она неотрицательна, то либо она имеет конечный предел при $\delta\to+0$, либо при любом $\delta>0$ выполнено $\omega(f;U_E^\delta(a))=+\infty$. В последнем случае естественно полагают $\omega(f;a)=+\infty$.

7° Используя определение 2, сказанное в 6° теперь можно резюмировать так: функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда ее колебание в этой точке равно нулю. Зафиксируем это:

$$(f\colon E\to\mathbb{R}\ \text{непрерывна в}\ a\in E)\iff(\omega(f;a)=0).$$

Определение 3. Функция $f\colon E\to\mathbb{R}$ называется *непрерывной на множестве* E, если она непрерывна в каждой точке множества E.

Совокупность всех вещественнозначных функций, непрерывных на множестве E, условимся обозначать символом $C(E;\mathbb{R})$ или, короче, $C(E)$.

Мы обсудили понятие непрерывности функции.

Рассмотрим теперь некоторые примеры.

Пример 1. Если $f\colon E\to\mathbb{R}$ — постоянная функция, то $f\in C(E)$. Это утверждение очевидно, ибо $f(E)=c\subset V(c)$, какова бы ни была окрестность $V(c)$ точки $c\in\mathbb{R}$.

Пример 2. Функция $f(x)=x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Действительно, для любой точки $x_0\in\mathbb{R}$ имеем $|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\varepsilon$, как только $|x-x_0|<\delta=\varepsilon$.

Пример 3. Функция $f(x)=\sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

В самом деле, для любой точки $x_0\in\mathbb{R}$ имеем

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|<\varepsilon,$$

как только $|x-x_0|<\delta=\varepsilon$.

Мы воспользовались неравенством $|\sin x|\leqslant|x|$, доказанным в гл. III, § 2, п. 2d, пример 9.

Пример 4. Функция $f(x)=\cos x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Действительно, как и в предыдущем примере, для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|-2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2 \left|\sin \frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant |x-x_0| < \varepsilon,$$

как только $|x-x_0| < \delta = \varepsilon$.

Пример 5. Функция $f(x) = a^x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Действительно, по свойству 3) показательной функции (см. гл. III, § 2, п. 2d, пример 10a) в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ имеем

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0},$$

что, как мы теперь знаем, равносильно непрерывности функции a^x в точке x_0.

Пример 6. Функция $f(x) = \log_a x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}_+$ области определения $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

В самом деле, по свойству 3) логарифмической функции (см. гл. III, § 2, п. 2d, пример 10b) в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\lim_{\mathbb{R}_+ \ni x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0,$$

что равносильно непрерывности функции $\log_a x$ в точке x_0.

Попробуем, кстати, по заданному $\varepsilon > 0$ найти окрестность $U_{\mathbb{R}_+}(x_0)$ точки x_0 так, чтобы в любой точке $x \in U_{\mathbb{R}_+}(x_0)$ иметь

$$|\log_a x - \log_a x_0| < \varepsilon.$$

Это неравенство равносильно соотношению

$$-\varepsilon < \log_a \frac{x}{x_0} < \varepsilon.$$

Пусть для определенности $a > 1$; тогда последнее соотношение равносильно условию

$$x_0 a^{-\varepsilon} < x < x_0 a^{\varepsilon}.$$

Интервал $]x_0 a^{-\varepsilon}, x_0 a^{\varepsilon}[$ и есть искомая окрестность точки x_0. Полезно обратить внимание на то, что эта окрестность зависит как от величины ε, так и от самой точки x_0, чего не наблюдалось в примерах 1—4.

Пример 7. Любая последовательность $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ есть функция, непрерывная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, поскольку каждая точка множества $\mathbb{N}$ является его изолированной точкой.

2. Точки разрыва. Для того чтобы лучше освоиться с понятием непрерывности, выясним, что происходит с функцией в окрестности той точки, где она не является непрерывной.

Определение 4. Если функция $f: E \to \mathbb{R}$ не является непрерывной в некоторой точке множества E, то эта точка называется *точкой разрыва* функции f.

Построив отрицание к утверждению «функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$», мы получаем следующую запись определения того, что a — точка разрыва функции f:

$$(a \in E \text{ — точка разрыва функции } f) :=$$
$$= \big(\exists V(f(a))\ \forall U_E(a)\ \exists x \in U_E(a)\ (f(x) \notin V(f(a)))\big).$$

Иными словами, $a \in E$ — точка разрыва функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, если найдется такая окрестность $V(f(a))$ значения $f(a)$ функции в точке a, что в любой окрестности $U_E(a)$ точки a в множестве E найдется точка $x \in U_E(a)$, образ которой не содержится в $V(f(a))$.

В ε-δ-форме это же определение выглядит так:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in E\ (|x-a| < \delta \wedge |f(x)-f(a)| > \varepsilon).$$

Рассмотрим примеры.

Пример 8. Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ постоянна и, значит, непрерывна в окрестности любой точки $a \in \mathbb{R}$, отличной от нуля. В любой же окрестности нуля ее колебание равно 2. Значит, 0 — точка разрыва функции $\operatorname{sgn} x$. Заметим, что функция имеет в точке 0 и предел слева $\lim\limits_{x\to -0} \operatorname{sgn} x = -1$, и предел справа $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{sgn} x = 1$, но, во-первых, они не совпадают между собой, а во-вторых, ни один из них не совпадает со значением $\operatorname{sgn} 0 = 0$ функции в точке 0. Это прямая проверка того, что 0 — точка разрыва функции.

Пример 9. Функция $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ имеет предел $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$ при $x \to 0$, но $f(0) = |\operatorname{sgn} 0| = 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ и 0 — точка разрыва функции.

Заметим, однако, что в данном случае, изменяя значение функции в точке 0 и полагая его равным 1, мы получим функцию, непрерывную в точке 0, т. е. устраним разрыв.

Определение 5. Если точка разрыва $a \in E$ функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ такова, что существует непрерывная функция $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{R}$ такая, что $f|_{E\setminus a} = \tilde{f}|_{E\setminus a}$, то a называется *точкой устранимого разрыва функции* $f\colon E \to \mathbb{R}$.

Таким образом, точка устранимого разрыва характеризуется тем, что существует предел $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = A$, но $A \neq f(a)$, и достаточно положить

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in E,\ x \neq a, \\ A & \text{при } x = a, \end{cases}$$

как мы уже получим непрерывную в точке a функцию $\tilde{f}\colon E \to \mathbb{R}$.

Пример 10. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке 0. При этом она даже не имеет предела при $x \to 0$, ибо, как было показано в гл. III, § 2, п. 1, пример 5, не существует предела $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. График функции $\sin\frac{1}{x}$ изображен на рис. 12.

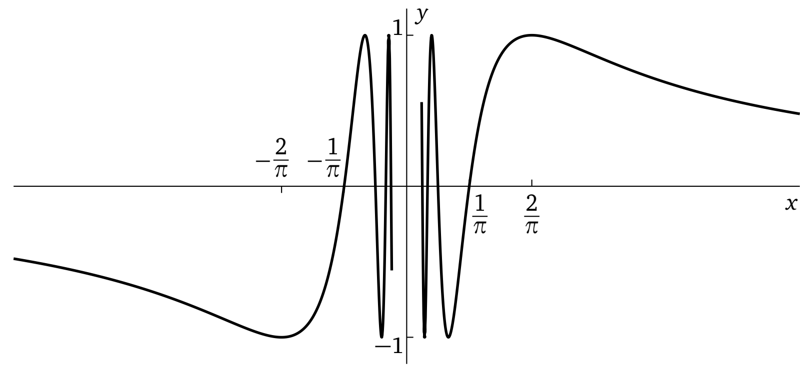


Рис. 12

Примеры 8, 9 и 10 поясняют следующую терминологию.

Определение 6. Точка $a \in E$ называется точкой разрыва *первого рода* для функции $f: E \to \mathbb{R}$, если существуют пределы[1]

$$\lim_{E \ni x \to a-0} f(x) =: f(a-0), \qquad \lim_{E \ni x \to a+0} f(x) =: f(a+0),$$

но по крайней мере один из этих пределов не совпадает со значением $f(a)$ функции в точке a.

Определение 7. Если $a \in E$ — точка разрыва функции $f: E \to \mathbb{R}$ и в этой точке не существует по меньшей мере один из пределов, указанных в определении 6, то a называется точкой разрыва *второго рода*.

Таким образом, имеется в виду, что всякая точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, является точкой разрыва второго рода.

Приведем еще два классических примера.

Пример 11. Функция

$$\mathscr{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

называется *функцией Дирихле*[2].

---

[1] Если a — точка разрыва, то a — предельная точка множества E. Однако может случиться, что все точки множества E в некоторой окрестности точки a лежат по одну сторону от точки a. В этом случае рассматривается только один из указанных в определении пределов.

[2] П. Г. Дирихле (1805—1859) — крупный немецкий математик-аналитик, занявший пост ординарного профессора Геттингенского университета после смерти К. Гаусса (1855).

Эта функция разрывна во всех точках, причем, очевидно, все ее точки разрыва — второго рода, так как на любом интервале есть как рациональные, так и иррациональные числа.

Пример 12. Рассмотрим *функцию Римана*[1]

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{ где } \dfrac{m}{n} \text{ — несократимая дробь, } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Заметим, что, каковы бы ни были точка $a \in \mathbb{R}$ и ее ограниченная окрестность $U(a)$ и каково бы ни было число $N \in \mathbb{N}$, в $U(a)$ имеется только конечное число рациональных чисел $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, таких, что $n < N$.

Уменьшая окрестность, можно, таким образом, считать, что знаменатели всех рациональных чисел, попадающих в нее (кроме, быть может, числа a, если $a \in \mathbb{Q}$), уже больше чем N. Таким образом, в любой точке $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ $|\mathcal{R}(x)| < 1/N$.

Мы показали тем самым, что в любой точке $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$$\lim_{x \to a} \mathcal{R}(x) = 0.$$

Значит, функция Римана непрерывна в любой иррациональной точке. В остальных точках, т. е. в точках $x \in \mathbb{Q}$, функция разрывна, и все эти точки являются точками разрыва первого рода.

§ 2. Свойства непрерывных функций

1. Локальные свойства. *Локальными* называют такие свойства функций, которые определяются поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки области определения.

Таким образом, сами локальные свойства характеризуют поведение функции в каком-то предельном отношении, когда аргумент функции стремится к исследуемой точке. Например, непрерывность функции в некоторой точке области определения, очевидно, есть локальное свойство функции.

Укажем основные локальные свойства непрерывных функций.

Теорема 1. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — функция, непрерывная в точке $a \in E$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1° *функция f ограничена в некоторой окрестности $U_E(a)$ точки a;*

2° *если $f(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности $U_E(a)$ точки a все значения функции положительны или отрицательны вместе с $f(a)$;*

3° *если функция $g\colon U_E(a) \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки a и, как и $f\colon E \to \mathbb{R}$, непрерывна в самой точке a, то функции*:

[1] Б. Ф. Риман (1826—1866) — выдающийся немецкий математик, фундаментальные работы которого легли в основу целых областей современной геометрии и анализа.

a) $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$,

b) $(f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x)$,

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x):=\frac{f(x)}{g(x)}$ *(при условии, что* $g(x)\neq 0$)

определены в некоторой окрестности точки a *и непрерывны в точке* a;

4° *если функция* $g\colon Y\to\mathbb{R}$ *непрерывна в точке* $b\in Y$, *а функция* f *такова, что* $f\colon E\to Y$, $f(a)=b$ *и* f *непрерывна в точке* a, *то композиция* $(g\circ f)$ *определена на* E *и также непрерывна в точке* a.

◄ Для доказательства теоремы достаточно вспомнить (см. § 1), что непрерывность функции f или g в некоторой точке a области определения равносильна тому, что предел этой функции по базе $\mathscr{B}_a$ окрестностей точки a существует и равен значению функции в самой точке a: $\lim\limits_{\mathscr{B}_a} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{\mathscr{B}_a} g(x)=g(a)$.

Таким образом, утверждения 1°, 2°, 3° теоремы 1 непосредственно вытекают из определения непрерывности функции в точке и соответствующих свойств предела функции.

В пояснении нуждается только то, что отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ в самом деле определено в некоторой окрестности $\widetilde{U}_E(a)$ точки a. Но, по условию, $g(a)\neq 0$ и в силу утверждения 2° теоремы найдется окрестность $\widetilde{U}_E(a)$, в любой точке которой $g(x)\neq 0$, т. е. $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено в $\widetilde{U}_E(a)$.

Утверждение 4° теоремы 1 является следствием теоремы о пределе композиции, в силу которой

$$\lim_{\mathscr{B}_a}(g\circ f)(x)=\lim_{\mathscr{B}_b} g(y)=g(b)=g(f(a))=(g\circ f)(a),$$

что равносильно непрерывности $(g\circ f)$ в точке a.

Однако для применения теоремы о пределе композиции нужно проверить, что для любого элемента $U_Y(b)$ базы $\mathscr{B}_b$ найдется элемент $U_E(a)$ базы $\mathscr{B}_a$ такой, что $f(U_E(a))\subset U_Y(b)$. Но в самом деле, если $U_Y(b)=Y\cap U(b)$, то по определению непрерывности функции $f\colon E\to Y$ в точке a для окрестности $U(b)=U(f(a))$ найдется окрестность $U_E(a)$ точки a в множестве E такая, что $f(U_E(a))\subset U(f(a))$. Поскольку f действует из E в Y, то $f(U_E(a))\subset$ $\subset Y\cap U(f(a))=U_Y(b)$ и мы проверили законность применения теоремы о пределе композиции. ►

Пример 1. Алгебраический многочлен $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ является функцией, непрерывной на $\mathbb{R}$.

Действительно, из пункта 3° теоремы 1 по индукции следует, что сумма и произведение конечного числа непрерывных в некоторой точке функций есть функция непрерывная в этой точке. Мы проверили в примерах 1 и 2 § 1, что постоянная функция и функции $f(x)=x$ непрерывны на $\mathbb{R}$. Тогда на $\mathbb{R}$ непрерывны и функции $ax^m=a\cdot\underbrace{x\cdot\ldots\cdot x}_{m\text{ раз}}$, а следовательно, и полином $P(x)$.

Пример 2. Рациональная функция $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — отношение полиномов — непрерывна всюду, где она определена, т. е. где $Q(x) \neq 0$. Это следует из примера 1 и утверждения 3° теоремы 1.

Пример 3. Композиция конечного числа непрерывных функций непрерывна в любой точке области своего определения. Это по индукции вытекает из утверждения 4° теоремы 1. Например, функция $e^{\sin^2(\ln|\cos x|)}$ непрерывна всюду на $\mathbb{R}$, за исключением точек $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, где она не определена.

2. Глобальные свойства непрерывных функций. *Глобальным* свойством функции, описательно говоря, называется свойство, связанное со всей областью определения функции.

Теорема 2 (теорема Больцано—Коши о промежуточном значении). *Если функция, непрерывная на отрезке, принимает на его концах значения разных знаков, то на отрезке есть точка, в которой функция обращается в нуль.*

В логической символике эта теорема имеет следующую запись[1]:

$$(f \in C[a,b]) \wedge (f(a) \cdot f(b) < 0) \Rightarrow \exists c \in [a,b] \ (f(c) = 0).$$

◄ Делим отрезок $[a,b]$ пополам. Если в точке деления функция не равна нулю, то на концах одного из двух полученных в результате деления отрезков функция снова принимает значения разных знаков. С этим отрезком поступаем теперь так же, как и с исходным отрезком $[a,b]$, т. е. делим его пополам, и продолжаем процесс дальше.

Тогда мы либо на каком-то шаге попадем в точку $c \in [a,b]$, где $f(c) = 0$, либо получим последовательность $\{I_n\}$ вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю и на концах которых f принимает значения разных знаков. В последнем случае на основании леммы о вложенных отрезках найдется единственная точка $c \in [a,b]$, общая для всех этих отрезков. По построению существуют две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ концов отрезков I_n такие, что $f(x'_n) < 0$, $f(x''_n) > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} x''_n = c$. По свойствам предела и определению непрерывности получаем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = f(c) \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n) = f(c) \geqslant 0$. Таким образом, $f(c) = 0$. ►

Замечания к теореме 2. 1° Доказательство теоремы доставляет простейший алгоритм отыскания корня уравнения $f(x) = 0$ на отрезке, в концах которого непрерывная функция имеет значения разных знаков.

2° Теорема 2, таким образом, утверждает, что при непрерывном изменении нельзя перейти от положительных значений к отрицательным или наоборот, не приняв по дороге значения нуль.

---

[1]Напомним, что символ $C(E)$ обозначает совокупность всех функций, непрерывных на множестве E. В случае $E = [a,b]$ вместо $C([a,b])$ часто пишут сокращенно $C[a,b]$.

3° К описательным высказываниям типа 2° следует относиться с разумной осторожностью, поскольку в них обычно подразумевается больше, чем высказывается. Рассмотрим, например, функцию, равную -1 на отрезке $[0, 1]$ и равную 1 на отрезке $[2, 3]$. Ясно, что эта функция непрерывна на области своего определения, принимает там значения разных знаков, но нигде не обращается в нуль. Это замечание показывает, что свойство непрерывной функции, выраженное теоремой 2, действительно проистекает от некоторого свойства ее области определения (которое, как впоследствии выяснится, состоит в том, что это множество должно быть *связным*).

Следствие теоремы 2. *Если функция φ непрерывна на интервале и в каких-то точках a и b интервала принимает значения $\varphi(a)=A$ и $\varphi(b)=B$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдется точка c, лежащая между точками a и b, в которой $\varphi(c)=C$.*

◄ Отрезок I с концами a, b лежит в нашем интервале, поэтому функция $f(x)=\varphi(x)-C$ определена, непрерывна на I и, поскольку $f(a)\cdot f(b) = (A-C)(B-C)<0$, по теореме 2 между a и b найдется точка c, в которой $f(c)=\varphi(c)-C=0$. ►

Теорема 3 (теорема Вейерштрасса о максимальном значении). *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем. При этом на отрезке есть точка, где функция принимает максимальное значение, и есть точка, где она принимает минимальное значение.*

◄ Пусть $f\colon E\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция на отрезке $E=[a, b]$. В силу локальных свойств непрерывной функции (см. теорему 1) для любой точки $x\in E$ найдется окрестность $U(x)$ такая, что на множестве $U_E(x)=E\cap U(x)$ функция ограничена. Совокупность таких окрестностей $U(x)$, построенных для всех точек $x\in E$, образует покрытие отрезка $[a, b]$ интервалами, из которого по лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему $U(x_1), \dots, U(x_n)$ интервалов, покрывающих в совокупности отрезок $[a, b]$. Поскольку на множестве $E\cap U(x_k)=U_E(x_k)$ функция ограничена, т. е. $m_k\leqslant f(x)\leqslant M_k$, где $m_k, M_k\in\mathbb{R}$ и $x\in U_E(x_k)$, то в любой точке $x\in E = [a, b]$ имеем

$$\min\{m_1, \dots, m_n\}\leqslant f(x)\leqslant \max\{M_1, \dots, M_n\}.$$

Ограниченность функции на отрезке $[a, b]$ установлена.

Пусть теперь $M=\sup\limits_{x\in E} f(x)$. Предположим, что в любой точке $x\in E$ $(f(x)< M)$. Тогда непрерывная на E функция $M-f(x)$ нигде на E не обращается в нуль, хотя (в силу определения M) может принимать значения, сколь угодно близкие к нулю. Тогда функция $\dfrac{1}{M-f(x)}$, с одной стороны, в силу локальных свойств непрерывных функций, непрерывна на E, а с другой — не ограничена на E, что противоречит уже доказанной ограниченности функции, непрерывной на отрезке.

Итак, существует точка $x_M\in[a, b]$, в которой $f(x_M)=M$.

Аналогичным образом, рассмотрев $m = \inf_{x\in E} f(x)$ и вспомогательную функцию $\dfrac{1}{f(x)-m}$, докажем, что существует точка $x_m \in [a, b]$, в которой $f(x_m) = m$. ►

Заметим, что, например, функции $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$ непрерывны на интервале $E =]0, 1[$, но f_1 не имеет на E ни максимального, ни минимального значений, а функция f_2 не ограничена на E. Таким образом, выраженные теоремой 3 свойства непрерывной функции также связаны с некоторым свойством области определения, а именно с тем, что из покрытия множества E окрестностями его точек можно извлечь конечное покрытие. Такие множества мы впоследствии назовем *компактами*.

Прежде чем перейти к следующей теореме, дадим

Определение 1. Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на множестве $E \subset \mathbb{R}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1, x_2 \in E$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Короче,

$$(f: E \to \mathbb{R} \text{ равномерно непрерывна}) := \\ = \big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1 \in E\ \forall x_2 \in E\ (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)\big).$$

Обсудим понятие равномерной непрерывности.

1° Если функция равномерно непрерывна на множестве, то она непрерывна в любой его точке. Действительно, достаточно в приведенном определении положить $x_1 = x$ и $x_2 = a$ и мы видим, что определение непрерывности функции $f: E \to \mathbb{R}$ в точке $a \in E$ удовлетворено.

2° Непрерывность функции, вообще говоря, не влечет ее равномерную непрерывность.

Пример 4. Уже неоднократно встречавшаяся нам функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на интервале $]0, 1[= E$ непрерывна. Однако в любой окрестности точки 0 в множестве E функция принимает как значение -1, так и значение 1, поэтому при $\varepsilon < 2$ для нее уже не выполнено условие $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Полезно в этой связи записать в явном виде отрицание свойства функции быть равномерно непрерывной:

$$(f: E \to \mathbb{R} \text{ не является равномерно непрерывной}) := \\ = \big(\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_1 \in E\ \exists x_2 \in E\ (|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon)\big).$$

Рассмотренный пример делает наглядным различие между непрерывностью и равномерной непрерывностью функции на множестве. Чтобы указать то место в определении равномерной непрерывности, откуда проистекает это различие, приведем подробную запись того, что значит, что функ-

ция $f: E \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве E:

$$(f: E \to \mathbb{R} \text{ непрерывна на } E) := \\ = \big(\forall a \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\big).$$

Таким образом, здесь число δ выбирается по точке $a \in E$ и числу ε и потому при фиксированном ε может меняться от точки к точке, как это и происходит в случае функции $\sin \frac{1}{x}$, рассмотренной в примере 1, или в случае функции $\log_a x$ или a^x, рассматриваемых на полной области их определения.

В случае же равномерной непрерывности гарантируется возможность выбора δ только по числу $\varepsilon > 0$ так, что во всех точках $a \in E$ из $|x-a| < \delta$ при $x \in E$ будет следовать $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Пример 5. Если функция $f: E \to \mathbb{R}$ не ограничена в любой окрестности фиксированной точки $x_0 \in E$, то она не является равномерно непрерывной.

Действительно, тогда при любом $\delta > 0$ в $\frac{\delta}{2}$-окрестности x_0 найдутся точки $x_1, x_2 \in E$ такие, что $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$, хотя $|x_1 - x_2| < \delta$.

Так обстоит дело с функцией $f(x) = 1/x$, рассматриваемой на множестве $\mathbb{R} \setminus 0$. В данном случае $x_0 = 0$.

Так обстоит дело и с функцией $\log_a x$, определенной на множестве положительных чисел и неограниченной в окрестности точки $x_0 = 0$.

Пример 6. Функция $f(x) = x^2$, непрерывная на $\mathbb{R}$, не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

В самом деле, в точках $x'_n = \sqrt{n+1}$, $x''_n = \sqrt{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, имеем $f(x'_n) = n+1$, $f(x''_n) = n$, поэтому $f(x'_n) - f(x''_n) = 1$. Но

$$\lim_{n\to\infty} \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

поэтому при любом $\delta > 0$ найдутся точки x'_n, x''_n такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta$, в то время как $f(x'_n) - f(x''_n) = 1$.

Пример 7. Функция $f(x) = \sin x^2$, непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$, не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Действительно, в точках $x'_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1)}$, $x''_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}n}$, где $n \in \mathbb{N}$, имеем $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 1$, в то время как $\lim\limits_{n\to\infty} |x'_n - x''_n| = 0$.

После этого обсуждения понятия равномерной непрерывности функции и сопоставления непрерывности и равномерной непрерывности мы можем теперь оценить следующую теорему.

Теорема 4 (теорема Кантора—Гейне о равномерной непрерывности). *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Отметим, что в имеющейся литературе эту теорему обычно называют теоремой Кантора. Чтобы избежать разночтений, мы в дальнейшем при ссылках сохраняем это распространенное наименование.

◄ Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ — данная функция; $E = [a, b]$ и $f \in C(E)$. Поскольку f непрерывна в любой точке $x \in E$, то (см. § 1, п. 1, 6°) по $\varepsilon > 0$ можно найти такую δ-окрестность $U^\delta(x)$ точки x, что колебание $\omega(f; U_E^\delta(x))$ функции f на множестве $U_E^\delta(x) = E \cap U^\delta(x)$ точек области определения функции, лежащих в $U^\delta(x)$, окажется меньше ε. Для каждой точки $x \in E$ построим окрестность $U^\delta(x)$, обладающую этим свойством. Величина δ при этом может меняться от точки к точке, поэтому правильнее, хотя и более громоздко, обозначить построенную окрестность символом $U^{\delta(x)}(x)$, но, поскольку весь символ определяется точкой x, можно условиться в следующей сокращенной записи: $U(x) = U^{\delta(x)}(x)$ и $V(x) = U^{\delta(x)/2}(x)$.

Интервалы $V(x)$, $x \in E$, в совокупности образуют покрытие отрезка $E = [a, b]$, из которого по лемме о конечном покрытии можно выделить конечное покрытие $V(x_1), \ldots, V(x_n)$. Пусть $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}\delta(x_1), \ldots, \frac{1}{2}\delta(x_n)\right\}$. Покажем, что для любых точек $x', x'' \in E$ таких, что $|x' - x''| < \delta$, выполнено $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Действительно, поскольку система интервалов $V(x_1), \ldots, V(x_n)$ покрывает E, найдется интервал $V(x_i)$ этой системы, который содержит точку x', т. е. $|x' - x_i| < \frac{1}{2}\delta(x_i)$. Но в таком случае

$$|x'' - x_i| \leqslant |x' - x''| + |x' - x_i| < \delta + \frac{1}{2}\delta(x_i) \leqslant \frac{1}{2}\delta(x_i) + \frac{1}{2}\delta(x_i) = \delta(x_i).$$

Следовательно, $x', x'' \in U_E^{\delta(x_i)}(x_i) = E \cap U^{\delta(x_i)}(x_i)$ и потому $|f(x') - f(x'')| \leqslant \omega(f; U_E^{\delta(x_i)}(x_i)) < \varepsilon$. ►

Приведенные выше примеры показывают, что теорема Кантора существенно опирается на некоторое свойство области определения функции. Из доказательства видно, что, как и в теореме 3, это свойство состоит в том, что из любого покрытия множества E окрестностями его точек можно извлечь конечное покрытие.

Теперь, после того как теорема 4 доказана, полезно вновь вернуться к разобранным выше примерам непрерывных, но не равномерно непрерывных функций и выяснить, как, например, функция $\sin x^2$, равномерно непрерывная по теореме Кантора на каждом отрезке вещественной прямой, оказывается не равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Причина здесь вполне аналогична той, по которой вообще непрерывная функция может оказаться не равномерно непрерывной. На сей раз мы предоставляем читателю возможность самостоятельно разобраться в этом вопросе.

Теперь перейдем к последней теореме параграфа — теореме об обратной функции. Нам предстоит выяснить условия, при которых непрерывная на отрезке вещественнозначная функция имеет обратную и в каких случаях эта обратная функция непрерывна.

Утверждение 1. *Непрерывное отображение $f: E \to \mathbb{R}$ отрезка $E = [a, b]$ в $\mathbb{R}$ инъективно в том и только в том случае, когда функция f строго монотонна на отрезке $[a, b]$.*

◄ Если функция f возрастает или убывает на произвольном множестве $E \subset \mathbb{R}$, то отображение $f\colon E \to \mathbb{R}$, очевидно, инъективно: в различных точках множества E функция принимает различные значения.

Таким образом, наиболее содержательная часть утверждения 1 состоит в том, что всякое непрерывное инъективное отображение $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ отрезка осуществляется строго монотонной функцией.

Предположив, что это не так, мы найдем три точки $x_1 < x_2 < x_3$ отрезка $[a, b]$ такие, что $f(x_2)$ не лежит между $f(x_1)$ и $f(x_3)$. В таком случае либо $f(x_3)$ лежит между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, либо $f(x_1)$ лежит между $f(x_2)$ и $f(x_3)$. Пусть для определенности имеет место последняя из двух указанных возможностей. По условию функция f непрерывна на отрезке $[x_2, x_3]$, и потому (см. следствие теоремы 2) на нем есть точка x_1' такая, что $f(x_1') = f(x_1)$. Таким образом, $x_1 < x_1'$ и $f(x_1) = f(x_1')$, что несовместимо с инъективностью отображения. Случай, когда $f(x_3)$ лежит между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, разбирается аналогично. ►

Утверждение 2. *Каждая строго монотонная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, определенная на числовом множестве $X \subset \mathbb{R}$, обладает обратной функцией $f^{-1}\colon Y \to \mathbb{R}$, которая определена на множестве $Y = f(X)$ значений функции f и имеет на Y тот же характер монотонности, какой имеет функция f на множестве X.*

◄ Отображение $f\colon X \to Y = f(X)$ сюръективно, т. е. является отображением *на* множество Y. Пусть для определенности $f\colon X \to Y$ возрастает на X. В этом случае

$$\forall x_1 \in X\ \forall x_2 \in X\ (x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)). \tag{1}$$

Таким образом, отображение $f\colon X \to Y$ в различных точках принимает различные значения, т. е. оно инъективно. Следовательно, $f\colon X \to Y$ биективно, т. е. f — взаимно однозначное отображение X на Y. Значит, определено обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$, задаваемое формулой $x = f^{-1}(y)$, если $y = f(x)$.

Сопоставляя определение отображения $f^{-1}\colon Y \to X$ с соотношением (1), приходим к соотношению

$$\forall y_1 \in Y\ \forall y_2 \in Y\ (f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2), \tag{2}$$

означающему, что функция f^{-1} возрастает на области своего определения.

Случай, когда $f\colon X \to Y$ убывает на X, разбирается аналогично. ►

В соответствии с доказанным утверждением 2, если интересоваться непрерывностью функции, обратной к вещественнозначной функции, полезно исследовать условия непрерывности монотонных функций.

Утверждение 3. *Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$, монотонная на множестве $E \subset \mathbb{R}$, может иметь на E разрывы только первого рода.*

◄ Пусть, для определенности, f — неубывающая функция. Предположим, что $a \in E$ есть точка разрыва функции f. Поскольку a не может быть изолированной точкой множества E, то a — предельная точка по крайней мере для

одного из двух множеств $E_a^- = \{x \in E \mid x < a\}$, $E_a^+ = \{x \in E \mid x > a\}$. Поскольку f — неубывающая функция, для любой точки $x \in E_a^-$ имеем $f(x) \leqslant f(a)$ и ограничение $f|_{E_a^-}$ функции f на множество E_a^- оказывается неубывающей ограниченной сверху функцией. Тогда существует предел

$$\lim_{E_a^- \ni x \to a} (f|_{E_a^-})(x) = \lim_{E \ni x \to a-0} f(x) = f(a-0).$$

Аналогично доказывается существование предела $\lim\limits_{E \ni x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, если a — предельная точка множества E_a^+.

Случай, когда f — невозрастающая функция, можно либо разобрать, повторив проведенное доказательство, либо, перейдя к функции $-f$, свести дело к уже рассмотренному случаю. ►

Следствие 1. *Если a — точка разрыва монотонной функции $f: E \to \mathbb{R}$, то по крайней мере один из пределов*

$$\lim_{E \ni x \to a-0} f(x) = f(a-0), \qquad \lim_{E \ni x \to a+0} f(x) = f(a+0)$$

определен; по крайней мере в одном из неравенств $f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant f(a+0)$, если f — неубывающая (или $f(a-0) \geqslant f(a) \geqslant f(a+0)$, если f — невозрастающая) функция, имеет место знак строгого неравенства; в интервале, определяемом этим строгим неравенством, нет ни одного значения функции; указанные интервалы, отвечающие различным точкам разрыва монотонной функции, не пересекаются.

◄ Действительно, если a — точка разрыва, то она предельная для множества E и в силу утверждения 3 является точкой разрыва первого рода. Таким образом, по крайней мере одна из баз $E \ni x \to a - 0$, $E \ni x \to a + 0$ определена и по ней (а в случае определенности обеих баз — по каждой из них) существует предел функции f. Пусть, для определенности, f — неубывающая функция. Поскольку a — точка разрыва, то по крайней мере в одном из неравенств $f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant f(a+0)$ на самом деле имеет место строгое неравенство. Поскольку $f(x) \leqslant \lim\limits_{E \ni x \to a-0} f(x) = f(a-0)$, если $x \in E$ и $x < a$, и, аналогично, $f(a+0) \leqslant f(x)$, если $x \in E$ и $a < x$, то интервал, определяемый строгим неравенством $f(a-0) < f(a)$ или $f(a) < f(a+0)$, действительно свободен от значений функции. Пусть a_1, a_2 — две различные точки разрыва функции, и пусть $a_1 < a_2$. Тогда, в силу неубывания функции f, имеем

$$f(a_1-0) \leqslant f(a_1) \leqslant f(a_1+0) \leqslant f(a_2-0) \leqslant f(a_2) \leqslant f(a_2+0).$$

Отсюда следует, что не содержащие значений функции интервалы, отвечающие различным точкам разрыва, не пересекаются. ►

Следствие 2. *Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.*

◄ С каждой точкой разрыва монотонной функции свяжем, по следствию 1, интервал, определяемый значением функции в точке разрыва и одним из пределов функции при приближении аргумента справа или слева к точке

разрыва. Эти интервалы не пересекаются. Но на прямой может быть не более чем счетное множество непересекающихся интервалов. В самом деле, в каждом из них можно выбрать по рациональной точке, и тогда множество интервалов окажется равномощным подмножеству счетного множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел. Значит, оно само не более чем счетно. Вместе с ним, таким образом, не более чем счетно и равномощное ему по построению множество точек разрыва монотонной функции. ►

Утверждение 4 (критерий непрерывности монотонной функции). *Монотонная функция $f\colon E\to\mathbb{R}$, заданная на отрезке $E=[a,b]$, непрерывна на нем тогда и только тогда, когда множество $f(E)$ ее значений само является отрезком с концами*[1] *$f(a)$ и $f(b)$.*

◄ Если f — непрерывная монотонная функция, то ввиду монотонности f все значения, которые функция принимает на отрезке $[a,b]$, лежат между значениями $f(a)$ и $f(b)$, которые она принимает в концах отрезка. Ввиду непрерывности функции она обязана принимать также и все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Таким образом, множество значений функции, монотонной и непрерывной на отрезке $[a,b]$, действительно является отрезком с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть f — монотонная на отрезке $[a,b]$ функция. Если она разрывна в некоторой точке $c\in[a,b]$, то по следствию 1 утверждения 3 один из интервалов $]f(c-0),f(c)[$, $]f(c),f(c+0)[$ заведомо определен и в нем нет значений нашей функции. Но ввиду монотонности функции этот интервал содержится в отрезке с концами $f(a)$, $f(b)$, поэтому если на отрезке $[a,b]$ монотонная функция имеет хотя бы одну точку разрыва, то весь отрезок с концами $f(a)$, $f(b)$ не может лежать в области значений функции. ►

Теорема 5 (теорема об обратной функции). *Функция $f\colon X\to\mathbb{R}$, строго монотонная на множестве $X\subset\mathbb{R}$, имеет обратную функцию $f^{-1}\colon Y\to\mathbb{R}$, определенную на множестве $Y=f(X)$ значений функции f. Функция $f^{-1}\colon Y\to\to\mathbb{R}$ монотонна и имеет на Y тот же вид монотонности, какой имеет функция $f\colon X\to\mathbb{R}$ на множестве X.*

Если, кроме того, X есть отрезок $[a,b]$ и функция f непрерывна на нем, то множество $Y=f(X)$ есть отрезок с концами $f(a)$, $f(b)$ и функция $f^{-1}\colon Y\to\mathbb{R}$ непрерывна на нем.

◄ Утверждение теоремы о том, что в случае $X=[a,b]$ и непрерывности f множество $Y=f(X)$ есть отрезок с концами $f(a)$, $f(b)$, следует из доказанного выше утверждения 4. Остается проверить, что $f^{-1}\colon Y\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция. Но f^{-1} монотонна на Y, Y есть отрезок и $f^{-1}(Y)=X=[a,b]$ — тоже отрезок. В силу утверждения 4 заключаем, что функция f^{-1} непрерывна на отрезке Y с концами $f(a)$, $f(b)$. ►

---

[1]При этом $f(a)\leqslant f(b)$, если f — неубывающая, и $f(b)\leqslant f(a)$, если f — невозрастающая функция.

Пример 8. Функция $y=f(x)=\sin x$ возрастает и непрерывна на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, ограничение этой функции на отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет обратную функцию $x=f^{-1}(y)$, обозначаемую $x=\arcsin y$, определенную на отрезке $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=[-1, 1]$, возрастающую от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и непрерывную на этом отрезке.

Пример 9. Аналогично, ограничение функции $y=\cos x$ на отрезок $[0, \pi]$ есть убывающая непрерывная функция, которая в силу теоремы 5 имеет обратную функцию, обозначаемую $x=\arccos y$, определенную на отрезке $[-1, 1]$, непрерывную и убывающую на нем от значения π до значения 0.

Пример 10. Ограничение функции $y=\operatorname{tg} x$ на интервал $X=\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ есть возрастающая от $-\infty$ до $+\infty$ непрерывная функция, которая в силу первой части теоремы 5 имеет обратную функцию, обозначаемую $x=\operatorname{arctg} y$, определенную на всей числовой прямой $y\in\mathbb{R}$ и возрастающую на ней в пределах интервала $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ своих значений. Чтобы доказать непрерывность функции $x=\operatorname{arctg} y$ в любой точке y_0 ее области определения, возьмем точку $x_0=\operatorname{arctg} y_0$ и отрезок $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$, содержащий x_0 внутри и содержащийся в интервале $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Если $x_0-\varepsilon=\operatorname{arctg}(y_0-\delta_1)$ и $x_0+\varepsilon=\operatorname{arctg}(y_0+\delta_2)$, то ввиду возрастания функции $x=\operatorname{arctg} y$ можно утверждать, что при любом $y\in\mathbb{R}$ таком, что $y_0-\delta_1<y<y_0+\delta_2$, будем иметь $x_0-\varepsilon<\operatorname{arctg} y<x_0+\varepsilon$. Итак, $|\operatorname{arctg} y-\operatorname{arctg} y_0|<\varepsilon$ при $-\delta_1<y-y_0<\delta_2$ и тем более при $|y-y_0|<$ $<\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$, что и проверяет непрерывность функции $x=\operatorname{arctg} y$ в точке $y_0\in\mathbb{R}$.

Пример 11. Рассуждениями, аналогичными проведенным в предыдущем примере, устанавливаем, что поскольку ограничение функции $y=\operatorname{ctg} x$ на интервале $]0, \pi[$ есть убывающая от $+\infty$ до $-\infty$ непрерывная функция, то она имеет обратную функцию, обозначаемую $x=\operatorname{arcctg} y$, определенную на всей числовой оси $\mathbb{R}$, убывающую на ней в пределах интервала своих значений $]0, \pi[$ от π до 0 и непрерывную на $\mathbb{R}$.

Замечание. При построении графиков взаимно обратных функций $y=$ $=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ полезно иметь в виду, что точки плоскости с координатами $(x, f(x))=(x, y)$ и $(y, f^{-1}(y))=(y, x)$ в одной и той же координатной системе (в которой лишь указана первая и вторая оси координат, а не ось x или ось y) симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла.

Таким образом, графики взаимно обратных функций, изображенные в одной системе координат, оказываются симметричными относительно этой биссектрисы.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что
а) если $f\in C(A)$ и $B\subset A$, то $f|_B\in C(B)$;

b) если функция $f\colon E_1\cup E_2\to\mathbb{R}$ такова, что $f|_{E_i}\in C(E_i)$, $i=1, 2$, то не всегда $f\in \in C(E_1\cup E_2)$;

c) функция Римана $\mathscr{R}$, как и ее ограничение $\mathscr{R}|_{\mathbb{Q}}$ на множество рациональных чисел, разрывна в каждой точке множества $\mathbb{Q}$, кроме нуля, и все точки разрыва при этом устранимые (см. § 1, пример 12).

2. Покажите, что если функция $f\in C[a, b]$, то функции

$$m(x)=\min_{a\leqslant t\leqslant x} f(t), \qquad M(x)=\max_{a\leqslant t\leqslant x} f(t)$$

также непрерывны на отрезке $[a, b]$.

3. a) Докажите, что функция, обратная функции, монотонной на интервале, непрерывна на области своего определения.

b) Постройте монотонную функцию со счетным множеством точек разрыва.

c) Покажите, что если функции $f\colon X\to Y$ и $f^{-1}\colon Y\to X$ взаимно обратны (здесь X, Y — подмножества $\mathbb{R}$) и f непрерывна в точке $x_0\in X$, то из этого еще не следует непрерывность функции f^{-1} в точке $y_0=f(x_0)\in Y$.

4. Покажите, что

a) если $f\in C[a, b]$ и $g\in C[a, b]$, причем $f(a)<g(a)$ и $f(b)>g(b)$, то существует точка $c\in[a, b]$, в которой $f(c)=g(c)$;

b) любое непрерывное отображение $f\colon [0, 1]\to[0, 1]$ отрезка в себя имеет неподвижную точку, т. е. точку $x\in[0, 1]$ такую, что $f(x)=x$;

c) если два непрерывных отображения f и g отрезка в себя коммутируют, т. е. $f\circ g=g\circ f$, то они не всегда имеют общую неподвижную точку, хотя, например, для линейных отображений и, вообще, для полиномов такая точка всегда есть.

d) непрерывное отображение $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ может не иметь неподвижной точки;

e) непрерывное отображение $f\colon]0, 1[\to]0, 1[$ может не иметь неподвижной точки;

f) если отображение $f\colon [0, 1]\to[0, 1]$ непрерывно, $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $(f\circ f)(x)\equiv \equiv x$ на $[0, 1]$, то $f(x)\equiv x$.

5. Покажите, что множеством значений любой непрерывной на отрезке функции является отрезок.

6. Покажите, что

a) Если отображение $f\colon [0, 1]\to[0, 1]$ непрерывно, $f(0)=0$, $f(1)=1$ и при некотором $n\in\mathbb{N}$ $f^n(x):=(\underbrace{f\circ\ldots\circ f}_{n \text{ раз}})(x)\equiv x$ на $[0, 1]$, то $f(x)\equiv x$.

b) Если функция $f\colon [0, 1]\to[0, 1]$ непрерывна и не убывает, то для любой точки $x\in[0, 1]$ реализуется по крайней мере одна из двух возможностей: либо x — неподвижная точка, либо $f^n(x)$ стремится к неподвижной точке (здесь $f^n(x)=f\circ\ldots\circ f$ — n-я итерация f).

7. Пусть $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что $f(0)=f(1)$. Покажите, что

a) при любом $n\in\mathbb{N}$ существует горизонтальный отрезок с концами на графике этой функции, длина которого равна $1/n$;

b) если число l не имеет вида $1/n$, то найдется функция указанного вида, в график которой уже нельзя вписать горизонтальный отрезок длины l.

8. *Модулем непрерывности* функции $f\colon E\to\mathbb{R}$ называется функция $\omega(\delta)$, определяемая при $\delta>0$ следующим образом:

$$\omega(\delta)=\sup_{\substack{|x_1-x_2|<\delta\\ x_1,x_2\in E}} |f(x_1)-f(x_2)|.$$

Таким образом, верхняя грань берется по всевозможным парам точек x_1, x_2 множества E, удаленным друг от друга меньше чем на δ.

Покажите, что

a) модуль непрерывности — неубывающая неотрицательная функция, имеющая предел[1] $\omega(+0) = \lim\limits_{\delta\to+0} \omega(\delta)$;

b) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых точек $x_1, x_2 \in E$ соотношение $|x_1 - x_2| < \delta$ влечет $|f(x_1) - f(x_2)| < \omega(+0) + \varepsilon$;

c) если E — отрезок, интервал или полуинтервал, то для модуля непрерывности функции $f: E \to \mathbb{R}$ имеет место соотношение

$$\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2);$$

d) модулем непрерывности функций x и $\sin x^2$, рассматриваемых на всей числовой прямой, являются соответственно функция $\omega(\delta) = \delta$ и постоянная $\omega(\delta) = 2$ в области $\delta > 0$;

e) функция f равномерно непрерывна на множестве E тогда и только тогда, когда $\omega(+0) = 0$.

9. Пусть f и g — ограниченные функции, определенные на одном и том же множестве X. Величина $\Delta = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$ называется расстоянием между функциями f и g. Она показывает, насколько хорошо одна функция аппроксимирует другую на данном множестве X. Пусть X — отрезок $[a, b]$. Покажите, что если $f, g \in C[a, b]$, то $\exists x_0 \in [a, b]$, где $\Delta = |f(x_0) - g(x_0)|$, и что для произвольных ограниченных функций это, вообще говоря, не так.

10. Пусть $P_n(x)$ — многочлен (полином) степени n. Будем приближать ограниченную функцию $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ многочленами. Пусть

$$\Delta(P_n) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \quad \text{и} \quad E_n(f) = \inf_{P_n} \Delta(P_n),$$

где нижняя грань берется по всевозможным многочленам степени n. Многочлен P_n называется *многочленом* (*полиномом*) *наилучшего приближения* функции f, если для него $\Delta(P_n) = E_n(f)$.

Покажите, что

a) существует многочлен $P_0(x) \equiv a_0$ наилучшего приближения степени нуль;

b) среди многочленов $Q_\lambda(x)$ вида $\lambda P_n(x)$, где P_n — фиксированный многочлен, найдется такой многочлен Q_{λ_0}, что

$$\Delta(Q_{\lambda_0}) = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} \Delta(Q_\lambda);$$

c) если существует многочлен наилучшего приближения степени n, то существует также многочлен наилучшего приближения степени $n + 1$;

d) для любой ограниченной на отрезке функции и любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ найдется многочлен наилучшего приближения степени n.

11. Покажите, что

a) Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один вещественный корень.

---

[1] Поэтому модуль непрерывности обычно рассматривают при $\delta \geqslant 0$, полагая $\omega(0) = \omega(+0)$.

b) Если P_n — многочлен степени n, то функция $\operatorname{sgn} P_n(x)$ имеет не более n точек разрыва.

c) Если на отрезке $[a, b]$ имеется $n+2$ точки $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ такие, что величина

$$\operatorname{sgn}\left[(f(x_i) - P_n(x_i))(-1)^i\right]$$

постоянна при $i = 0, \ldots, n+1$, то $E_n(f) \geqslant \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n+1} |f(x_i) - P_n(x_i)|$ (*теорема Валле Пуссена*[1]). (Определение $E_n(f)$ см. в задаче 10.)

12. a) Покажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ функция $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, определенная на отрезке $[-1, 1]$, является алгебраическим многочленом степени n (*полиномы Чебышёва*).

b) Найдите явное алгебраическое выражение полиномов T_1, T_2, T_3, T_4 и нарисуйте их графики.

c) Найдите корни многочлена $T_n(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ и те точки отрезка, где величина $|T_n(x)|$ достигает максимума.

d) Покажите, что среди многочленов $P_n(x)$ степени n с коэффициентом 1 при x^n многочлен $T_n(x)$ является единственным многочленом, наименее уклоняющимся от нуля, т. е. $E_n(0) = \max\limits_{|x| \leqslant 1} |T_n(x)|$ (определение $E_n(f)$ см. в задаче 10).

13. Пусть $f \in C[a, b]$.

a) Покажите, что если для полинома $P_n(x)$ степени n найдутся $n+2$ точки $x_0 < \ldots < x_{n+1}$ (называемые *точками чебышёвского альтернанса*) такие, что $f(x_i) - P_n(x_i) = (-1)^i \Delta(P_n) \cdot \alpha$, где $\Delta(P_n) = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)|$, а α — постоянная, равная 1 или -1, то $P_n(x)$ является и притом единственным полиномом наилучшего приближения функции f степени n (см. задачу 10).

b) Докажите теорему Чебышёва: многочлен $P_n(x)$ степени n тогда и только тогда является многочленом наилучшего приближения функции $f \in C[a, b]$, когда на отрезке $[a, b]$ найдется по крайней мере $n+2$ точки чебышёвского альтернанса.

c) Покажите, что для разрывных функций предыдущее утверждение, вообще говоря, не верно.

d) Найдите многочлены наилучшего приближения нулевой и первой степени для функции $|x|$ на отрезке $[-1, 2]$.

14. В § 2 мы обсуждали локальные свойства непрерывных функций. Настоящая задача уточняет понятие локального свойства.

Две функции f и g будем считать эквивалентными, если найдется такая окрестность $U(a)$ фиксированной точки $a \in \mathbb{R}$, что $\forall x \in U(a)$ имеем $f(x) = g(x)$. Это отношение между функциями, очевидно, рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. действительно является отношением эквивалентности.

Класс эквивалентных между собой в точке a функций называется *ростком функций* в данной точке a. Если рассматривают только непрерывные функции, то говорят о ростке непрерывных функций в точке a.

Локальные свойства функций — это свойства ростков функций.

a) Определите арифметические операции над ростками числовых функций, заданными в одной и той же точке.

b) Покажите, что арифметические операции над ростками непрерывных функций не выводят из этого класса ростков.

---

[1] Ш. Ж. де ла Валле Пуссен (1866—1962) — бельгийский математик и механик.

c) Покажите, учитывая a) и b), что ростки непрерывных функций образуют кольцо — кольцо ростков непрерывных функций.

d) Подкольцо I некоторого кольца K называется *идеалом* кольца K, если произведение любого элемента кольца K и элемента подкольца I лежит в I. Найдите идеал кольца ростков функций, непрерывных в точке a.

15. Идеал кольца называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком большем идеале, кроме самого кольца. Множество $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке, образует кольцо относительно обычных операций сложения и умножения числовых функций. Найдите максимальные идеалы этого кольца.

Глава V

Дифференциальное исчисление

§ 1. Дифференцируемая функция

1. Задача и наводящие соображения. Предположим, что, следуя Ньютону[1], мы хотим решить кеплерову[2] задачу двух тел, т. е. хотим объяснить закон движения одного небесного тела m (планета) относительно другого тела M (звезда). Выберем в плоскости движения декартову систему координат с началом в M (рис. 13). Тогда положение m в момент времени t можно охарактеризовать численно координатами $(x(t), y(t))$ точки m в этой системе координат. Мы хотим найти функции $x(t)$, $y(t)$.

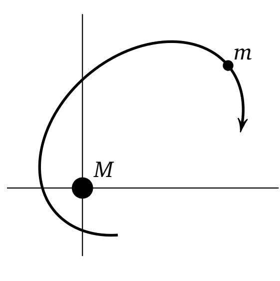


Рис. 13

Движением m относительно M управляют два знаменитых закона Ньютона:

общий закон движения

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}, \tag{1}$$

связывающий вектор силы с вектором вызванного ею ускорения через коэффициент пропорциональности m — инертную массу тела[3], и

закон всемирного тяготения, позволяющий найти гравитационное воздействие тел m и M друг на друга по формуле

$$\boldsymbol{F} = G\frac{mM}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор с началом в теле приложения силы и концом в другом теле, $|\boldsymbol{r}|$ — длина вектора $\boldsymbol{r}$, или расстояние между m и M.

---

[1] И. Ньютон (1642—1727) — английский физик, механик, астроном и математик, крупнейший ученый, сформулировавший основные законы классической механики, открывший закон всемирного тяготения, разработавший (наряду с Лейбницем) основы дифференциального и интегрального исчисления. Оценен был уже современниками, которые на его могиле начертали: «Здесь покоится то, что было смертного у Ньютона».

[2] И. Кеплер (1571—1630) — знаменитый немецкий астроном, открывший законы движения планет (законы Кеплера).

[3] Мы обозначили массу символом самого тела, но это не приведет к недоразумениям. Заметим также, что если $m \ll M$, то выбранную систему координат можно считать инерциальной.

Зная массы m, M, по формуле (2) без труда выражаем правую часть уравнения (1) через координаты $x(t)$, $y(t)$ тела m в момент t, чем исчерпываем всю специфику данного движения.

Чтобы получить теперь соотношения на $x(t)$, $y(t)$, заключенные в уравнении (1), необходимо научиться выражать левую часть уравнения (1) через функции $x(t)$, $y(t)$.

Ускорение есть характеристика изменения скорости $\boldsymbol{v}(t)$, точнее, просто скорость изменения скорости; поэтому для решения задачи прежде всего необходимо научиться вычислять скорость $\boldsymbol{v}(t)$, которую имеет в момент t тело, движение которого задается радиус-вектором $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Итак, мы хотим определить и научиться вычислять ту мгновенную скорость тела, которую подразумевает закон движения (1).

Измерить — значит сравнить с эталоном. Что же в нашем случае может служить эталоном для определения мгновенной скорости движения?

Наиболее простым видом движения является такое, которое совершает по инерции свободное тело. Это движение, при котором за любые равные промежутки времени происходят равные (как векторы) перемещения тела в пространстве. Это так называемое равномерное (прямолинейное) движение. Если точка движется равномерно, $\boldsymbol{r}(0)$ и $\boldsymbol{r}(1)$ — ее радиус-векторы относительно инерциальной системы координат в моменты $t = 0$ и $t = 1$ соответственно, то в любой момент времени будем иметь

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{v} \cdot t, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}(1) - \boldsymbol{r}(0)$. Таким образом, перемещение $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(0)$ оказывается в простейшем случае *линейной функцией* времени, причем роль множителя пропорциональности между перемещением $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(0)$ и временем t играет в данном случае вектор $\boldsymbol{v}$ перемещения за единицу времени. Этот вектор и называется скоростью равномерного движения. То, что движение прямолинейно, видно из параметрического уравнения его траектории: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v} \cdot t$, являющегося (см. курс аналитической геометрии) уравнением прямой.

Мы знаем, таким образом, скорость $\boldsymbol{v}$ равномерного прямолинейного движения, задаваемого формулой (3). По закону инерции, если на тело не действуют внешние силы, оно движется равномерно и прямолинейно. Значит, если в момент t экранировать действие тела M на тело m, то последнее продолжит свое движение уже равномерно с некоторой определенной скоростью. Таким образом, естественно считать, что именно она является (мгновенной) скоростью нашего тела в момент t.

Однако такое определение мгновенной скорости оставалось бы чистой абстракцией, не дающей никаких рекомендаций для конкретного вычисления этой величины, если бы не следующее обстоятельство первостепенной важности, которое мы сейчас обсудим.

Оставаясь в рамках того (как сказали бы логики, «порочного») круга, в который мы вошли, написав уравнение движения (1), а затем принявшись

выяснять, что такое мгновенная скорость и ускорение, мы все же заметим, что при самом общем представлении об этих понятиях из уравнения (1) можно сделать следующие эвристические выводы. Если силы отсутствуют, т. е. $\boldsymbol{F} \equiv 0$, то ускорение тоже равно нулю. Но если скорость $\boldsymbol{a}(t)$ изменения скорости $\boldsymbol{v}(t)$ равна нулю, то, по-видимому, сама скорость $\boldsymbol{v}(t)$ вообще не меняется со временем. И мы приходим к закону инерции, по которому свободное тело действительно движется в пространстве с постоянной во времени скоростью.

Из того же уравнения (1) видно, что ограниченные по величине силы способны создать только ограниченные по величине ускорения. Но если на отрезке времени $[0, t]$ абсолютная величина скорости изменения некоторой величины $P(t)$ не превышала некоторой постоянной c, то, по нашим представлениям, изменение $|P(t) - P(0)|$ величины P за время t не превышает $c \cdot t$, т. е. в этой ситуации за малый промежуток времени величина мало меняется (во всяком случае, функция $P(t)$ оказывается непрерывной). Значит, реальная механическая система за малый промежуток времени мало меняет свои параметры.

В частности, *скорость* $\boldsymbol{v}(t)$ *тела* m *во все моменты времени* t*, близкие к некоторому моменту* t_0*, должна быть близка к значению* $\boldsymbol{v}(t_0)$, которое мы желаем определить. Но в таком случае само *движение в малой окрестности момента* t_0 *должно мало отличаться от равномерного движения со скоростью* $\boldsymbol{v}(t_0)$, причем тем меньше отличаться, чем меньше мы уходим от t_0.

Если бы мы сфотографировали траекторию тела m через телескоп, то в зависимости от его силы мы получили бы примерно следующее:

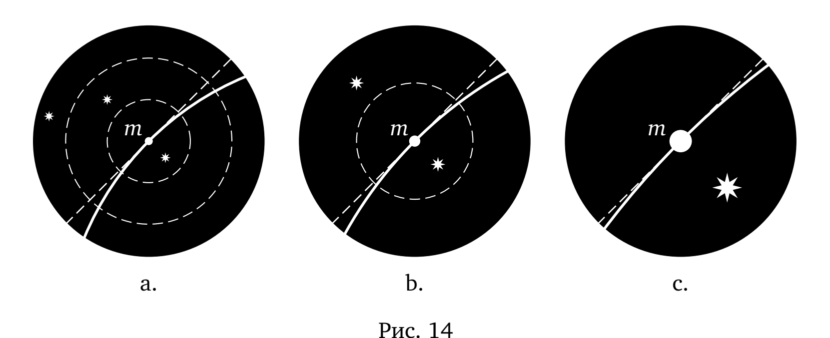


Рис. 14

Представленный на фотографии c участок траектории соответствует столь малому интервалу времени, что на нем уже трудно отличить истинную траекторию от прямолинейной, так как она и в самом деле на этом участке похожа на прямолинейную, а движение — на равномерное прямолинейное. Из этого наблюдения, кстати, можно заключить, что, решив задачу об определении мгновенной скорости (а скорость — векторная величина), мы одновременно решим и чисто геометрический вопрос об определении и

нахождении касательной к кривой (кривой в данном случае служит траектория движения).

Итак, мы заметили, что в нашей задаче должно быть $\boldsymbol{v}(t) \approx \boldsymbol{v}(t_0)$ при t, близких к t_0, т. е. $\boldsymbol{v}(t) \to \boldsymbol{v}(t_0)$ при $t \to t_0$ или, что то же самое, $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}(t_0) + o(1)$ при $t \to t_0$. Тогда должно быть также

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) \approx \boldsymbol{v}(t_0) \cdot (t - t_0)$$

при t, близких к t_0, точнее, величина смещения $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)$ эквивалентна $\boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0)$ при $t \to t_0$, или

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0) + o(\boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0)), \tag{4}$$

где $o(\boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0))$ есть поправочный вектор, величина которого при $t \to t_0$ стремится к нулю быстрее, чем величина вектора $\boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0)$. Тут следует, естественно, оговорить тот случай, когда $\boldsymbol{v}(t_0) = 0$. Чтобы не исключать этот случай из общего рассмотрения, полезно заметить, что[1] $|\boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0)| = |\boldsymbol{v}(t_0)||t - t_0|$. Таким образом, если $|\boldsymbol{v}(t_0)| \neq 0$, то величина $|\boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0)|$ того же порядка, что и $|t - t_0|$, и поэтому $o(\boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0)) = o(t - t_0)$. Значит, вместо (4) можно записать соотношение

$$\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{v}(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0), \tag{5}$$

которое не исключает также случая $\boldsymbol{v}(t_0) = 0$.

Таким образом, от самых общих и, быть может, расплывчатых представлений о скорости мы пришли к соотношению (5), которому скорость должна удовлетворять. Но из (5) величина $\boldsymbol{v}(t_0)$ находится однозначно:

$$\boldsymbol{v}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0}, \tag{6}$$

поэтому как само фундаментальное соотношение (5), так и равносильное ему соотношение (6) можно теперь принять за определения величины $\boldsymbol{v}(t_0)$ — мгновенной скорости тела в момент t_0.

Мы не станем сейчас отвлекаться на подробное обсуждение вопроса о пределе векторнозначной функции и ограничимся сведéнием его к уже рассмотренному во всех подробностях случаю предела вещественнозначной функции. Поскольку вектор $\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)$ имеет координаты $(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))$, то $\dfrac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \left(\dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \dfrac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)$ и, значит, если считать, что векторы близки, если их координаты близки, то предел в (6) следует понимать так:

$$\boldsymbol{v}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0} = \left(\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right),$$

[1] Здесь $|t - t_0|$ — модуль числа $t - t_0$, а $|\boldsymbol{v}|$ — модуль, или длина вектора $\boldsymbol{v}$.

а $o(t-t_0)$ в (5) надо понимать как вектор, зависящий от t и такой, что вектор $\frac{o(t-t_0)}{t-t_0}$ стремится (покоординатно) к нулю при $t \to t_0$.

Наконец, заметим, что если $\boldsymbol{v}(t_0) \neq 0$, то уравнение

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{v}(t_0) \cdot (t - t_0) \tag{7}$$

задает прямую, которая в силу указанных выше обстоятельств должна быть признана *касательной* к траектории в точке $(x(t_0), y(t_0))$.

Итак, *эталоном для определения скорости движения служит скорость равномерного прямолинейного движения, задаваемого линейным соотношением* (7). *Эталонное движение* (7) *подгоняется к исследуемому так, как этого требует соотношение* (5). *То значение* $\boldsymbol{v}(t_0)$, *при котором* (5) *выполнено, может быть найдено предельным переходом* (6) *и называется скоростью движения в момент* t_0. Рассматриваемые в классической механике движения, описываемые законом (1), должны допускать сравнение с таким эталоном, т. е. должны допускать линейную аппроксимацию, указанную в (5).

Если $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ — радиус-вектор движущейся точки m в момент t, $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \boldsymbol{v}(t)$ — вектор скорости изменения $\boldsymbol{r}(t)$ в момент t, а $\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = \boldsymbol{a}(t)$ — вектор скорости изменения $\boldsymbol{v}(t)$, или ускорение в момент t, то уравнение (1) можно записать в виде

$$m \cdot \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{F}(t),$$

откуда для нашего движения в поле тяжести получаем в координатном виде

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -GM \dfrac{x(t)}{[x^2(t) + y^2(t)]^{3/2}}, \\ \ddot{y}(t) = -GM \dfrac{y(t)}{[x^2(t) + y^2(t)]^{3/2}}. \end{cases} \tag{8}$$

Это точная математическая запись нашей исходной задачи. Поскольку мы знаем, как по $\boldsymbol{r}(t)$ искать $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ и далее $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$, то уже сейчас мы в состоянии ответить на вопрос, может ли какая-то пара функций $(x(t), y(t))$ задавать движение тела m вокруг M. Для этого надо найти $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$ и проверить, выполнены ли соотношения (8). Система (8) является примером системы так называемых дифференциальных уравнений. Пока что мы можем только проверять, является ли некоторый набор функций решением системы. Как искать решение или, лучше сказать, как исследовать свойства решений дифференциальных уравнений, изучается в специальном и, как уже сейчас можно понять, весьма ответственном отделе анализа — теории дифференциальных уравнений.

Операция отыскания скорости изменения векторной величины, как было показано, сводится к отысканию скорости изменения нескольких числовых функций — координат вектора. Таким образом, эту операцию следует прежде всего научиться свободно выполнять в простейшем случае вещественнозначных функций вещественного аргумента, чем мы теперь и займемся.

2. Функция, дифференцируемая в точке. Начнем с двух предварительных определений, которые мы чуть ниже несколько уточним.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0_1. Функция $f: E \to \mathbb{R}$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}$, называется *дифференцируемой* в точке $a \in E$, предельной для множества E, если существует такая линейная относительно приращения $x-a$ аргумента функция $A \cdot (x-a)$, что приращение $f(x)-f(a)$ функции f представляется в виде

$$f(x)-f(a) = A \cdot (x-a) + o(x-a) \quad \text{при } x \to a,\ x \in E. \tag{9}$$

Иными словами, функция дифференцируема в точке a, если изменение ее значений в окрестности исследуемой точки линейно с точностью до поправки, бесконечно малой по сравнению с величиной $x-a$ смещения от точки a.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как правило, дело приходится иметь с функциями, определенными в целой окрестности рассматриваемой точки, а не только на каком-то подмножестве этой окрестности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0_2. Линейная функция $A \cdot (x-a)$ из (9) называется *дифференциалом* функции f в точке a.

Дифференциал функции в точке определен однозначно, ибо из (9) следует

$$\lim_{E \ni x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{E \ni x \to a} \left(A + \frac{o(x-a)}{x-a} \right) = A$$

и в силу единственности предела число A определено однозначно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Величина

$$f'(a) = \lim_{E \ni x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{10}$$

называется *производной* функции f в точке a.

Соотношение (10) можно переписать в эквивалентной форме

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, $x \in E$, что в свою очередь равносильно соотношению

$$f(x)-f(a) = f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \text{при } x \to a,\ x \in E. \tag{11}$$

Таким образом, дифференцируемость функции равносильна наличию у нее производной в соответствующей точке.

Если сопоставить эти определения с тем, что было сказано в пункте 1, то можно заключить, что производная характеризует скорость изменения функции в рассматриваемой точке, а дифференциал доставляет наилучшую линейную аппроксимацию приращения функции в окрестности рассматриваемой точки.

Если функция $f: E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в различных точках множества E, то при переходе от одной точки к другой как величина A, так и функция $o(x-a)$ в (9) могут меняться (к чему мы уже явно пришли в (11)).

Указанное обстоятельство следует отметить уже в самом определении дифференцируемой функции, и мы приведем теперь это основное определение в его полной записи.

Определение 2. Функция $f: E \to \mathbb{R}$, заданная на множестве $E \subset \mathbb{R}$, называется *дифференцируемой* в точке $x \in E$, предельной для множества E, если

$$\boxed{f(x+h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x; h),} \tag{12}$$

где $h \mapsto A(x)h$ — линейная относительно h функция, а $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x+h \in E$.

Величины

$$\Delta x(h) := (x+h) - x = h$$

и

$$\Delta f(x; h) := f(x+h) - f(x)$$

называют соответственно *приращением аргумента* и *приращением функции* (соответствующим этому приращению аргумента).

Их часто (правда, не вполне законно) обозначают символами Δx и $\Delta f(x)$ самих функций от h.

Итак, функция дифференцируема в точке, если ее приращение в этой точке как функция приращения аргумента h является линейной с точностью до поправки, бесконечно малой при $h \to 0$ в сравнении с приращением аргумента.

Определение 3. Линейная по h функция $h \mapsto A(x)h$ из определения 2 называется *дифференциалом функции* $f: E \to \mathbb{R}$ в точке $x \in E$ и обозначается символом $df(x)$ или $Df(x)$.

Таким образом, $df(x)(h) = A(x)h$.

Из определений 2, 3 имеем

$$\Delta f(x; h) - df(x)(h) = \alpha(x; h),$$

причем $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x+h \in E$, т. е. разность между приращением функции, вызванным приращением h ее аргумента, и значением при том же h линейной по h функции $df(x)$ оказывается бесконечно малой выше чем первого порядка по h.

По этой причине говорят, что дифференциал есть (*главная*) *линейная часть приращения функции*.

Как следует из соотношения (12) и определения 1,

$$A(x) = f'(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x+h,\, x \in E}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

поэтому дифференциал можно записать в виде

$$df(x)(h) = f'(x)h. \tag{13}$$

В частности, если $f(x) \equiv x$, то, очевидно, $f'(x) \equiv 1$ и

$$dx(h) = 1 \cdot h = h,$$

поэтому иногда говорят, что «дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением».

Учитывая это равенство, из (13) получаем

$$df(x)(h) = f'(x)dx(h), \tag{14}$$

т. е.

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{15}$$

Равенство (15) надо понимать как равенство функций от h.

Из (14) получаем

$$\frac{df(x)(h)}{dx(h)} = f'(x), \tag{16}$$

т. е. функция $\frac{df(x)}{dx}$ (отношение функций $df(x)$ и dx) постоянна и равна $f'(x)$. По этой причине, следуя Лейбницу, производную часто обозначают символом $\frac{df(x)}{dx}$ наряду с предложенным впоследствии Лагранжем[1] символом $f'(x)$.

В механике, кроме указанных символов, для обозначения производной от функции $\varphi(t)$ по времени t используется символ $\dot{\varphi}(t)$ (читается «φ с точкой от t»).

3. Касательная; геометрический смысл производной и дифференциала. Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}$, и x_0 — фиксированная предельная точка множества E. Мы хотим подобрать постоянную c_0 так, чтобы она лучше всех остальных констант характеризовала поведение функции в окрестности точки x_0. Точнее, мы хотим, чтобы разность $f(x) - c_0$ при $x \to x_0$, $x \in E$ была бесконечно малой в сравнении уже с любой не нулевой постоянной, т. е.

$$f(x) = c_0 + o(1) \quad \text{при } x \to x_0,\ x \in E. \tag{17}$$

Последнее соотношение равносильно тому, что $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = c_0$. Если, в частности, функция непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ и, естественно, $c_0 = f(x_0)$.

Попробуем теперь подобрать функцию $c_0 + c_1(x - x_0)$ так, чтобы иметь

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при } x \to x_0,\ x \in E. \tag{18}$$

Очевидно, это — обобщение предыдущей задачи, поскольку формулу (17) можно переписать в виде

$$f(x) = c_0 + o((x - x_0)^0) \quad \text{при } x \to x_0,\ x \in E.$$

[1] Ж. Л. Лагранж (1736—1813) — знаменитый французский математик и механик.

Из (18) при $x \to x_0$, $x \in E$ немедленно следует, что $c_0 = \lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x)$, и если функция непрерывна в точке, то $c_0 = f(x_0)$.

Если c_0 найдено, то из (18) следует, что

$$c_1 = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - c_0}{x - x_0}.$$

И вообще, если бы мы искали такой полином $P_n(x_0; x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$, что

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0,\ x \in E, \quad (19)$$

то мы последовательно и вполне однозначно нашли бы

$$\begin{aligned} c_0 &= \lim_{E \ni x \to x_0} f(x), \\ c_1 &= \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - c_0}{x - x_0}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - [c_0 + \ldots + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1}]}{(x - x_0)^n} \end{aligned}$$

при условии, что все указанные пределы существуют; в противном случае условие (19) невыполнимо и задача решения не имеет.

Если функция f непрерывна в точке x_0, то из (18), как уже отмечалось, следует, что $c_0 = f(x_0)$ и мы приходим к соотношению

$$f(x) - f(x_0) = c_1(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при } x \to x_0,\ x \in E,$$

равносильному условию дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0.

Отсюда находим

$$c_1 = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Таким образом, доказано

Утверждение 1. *Функция $f: E \to \mathbb{R}$, непрерывная в точке $x_0 \in E$, предельной для множества $E \subset \mathbb{R}$, допускает линейное приближение* (18) *в том и только в том случае, когда она дифференцируема в этой точке.*

Функция

$$\varphi(x) = c_0 + c_1(x - x_0) \quad (20)$$

при $c_0 = f(x_0)$ и $c_1 = f'(x_0)$ является единственной функцией вида (20), удовлетворяющей соотношению (18).

Итак, функция

$$\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (21)$$

доставляет наилучшее линейное приближение функции f в окрестности точки x_0 в том смысле, что для любой другой функции вида (20) $f(x) - \varphi(x) \neq o(x - x_0)$ при $x \to x_0$, $x \in E$.

Графиком функции (21) является прямая

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{22}$$

проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.

Поскольку прямая (22) доставляет наилучшее возможное линейное приближение графика функции $y = f(x)$ в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$, то естественно принять

Определение 4. Если функция $f: E \to \mathbb{R}$ определена на множестве $E \subset \mathbb{R}$ и дифференцируема в точке $x_0 \in E$, то прямая, задаваемая уравнением (22), называется *касательной* к графику этой функции в точке $(x_0, f(x_0))$.

Рисунок 15 иллюстрирует все основные понятия, связанные с дифференцируемостью функции в точке, которые мы к настоящему моменту ввели: приращение аргумента и соответствующие ему приращение функции и значение дифференциала; на рисунке изображены график функции, касательная к графику в точке $P_0 = (x_0, f(x_0))$ и, для сравнения, произвольная прямая (называемая обычно *секущей*), проходящая через P_0 и некоторую точку $P \neq P_0$ графика функции.

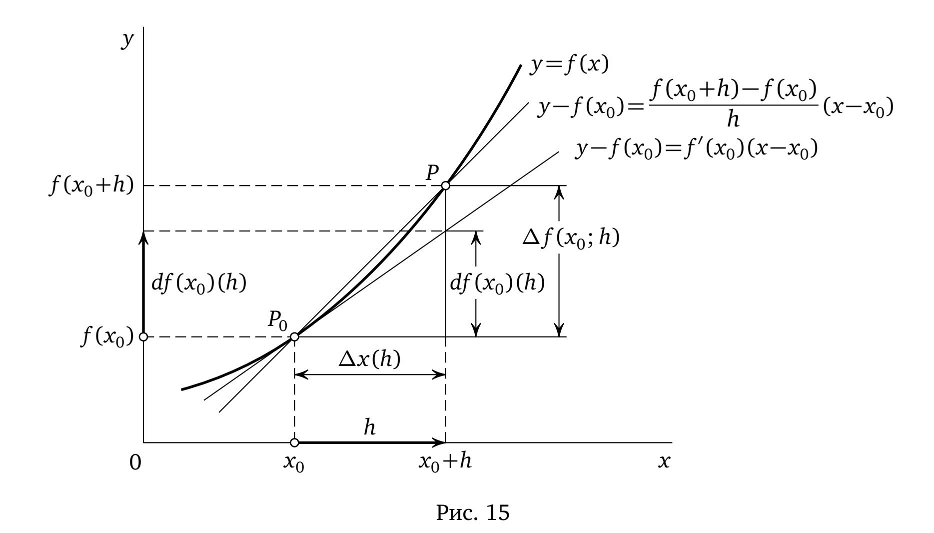


Рис. 15

Развитием определения 4 является

Определение 5. Если отображения $f: E \to \mathbb{R}$, $g: E \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $x_0 \in E$, предельной для множества $E \subset \mathbb{R}$, и $f(x) - g(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$, $x \in E$, то говорят, что f и g имеют в точке x_0 *касание порядка* n (или, точнее, *порядка не ниже* n).

При $n = 1$ говорят, что отображения f и g *касаются* друг друга в точке x_0.

В соответствии с определением 5 отображение (21) касается в точке $x_0 \in E$ отображения $f: E \to \mathbb{R}$, дифференцируемого в этой точке.

Теперь можно также сказать, что полином $P_n(x_0; x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n$ из соотношения (19) имеет с функцией f касание не ниже чем порядка n.

Число $h = x - x_0$, т. е. приращение аргумента, можно рассматривать как вектор, приложенный к точке x_0 и определяющий переход из x_0 в $x = x_0 + h$. Обозначим совокупность таких векторов через $T\mathbb{R}(x_0)$ или $T\mathbb{R}_{x_0}$.[1] Аналогично, обозначим через $T\mathbb{R}(y_0)$ или $T\mathbb{R}_{y_0}$ совокупность векторов смещения от точки y_0 по оси y (см. рис. 15). Тогда из определения дифференциала видно, что отображение

$$df(x_0): T\mathbb{R}(x_0) \to T\mathbb{R}(f(x_0)), \tag{23}$$

задаваемое дифференциалом $h \mapsto f'(x_0)h = df(x_0)(h)$, касается отображения

$$h \mapsto f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0; h), \tag{24}$$

задаваемого приращением дифференцируемой функции.

Заметим (см. рис. 15), что если отображение (24) есть приращение ординаты графика функции $y = f(x)$ при переходе аргумента из точки x_0 в точку $x_0 + h$, то дифференциал (23) дает приращение ординаты касательной к графику функции при том же приращении h аргумента.

4. Роль системы координат. Аналитическое определение 4 касательной может вызвать некоторую не вполне осознанную неудовлетворенность. Мы постараемся сформулировать, что именно может составить предмет этой неудовлетворенности. Однако прежде укажем одну более геометрическую конструкцию касательной к кривой в некоторой ее точке P_0 (см. рис. 15).

Возьмем произвольную точку P кривой, отличную от P_0. Прямая, определяемая парой точек P_0, P, как уже отмечалось, называется секущей по отношению к кривой. Заставим теперь точку P вдоль кривой стремиться к точке P_0. Если при этом секущая будет стремиться к некоторому предельному положению, то это предельное положение секущей и есть касательная к кривой в точке P_0.

Такое определение касательной при всей его наглядности в данный момент для нас неприемлемо потому, что мы не знаем, что такое кривая, что значит «точка стремится к другой точке вдоль кривой» и, наконец, в каком смысле надо понимать «предельное положение секущей».

Вместо того чтобы уточнять сейчас все эти понятия, мы отметим основную разницу между двумя рассмотренными определениями касательной. Второе было чисто геометрическим, не связанным (во всяком случае, до

---

[1] Это — небольшое отклонение от наиболее распространенного обозначения $T_{x_0}\mathbb{R}$ или $T_{x_0}(\mathbb{R})$.

уточнений) с какой бы то ни было системой координат. В первом же случае мы определили касательную к кривой, являющейся в некоторой системе координат графиком дифференцируемой функции. Естественно может возникнуть вопрос, не получится ли так, что если эту кривую записать в другой системе координат, то, например, соответствующая функция перестанет быть дифференцируемой или будет дифференцируемой, но в результате новых вычислений мы получим другую прямую в качестве касательной.

Этот вопрос об инвариантности, т. е. независимости от системы координат, всегда возникает, когда понятие вводится с помощью некоторой системы координат.

В равной степени этот вопрос относится и к понятию скорости, которое мы обсуждали в пункте 1 и которое, кстати, как это уже отмечалось, включает в себя понятие касательной.

Точка, вектор, прямая и т. д. имеют в разных системах координат разные численные характеристики (координаты точки, координаты вектора, уравнение прямой). Однако, зная формулы, связывающие две системы координат, всегда можно по двум однотипным числовым представлениям выяснить, являются ли они записью в разных системах координат одного и того же геометрического объекта или нет. Интуиция подсказывает нам, что процедура определения скорости, описанная в пункте 1, приводит к одному и тому же вектору независимо от системы координат, в которой проводились вычисления. В свое время, при изучении функций многих переменных, мы подробно обсудим подобного рода вопросы. Инвариантность определения скорости относительно различных систем координат будет проверена уже в следующем параграфе.

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных примеров, подведем некоторые итоги.

Мы столкнулись с задачей математического описания мгновенной скорости движущегося тела.

Эта задача привела к задаче аппроксимации заданной функции в окрестности исследуемой точки линейной функцией, что в геометрическом плане привело к понятию *касательной*. Функции, описывающие движение реальной механической системы, предполагаются допускающими такую линейную аппроксимацию.

Тем самым среди всех функций естественно выделился класс *дифференцируемых функций*.

Было введено понятие *дифференциала* функции в точке как линейного отображения, определенного на смещениях от рассматриваемой точки, которое с точностью до величины бесконечно малой по сравнению с величиной смещения описывает поведение приращения дифференцируемой функции в окрестности рассматриваемой точки.

Дифференциал $df(x_0)h = f'(x_0)h$ вполне определяется числом $f'(x_0)$ — *производной* функции f в точке x_0, которое может быть найдено предельным

переходом

$$f'(x_0) = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Физический смысл производной — *скорость* изменения величины $f(x)$ в момент x_0; геометрический смысл производной — *угловой коэффициент касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

5. Некоторые примеры

Пример 1. Пусть $f(x) = \sin x$. Покажем, что $f'(x) = \cos x$.

◄ $$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = \cos x.$$ ►

Мы воспользовались теоремой о пределе произведения, непрерывностью функции $\cos x$, эквивалентностью $\sin t \sim t$ при $t \to 0$ и теоремой о пределе композиции.

Пример 2. Покажем, что $\cos' x = -\sin x$.

◄ $$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= -\lim_{h \to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = -\sin x.$$ ►

Пример 3. Покажем, что если $f(t) = r \cos \omega t$, то $f'(t) = -r\omega \sin \omega t$.

◄ $$\lim_{h \to 0} \frac{r \cos \omega(t+h) - r \cos \omega t}{h} = r \lim_{h \to 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{\omega h}{2}\right) \sin \omega \left(t + \frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= -r \lim_{h \to 0} \sin \omega \left(t + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\omega h}{2}\right)}{\left(\frac{\omega h}{2}\right)} = -r\omega \sin \omega t.$$ ►

Пример 4. Если $f(t) = r \sin \omega t$, то $f'(t) = r\omega \cos \omega t$.

◄ Доказательство аналогично разобранным в примерах 1 и 3. ►

Пример 5. *Мгновенная скорость и ускорение материальной точки.* Пусть материальная точка движется в плоскости и в фиксированной системе координат закон ее движения описывается дифференцируемыми функциями от времени

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

или, что то же самое, вектором

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)).$$

Как мы выяснили в пункте 1 настоящего параграфа, скорость точки в момент t есть вектор

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)),$$

где $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ — производные функций $x(t)$, $y(t)$ по времени t.

Ускорение $\boldsymbol{a}(t)$ есть скорость изменения вектора $\boldsymbol{v}(t)$, поэтому

$$\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)),$$

где $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$ — производные по t функций $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, или так называемые вторые производные функций $x(t)$, $y(t)$.

Таким образом, по смыслу физической задачи функции $x(t)$, $y(t)$, описывающие движение материальной точки, должны иметь и первые и вторые производные.

Рассмотрим, в частности, равномерное движение точки по окружности радиуса r. Пусть ω — угловая скорость точки, т. е. величина центрального угла, на который перемещается точка за единицу времени.

В декартовых координатах (в силу определений функций $\cos x$, $\sin x$) это движение запишется в виде

$$\boldsymbol{r}(t) = (r\cos(\omega t + \alpha), r\sin(\omega t + \alpha)),$$

а если $\boldsymbol{r}(0) = (r, 0)$, то в виде

$$\boldsymbol{r}(t) = (r\cos\omega t, r\sin\omega t).$$

Без ограничения общности дальнейших выводов и для сокращения записи будем считать, что $\boldsymbol{r}(0) = (r, 0)$.

Тогда в силу результатов примеров 3 и 4

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t).$$

Из подсчета скалярного произведения

$$(\boldsymbol{v}(t), \boldsymbol{r}(t)) = -r^2\omega\sin\omega t\cos\omega t + r^2\omega\cos\omega t\sin\omega t = 0,$$

как и следовало в этом случае ожидать, получаем, что вектор $\boldsymbol{v}(t)$ скорости ортогонален радиус-вектору $\boldsymbol{r}(t)$ и направлен по касательной к окружности.

Далее, для ускорения имеем

$$\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t),$$

т. е. $\boldsymbol{a}(t) = -\omega^2 \cdot \boldsymbol{r}(t)$ и ускорение, таким образом, действительно центростремительное, ибо имеет направление, противоположное направлению вектора $\boldsymbol{r}(t)$.

Далее,

$$|\boldsymbol{a}(t)| = \omega^2 |\boldsymbol{r}(t)| = \omega^2 r = \frac{|\boldsymbol{v}(t)|^2}{r} = \frac{v^2}{r},$$

где $v = |\boldsymbol{v}(t)|$.

Подсчитаем, исходя из этих формул, например, величину скорости низкого спутника Земли. В этом случае r совпадает с радиусом Земли, т. е. $r \approx \approx 6400$ км, а $|\boldsymbol{a}(t)| \approx g$, где $g \approx 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения у поверхности Земли.

Таким образом, $v^2 = |\boldsymbol{a}(t)| r \approx 10$ м/с$^2 \times 64 \cdot 10^5$ м $= 64 \cdot 10^6$ (м/с)^2 и $v \approx \approx 8 \cdot 10^3$ м/с.

Пример 6. *Оптическое свойство параболического зеркала.* Рассмотрим (рис. 16) параболу $y = \frac{1}{2p} x^2$ $(p > 0)$ и построим касательную к ней в точке $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{2p} x_0^2\right)$.



Рис. 16

Поскольку $f(x) = \frac{1}{2p} x^2$, то

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{2p} x^2 - \frac{1}{2p} x_0^2}{x - x_0} = \frac{1}{2p} \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = \frac{1}{p} x_0.$$

Значит, искомая касательная имеет уравнение

$$y - \frac{1}{2p} x_0^2 = \frac{1}{p} x_0 (x - x_0)$$

или

$$\frac{1}{p} x_0 (x - x_0) - (y - y_0) = 0, \tag{25}$$

где $y_0 = \frac{1}{2p} x_0^2$.

Вектор $\boldsymbol{n} = \left(-\frac{1}{p} x_0, 1\right)$, как видно из последнего уравнения, ортогонален прямой (25). Покажем, что векторы $\boldsymbol{e}_y = (0, 1)$ и $\boldsymbol{e}_f = \left(-x_0, \frac{p}{2} - y_0\right)$ образуют с $\boldsymbol{n}$ равные углы. Вектор $\boldsymbol{e}_y$ есть единичный вектор направления оси Oy, а $\boldsymbol{e}_f$ — вектор, направленный из точки касания $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{2p} x_0^2\right)$ в точку $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ — фокус параболы. Итак,

$$\cos \widehat{\boldsymbol{e}_y \boldsymbol{n}} = \frac{\langle \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{n} \rangle}{|\boldsymbol{e}_y| |\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|},$$

$$\cos \widehat{\boldsymbol{e}_f \boldsymbol{n}} = \frac{\langle \boldsymbol{e}_f, \boldsymbol{n} \rangle}{|\boldsymbol{e}_f| |\boldsymbol{n}|} = \frac{\frac{1}{p} x_0^2 + \frac{p}{2} - \frac{1}{2p} x_0^2}{|\boldsymbol{n}| \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{p}{2} - \frac{1}{2p} x_0^2\right)^2}} = \frac{\frac{p}{2} + \frac{1}{2p} x_0^2}{|\boldsymbol{n}| \sqrt{\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p} x_0^2\right)^2}} = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}.$$

Таким образом, показано, что волновой источник, помещенный в точке $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ — в фокусе параболического зеркала, даст пучок, параллельный оси

Oy зеркала, а приходящий параллельно оси Oy пучок зеркало пропустит через фокус (см. рис. 16).

Пример 7. Этим примером мы покажем, что касательная является всего-навсего лучшим линейным приближением графика функции в окрестности точки касания и вовсе не обязана иметь с ним единственную общую точку, как это было в случае окружности и как это вообще имеет место в случае выпуклых кривых. (О выпуклых кривых будет специальный разговор.)

Пусть функция $f(x)$ задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

График этой функции изображен жирной линией на рис. 17.

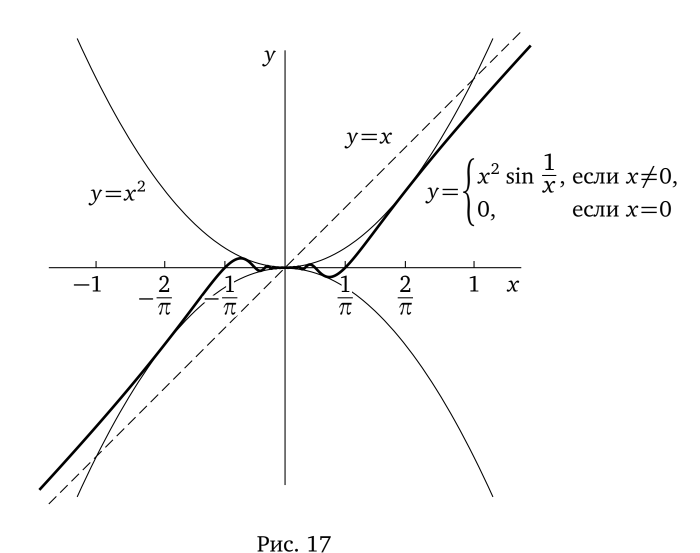


Рис. 17

Найдем касательную к графику в точке $(0, 0)$. Поскольку

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

то касательная имеет уравнение $y - 0 = 0 \cdot (x - 0)$, или просто $y = 0$.

Таким образом, в нашем примере касательная совпадает с осью Ox, с которой график имеет бесконечное количество точек пересечения в любой окрестности точки касания.

В силу определения дифференцируемости функции $f: E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in \in E$ имеем

$$f(x) - f(x_0) = A(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при } x \to x_0,\ x \in E.$$

Поскольку правая часть этого равенства стремится к нулю при $x \to x_0$, $x \in E$, то $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, так что дифференцируемая в точке функция обязана быть непрерывной в этой точке.

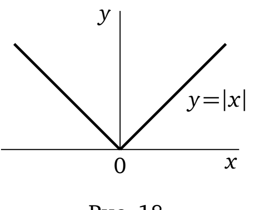


Рис. 18

Покажем, что обратное, конечно, не всегда имеет место.

Пример 8. Пусть $f(x) = |x|$ (рис. 18). Тогда в точке $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to -0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to -0} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to +0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = 1.$$

Следовательно, в этой точке функция не имеет производной, а значит, и не дифференцируема в этой точке.

Пример 9. Покажем, что $e^{x+h} - e^x = e^x h + o(h)$ при $h \to 0$.

Таким образом, будет показано, что функция $\exp(x) = e^x$ дифференцируема, причем $d \exp(x) h = \exp(x) h$, или $de^x = e^x dx$, и тем самым $\exp' x = \exp x$, или $\dfrac{de^x}{dx} = e^x$.

◄ $e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1) = e^x(h + o(h)) = e^x h + o(h)$.

Мы воспользовались полученной в примере 39, гл. III, § 2, п. 4 формулой $e^h - 1 = h + o(h)$ при $h \to 0$. ►

Пример 10. $a^{x+h} - a^x = a^x \ln a h + o(h)$ при $h \to 0$ и $a > 0$.

Таким образом, $da^x = a^x \ln a \, dx$ и $\dfrac{da^x}{dx} = a^x \ln a$.

◄ $$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1) = a^x(e^{h \ln a} - 1) =$$
$$= a^x(h \ln a + o(h \ln a)) = a^x \ln a h + o(h) \quad \text{при } h \to 0. \ ►$$

Пример 11. $\ln|x+h| - \ln|x| = \dfrac{1}{x} h + o(h)$ при $h \to 0$ и $x \neq 0$.

Таким образом, $d \ln|x| = \dfrac{1}{x} dx$ и $\dfrac{d \ln|x|}{dx} = \dfrac{1}{x}$.

◄ $\ln|x + h| - \ln|x| = \ln\left|1 + \dfrac{h}{x}\right|$. При $|h| < |x|$ имеем $\left|1 + \dfrac{h}{x}\right| = 1 + \dfrac{h}{x}$, поэтому для достаточно малых значений h можно написать

$$\ln|x+h| - \ln|x| = \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x} + o\left(\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} h + o(h)$$

при $h \to 0$. Мы воспользовались здесь тем, что, как показано в примере 38, гл. III, § 2, п. 4, $\ln(1+t) = t + o(t)$ при $t \to 0$. ►

Пример 12. $\log_a|x+h| - \log_a|x| = \dfrac{1}{x \ln a} h + o(h)$ при $h \to 0$, $x \neq 0$, $0 < a \neq$ $\neq 1$.

Таким образом, $d \log_a|x| = \dfrac{1}{x \ln a} dx$ и $\dfrac{d \log_a|x|}{dx} = \dfrac{1}{x \ln a}$.

◄ $$\log_a|x+h|-\log_a|x| = \log_a\left|1+\frac{h}{x}\right| = \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) =$$
$$= \frac{1}{\ln a}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{\ln a}\left(\frac{h}{x}+o\left(\frac{h}{x}\right)\right) = \frac{1}{x\ln a}h+o(h).$$

Мы воспользовались формулой перехода к другому основанию логарифмов и соображениями, изложенными при рассмотрении примера 11. ►

Задачи и упражнения

1. Покажите, что

a) касательная к эллипсу
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
в точке (x_0, y_0) имеет уравнение
$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1;$$

b) световые лучи от источника, помещенного в одном из двух фокусов $F_1 = (-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ эллипса с полуосями $a > b > 0$, собираются эллиптическим зеркалом в другом фокусе.

2. Напишите формулы для приближенного вычисления значений

a) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$ при значениях α, близких к нулю;

b) $\sin(30°+\alpha°)$ при значениях $\alpha°$, близких к нулю;

c) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ при значениях α, близких к нулю;

d) $\cos(45°+\alpha°)$ при значениях $\alpha°$, близких к нулю.

3. Стакан с водой вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Пусть $y=f(x)$ — уравнение кривой, получающейся в сечении поверхности жидкости плоскостью, проходящей через ось вращения.

a) Покажите, что $f'(x) = \frac{\omega^2}{g}x$, где g — ускорение свободного падения (см. пример 5).

b) Подберите $f(x)$ так, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла условию, указанному в a) (см. пример 5).

c) Изменится ли приведенное в a) условие на функцию $f(x)$, если ось вращения не будет совпадать с осью стакана?

4. Тело, которое можно считать материальной точкой, под действием силы тяжести скатывается с гладкой горки, являющейся графиком дифференцируемой функции $y=f(x)$.

a) Найдите горизонтальную и вертикальную компоненты вектора ускорения, которое имеет тело в точке (x_0, y_0).

b) В случае, когда $f(x)=x^2$ и тело скатывается с большой высоты, найдите ту точку параболы $y=x^2$, в которой горизонтальная составляющая ускорения максимальна.

5. Положим
$$\Psi_0(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \text{если } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

и продолжим эту функцию на всю числовую прямую с периодом 1. Эту продолженную функцию обозначим через φ_0. Пусть, далее,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{4^n}\varphi_0(4^n x).$$

Функция φ_n имеет период 4^{-n} и производную, равную $+1$ или -1 всюду, кроме точек $x = \frac{k}{2^{2n+1}}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

Покажите, что функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$, но ни в одной точке не имеет производной. (Этот пример принадлежит известному голландскому математику Б. Л. Ван дер Вардену (1903—1996). Первые примеры непрерывных функций, не имеющих производной, были построены Больцано (1830 г.) и Вейерштрассом (1860 г.).)

§ 2. Основные правила дифференцирования

Построение дифференциала заданной функции или, что равносильно, отыскание ее производной называется операцией *дифференцирования* функции[1].

1. Дифференцирование и арифметические операции

Теорема 1. *Если функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в точке $x \in X$, то*

a) *их сумма дифференцируема в x, причем*

$$(f+g)'(x) = (f'+g')(x);$$

b) *их произведение дифференцируемо в x, причем*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

c) *их отношение дифференцируемо в x, если $g(x) \neq 0$, причем*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

◄ В доказательстве мы будем опираться на определение дифференцируемой функции и свойства символа $o(\cdot)$, установленные в гл. III, § 2, п. 4.

---

[1]При математической равносильности задачи отыскания дифференциала и задачи отыскания производной, все же производная и дифференциал — не одно и то же, и поэтому, например, во французском математическом языке имеются два термина: dérivation — «деривация», нахождение производной (скорости), и différentiation — «дифференцирование», нахождение дифференциала.

a) $$(f+g)(x+h)-(f+g)(x) = (f(x+h)+g(x+h)) - \\ -(f(x)+g(x)) = (f(x+h)-f(x)) + (g(x+h)-g(x)) = \\ = (f'(x)h+o(h)) + (g'(x)h+o(h)) = (f'(x)+g'(x))h+o(h) = \\ = (f'+g')(x)h+o(h).$$

b) $$(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x) = f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) = \\ = (f(x)+f'(x)h+o(h))(g(x)+g'(x)h+o(h)) - f(x)g(x) = \\ = (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))h+o(h).$$

c) Поскольку функция, дифференцируемая в некоторой точке $x \in X$, непрерывна в этой точке, то, учитывая, что $g(x)\neq 0$, на основании свойств непрерывных функций можем гарантировать, что при достаточно малых значениях h также $g(x+h)\neq 0$. В следующих выкладках предполагается, что h мало:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \\ = \frac{1}{g(x)g(x+h)}(f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)) = \\ = \left(\frac{1}{g^2(x)}+o(1)\right)\Big((f(x)+f'(x)h+o(h))g(x) - f(x)(g(x)+g'(x)h+o(h))\Big) = \\ = \left(\frac{1}{g^2(x)}+o(1)\right)\Big((f'(x)g(x)-f(x)g'(x))h+o(h)\Big) = \\ = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}h+o(h).$$

Мы воспользовались тем, что в силу непрерывности функции g в точке x и того, что $g(x)\neq 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)} = \frac{1}{g^2(x)},$$

т. е.

$$\frac{1}{g(x)g(x+h)} = \frac{1}{g^2(x)} + o(1),$$

где $o(1)$ есть бесконечно малая при $h\to 0$, $x+h\in X$. ►

Следствие 1. *Производная от линейной комбинации дифференцируемых функций равна линейной комбинации производных этих функций.*

◄ Поскольку постоянная функция, очевидно, дифференцируема и ее производная всюду равна нулю, то, считая в утверждении b) теоремы 1, что $f\equiv \mathrm{const}=c$, имеем $(cg)'(x)=cg'(x)$.

Используя теперь утверждение a) теоремы 1, можем записать

$$(c_1f+c_2g)'(x) = (c_1f)'(x)+(c_2g)'(x) = c_1f'(x)+c_2g'(x).$$

С учетом доказанного, по индукции проверяем, что

$$(c_1f_1+\ldots+c_nf_n)'(x) = c_1f_1'(x)+\ldots+c_nf_n'(x). \ ►$$

Следствие 2. *Если функции* $f_1, \ldots, f_n$ *дифференцируемы в точке* x, *то*

$$(f_1 \ldots f_n)'(x) = f_1'(x) f_2(x) \ldots f_n(x) + f_1(x) f_2'(x) f_3(x) \ldots f_n(x) + \ldots + \\ + f_1(x) \ldots f_{n-1}(x) f_n'(x).$$

◄ Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Если оно справедливо для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то в силу утверждения b) теоремы 1 оно справедливо также для $(n+1) \in \mathbb{N}$. В силу принципа индукции заключаем о верности приведенной формулы для любого $n \in \mathbb{N}$. ►

Следствие 3. *Из взаимосвязи производной и дифференциала следует, что теорема* 1 *может быть записана также через дифференциалы. Именно*:

a) $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$;

b) $d(f \cdot g)(x) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$;

c) $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$, *если* $g(x) \neq 0$.

◄ Проверим, например, а). Действительно,

$$d(f+g)(x)h = (f+g)'(x)h = (f'+g')(x)h = (f'(x)+g'(x))h = \\ = f'(x)h + g'(x)h = df(x)h + dg(x)h = (df(x)+dg(x))h,$$

и совпадение функций $d(f+g)(x)$, $df(x)+dg(x)$ проверено. ►

Пример 1. *Инвариантность определения скорости*. Теперь мы в состоянии проверить, что вектор мгновенной скорости материальной точки, который был определен в п. 1 § 1, не зависит от выбора системы декартовых координат. Мы проверим это даже для любой из аффинных систем координат.

Пусть (x^1, x^2) и $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$ — координаты одной и той же точки плоскости в двух различных системах координат, связанных между собой соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{x}^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + b^1, \\ \tilde{x}^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + b^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Поскольку любой вектор (в аффинном пространстве) определяется парой точек, а его координаты суть разности координат конца и начала вектора, то координаты одного и того же вектора в этих двух системах должны быть связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{v}^1 &= a_1^1 v^1 + a_2^1 v^2, \\ \tilde{v}^2 &= a_1^2 v^1 + a_2^2 v^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Если закон движения точки в одной системе задается функциями $x^1(t)$, $x^2(t)$, то в другой — функциями $\tilde{x}^1(t)$, $\tilde{x}^2(t)$, связанными с первыми посредством соотношений (1).

Дифференцируя соотношения (1) по времени t, по правилам дифференцирования находим

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}^1 &= a_1^1\dot{x}^1 + a_2^1\dot{x}^2,\\ \dot{\tilde{x}}^2 &= a_1^2\dot{x}^1 + a_2^2\dot{x}^2.\end{aligned} \qquad (3)$$

Таким образом, координаты $(v^1, v^2) = (\dot{x}^1, \dot{x}^2)$ вектора скорости в первой системе и координаты $(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2) = (\dot{\tilde{x}}^1, \dot{\tilde{x}}^2)$ вектора скорости во второй системе оказались связанными соотношениями (2), говорящими нам о том, что мы имеем дело с двумя различными записями одного и того же вектора.

Пример 2. Пусть $f(x) = \operatorname{tg} x$. Покажем, что $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ всюду, где $\cos x \neq 0$, т. е. в области определения функции $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

В примерах 1 и 2 из § 1 было показано, что $\sin' x = \cos x$, $\cos' x = -\sin x$, поэтому из утверждения c) теоремы 1 получаем при $\cos x \neq 0$:

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пример 3. $\operatorname{ctg}' x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ при $\sin x \neq 0$, т. е. в области определения функции $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Действительно,

$$\operatorname{ctg}' x = \left(\frac{\cos}{\sin}\right)'(x) = \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} = \\ = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример 4. Если $P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ — полином, то $P'(x) = c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1}$.

Действительно, поскольку $\dfrac{dx}{dx} = 1$, то по следствию 2 $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ и теперь утверждение вытекает из следствия 1.

2. Дифференцирование композиции функций

Теорема 2 (теорема о дифференциале композиции функций). *Если функция $f\colon X \to Y \subset \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x \in X$, а функция $g\colon Y \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $y = f(x) \in Y$, то композиция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ этих функций дифференцируема в точке x, причем дифференциал $d(g \circ f)(x)\colon T\mathbb{R}(x) \to T\mathbb{R}(g(f(x)))$ композиции равен композиции $dg(y) \circ df(x)$ дифференциалов*

$$df(x)\colon T\mathbb{R}(x) \to T\mathbb{R}(y = f(x)),$$
$$dg(y = f(x))\colon T\mathbb{R}(y) \to T\mathbb{R}(g(y)).$$

◄ Условия дифференцируемости функций f и g имеют вид

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \quad \text{при } h \to 0,\ x+h \in X,$$
$$g(y+t) - g(y) = g'(y)t + o(t) \quad \text{при } t \to 0,\ y+t \in Y.$$

Заметим, что в последнем равенстве функцию $o(t)$ можно считать определенной и при $t=0$, а в представлении $o(t)=\gamma(t)t$, где $\gamma(t)\to 0$ при $t\to 0$, $y+t\in Y$, можно считать $\gamma(0)=0$. Полагая $f(x)=y$, $f(x+h)=y+t$, в силу дифференцируемости, а значит, и непрерывности функции f в точке x заключаем, что при $h\to 0$ также $t\to 0$, и если $x+h\in X$, то $y+t\in Y$. По теореме о пределе композиции теперь имеем

$$\gamma(f(x+h)-f(x))=\alpha(h)\to 0 \quad \text{при } h\to 0,\ x+h\in X,$$

и, таким образом, если $t=f(x+h)-f(x)$, то

$$\begin{aligned}o(t)=\gamma(f(x+h)-f(x))(f(x+h)-f(x))=\alpha(h)(f'(x)h+o(h))=\\ =\alpha(h)f'(x)h+\alpha(h)o(h)=o(h)+o(h)=o(h) \quad \text{при } h\to 0,\ x+h\in X.\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)=g(f(x+h))-g(f(x))=\\ =g(y+t)-g(y)=g'(y)t+o(t)=\\ =g'(f(x))(f(x+h)-f(x))+o(f(x+h)-f(x))=\\ =g'(f(x))(f'(x)h+o(h))+o(f(x+h)-f(x))=\\ =g'(f(x))(f'(x)h)+g'(f(x))(o(h))+o(f(x+h)-f(x)).\end{aligned}$$

Поскольку величину $g'(f(x))(f'(x)h)$ можно интерпретировать как значение $dg(f(x))\circ df(x)h$ композиции $h\xmapsto{dg(y)\circ df(x)} g'(f(x))\cdot f'(x)h$ отображений $h\xmapsto{df(x)} f'(x)h$, $\tau\xmapsto{dg(y)} g'(y)\tau$ на смещении h, то для завершения доказательства теоремы остается заметить, что сумма

$$g'(f(x))(o(h))+o(f(x+h)-f(x))$$

есть величина бесконечно малая в сравнении с h при $h\to 0$, $x+h\in X$, ибо, как мы уже установили,

$$o(f(x+h)-f(x))=o(h) \quad \text{при } h\to 0,\ x+h\in X.$$

Итак, показано, что

$$(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)h+o(h) \quad \text{при } h\to 0,\ x+h\in X. \ ►$$

Следствие 1. *Производная $(g\circ f)'(x)$ композиции дифференцируемых вещественнозначных функций равна произведению $g'(f(x))\cdot f'(x)$ производных этих функций, вычисленных в соответствующих точках.*

Большим искушением к короткому доказательству последнего утверждения являются содержательные обозначения Лейбница для производной, в которых, если $z=z(y)$, а $y=y(x)$, имеем

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx},$$

что представляется вполне естественным, если символ $\frac{dz}{dy}$ или $\frac{dy}{dx}$ рассматривать не как единый, а как отношение dz к dy или, соответственно, dy к dx.

Возникающая в связи с этим идея доказательства состоит в том, чтобы рассмотреть разностное отношение

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

и затем перейти к пределу при $\Delta x \to 0$. Трудность, которая тут появляется (и с которой нам тоже отчасти пришлось считаться!), состоит в том, что Δy может быть нулем, даже если $\Delta x \neq 0$.

Следствие 2. *Если имеется композиция $(f_n \circ \ldots \circ f_1)(x)$ дифференцируемых функций $y_1 = f_1(x), \ldots, y_n = f_n(y_{n-1})$, то*

$$(f_n \circ \ldots \circ f_1)'(x) = f_n'(y_{n-1}) f_{n-1}'(y_{n-2}) \ldots f_1'(x).$$

◄ При $n = 1$ утверждение очевидно.

Если оно справедливо для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то из теоремы 2 следует, что оно справедливо также для $n+1$, т. е. по принципу индукции установлено, что оно справедливо для любого $n \in \mathbb{N}$. ►

Пример 5. Покажем, что при $\alpha \in \mathbb{R}$ в области $x > 0$ имеем $\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$, т. е. $dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} dx$, и

$$(x+h)^\alpha - x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} h + o(h) \quad \text{при } h \to 0.$$

◄ Запишем $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ и применим доказанную теорему с учетом результатов примеров 9 и 11 из § 1 и пункта b) теоремы 1.

Пусть $g(y) = e^y$ и $y = f(x) = \alpha \ln x$. Тогда $x^\alpha = (g \circ f)(x)$ и

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = e^y \cdot \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \text{ ►}$$

Пример 6. Производная от логарифма модуля дифференцируемой функции часто называется *логарифмической производной*.

Поскольку $F(x) = \ln|f(x)| = (\ln \circ |\ \ | \circ f)(x)$, то в силу результата примера 11 из § 1 $F'(x) = (\ln|f|)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Таким образом,

$$d(\ln|f|)(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{df(x)}{f(x)}.$$

Пример 7. *Абсолютная и относительная погрешности значения дифференцируемой функции, вызванные погрешностями в задании аргумента.* Если функция f дифференцируема в точке x, то

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x; h),$$

где $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$.

Таким образом, если при вычислении значения $f(x)$ функции аргумент x определен с абсолютной погрешностью h, то вызванная этой погрешно-

стью абсолютная погрешность $|f(x+h)-f(x)|$ в значении функции при достаточно малых h может быть заменена модулем значения дифференциала $|df(x)h|=|f'(x)h|$ на смещении h.

Тогда относительная погрешность может быть вычислена как отношение $\frac{|f'(x)h|}{|f(x)|}=\frac{|df(x)h|}{|f(x)|}$ или как модуль произведения $\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right||h|$ логарифмической производной функции на величину абсолютной погрешности аргумента.

Заметим, кстати, что если $f(x)=\ln x$, то $d\ln x=\frac{dx}{x}$ и абсолютная погрешность в определении значения логарифма равна относительной погрешности в определении аргумента. Это обстоятельство прекрасно используется, например, в логарифмической линейке (и многих других приборах с неравномерным масштабом шкал). А именно, представим себе, что с каждой точкой числовой оси, лежащей правее нуля, мы связали ее координату y и записали ее над точкой, а под этой точкой записали число $x=e^y$. Тогда $y=\ln x$. Одна и та же числовая полуось оказалась наделенной одной равномерной шкалой y и одной неравномерной (ее называют логарифмической) шкалой x. Чтобы найти $\ln x$, надо установить визир на числе x и прочитать наверху соответствующее число y. Поскольку точность установки визира на какую-то точку не зависит от числа x или y, ей отвечающего, и измеряется некоторой величиной Δy (длиной отрезка возможного уклонения) в равномерной шкале, то при определении по числу x его логарифма y мы будем иметь примерно одну и ту же абсолютную погрешность, а при определении числа по его логарифму будем иметь примерно одинаковую относительную погрешность во всех частях шкалы.

Пример 8. Продифференцируем функцию $u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции и $u(x)>0$. Запишем $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$ и воспользуемся следствием 2

$$\frac{de^{v(x)\ln u(x)}}{dx}=e^{v(x)\ln u(x)}\Big(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\Big)=$$
$$=u(x)^{v(x)}\cdot v'(x)\ln u(x)+v(x)u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x).$$

3. Дифференцирование обратной функции

Теорема 3 (теорема о производной обратной функции). *Пусть функции $f\colon X\to Y$, $f^{-1}\colon Y\to X$ взаимно обратны и непрерывны в точках $x_0\in X$ и $f(x_0)=y_0\in Y$ соответственно. Если функция f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0)\neq 0$, то функция f^{-1} также дифференцируема в точке y_0, причем*

$$(f^{-1})'(y_0)=(f'(x_0))^{-1}.$$

◄ Поскольку функции $f\colon X\to Y$, $f^{-1}\colon Y\to X$ взаимно обратны, то величины $f(x)-f(x_0)$, $f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)$ при $y=f(x)$ не обращаются в нуль, если $x\neq x_0$. Из непрерывности f в x_0 и f^{-1} в y_0 можно, кроме того, заключить, что $(X\ni x\to x_0)\Leftrightarrow(Y\ni y\to y_0)$. Используя теперь теорему о пределе композиции

функций и арифметические свойства предела, находим

$$\lim_{Y\ni y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{X\ni x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{X\ni x\to x_0}\frac{1}{\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Таким образом, показано, что в точке y_0 функция $f^{-1}\colon Y\to X$ имеет производную и

$$(f^{-1})'(y_0)=(f'(x_0))^{-1}. \ ►$$

Замечание 1. Если бы нам заранее было известно, что функция f^{-1} дифференцируема в точке y_0, то из тождества $(f^{-1}\circ f)(x)=x$ по теореме о дифференцировании композиции функций мы сразу же нашли бы, что $(f^{-1})'(y_0)\cdot f'(x_0)=1$.

Замечание 2. Условие $f'(x_0)\neq 0$, очевидно, равносильно тому, что отображение $h\mapsto f'(x_0)h$, осуществляемое дифференциалом $df(x_0)\colon T\mathbb{R}(x_0)\to \to T\mathbb{R}(y_0)$, имеет обратное отображение $[df(x_0)]^{-1}\colon T\mathbb{R}(y_0)\to T\mathbb{R}(x_0)$, задаваемое формулой $\tau\mapsto (f'(x_0))^{-1}\tau$.

Значит, в терминах дифференциалов вторую фразу формулировки теоремы 3 можно было бы записать следующим образом:

Если функция f дифференцируема в точке x_0 и в этой точке ее дифференциал $df(x_0)\colon T\mathbb{R}(x_0)\to T\mathbb{R}(y_0)$ обратим, то дифференциал функции f^{-1}, обратной к f, существует в точке $y_0=f(x_0)$ и является отображением

$$df^{-1}(y_0)=[df(x_0)]^{-1}\colon T\mathbb{R}(y_0)\to T\mathbb{R}(x_0),$$

обратным к отображению $df(x_0)\colon T\mathbb{R}(x_0)\to T\mathbb{R}(y_0)$.

Пример 9. Покажем, что $\arcsin' y=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ при $|y|<1$.

Функции $\sin\colon [-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$ и $\arcsin\colon [-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$ взаимно обратны и непрерывны (см. гл. IV, § 2, пример 8), причем $\sin' x=\cos x\neq 0$, если $|x|<\pi/2$. При $|x|<\pi/2$ для значений $y=\sin x$ имеем $|y|<1$.

Таким образом, по теореме 3

$$\arcsin' y=\frac{1}{\sin' x}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Знак перед радикалом выбран с учетом того, что $\cos x>0$ при $|x|<\pi/2$.

Пример 10. Рассуждая, как и в предыдущем примере, можно показать (с учетом примера 9 из § 2 гл. IV), что

$$\arccos' y=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\quad \text{при } |y|<1.$$

Действительно,

$$\arccos' y=\frac{1}{\cos' x}=-\frac{1}{\sin x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Знак перед радикалом выбран с учетом того, что $\sin x>0$, если $0<x<\pi$.

Пример 11. $\operatorname{arctg}' y = \frac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$.

Действительно,

$$\operatorname{arctg}' y = \frac{1}{\operatorname{tg}' x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Пример 12. $\operatorname{arcctg}' y = -\frac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$.

Действительно,

$$\operatorname{arcctg}' y = \frac{1}{\operatorname{ctg}' x} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)} = -\sin^2 x = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Пример 13. Мы уже знаем (см. примеры 10, 12 из § 1), что функции $y = f(x) = a^x$ и $x = f^{-1}(y) = \log_a x$ имеют производные $f'(x) = a^x \ln a$ и $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y \ln a}$.

Проверим, как это согласуется с теоремой 3:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a},$$

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y \ln a}\right)} = y \ln a = a^x \ln a.$$

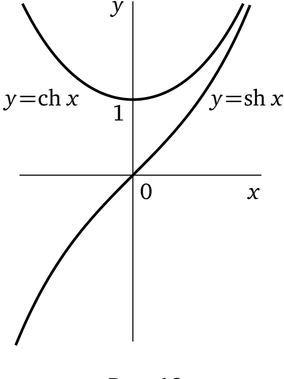


Рис. 19

Пример 14. *Гиперболические, обратные гиперболические функции и их производные.* Функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

называются соответственно *гиперболическим синусом* и *гиперболическим косинусом*[1] от x.

Эти в данный момент вводимые нами чисто формально функции, как выяснится, во многих вопросах появляются так же естественно, как появляются круговые функции $\sin x$, $\cos x$.

Заметим, что

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,$$

т. е. гиперболический синус — нечетная функция, а гиперболический косинус — функция четная.

Кроме того, очевидно следующее основное тождество:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Графики функций $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \operatorname{ch} x$ изображены на рис. 19.

---

[1] От лат. sinus hyperbolici, cosinus hyperbolici.

Из определения функции $\operatorname{sh} x$ и свойств функции e^x следует, что $\operatorname{sh} x$ — непрерывная строго возрастающая функция, отображающая взаимно однозначно $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Обратная функция к $\operatorname{sh} x$, таким образом, существует, определена на $\mathbb{R}$, непрерывна и строго монотонно возрастает.

Ее обозначают символом

$$\operatorname{arsh} y$$

(читается «*ареа-синус*[1] от y»). Эту функцию легко выразить через уже известные. Решая уравнение

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = y$$

относительно x, найдем последовательно

$$e^x = y + \sqrt{1+y^2}$$

($e^x > 0$, поэтому $e^x \neq y - \sqrt{1+y^2}$) и

$$x = \ln\bigl(y + \sqrt{1+y^2}\bigr).$$

Итак,

$$\operatorname{arsh} y = \ln\bigl(y + \sqrt{1+y^2}\bigr), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Аналогично, используя монотонность функции $y = \operatorname{ch} x$ на участках $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, можно построить функции $\operatorname{arch}_- y$ и $\operatorname{arch}_+ y$, определенные для $y \geqslant 1$ и обратные к ограничению функции $\operatorname{ch} x$ на $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ соответственно.

Они задаются формулами

$$\operatorname{arch}_- y = \ln\bigl(y - \sqrt{y^2-1}\bigr),$$
$$\operatorname{arch}_+ y = \ln\bigl(y + \sqrt{y^2-1}\bigr).$$

Из приведенных определений находим

$$\operatorname{sh}' x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch}' x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x,$$

а на основе теоремы о производной обратной функции получаем

$$\operatorname{arsh}' y = \frac{1}{\operatorname{sh}' x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$
$$\operatorname{arch}'_- y = \frac{1}{\operatorname{ch}' x} = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{-\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \quad y > 1,$$
$$\operatorname{arch}'_+ y = \frac{1}{\operatorname{ch}' x} = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \qquad y > 1.$$

---

[1]Полное название — area sinus hyperbolici (*лат.*); почему здесь используется термин «площадь» (area), а не «дуга» (arcus), как в круговых функциях, выяснится несколько позже.

Последние три соотношения можно проверить, используя явные выражения для обратных гиперболических функций $\operatorname{arsh} y$ и $\operatorname{arch} y$.

Например,

$$\operatorname{arsh}' y = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\left(1+\frac{1}{2}(1+y^2)^{-1/2}\cdot 2y\right) = \\ = \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+y^2}+y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Подобно $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ можно рассмотреть функции

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \text{и} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

называемые *гиперболическим тангенсом* и *гиперболическим котангенсом* соответственно, а также обратные им функции *ареа-тангенс*:

$$\operatorname{arth} y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}, \quad |y|<1,$$

и *ареа-котангенс*:

$$\operatorname{arcth} y = \frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1}, \quad |y|>1.$$

Решения элементарных уравнений, приводящие к этим формулам, мы опускаем.

По правилам дифференцирования имеем

$$\operatorname{th}' x = \frac{\operatorname{sh}' x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x\operatorname{ch}' x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch} x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$
$$\operatorname{cth}' x = \frac{\operatorname{ch}' x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x\operatorname{sh}' x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} x\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

По теореме о производной обратной функции

$$\operatorname{arth}' y = \frac{1}{\operatorname{th}' x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)} = \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 x} = \frac{1}{1-y^2}, \qquad |y|<1,$$
$$\operatorname{arcth}' y = \frac{1}{\operatorname{cth}' x} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right)} = -\operatorname{sh}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{cth}^2 x - 1} = -\frac{1}{y^2-1}, \quad |y|>1.$$

Две последние формулы можно проверить и непосредственным дифференцированием явных формул для функций $\operatorname{arth} y$ и $\operatorname{arcth} y$.

4. Таблица производных основных элементарных функций. Выпишем теперь (см. табл. 1) производные основных элементарных функций, подсчитанные в § 1 и § 2.

Таблица 1

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Ограничения на область изменения аргумента $x \in \mathbb{R}$
1. C (const)	0	
2. x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x>0$ при $\alpha \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ при $\alpha \in \mathbb{N}$
3. a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$ $(a>0,\ a \neq 1)$
4. $\log_a \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$x \in \mathbb{R} \setminus 0$ $(a>0,\ a \neq 1)$
5. $\sin x$	$\cos x$	
6. $\cos x$	$-\sin x$	
7. $\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\quad k \in \mathbb{Z}$
8. $\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq \pi k,\quad k \in \mathbb{Z}$
9. $\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
10. $\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
11. $\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
12. $\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	
13. $\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
14. $\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	
15. $\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
16. $\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$
17. $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
18. $\operatorname{arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\lvert x \rvert > 1$
19. $\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert < 1$
20. $\operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}$	$\dfrac{1}{x^2-1}$	$\lvert x \rvert > 1$

5. Дифференцирование простейшей неявно заданной функции. Пусть $y = y(t)$ и $x = x(t)$ — дифференцируемые функции, определенные в окрестности $U(t_0)$ точки $t_0 \in \mathbb{R}$. Предположим, что функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$, определенную в окрестности $V(x_0)$ точки $x_0 = x(t_0)$. Тогда величину $y = y(t)$, зависящую от t, можно рассматривать также как функцию, неявно зависящую от x, поскольку $y(t) = y(t(x))$. Найдем производную

этой функции по x в точке x_0, предполагая, что $x'(t_0) \neq 0$. Используя теорему о дифференцировании композиции и теорему о дифференцировании обратной функции, получаем

$$y'_x\Big|_{x=x_0} = \frac{dy(t(x))}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=t_0} \cdot \frac{dt(x)}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{\dfrac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}}{\dfrac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=t_0}} = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}.$$

(Здесь использовано стандартное обозначение $f(x)|_{x=x_0} := f(x_0)$.)

Если одна и та же величина рассматривается как функция различных аргументов, то во избежание недоразумений при дифференцировании явно указывают переменную, по которой это дифференцирование проводится, что мы и сделали.

Пример 15. *Закон сложения скоростей*. Движение точки вдоль прямой вполне определяется, если в каждый момент t выбранной нами системы отсчёта времени мы знаем координату x точки в выбранной системе координат (числовой оси). Таким образом, упорядоченная пара чисел (x, t) или (t, x) определяет положение точки в пространстве и во времени. Закон движения точки запишется в виде некоторой функции $x = x(t)$.

Предположим, что движение этой же точки мы хотим описать в терминах другой системы координат $(\tilde{x}, \tilde{t})$. К примеру, новая числовая ось движется равномерно со скоростью v относительно первой (вектор скорости в данном случае можно отождествить с задающим его одним числом). Будем для простоты считать, что координаты $(0, 0)$ и в той, и в другой системе относятся к одной и той же точке или, точнее, что в момент $\tilde{t} = 0$ точка $\tilde{x} = 0$ совпадала с точкой $x = 0$, в которой часы показывали $t = 0$.

Считая время абсолютным, т. е. полагая $t = \tilde{t}$, следуя Галилею, имеем $x = \tilde{x} + vt$. В развёрнутой записи это означает, что

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} + v\tilde{t}, & \tilde{x} &= x - vt, \\ t &= \tilde{t}, & \tilde{t} &= t, \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим общую линейную связь

$$\begin{aligned} x &= \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{t}, & \tilde{x} &= \tilde{\alpha}x + \tilde{\beta}t, \\ t &= \gamma\tilde{x} + \delta\tilde{t}, & \tilde{t} &= \tilde{\gamma}x + \tilde{\delta}t, \end{aligned} \tag{5}$$

разумеется, в предположении, что она обратима, т. е. определитель матрицы коэффициентов отличен от нуля (пусть даже равен 1, как отражение равноправности систем отсчёта).

Пусть $x = x(t)$ и $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{t})$ — закон движения наблюдаемой точки, записанный в системах координат (x, t) и $(\tilde{x}, \tilde{t})$ соответственно. Тогда вторые уравнения систем (5) дадут взаимно обратные зависимости $t = t(\tilde{t})$ и $\tilde{t} = \tilde{t}(t)$.

Рассмотрим теперь вопрос о связи скоростей

$$V(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \quad \text{и} \quad \widetilde{V}(\tilde{t}) = \frac{d\tilde{x}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \dot{\tilde{x}}(\tilde{t}) \tag{6}$$

нашей точки в системах координат (x, t) и $(\tilde{x}, \tilde{t})$ соответственно.

Используя правило дифференцирования неявной функции и соотношения (5), имеем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\dfrac{dx}{d\tilde{t}}}{\dfrac{dt}{d\tilde{t}}} = \frac{\alpha \dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} + \beta}{\gamma \dfrac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} + \delta} \tag{7}$$

или

$$V(t) = \frac{\alpha \widetilde{V}(\tilde{t}) + \beta}{\gamma \widetilde{V}(\tilde{t}) + \delta}, \tag{8}$$

где t и $\tilde{t}$ — координаты одного и того же момента времени в системах (x, t) и $(\tilde{x}, \tilde{t})$. Это всегда имеется в виду при сокращённой записи

$$V = \frac{\alpha \widetilde{V} + \beta}{\gamma \widetilde{V} + \delta}, \tag{9}$$

В случае преобразований (4) Галилея из (9) получаем классический закон сложения скоростей

$$V = \widetilde{V} + v. \tag{10}$$

К сказанному сделаем теперь одно весьма ценное дополнение.

Экспериментально с достаточной степенью точности установлено (и это стало одним из постулатов специальной теории относительности), что в пустоте свет всегда распространяется с определённой скоростью c, не зависящей от состояния движения излучающего тела. Это, в частности, означает, что если в момент $t = \tilde{t} = 0$ в точке $x = \tilde{x} = 0$ происходит вспышка, то через время t в системе (x, t) свет достигнет точек с координатами x такими, что $x^2 = (ct)^2$, а в другой такой же инерциальной системе $(\tilde{x}, \tilde{t})$ этому событию будут отвечать время $\tilde{t}$ и координаты $\tilde{x}$ точек такие, что опять $\tilde{x}^2 = (c\tilde{t})^2$.

Таким образом, если $x^2 - (ct)^2 = 0$, то и $\tilde{x}^2 - (c\tilde{t})^2 = 0$, и обратно. В силу некоторых дополнительных физических соображений (связанных с однородностью и изотропностью пространства, и равноправностью инерциальных систем) следует считать, что вообще

$$x^2 - c^2t^2 = \tilde{x}^2 - c^2\tilde{t}^2, \tag{11}$$

если значения (x, t) и $(\tilde{x}, \tilde{t})$ отвечают одному и тому же событию в двух системах координат, связанных соотношениями (5). [1]

[1] Можно показать, что если линейное преобразование (5) имеет единичный якобиан и сохраняет пару прямых $x^2 - t^2 = 0$, то оно сохраняет и величину $x^2 - t^2$.

Условия (11) дают следующие соотношения на коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ преобразования (5):

$$\alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1, \quad \alpha\beta - c^2\gamma\delta = 0, \quad \beta^2 - c^2\delta^2 = -c^2. \tag{12}$$

Если бы было $c = 1$, то вместо (12) мы имели бы

$$\alpha^2 - \gamma^2 = 1, \quad \frac{\beta}{\delta} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \beta^2 - \delta^2 = -1, \tag{13}$$

откуда можно заключить, что общее (с точностью до перемен знака в парах (α, β), (γ, δ)) решение системы (13) может быть дано в виде

$$\alpha = \operatorname{ch}\varphi, \quad \gamma = \operatorname{sh}\varphi, \quad \beta = \operatorname{sh}\varphi, \quad \delta = \operatorname{ch}\varphi,$$

где φ — некоторый параметр.

Соответствующее решение системы (12) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & c\operatorname{sh}\varphi \\ \frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix} \tag{14}$$

и преобразования (5) конкретизируются

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch}\varphi\,\tilde{x} + c\operatorname{sh}\varphi\,\tilde{t}, & \tilde{x} &= \operatorname{ch}\varphi\,x - c\operatorname{sh}\varphi\,t, \\ t &= \frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi\,\tilde{x} + \operatorname{ch}\varphi\,\tilde{t}, & \tilde{t} &= -\frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi\,x + \operatorname{ch}\varphi\,t. \end{aligned} \tag{15}$$

Это — *преобразования Лоренца*.

Чтобы уяснить себе, каким образом определяется свободный параметр φ, вспомним что ось $\tilde{x}$ движется со скоростью v вдоль оси x, т. е. точка $\tilde{x} = 0$ оси $\tilde{x}$, наблюдаемая из системы (x, t), имеет скорость v. Полагая в первом из преобразований (15) $\tilde{x} = 0$, деля первое уравнение на второе, находим

$$\frac{x}{t} = v = c\operatorname{th}\varphi. \tag{16}$$

С учётом этого равенства преобразования Лоренца (15) теперь можно записать в следующей более содержательной с точки зрения физики форме:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\tilde{x} + v\tilde{t}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, & \tilde{x} &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\ t &= \frac{\frac{v}{c^2}\,\tilde{x} + \tilde{t}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, & \tilde{t} &= \frac{-\frac{v}{c^2}x + t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Сопоставляя общий закон (9) преобразования скоростей с преобразованиями Лоренца (15), получаем

$$V = \frac{\operatorname{ch}\varphi\,\widetilde{V} + c\operatorname{sh}\varphi}{\frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi\,\widetilde{V} + \operatorname{ch}\varphi},$$

или, с учётом (16),

$$V = \frac{\widetilde{V} + v}{1 + \frac{v\widetilde{V}}{c^2}}. \tag{18}$$

Чтобы выразить $\widetilde{V}$ через V, разумеется, достаточно в (18) поменять местами V и $\widetilde{V}$ и заменить v на $-v$.

Заметим, что при $|v| \ll c$ (точнее, при $c \to +\infty$) преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (4), а полученный релятивистский закон (18) преобразования скоростей переходит в классический закон сложения скоростей (10).

Физики обычно событие (x, t) записывают в виде $(c\,t, x)$, считая временну́ю переменную $\tau = ct$ первой координатой события (τ, x), а преобразования Лоренца записывают в следующем, более симметричном виде:

$$\tau = \frac{\tilde{\tau} + \frac{v}{c}\,\tilde{x}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad \tilde{\tau} = \frac{\tau - \frac{v}{c}\,x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

$$x = \frac{\tilde{x} + \frac{v}{c}\,\tilde{\tau}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \qquad \tilde{x} = \frac{x - \frac{v}{c}\,\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

6. Производные высших порядков. Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в любой точке $x \in E$, то на множестве E возникает новая функция $f' : E \to \mathbb{R}$, значение которой в точке $x \in E$ равно производной $f'(x)$ функции f в этой точке.

Функция $f' : E \to \mathbb{R}$ сама может иметь производную $(f')' : E \to \mathbb{R}$ на E, которая по отношению к исходной функции f называется *второй производной* от f и обозначается одним из символов

$$f''(x), \qquad \frac{d^2 f(x)}{dx^2},$$

а если хотят явно указать переменную дифференцирования, то в первом случае еще, например, пишут $f''_{xx}(x)$.

Определение. По индукции, если определена производная $f^{(n-1)}(x)$ порядка $n-1$ от f, то *производная порядка n* определяется формулой

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x).$$

Для производной порядка n приняты обозначения

$$f^{(n)}(x), \qquad \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Условились считать, что $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Множество всех функций $f: E \to \mathbb{R}$, имеющих на E непрерывные производные до порядка n включительно, будем обозначать символом $C^{(n)}(E, \mathbb{R})$, а когда это не ведет к недоразумению — более простыми символами $C^{(n)}(E)$ или $C^n(E, \mathbb{R})$ и $C^n(E)$ соответственно.

В частности, $C^{(0)}(E) = C(E)$ в силу принятого соглашения, что $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Рассмотрим несколько примеров вычисления производных высших порядков.

Примеры.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	…	$f^{(n)}(x)$
16.	a^x	$a^x \ln a$	$a^x \ln^2 a$	…	$a^x \ln^n a$
17.	e^x	e^x	e^x	…	e^x
18.	$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	…	$\sin(x + n\pi/2)$
19.	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	…	$\cos(x + n\pi/2)$
20.	$(1+x)^\alpha$	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	…	$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$
21.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$	…	$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
22.	$\log_a \lvert x\rvert$	$\frac{1}{\ln a}x^{-1}$	$\frac{-1}{\ln a}x^{-2}$	…	$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\ln a}x^{-n}$
23.	$\ln \lvert x\rvert$	x^{-1}	$(-1)x^{-2}$	…	$(-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$

Пример 24. *Формула Лейбница.* Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — функции, имеющие на общем множестве E производные до порядка n включительно. Тогда для n-й производной от их произведения справедлива следующая формула Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m)}. \tag{19}$$

Формула Лейбница очень похожа на формулу бинома Ньютона и на самом деле с нею непосредственно связана.

◄ При $n = 1$ формула (19) совпадает с уже установленным правилом дифференцирования произведения.

Если функции u, v имеют производные до порядка $n+1$ включительно, то, в предположении справедливости формулы (19) для порядка n, после дифференцирования ее левой и правой частей получаем

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m+1)} v^{(m)} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m+1)} = \\ &= u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{((n+1)-k)} v^{(k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{((n+1)-k)} v^{(k)}.\end{aligned}$$

Мы объединили слагаемые, содержащие одинаковые произведения производных от функций u, v, и воспользовались тем, что $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.

Таким образом, по индукции установлена справедливость формулы Лейбница. ►

Пример 25. Если $P_n(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$, то

$$\begin{aligned}
&P_n(0) = c_0, \\
&P_n'(x) = c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1} && \text{и} \quad P_n'(0) = c_1, \\
&P_n''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + \ldots + n(n-1)c_n x^{n-2} && \text{и} \quad P_n''(0) = 2!\, c_2, \\
&P_n^{(3)}(x) = 3\cdot 2c_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3} && \text{и} \quad P_n^{(3)}(0) = 3!\, c_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2c_n && \text{и} \quad P_n^{(n)}(0) = n!\, c_n, \\
&P_n^{(k)}(x) = 0 \quad \text{при } k > n.
\end{aligned}$$

Таким образом, полином $P_n(x)$ можно записать в виде

$$P_n(x) = P_n^{(0)}(0) + \frac{1}{1!}P_n^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!}P_n^{(2)}(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(0)x^n.$$

Пример 26. Используя формулу Лейбница и то обстоятельство, что производные от полинома, имеющие порядок выше его степени, тождественно равны нулю, можно найти n-ю производную функции $f(x) = x^2 \sin x$:

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sin^{(n)} x \cdot x^2 + C_n^1 \sin^{(n-1)} x \cdot 2x + C_n^2 \sin^{(n-2)} x \cdot 2 = \\
&= x^2 \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \left(-n(n-1) \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\
&= \left(x^2 - n(n-1)\right) \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) - 2nx \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Пример 27. Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найдем значения $f^{(n)}(0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поскольку $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, то $(1+x^2)f'(x) = 1$.

Применяя формулу Лейбница к последнему равенству, находим рекуррентную формулу

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0,$$

из которой можно последовательно найти все производные функции $f(x)$.

Полагая $x = 0$, получаем

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0).$$

При $n = 1$ имеем $f^{(2)}(0) = 0$, поэтому вообще $f^{(2n)}(0) = 0$. Для производных нечетного порядка имеем

$$f^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1)f^{(2m-1)}(0)$$

и, поскольку $f'(0) = 1$, получаем

$$f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)!.$$

Пример 28. *Ускорение.* Если $x = x(t)$ — зависимость от времени координаты движущейся вдоль числовой оси материальной точки, то $\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$

есть скорость точки, а тогда $\frac{d\dot{x}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$ есть ее ускорение в момент t.

Если $x(t) = \alpha t + \beta$, то $\dot{x}(t) = \alpha$, а $\ddot{x}(t) \equiv 0$, т. е. ускорение в равномерном движении равно нулю. Вскоре мы проверим, что если вторая производная функции равна нулю, то сама функция имеет вид $\alpha t + \beta$. Таким образом, в равномерных движениях и только в них ускорение равно нулю.

Но в том случае, если мы желаем, чтобы наблюдаемое из двух систем координат движущееся по инерции в пустом пространстве тело в обеих системах двигалось равномерно и прямолинейно, нужно, чтобы формулы перехода из одной инерциальной системы в другую были линейными. Именно по этой причине в примере 15 были выбраны линейные формулы (5) преобразования координат.

Пример 29. *Вторая производная простейшей неявно заданной функции.* Пусть $y = y(t)$ и $x = x(t)$ — дважды дифференцируемые функции. Предположим, что функция $x = x(t)$ имеет дифференцируемую обратную функцию $t = t(x)$, тогда величину $y(t)$ можно считать зависящей неявно от x, ибо $y = y(t) = y(t(x))$. Найдем вторую производную y''_{xx} в предположении, что $x'(t) \neq 0$.

По правилу дифференцирования такой функции, рассмотренному в пункте 5, имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

поэтому

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^2}}{x'_t} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Заметим, что явные выражения всех участвующих здесь функций, в том числе и y''_{xx}, зависят от t, но они дают возможность получить значение y''_{xx} в конкретной точке x после подстановки вместо t значения $t = t(x)$, отвечающего заданному значению x.

Например, если $y = e^t$, $x = \ln t$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t}{1/t} = te^t, \qquad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{e^t + te^t}{1/t} = t(t+1)e^t.$$

Мы специально взяли простой пример, в котором можно явно выразить t через x, $t = e^x$, и, подставив $t = e^x$ в $y(t) = e^t$, найти явную зависимость $y = e^{e^x}$ от x. Дифференцируя последнюю функцию, можно проверить правильность полученных выше результатов.

Ясно, что так можно искать производные любого порядка, последовательно применяя формулу

$$y^{(n)}_{x^n} = \frac{\left(y^{(n-1)}_{x^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}.$$

Задачи и упражнения

1. Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — заданные вещественные числа. Укажите многочлен $P_n(x)$ степени n, который в фиксированной точке $x_0 \in \mathbb{R}$ имеет производные $P_n^{(k)}(x_0) = \alpha_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

2. Вычислите $f'(x)$, если

a) $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } xa \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$

c) Проверьте, что функция из задачи a) бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем $f^{(n)}(0) = 0$.

d) Покажите, что производная функции из задачи b) определена на $\mathbb{R}$, но не является непрерывной функцией на $\mathbb{R}$.

e) Покажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{(1-x)^2}\right) & \text{при } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{при } 1 \leqslant |x| \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$.

3. Пусть $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Покажите, что при $x \neq 0$

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

4. Пусть f — дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Покажите, что

a) если f — четная, то f' — нечетная функция;

b) если f — нечетная, то f' — четная функция;

c) (f' нечетна) $\Longleftrightarrow$ (f четна).

5. Покажите, что

a) функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 в том и только в том случае, когда $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$, где $\varphi(x)$ — функция, непрерывная в x_0 (и в таком случае $\varphi(x_0) = f'(x_0)$);

b) если $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$ и $\varphi \in C^{(n-1)}(U(x_0))$, где $U(x_0)$ — окрестность точки x_0, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f^{(n)}(x_0)$ порядка n.

6. Приведите пример, показывающий, что в теореме 3 условие непрерывности f^{-1} в точке y_0 не является излишним.

7. a) Два тела с массами m_1 и m_2 соответственно перемещаются в пространстве только под действием сил взаимного притяжения. Используя законы Ньютона (формулы (1) и (2) из § 1), проверьте, что величина

$$E = \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\right) + \left(-G\frac{m_1 m_2}{r}\right) =: K + U,$$

где v_1 и v_2 — скорости тел, а r — расстояние между ними, не меняется при таком движении.

b) Дайте физическую интерпретацию величины $E = K + U$ и ее составляющих.

c) Распространите результат на случай движения n тел.

§ 3. Основные теоремы дифференциального исчисления

1. Лемма Ферма и теорема Ролля

Определение 1. Точка $x_0 \in E \subset \mathbb{R}$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*), а значение функции в ней — *локальным максимумом* (*минимумом*) функции $f : E \to \mathbb{R}$, если существует окрестность $U_E(x_0)$ точки x_0 в множестве E такая, что в любой точке $x \in U_E(x_0)$ имеем $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно, $f(x) \geqslant f(x_0)$).

Определение 2. Если в любой точке $x \in U_E(x_0) \setminus x_0 = \overset{\circ}{U}_E(x_0)$ имеет место строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), то точка $x_0 \in E$ называется *точкой строгого локального максимума* (*минимума*), а значение функции в ней — *строгим локальным максимумом* (*минимумом*) функции $f : E \to \mathbb{R}$.

Определение 3. Точки локального максимума и минимума называются точками *локального экстремума*, а значения функции в них — *локальными экстремумами функции*.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -1 \leqslant x < 2, \\ 4, & \text{если } 2 \leqslant x \end{cases}$$



Рис. 20

(рис. 20). Для этой функции

$x = -1$ — точка строгого локального максимума;

$x = 0$ — точка строгого локального минимума;

$x = 2$ — точка локального максимума;

$x > 2$ — точки экстремума, являющиеся одновременно точками и локального максимума, и локального минимума, поскольку здесь функция локально постоянна.

Пример 2. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на множестве $E = \mathbb{R} \setminus 0$.

Точки $x = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, являются точками строгого локального максимума, а точки $x = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, — точками строгого локального минимума для $f(x)$ (см. рис. 12).

Определение 4. Точку $x_0 \in E$ экстремума функции $f : E \to \mathbb{R}$ будем называть точкой *внутреннего экстремума*, если x_0 является предельной точкой как для множества $E_- = \{x \in E \mid x < x_0\}$, так и для множества $E_+ = \{x \in E \mid x > x_0\}$.

В примере 2 все точки экстремума являются точками внутреннего экстремума, а в примере 1 точка $x = -1$ не является точкой внутреннего экстремума.

Лемма 1 (Ферма). *Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке внутреннего экстремума $x_0 \in E$, то ее производная в этой точке равна нулю*: $f'(x_0) = 0$.

◄ По определению дифференцируемости функции в точке x_0

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\alpha(x_0;h)h,$$

где $\alpha(x_0;h)\to 0$ при $h\to 0$, $x_0+h\in E$.

Перепишем это соотношение в виде

$$f(x_0+h)-f(x_0)=[f'(x_0)+\alpha(x_0;h)]\,h. \qquad (1)$$

Поскольку x_0 — точка экстремума, то левая часть равенства (1) либо неотрицательна, либо неположительна одновременно для всех достаточно близких к нулю значений h таких, что $x_0+h\in E$.

Если бы было $f'(x_0)\neq 0$, то при h достаточно близких к нулю величина $f'(x_0)+\alpha(x_0;h)$ имела бы тот же знак, что и $f'(x_0)$, ибо $\alpha(x_0;h)\to 0$ при $h\to\to 0$, $x_0+h\in E$.

Что же касается самого значения h, то оно может быть как положительным, так и отрицательным, коль скоро x_0 — точка внутреннего экстремума.

Таким образом, предположив, что $f'(x_0)\neq 0$, мы получаем, что правая часть (1) меняет знак при изменении знака h (если h достаточно близко к нулю), в то время как левая часть (1) не может менять знака (если h достаточно близко к нулю). Это противоречие завершает доказательство. ►

Замечания к лемме Ферма. 1° Лемма Ферма дает, таким образом, необходимое условие внутреннего экстремума дифференцируемой функции. Для невнутренних экстремумов (как точка $x=-1$ в примере 1) утверждение о том, что $f'(x_0)=0$, вообще говоря, неверно.

2° Геометрически лемма вполне очевидна, ибо она утверждает, что в точке экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику горизонтальна (ведь $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной к оси Ox).

3° Физически лемма означает, что при движении по прямой в момент начала возврата (экстремум!) скорость равна нулю.

Из доказанной леммы и теоремы о максимуме (минимуме) функции, непрерывной на отрезке, вытекает следующее

Утверждение 1 (теорема Ролля[1]). *Если функция $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в интервале $]a,b[$ и $f(a)=f(b)$, то найдется точка $\xi\in\,]a,b[$ такая, что $f'(\xi)=0$.*

◄ Поскольку функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдутся точки $x_m, x_M\in[a,b]$, в которых она принимает соответственно минимальное и максимальное из своих значений на этом отрезке. Если $f(x_m)=f(x_M)$, то функция постоянна на $[a,b]$, и поскольку в этом случае $f'(x)\equiv 0$, то утверждение, очевидно, выполнено. Если же $f(x_m)<f(x_M)$, то, поскольку $f(a)==f(b)$, одна из точек x_m, x_M обязана лежать в интервале $]a,b[$. Ее мы и обозначим через ξ. По лемме Ферма $f'(\xi)=0$. ►

---

[1]М. Ролль (1652—1719) — французский математик.

2. Теоремы Лагранжа и Коши о конечном приращении. Следующее утверждение является одним из наиболее часто используемых и важных средств исследования числовых функций.

Теорема 1 (теорема Лагранжа о конечном приращении). *Если функция* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и дифференцируема в интервале* $]a,b[$, *то найдется точка* $\xi \in]a,b[$ *такая, что*

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).} \tag{2}$$

◄ Для доказательства рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

которая, очевидно, непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема в интервале $]a,b[$ и на его концах принимает равные значения: $F(a)=F(b)=f(a)$. Применяя к $F(x)$ теорему Ролля, найдем точку $\xi \in]a,b[$, в которой

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0. \ ►$$

Замечания к теореме Лагранжа. 1° Геометрически теорема Лагранжа означает (рис. 21), что в некоторой точке $(\xi, f(\xi))$, где $\xi \in]a,b[$, касательная к графику функции будет параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, ибо угловой коэффициент последней равен $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

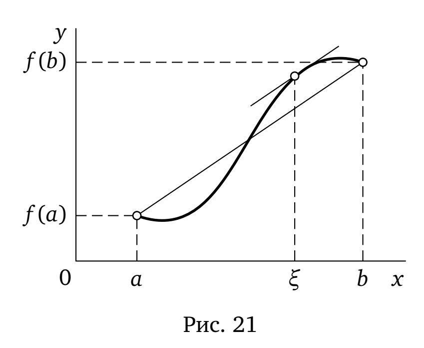


Рис. 21

2° Если x интерпретировать как время, а $f(b)-f(a)$ — как величину перемещения за время $b-a$ частицы, движущейся вдоль прямой, то теорема Лагранжа означает, что скорость $f'(x)$ частицы в некоторый момент $\xi \in]a,b[$ такова, что если бы в течение всего промежутка времени $[a,b]$ частица двигалась с постоянной скоростью $f'(\xi)$, то она сместилась бы на ту же величину $f(b)-f(a)$. Величину $f'(\xi)$ естественно считать средней скоростью движения в промежутке $[a,b]$.

3° Отметим, однако, что при движении не по прямой средней скорости в смысле замечания 2° может не быть. Действительно, пусть, например, частица движется по окружности единичного радиуса с постоянной угловой скоростью $\omega=1$. Закон ее движения, как мы знаем, можно записать в виде

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t, \sin t).$$

Тогда

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{v}(t)=(-\sin t, \cos t)$$

и $|\boldsymbol{v}|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$.

В моменты $t=0$ и $t=2\pi$ частица находится в одной и той же точке плоскости $\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{r}(2\pi)=(1,0)$, и равенство

$$\boldsymbol{r}(2\pi)-\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{v}(\xi)(2\pi-0)$$

означало бы, что $\boldsymbol{v}(\xi)=0$, но это невозможно.

Однако мы сознаем, что зависимость между перемещением за некоторый промежуток времени и скоростью движения все же имеется. Она состоит в том, что даже вся длина L пройденного пути не может превышать максимальной по величине скорости, умноженной на время в пути. Сказанное можно записать в следующей более точной форме:

$$\boxed{|\boldsymbol{r}(b)-\boldsymbol{r}(a)| \leqslant \sup_{t\in]a,b[} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)||b-a|.} \tag{3}$$

Как будет в свое время показано, это естественное неравенство действительно всегда справедливо. Его тоже называют теоремой Лагранжа о конечном приращении, а формулу (2), справедливую только для числовых функций, часто называют теоремой Лагранжа *о среднем значении* (роль среднего в данном случае играет как величина $f'(\xi)$ скорости, так и точка ξ, лежащая между a и b).

4° Теорема Лагранжа важна тем, что она связывает приращение функции на конечном отрезке с производной функции на этом отрезке. До сих пор мы не имели такой теоремы о конечном приращении и характеризовали только локальное (бесконечно малое) приращение функции через производную или дифференциал в фиксированной точке.

Следствия теоремы Лагранжа

Следствие 1 (признак монотонности функции). *Если в любой точке некоторого интервала производная функции неотрицательна* (*положительна*), *то функция не убывает* (*возрастает*) *на этом интервале.*

◄ Действительно, если x_1, x_2 — две точки нашего интервала и $x_1<x_2$, т. е. $x_2-x_1>0$, то по формуле (2)

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1), \quad \text{где } x_1<\xi<x_2,$$

и, таким образом, знак разности, стоящей в левой части равенства, совпадает со знаком $f'(\xi)$. ►

Разумеется, аналогичное утверждение можно высказать о невозрастании (убывании) функции с неположительной (отрицательной) производной.

Замечание. На основании теоремы об обратной функции и следствия 1, в частности, можно заключить, что если на каком-то промежутке I числовая функция $f(x)$ имеет положительную или отрицательную производную, то функция f непрерывна на I, монотонна на I, имеет обратную функцию f^{-1}, определенную на промежутке $I'=f(I)$ и дифференцируемую на нем.

Следствие 2 (критерий постоянства функции). *Непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция постоянна на нем тогда и только тогда, когда ее производная равна нулю в любой точке отрезка* $[a, b]$ (*или хотя бы интервала* $]a, b[$).

◄ Интерес представляет только доказательство того факта, что если $f'(x) \equiv \equiv 0$ на $]a, b[$, то для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ имеет место равенство $f(x_1) = f(x_2)$. Но это вытекает из теоремы Лагранжа, по которой

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

ибо ξ лежит между x_1 и x_2, т. е. $\xi \in]a, b[$ и $f'(\xi) = 0$. ►

Замечание. Отсюда, очевидно, можно сделать следующий (как мы увидим, очень важный для интегрального исчисления) вывод: *если производные* $F_1'(x)$, $F_2'(x)$ *двух функций* $F_1(x)$, $F_2(x)$ *совпадают на некотором промежутке, т. е.* $F_1'(x) \equiv F_2'(x)$, *то на этом промежутке разность* $F_1(x) - F_2(x)$ *есть постоянная функция.*

Полезным обобщением теоремы Лагранжа, которое тоже основано на теореме Ролля, является следующее

Утверждение 2 (теорема Коши о конечном приращении). *Пусть* $x = = x(t)$ *и* $y = y(t)$ — *функции, непрерывные на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *и дифференцируемые в интервале* $]\alpha, \beta[$.

Тогда найдется точка $\tau \in]\alpha, \beta[$ *такая, что*

$$x'(\tau)(y(\beta) - y(\alpha)) = y'(\tau)(x(\beta) - x(\alpha)).$$

Если к тому же $x'(t) \neq 0$ *при любом* $t \in]\alpha, \beta[$, *то* $x(\alpha) \neq x(\beta)$ *и справедливо равенство*

$$\frac{y(\beta) - y(\alpha)}{x(\beta) - x(\alpha)} = \frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}. \tag{4}$$

◄ Функция $F(t) = x(t)(y(\beta) - y(\alpha)) - y(t)(x(\beta) - x(\alpha))$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля на отрезке $[\alpha, \beta]$, поэтому найдется точка $\tau \in]\alpha, \beta[$, в которой $F'(\tau) = 0$, что равносильно доказываемому равенству. Чтобы получить из него соотношение (4), остается заметить, что если $x'(t) \neq 0$ на $]\alpha, \beta[$, то по той же теореме Ролля $x(\alpha) \neq x(\beta)$. ►

Замечания к теореме Коши. 1° Если пару функций $x(t)$, $y(t)$ рассматривать как закон движения частицы, то $(x'(t), y'(t))$ есть вектор ее скорости в момент t, а $(x(\beta) - x(\alpha), y(\beta) - y(\alpha))$ есть вектор ее смещения за промежуток времени $[\alpha, \beta]$, и теорема утверждает, что в некоторый момент $\tau \in [\alpha, \beta]$ эти векторы коллинеарны. Однако этот факт, относящийся к движению в плоскости, является таким же приятным исключением, каким является теорема о средней скорости в случае движения по прямой. В самом деле, представьте себе частицу, равномерно поднимающуюся по винтовой линии. Ее скорость составляет постоянный ненулевой угол с вертикалью, в то время как вектор смещения может быть и вертикальным (один виток).

2° Формулу Лагранжа можно получить из формулы Коши, если в последней положить $x = x(t) = t$, $y(t) = y(x) = f(x)$, $\alpha = a$, $\beta = b$.

3. Формула Тейлора. Из той части дифференциального исчисления, которая уже изложена к настоящему моменту, могло возникнуть верное представление о том, что чем больше производных (включая производную нулевого порядка) совпадает у двух функций в некоторой точке, тем лучше эти функции аппроксимируют друг друга в окрестности этой точки. Мы в основном интересовались и сейчас будем интересоваться приближением функции в окрестности некоторой точки с помощью многочлена $P_n(x) = P_n(x_0; x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \ldots + c_n(x-x_0)^n$. Нам известно (см. пример 25 из § 2, п. 6), что алгебраический полином можно представить в виде

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

т. е. $c_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$. В этом легко убедиться непосредственно.

Таким образом, если нам будет дана функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 все производные до порядка n включительно, то мы можем немедленно выписать полином

$$P_n(x_0; x) = P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (5)$$

производные которого до порядка n включительно в точке x_0 совпадают с производными соответствующего порядка функции $f(x)$ в точке x_0.

Определение 5. Алгебраический полином, заданный соотношением (5), называется *полиномом Тейлора*[1] *порядка n функции $f(x)$ в точке x_0.*

Нас будет интересовать величина

$$f(x) - P_n(x_0; x) = r_n(x_0; x) \qquad (6)$$

уклонения полинома $P_n(x)$ от функции $f(x)$, называемая часто *остатком*, точнее, *n-м остатком* или *n-м остаточным членом формулы Тейлора*:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0; x).} \qquad (7)$$

Само по себе равенство (7), конечно, не представляет интереса, если о функции $r_n(x_0; x)$ не известно ничего, кроме ее определения (6).

Сейчас мы воспользуемся довольно искусственным приемом для получения информации об остаточном члене. Более естественный путь к этому даст интегральное исчисление.

Теорема 2. *Если на отрезке с концами x_0, x функция f непрерывна вместе с первыми n своими производными, а во внутренних точках этого отрезка она имеет производную порядка $n+1$, то при любой функции φ, непрерывной на этом отрезке и имеющей отличную от нуля производную в его*

[1] Б. Тейлор (1685—1731) — английский математик.

внутренних точках, найдется точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая, что

$$\boxed{r_n(x_0; x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.} \tag{8}$$

◄ На отрезке I с концами x_0, x рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - P_n(t; x) \tag{9}$$

от аргумента t. Запишем определение $F(t)$ подробнее:

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right]. \tag{10}$$

Из определения функции $F(t)$ и условий теоремы видно, что F непрерывна на отрезке I и дифференцируема в его внутренних точках, причем

$$F'(t) = -\left[f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \right.$$
$$\left. - \ldots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \right] = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Применяя к паре функций $F(t)$, $\varphi(t)$ на отрезке I теорему Коши (см. соотношение (4)), находим точку ξ между x_0 и x, в которой

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Подставляя сюда выражение для $F'(\xi)$ и замечая из сопоставления формул (6), (9) и (10), что $F(x) - F(x_0) = 0 - F(x_0) = -r_n(x_0; x)$, получаем формулу (8). ►

Полагая в (8) $\varphi(t) = x - t$, получаем

Следствие 1 (формула Коши остаточного члена).

$$\boxed{r_n(x_0; x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0).} \tag{11}$$

Особенно изящная формула получается, если положить в соотношении (8) $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$:

Следствие 2 (формула Лагранжа остаточного члена).

$$\boxed{r_n(x_0; x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.} \tag{12}$$

Отметим, что формулу (7) Тейлора при $x_0 = 0$ часто называют *формулой Маклорена*[1].

Рассмотрим примеры.

---

[1] К. Маклорен (1698—1746) — английский математик.

Пример 3. Для функции $f(x)=e^x$ при $x_0=0$ формула Тейлора имеет вид

$$e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+r_n(0;x), \tag{13}$$

и на основании равенства (12) можно считать, что

$$r_n(0;x)=\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}\cdot x^{n+1},$$

где $|\xi|<|x|$.

Таким образом,

$$|r_n(0;x)|=\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}\cdot|x|^{n+1}<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}. \tag{14}$$

Но при любом фиксированном $x\in\mathbb{R}$, если $n\to\infty$, величина $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, как нам известно (см. пример 12 из гл. III, § 1, п. 3b), стремится к нулю. Значит, из оценки (14) и определения суммы ряда вытекает, что для $x\in\mathbb{R}$

$$e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots \tag{15}$$

Пример 4. Аналогично получаем разложение функции a^x для любого a, $0<a$, $a\neq 1$:

$$a^x = 1+\frac{\ln a}{1!}x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\ldots+\frac{\ln^n a}{n!}x^n+\ldots$$

Пример 5. Пусть $f(x)=\sin x$. Нам известно (см. пример 18 из § 2, п. 6), что $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$, $n\in\mathbb{N}$, поэтому из формулы (12) Лагранжа при $x_0=$ $=0$ и любом $x\in\mathbb{R}$ находим

$$r_n(0;x)=\frac{1}{(n+1)!}\sin\left(\xi+\frac{\pi}{2}(n+1)\right)x^{n+1}, \tag{16}$$

откуда следует, что для любого фиксированного значения $x\in\mathbb{R}$ величина $r_n(0;x)$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Таким образом, при любом $x\in\mathbb{R}$ справедливо разложение

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots \tag{17}$$

Пример 6. Аналогично, для функции $f(x)=\cos x$ получаем

$$r_n(0;x)=\frac{1}{(n+1)!}\cos\left(\xi+\frac{\pi}{2}(n+1)\right)x^{n+1} \tag{18}$$

и

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots \tag{19}$$

Пример 7. Поскольку $\operatorname{sh}' x=\operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch}' x=\operatorname{sh} x$, для функции $f(x)=\operatorname{sh} x$ при $x_0=0$ из формулы (12) получаем

$$r_n(0;x)=\frac{1}{(n+1)!}\varphi(\xi)x^{n+1},$$

где $\varphi(\xi)=\operatorname{sh}\xi$, если n четно, и $\varphi(\xi)=\operatorname{ch}\xi$, если n нечетно. В любом случае $|\varphi(\xi)|\leqslant\max\{|\operatorname{sh} x|, |\operatorname{ch} x|\}=\operatorname{ch} x$, ибо $|\xi|<|x|$. Значит, для любого фиксиро-

ванного значения $x \in \mathbb{R}$ выполняется $r_n(0;x) \to 0$ при $n \to \infty$, и мы получаем разложение

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots, \tag{20}$$

справедливое для любого $x \in \mathbb{R}$.

Пример 8. Аналогично получаем разложение

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots, \tag{21}$$

справедливое для любого значения $x \in \mathbb{R}$.

Пример 9. Для функции $f(x) = \ln(1+x)$ имеем $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, поэтому формула Тейлора (7) при $x_0 = 0$ для этой функции имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + r_n(0;x). \tag{22}$$

На сей раз представим $r_n(0;x)$ по формуле Коши (11):

$$r_n(0;x) = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}}(x-\xi)^n x,$$

или

$$r_n(0;x) = (-1)^n\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n \frac{x}{1+\xi}, \tag{23}$$

где точка ξ лежит между 0 и x.

Если $|x| < 1$, то из условия, что ξ лежит между 0 и x, следует, что

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \frac{|x|-|\xi|}{|1+\xi|} \leqslant \frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|} = 1 - \frac{1-|x|}{1-|\xi|} \leqslant 1 - \frac{1-|x|}{1-|0|} = |x|. \tag{24}$$

Таким образом, при $|x| < 1$

$$|r_n(0;x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}, \tag{25}$$

и, следовательно, при $|x| < 1$ справедливо разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots \tag{26}$$

Заметим, что вне отрезка $|x| \leqslant 1$ ряд, стоящий справа в (26), всюду расходится, так как его общий член не стремится к нулю, если $|x| > 1$.

Пример 10. Если $f(x) = (1+x)^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, то $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot \ldots$ $\ldots \cdot (\alpha - n + 1)(1+x)^{\alpha-n}$, поэтому формула Тейлора (7) при $x_0 = 0$ для этой функции имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(0;x). \tag{27}$$

Используя формулу Коши (11), находим

$$r_n(0;x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}(x-\xi)^n x, \tag{28}$$

где ξ лежит между 0 и x.

Если $|x|<1$, то, используя оценку (24), имеем

$$|r_n(0;x)| \leqslant \left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\ldots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|(1+\xi)^{\alpha-1}|x|^{n+1}. \quad (29)$$

При увеличении n на единицу правая часть неравенства (29) умножается на $\left|\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x\right|$. Но поскольку $|x|<1$, то при достаточно больших значениях n, независимо от значения α, будем иметь $\left|\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x\right|<q<1$, если $|x|<q<1$.

Отсюда следует, что при любом $\alpha\in\mathbb{R}$ и любом x из интервала $|x|<1$ выполнено $r_n(0;x)\to 0$, когда $n\to\infty$; поэтому на интервале $|x|<1$ справедливо полученное Ньютоном разложение (*бином Ньютона*)

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (30)$$

Заметим, что, как следует из признака Даламбера (см. гл. III, § 1, п. 4b), при $|x|>1$ ряд (30) вообще расходится, если только $\alpha\notin\mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь особо случай, когда $\alpha=n\in\mathbb{N}$.

В этом случае функция $f(x)=(1+x)^\alpha=(1+x)^n$ является полиномом степени n, и поэтому все ее производные порядка выше чем n равны нулю. Таким образом, формула Тейлора (7) и, например, формула Лагранжа (12) позволяют записать следующее равенство:

$$(1+x)^n = 1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{n!}x^n, \quad (31)$$

представляющее собой известную из школы формулу бинома Ньютона для натурального показателя:

$$(1+x)^n = 1+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n.$$

Итак, мы определили формулу Тейлора (7) и получили вид (8), (11), (12) остаточного члена формулы Тейлора. Мы получили соотношения (14), (16), (18), (25), (29), позволяющие оценивать погрешность вычисления важных элементарных функций по формуле Тейлора. Наконец, мы получили разложения этих функций в степенные ряды.

Определение 6. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные любого порядка $n\in\mathbb{N}$, то ряд

$$f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\ldots$$

называется *рядом Тейлора* функции f в точке x_0.

Не следует думать, что ряд Тейлора каждой бесконечно дифференцируемой функции сходится в некоторой окрестности точки x_0, ибо для любой последовательности $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ чисел можно построить (это не совсем просто) функцию $f(x)$ такую, что $f^{(n)}(x_0)=c_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Не следует также думать, что если ряд Тейлора сходится, то он обязательно сходится к породившей его функции. Сходимость ряда Тейлора к породив-

шей его функции имеет место только для так называемых *аналитических функций.*

Вот пример Коши неаналитической функции:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0. \end{cases}$$

Исходя из определения производной и того, что $x^k e^{-1/x^2}\to 0$ при $x\to 0$ независимо от значения k (см. пример 30 из § 2 гл. III), можно проверить, что $f^{(n)}(0)=0$ для $n=0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, ряд Тейлора в данном случае состоит только из нулевых членов и его сумма тождественно равна нулю, в то время как $f(x)\neq 0$ при $x\neq 0$.

В заключение остановимся на локальном варианте формулы Тейлора.

Вернемся снова к задаче о локальном приближении функции $f\colon E\to\mathbb{R}$ полиномом, которую мы начали обсуждать в § 1, п. 3. Мы хотим подобрать полином $P_n(x_0; x)=c_0+c_1(x-x_0)+\ldots+c_n(x-x_0)^n$ так, чтобы иметь

$$f(x)=P_n(x_0; x)+o((x-x_0)^n) \quad \text{при } x\to x_0,\ x\in E,$$

или, подробнее,

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\ldots+c_n(x-x_0)^n+ \\ +o((x-x_0)^n) \quad \text{при } x\to x_0,\ x\in E. \quad (32)$$

Сформулируем в явном виде по существу уже доказанное

Утверждение 3. *Если полином $P_n(x_0; x)=c_0+c_1(x-x_0)+\ldots+c_n(x-x_0)^n$, удовлетворяющий условию* (32), *существует, то он единственный.*

◄ Действительно, из условия (32) последовательно и вполне однозначно (в силу единственности предела) находятся коэффициенты полинома

$$c_0=\lim_{E\ni x\to x_0} f(x),$$

$$c_1=\lim_{E\ni x\to x_0}\frac{f(x)-c_0}{x-x_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_n=\lim_{E\ni x\to x_0}\frac{f(x)-[c_0+\ldots+c_{n-1}(x-x_0)^{n-1}]}{(x-x_0)^n}. \ ►$$

Докажем теперь следующее

Утверждение 4 (локальная формула Тейлора). *Пусть E — отрезок с концом $x_0\in\mathbb{R}$. Если функция $f\colon E\to\mathbb{R}$ имеет в точке x_0 все производные $f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$ до порядка n включительно, то справедливо следующее представление*:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+ \\ +o((x-x_0)^n) \quad \textit{при } x\to x_0,\ x\in E. \quad (33)$$

Таким образом, задачу локального приближения дифференцируемой функции решает полином Тейлора соответствующего порядка.

Поскольку полином Тейлора $P_n(x_0; x)$ строится из условия совпадения всех его производных до порядка n включительно с производными соответствующего порядка функции f в точке x_0, то $f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0; x_0) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и справедливость формулы (33) устанавливает следующая

Лемма 2. *Если функция $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, определенная на отрезке E с концом x_0, такова, что она имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно и $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$, то $\varphi(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$, $x \in E$.*

◄ При $n = 1$ утверждение вытекает из определения дифференцируемости функции φ в точке x_0, в силу которого

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{при } x \to x_0,\ x \in E,$$

и, поскольку $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$, имеем

$$\varphi(x) = o(x - x_0) \quad \text{при } x \to x_0,\ x \in E.$$

Предположим, что утверждение доказано для порядков $n = k - 1 \geqslant 1$. Покажем, что тогда оно справедливо также для порядка $n = k \geqslant 2$.

Заметим предварительно, что поскольку

$$\varphi^{(k)}(x_0) = (\varphi^{(k-1)})'(x_0) = \lim_{E \ni x \to x_0} \frac{\varphi^{(k-1)}(x) - \varphi^{(k-1)}(x_0)}{x - x_0},$$

то существование $\varphi^{(k)}(x_0)$ предполагает, что функция $\varphi^{(k-1)}(x)$ определена на E хотя бы вблизи точки x_0. Уменьшая, если нужно, отрезок E, можно заранее считать, что функции $\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(k-1)}(x)$, где $k \geqslant 2$, определены на всем отрезке E с концом x_0. Поскольку $k \geqslant 2$, то функция $\varphi(x)$ имеет на E производную $\varphi'(x)$ и по условию

$$(\varphi')'(x_0) = \ldots = (\varphi')^{(k-1)}(x_0) = 0.$$

Таким образом, по предположению индукции

$$\varphi'(x) = o((x - x_0)^{k-1}) \quad \text{при } x \to x_0,\ x \in E.$$

Тогда, используя теорему Лагранжа, получаем

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0) = \alpha(\xi)(\xi - x_0)^{k-1}(x - x_0),$$

где ξ — точка, лежащая между x_0 и x, т. е. $|\xi - x_0| < |x - x_0|$, а $\alpha(\xi) \to 0$ при $\xi \to E$, $\xi \in E$. Значит, при $x \to x_0$, $x \in E$ одновременно будем иметь $\xi \to E$, $\xi \in E$ и $\alpha(\xi) \to 0$, и поскольку

$$|\varphi(x)| \leqslant |\alpha(\xi)||x - x_0|^{k-1}|x - x_0|,$$

то проверено, что

$$\varphi(x) = o((x - x_0)^k) \quad \text{при } x \to x_0,\ x \in E.$$

Таким образом, утверждение леммы 2 проверено принципом математической индукции. ►

Соотношение (33) называется *локальной формулой Тейлора*, поскольку указанный в нем вид остаточного члена (так называемая *форма Пеано*)

$$r_n(x_0; x) = o((x-x_0)^n) \tag{34}$$

позволяет делать заключения только об асимптотическом характере связи полинома Тейлора и функции при $x \to x_0$, $x \in E$.

Формула (33) удобна, таким образом, при вычислении пределов и описании асимптотики функции при $x \to x_0$, $x \in E$, но она не может служить для приближенного вычисления значений функции до тех пор, пока нет фактической оценки величины $r_n(x_0; x) = o((x-x_0)^n)$.

Подведем итоги. Мы определили полином Тейлора

$$P_n(x_0; x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

написали формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0; x)$$

и получили следующие ее важнейшие конкретизации:

Если f имеет производную порядка $n+1$ в интервале с концами x_0, x, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{35}$$

где ξ — точка, лежащая между x_0 и x.

Если f имеет в точке x_0 все производные до порядка $n \geqslant 1$ включительно, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n). \tag{36}$$

Соотношение (35), называемое *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*, очевидно, является обобщением теоремы Лагранжа, в которую оно превращается при $n = 0$.

Соотношение (36), называемое *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*, очевидно, является обобщением определения дифференцируемости функции в точке, в которое оно переходит при $n = 1$.

Заметим, что формула (35) практически всегда более содержательна, ибо, с одной стороны, как мы видели, она позволяет оценивать абсолютную величину остаточного члена, а с другой, например, при ограниченности $f^{(n+1)}(x)$ в окрестности x_0 из нее вытекает также асимптотическая формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + O((x-x_0)^{n+1}). \tag{37}$$

Так что для бесконечно дифференцируемых функций, с которыми в подавляющем большинстве случаев имеет дело классический анализ, формула (35) содержит в себе локальную формулу (36).

В частности, на основании формулы (37) и разобранных выше примеров 3—10 можно теперь выписать следующую таблицу асимптотических формул при $x \to 0$:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + O(x^{n+1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+2}),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}),$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + O(x^{2n+2}),$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + O(x^{n+1}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1}).$$

Рассмотрим теперь еще некоторые примеры использования формулы Тейлора.

Пример 11. Напишем полином, позволяющий вычислять значения функции $\sin x$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ с абсолютной погрешностью, не превышающей 10^{-3}.

В качестве такого многочлена можно взять тейлоровский многочлен подходящей степени, получаемый разложением функции $\sin x$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Поскольку

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + 0 \cdot x^{2n+2} + r_{2n+2}(0; x),$$

где по формуле Лагранжа

$$r_{2n+2}(0; x) = \frac{\sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(2n+3)\right)}{(2n+3)!}x^{2n+3},$$

то при $|x| \leqslant 1$

$$|r_{2n+2}(0; x)| \leqslant \frac{1}{(2n+3)!}.$$

Но $\frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-3}$ при $n \geqslant 2$. Таким образом, с нужной точностью на отрезке $|x| \leqslant 1$ имеем $\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$.

Пример 12. Покажем, что $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}' x &= \cos^{-2} x, \\ \operatorname{tg}'' x &= 2\cos^{-3} x \sin x, \\ \operatorname{tg}''' x &= 6\cos^{-4} x \sin^2 x + 2\cos^{-2} x. \end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}' 0 = 1$, $\operatorname{tg}'' 0 = 0$, $\operatorname{tg}''' 0 = 2$ и написанное соотношение следует из локальной формулы Тейлора.

Пример 13. Пусть $\alpha > 0$. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{1}{n^\alpha}$.

При $\alpha > 0$ $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$, когда $n \to \infty$. Оценим порядок члена ряда

$$\ln\cos\frac{1}{n^\alpha} = \ln\left(1 - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Таким образом, мы имеем знакопостоянный ряд, члены которого эквивалентны членам ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n^{2\alpha}}$. Поскольку последний ряд сходится только при $\alpha > \frac{1}{2}$, то в указанной области $\alpha > 0$ исходный ряд сходится лишь при $\alpha > \frac{1}{2}$ (см. задачу 16b)).

Пример 14. Покажем, что $\ln\cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + O(x^8)$ при $x \to 0$.

На сей раз, вместо того чтобы вычислять подряд шесть производных, мы воспользуемся уже известными разложениями $\cos x$ при $x \to 0$ и $\ln(1+u)$ при $u \to 0$:

$$\begin{aligned} \ln\cos x &= \ln\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + O(x^8)\right) = \ln(1+u) = \\ &= u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + O(u^4) = \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + O(x^8)\right) - \\ &- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2!)^2}x^4 - 2\cdot\frac{1}{2!\,4!}x^6 + O(x^8)\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{(2!)^3}x^6 + O(x^8)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + O(x^8). \end{aligned}$$

Пример 15. Найдем значения первых шести производных функции $\ln\cos x$ при $x = 0$.

Имеем $(\ln\cos)' x = \frac{-\sin x}{\cos x}$, и потому ясно, что в нуле данная функция имеет производные любого порядка, ибо $\cos 0 \neq 0$. Мы не станем искать функциональные выражения этих производных, а воспользуемся единственностью полинома Тейлора и результатом предыдущего примера.

Если

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + o(x^n) \quad \text{при } x \to 0,$$

то

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{и} \quad f^{(k)}(0) = k!\, c_k.$$

Таким образом, в нашем случае получаем

$$(\ln\cos)(0)=0,\quad (\ln\cos)'(0)=0,\quad (\ln\cos)''(0)=-\frac{1}{2}\cdot 2!,$$
$$(\ln\cos)^{(3)}(0)=0,\quad (\ln\cos)^{(4)}(0)=-\frac{1}{12}\cdot 4!,$$
$$(\ln\cos)^{(5)}(0)=0,\quad (\ln\cos)^{(6)}(0)=-\frac{1}{45}\cdot 6!.$$

Пример 16. Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая в точке $x_0=0$ функция, и пусть известно разложение

$$f'(x)=c_0'+c_1'x+\ldots+c_n'x^n+O(x^{n+1})$$

ее производной в окрестности нуля. Тогда из единственности тейлоровского разложения имеем

$$(f')^{(k)}(0)=k!\,c_k',$$

поэтому $f^{(k+1)}(0)=k!\,c_k'$. Таким образом, для самой функции $f(x)$ имеем разложение

$$f(x)=f(0)+\frac{c_0'}{1!}x+\frac{1!\,c_1'}{2!}x^2+\ldots+\frac{n!\,c_n'}{(n+1)!}x^{n+1}+O(x^{n+2}),$$

или, после упрощений,

$$f(x)=f(0)+\frac{c_0'}{1}x+\frac{c_1'}{2}x^2+\ldots+\frac{c_n'}{n+1}x^{n+1}+O(x^{n+2}).$$

Пример 17. Найдем тейлоровское разложение функции $f(x)=\operatorname{arctg}x$ в нуле.

Поскольку $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=(1+x^2)^{-1}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^nx^{2n}+O(x^{2n+2})$, то по соображениям, изложенным в предыдущем примере,

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1}x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+O(x^{2n+3}),$$

т. е.

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+O(x^{2n+3}).$$

Пример 18. Аналогично, раскладывая по формуле Тейлора функцию $\arcsin' x=(1-x^2)^{-1/2}$ в окрестности нуля, последовательно находим

$$(1+u)^{-1/2}=1+\frac{-\frac{1}{2}}{1!}u+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}u^2+\ldots+\\+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}u^n+O(u^{n+1}),$$

$$(1-x^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}+O(x^{2n+2}),$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}x^5+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}x^{2n+1}+O(x^{2n+3}),$$

или, после элементарных преобразований,

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{[3!!]^2}{5!}x^5 + \ldots + \frac{[(2n-1)!!]^2}{(2n+1)!}x^{2n+1} + O(x^{2n+3}).$$

Здесь $(2n-1)!! := 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$, $(2n)!! := 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)$.

Пример 19. Воспользуемся результатами примеров 5, 12, 17, 18 и найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[x - \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)\right] - \left[x - \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)\right]}{\left[x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)\right] - \left[x + \frac{1}{3!}x^3 + O(x^5)\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3 + O(x^5)}{\frac{1}{6}x^3 + O(x^5)} = -1.$$

Задачи и упражнения

1. Подберите числа a и b так, чтобы функция $f(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ при $x\to 0$ была бесконечно малой возможно более высокого порядка.

2. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\right]$.

3. Напишите полином Тейлора функции e^x в нуле, который позволял бы вычислять значения e^x на отрезке $-1\leqslant x\leqslant 2$ с точностью до 10^{-3}.

4. Пусть f — бесконечно дифференцируемая в нуле функция. Покажите, что

a) если f четная, то ее ряд Тейлора в нуле содержит только четные степени x;

b) если f нечетная, то ее ряд Тейлора в нуле содержит только нечетные степени x.

5. Покажите, что если $f\in C^{(\infty)}[-1, 1]$, $f^{(n)}(0) = 0$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ и существует число C такое, что $\sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f^{(n)}(x)| \leqslant n!C$, $n\in\mathbb{N}$, то $f\equiv 0$ на $[-1, 1]$.

6. Пусть $f\in C^{(n)}(]-1, 1[)$ и $\sup\limits_{-1<x<1}|f(x)|\leqslant 1$. Пусть $m_k(I) = \inf\limits_{x\in I}|f^{(k)}(x)|$, где I — промежуток, содержащийся в интервале $]-1, 1[$. Покажите, что

a) если I разбит на три последовательных промежутка I_1, I_2, I_3 и μ — длина I_2, то

$$m_k(I) \leqslant \frac{1}{\mu}(m_{k-1}(I_1) + m_{k-1}(I_3));$$

b) если I имеет длину λ, то

$$m_k(I) \leqslant \frac{2^{k(k+1)/2}k^k}{\lambda^k};$$

c) существует такое число α_n, зависящее только от n, что если $|f'(0)|\geqslant\alpha_n$, то уравнение $f^{(n)}(x) = 0$ имеет в $]-1, 1[$ по крайней мере $n-1$ различных корней.

Указание. В b) используйте a) и принцип индукции; в c) используйте a) и по индукции докажите, что существует такая последовательность $x_{k_1} < x_{k_2} < \ldots < x_{k_k}$ точек интервала $]-1, 1[$, что $f^{(k)}(x_{k_i})\cdot f^{(k)}(x_{k_{i+1}}) < 0$ при $1\leqslant i\leqslant k-1$.

7. Покажите, что если функция f определена и дифференцируема на интервале I и $[a, b]\subset I$, то

a) функция $f'(x)$ (даже не будучи непрерывной!) принимает на $[a,b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$ (*теорема Дарбу*[1]);

b) если еще $f''(x)$ существует в $]a,b[$, то найдется точка $\xi \in]a,b[$ такая, что $f'(b)-f'(a)=f''(\xi)(b-a)$.

8. Функция $f(x)$ может быть дифференцируемой на всей числовой прямой, но при этом $f'(x)$ может не быть непрерывной (см. пример 7 из § 1, п. 5).

a) Покажите, что функция $f'(x)$ может иметь разрывы только второго рода.

b) Укажите ошибку в следующем «доказательстве» непрерывности $f'(x)$.

◄ Пусть x_0 — произвольная точка на $\mathbb{R}$ и $f'(x_0)$ — производная функции f в точке x_0. По определению производной и теореме Лагранжа

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f'(\xi)=\lim_{\xi\to x_0}f'(\xi),$$

где ξ — точка между x_0 и x, стремящаяся, таким образом, к x_0 при $x\to x_0$. ►

9. Пусть f — дважды дифференцируемая функция на промежутке I. Пусть $M_0 = \sup\limits_{x\in I}|f(x)|$, $M_1=\sup\limits_{x\in I}|f'(x)|$, $M_2=\sup\limits_{x\in I}|f''(x)|$. Покажите, что

a) если $I=[-a,a]$, то

$$|f'(x)|\leqslant \frac{M_0}{a}+\frac{x^2+a^2}{2a}M_2;$$

b) $\begin{cases} M_1\leqslant 2\sqrt{M_0M_2}, & \text{если длина } I \text{ не меньше } 2\sqrt{M_0/M_2},\\ M_1\leqslant \sqrt{2M_0M_2}, & \text{если } I=\mathbb{R};\end{cases}$

c) в задаче b) числа 2 и $\sqrt{2}$ не могут быть заменены меньшими;

d) если f дифференцируема p раз в $\mathbb{R}$ и если величины M_0 и $M_p=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f^{(p)}(x)|$ конечны, то при $1\leqslant k\leqslant p$ конечны также величины $M_k=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f^{(k)}(x)|$ и

$$M_k\leqslant 2^{k(p-k)/2}M_0^{1-k/p}M_p^{k/p}.$$

Указание. Используйте задачи 6b), 9b) и принцип индукции.

10. Покажите, что если функция f имеет в точке x_0 все производные до порядка $n+1$ включительно и $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, то в остаточном члене формулы Тейлора, записанном в форме Лагранжа

$$r_n(x_0;x)=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^n,$$

где $0<\theta<1$, величина $\theta=\theta(x)$ стремится к $\dfrac{1}{n+1}$ при $x\to x_0$.

11. Пусть f — функция, n раз дифференцируемая на промежутке I. Покажите, что

a) Если f в $(n+1)$ точках промежутка I обращается в нуль, то найдется точка $\xi\in I$ такая, что $f^{(n)}(\xi)=0$.

b) Если $x_1, x_2, \ldots, x_p$ — точки промежутка I, то существует и притом единственный многочлен $L(x)$ (*интерполяционный полином Лагранжа*) степени не выше $(n-1)$ такой, что $f(x_i)=L(x_i)$, $i=1,\ldots,n$. Кроме того, для $x\in I$ найдется точка $\xi\in I$ такая, что

$$f(x)-L(x)=\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{n!}f^{(n)}(\xi).$$

[1] Г. Дарбу (1842—1917) — французский математик.

c) Если $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$ — точки промежутка I, n_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ — натуральные числа такие, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$ и $f^{(k)}(x_i) = 0$ при $0 \leqslant k \leqslant n_i - 1$, то в промежутке $[x_1, x_p]$ найдется точка ξ, в которой $f^{(n-1)}(\xi) = 0$.

d) Существует и притом единственный многочлен $H(x)$ (*интерполяционный полином Эрмита*[1]) степени $n-1$ такой, что $f^{(k)}(x_i) = H^{(k)}(x_i)$ при $0 \leqslant k \leqslant n_i - 1$. Кроме того, внутри наименьшего промежутка, содержащего точки x и x_i, $i = 1, \ldots, p$, найдется точка ξ такая, что

$$f(x) = H(x) + \frac{(x-x_1)^{n_1} \ldots (x-x_p)^{n_p}}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Эта формула называется *интерполяционной формулой Эрмита*. Точки x_i, $i = 1, \ldots, p$, называются *узлами интерполяции кратности* n_i соответственно. Частными случаями формулы Эрмита являются интерполяционная формула Лагранжа (задача b)) при $p = n$ и $n_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, а также формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получающаяся при $p = 1$, т. е. при интерполировании с одним узлом кратности n.

12. Покажите, что

a) между двумя вещественными корнями полинома $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеется корень его производной $P'(x)$;

b) если полином $P(x)$ имеет кратный корень, то полином $P'(x)$ имеет тот же корень, но на единицу меньшей кратности;

c) если $Q(x)$ — наибольший общий делитель полиномов $P(x)$ и $P'(x)$, где $P'(x)$ — производная полинома $P(x)$, то полином $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ имеет в качестве корней корни полинома $P(x)$, причем все они кратности 1.

13. Покажите, что

a) любой полином $P(x)$ можно представить в следующем виде: $c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots \ldots + c_n(x - x_0)^n$;

b) существует единственный полином степени n, для которого $f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n)$ при $E \ni x \to x_0$. Здесь f — функция, определенная на множестве E, а x_0 — предельная точка E.

14. С помощью индукции по k, $1 \leqslant k$, определим *конечные разности порядка* k функции f в точке x_0:

$$\begin{aligned}
\Delta^1 f(x_0; h_1) &:= \Delta f(x_0; h_1) = f(x_0 + h_1) - f(x_0), \\
\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2) &:= \Delta\Delta f(x_0; h_1, h_2) = \\
&= (f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_2)) - (f(x_0 + h_1) - f(x_0)) = \\
&= f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_1) - f(x_0 + h_2) + f(x_0), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^k f(x_0; h_1, \ldots, h_k) &:= \Delta^{k-1} g_k(x_0; h_1, \ldots, h_{k-1}),
\end{aligned}$$

где $g_k(x) = \Delta^1 f(x; h_k) = f(x + h_k) - f(x)$.

a) Пусть $f \in C^{(n-1)}[a, b]$ и существует $f^{(n)}(x)$ по крайней мере в интервале $]a, b[$. Если все точки x_0, $x_0 + h_1$, $x_0 + h_2$, $x_0 + h_1 + h_2$, $x_0 + h_1 + \ldots + h_n$ лежат в $[a, b]$, то внутри

[1]Ш. Эрмит (1822—1901) — французский математик, занимавшийся вопросами анализа; в частности, доказал трансцендентность числа e.

наименьшего отрезка, их содержащего, найдется точка ξ такая, что

$$\Delta^n f(x_0; h_1, \ldots, h_n) = f^{(n)}(\xi)\, h_1 \cdot \ldots \cdot h_n.$$

b) (Продолжение.) Если существует $f^{(n)}(x_0)$, то имеет место оценка

$$|\Delta^n f(x_0; h_1, \ldots, h_n) - f^{(n)}(x_0)\, h_1 \cdot \ldots \cdot h_n| \leqslant \sup_{x \in]a,b[} |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)| \cdot |h_1| \cdot \ldots \cdot |h_n|.$$

c) (Продолжение.) Положим $\Delta^n f(x_0; h, \ldots, h) =: \Delta^n f(x_0; h^n)$. Покажите, что если существует $f^{(n)}(x_0)$, то

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^n f(x_0; h^n)}{h^n}.$$

d) Покажите на примере, что предыдущий предел может существовать даже тогда, когда $f^{(n)}(x)$ в точке x_0 не существует.

Указание. Рассмотрите, например, $\Delta^2 f(0; h^2)$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и покажите, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta^2 f(0; h^2)}{h^2} = 0.$$

15. a) Применив теорему Лагранжа к функции $\dfrac{1}{x^\alpha}$, где $\alpha > 0$, покажите, что при $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

b) Воспользуйтесь результатом задачи a) и покажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\sigma}$ сходится при $\sigma > 1$.

§ 4. Исследование функций методами дифференциального исчисления

1. Условия монотонности функции

Утверждение 1. *Между характером монотонности дифференцируемой на интервале* $]a, b[= E$ *функции* $f : E \to \mathbb{R}$ *и знаком (положительностью) ее производной* f' *на этом интервале имеется следующая взаимосвязь:*

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\;\Rightarrow\; f \text{ возрастает} &&\Rightarrow\; f'(x) \geqslant 0,\\
f'(x) \geqslant 0 &\;\Rightarrow\; f \text{ не убывает} &&\Rightarrow\; f'(x) \geqslant 0,\\
f'(x) \equiv 0 &\;\Rightarrow\; f \equiv \text{const} &&\Rightarrow\; f'(x) = 0,\\
f'(x) \leqslant 0 &\;\Rightarrow\; f \text{ не возрастает} &&\Rightarrow\; f'(x) \leqslant 0,\\
f'(x) < 0 &\;\Rightarrow\; f \text{ убывает} &&\Rightarrow\; f'(x) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

◄ Левый столбец следствий нам уже знаком по обсуждению теоремы Лагранжа, в силу которой $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $x_1, x_2 \in]a, b[$ и ξ — точка между x_1 и x_2. Из этой формулы видно, что при $x_1 < x_2$ положительность разности $f(x_2) - f(x_1)$ совпадает с положительностью $f'(\xi)$.

Правый столбец следствий получается непосредственно из определения производной. Покажем, например, что если дифференцируемая на $]a, b[$ функция f возрастает, то $f'(x) \geqslant 0$ на $]a, b[$. Действительно,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Если $h > 0$, то $f(x+h) - f(x) > 0$, а если $h < 0$, то $f(x+h) - f(x) < 0$; поэтому дробь под знаком предела положительна.

Следовательно, ее предел $f'(x)$ неотрицателен, что и утверждалось. ►

Замечание 1. На примере функции $f(x) = x^3$ видно, что возрастание дифференцируемой функции влечет только неотрицательность производной, а не ее положительность. В нашем примере $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$.

Замечание 2. В символе $A \Rightarrow B$, как мы уже в свое время отмечали, A — условие, достаточное для B, а B — условие, необходимое для того, чтобы было выполнено A. Значит, из утверждения 1, в частности, можно сделать следующие выводы:

функция постоянна на интервале тогда и только тогда, когда ее производная тождественно равна нулю на этом интервале;

для того чтобы дифференцируемая на интервале функция убывала на нем, достаточно, чтобы ее производная была отрицательна в любой точке этого интервала;

для того чтобы дифференцируемая на интервале функция убывала на нем, необходимо, чтобы ее производная была неположительна на этом интервале.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^3 - 3x + 2$ на $\mathbb{R}$. Тогда $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ и, поскольку $f'(x) < 0$ при $|x| < 1$ и $f'(x) > 0$ при $|x| > 1$, можем сказать, что на интервале $]-\infty, -1[$ функция возрастает, на интервале $]-1, 1[$ убывает, а на интервале $]1, +\infty[$ вновь возрастает.

2. Условия внутреннего экстремума функции. Учитывая лемму Ферма (лемма 1, § 3), можно сформулировать следующее

Утверждение 2 (необходимые условия внутреннего экстремума). *Для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$, определенной в окрестности $U(x_0)$ этой точки, необходимо выполнение одного из двух условий: либо функция не дифференцируема в x_0, либо $f'(x_0) = 0$.*

Простые примеры показывают, что эти необходимые условия экстремума не являются достаточными.

Пример 2. Пусть $f(x) = x^3$ на $\mathbb{R}$. Тогда $f'(0) = 0$, но в точке $x_0 = 0$ экстремума нет.

Пример 3. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } x>0,\\ 2x & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Эта функция с изломом в нуле, очевидно, не имеет в нуле ни производной, ни экстремума.

Пример 4. Найдем максимум функции $f(x)=x^2$ на отрезке $[-2,1]$. В данном случае очевидно, что он будет достигнут в конце -2 отрезка, но регулярный способ его отыскания таков. Находим $f'(x)=2x$ и все точки интервала $]-2,1[$, где $f'(x)=0$. В нашем случае это одна точка $x=0$. Максимум $f(x)$ должен быть либо среди этих точек, либо в одной из концевых точек, о которых утверждение 2 ничего не говорит. Таким образом, надо сравнить значения $f(-2)=4$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, откуда заключаем, что максимальное значение функции $f(x)=x^2$ на отрезке $[-2,1]$ равно 4 и принимается в точке -2, являющейся концом этого отрезка.

Используя установленную в пункте 1 связь между знаком производной и характером монотонности функции, приходим к следующим достаточным условиям наличия или отсутствия локального экстремума в точке.

Утверждение 3 (достаточные условия экстремума в терминах первой производной). *Пусть $f\colon U(x_0)\to\mathbb{R}$ — функция, определенная в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, непрерывная в самой этой точке и дифференцируемая в ее проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$. Пусть $\mathring{U}^-(x_0)=\{x\in U(x_0)\mid x<x_0\}$ и $\mathring{U}^+(x_0)=\{x\in U(x_0)\mid x>x_0\}$.*

Тогда справедливы следующие заключения:

a) $(\forall x\in\mathring{U}^-(x_0)\ (f'(x)<0))\wedge(\forall x\in\mathring{U}^+(x_0)\ (f'(x)<0))\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (f *в* x_0 *экстремума не имеет*);

b) $(\forall x\in\mathring{U}^-(x_0)\ (f'(x)<0))\wedge(\forall x\in\mathring{U}^+(x_0)\ (f'(x)>0))\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (x_0 — *точка строгого локального минимума* f);

c) $(\forall x\in\mathring{U}^-(x_0)\ (f'(x)>0))\wedge(\forall x\in\mathring{U}^+(x_0)\ (f'(x)<0))\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (x_0 — *точка строгого локального максимума* f);

d) $(\forall x\in\mathring{U}^-(x_0)\ (f'(x)>0))\wedge(\forall x\in\mathring{U}^+(x_0)\ (f'(x)>0))\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (f *в* x_0 *экстремума не имеет*).

Кратко, но менее точно, можно сказать, что если при переходе через точку производная меняет знак, то экстремум есть, а если ее знак при этом не меняется, то экстремума нет.

Заметим сразу же, что эти условия, являясь достаточными, не являются необходимыми для экстремума, в чем можно убедиться на следующем примере.

Пример 5. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Поскольку $x^2 \leqslant f(x) \leqslant 3x^2$, то ясно, что функция имеет строгий локальный минимум в точке $x_0 = 0$, однако ни в какой проколотой полуокрестности этой точки ее производная $f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ не сохраняет знак. Этот же пример указывает на недоразумения, которые могут возникнуть в связи с приведенной выше сокращенной формулировкой утверждения 3.

Теперь обратимся к доказательству утверждения 3.

◄ a) Из утверждения 2 следует, что функция f строго убывает на $\mathring{U}^-(x_0)$. Поскольку она непрерывна в x_0, имеем $\lim\limits_{\mathring{U}^-(x_0)\ni x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ и, следовательно, $f(x) > f(x_0)$ при $x \in \mathring{U}^-(x_0)$. По тем же соображениям $f(x_0) > f(x)$ при $x \in \mathring{U}^+(x_0)$. Таким образом, функция строго убывает во всей окрестности $U(x_0)$ и x_0 не является точкой экстремума.

b) Сначала, как и в a), заключаем, что ввиду убывания $f(x)$ на $\mathring{U}^-(x_0)$ и непрерывности f в x_0 имеем $f(x) > f(x_0)$ при $x \in \mathring{U}^-(x_0)$. Из возрастания f на $\mathring{U}^+(x_0)$ и непрерывности f в x_0 заключаем, что $f(x_0) < f(x)$ при $x \in \mathring{U}^+(x_0)$. Таким образом, функция f имеет в x_0 строгий локальный минимум.

Утверждения c) и d) доказываются аналогично. ►

Утверждение 4 (достаточные условия экстремума в терминах высших производных). *Пусть функция $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, определенная в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, имеет в x_0 производные до порядка n включительно* ($n \geqslant 1$).

Если $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)} \neq 0$, то при n нечетном в x_0 экстремума нет, а при n четном экстремум есть, причем это строгий локальный минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и строгий локальный максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

◄ Используя локальную формулу Тейлора

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n, \tag{1}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, будем рассуждать так же, как при доказательстве леммы Ферма. Перепишем (1) в виде

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)\right)(x - x_0)^n. \tag{2}$$

Поскольку $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, а $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то сумма $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$ имеет знак $f^{(n)}(x_0)$, когда x достаточно близко к x_0. Если n нечетно, то при переходе через x_0 скобка $(x - x_0)^n$ меняет знак и тогда изменится знак всей правой, а следовательно, и левой части равенства (2). Значит, при $n = 2k + 1$ экстремума нет.

Если n четно, то $(x - x_0)^n > 0$ при $x \neq x_0$ и, следовательно, в малой окрестности точки x_0 знак разности $f(x) - f(x_0)$, как видно из равенства (2), совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. ►

Рассмотрим примеры.

Пример 6. *Закон преломления света в геометрической оптике* (*закон Снеллиуса*[1]). Согласно *принципу Ферма* истинная траектория света между любыми двумя точками такова, что на ней реализуется минимум времени, которое необходимо свету, чтобы пройти из одной точки в другую по любому фиксированному пути, соединяющему эти точки.

Из принципа Ферма и того, что кратчайшей линией между любыми двумя точками является отрезок прямой с концами в этих точках, следует, что в однородной изотропной среде (устроенной одинаково как в каждой точке, так и в каждом направлении) свет распространяется прямолинейно.

Пусть теперь имеются две такие среды и свет распространяется из точки A_1 к A_2, как показано на рис. 22.

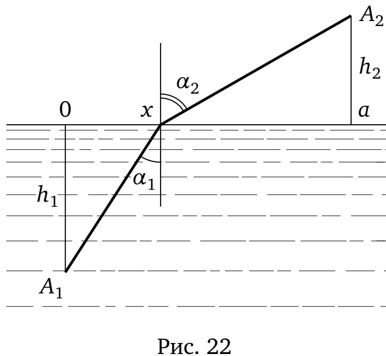


Рис. 22

Если c_1, c_2 — скорости света в этих средах, то время прохождения указанного пути таково:

$$t(x) = \frac{1}{c_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}.$$

Найдем экстремум функции $t(x)$:

$$t'(x) = \frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}} = 0,$$

что в соответствии с обозначениями рисунка дает $c_1^{-1}\sin\alpha_1 = c_2^{-1}\sin\alpha_2$.

Из физических соображений или прямо из вида функции $t(x)$, неограниченно растущей при $x \to \infty$, ясно, что точка, где $t'(x) = 0$, является точкой абсолютного минимума непрерывной функции $t(x)$. Таким образом, из принципа Ферма следует закон преломления $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Пример 7. Покажем, что при $x > 0$

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leqslant 0, \quad \text{когда } 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geqslant 0, \quad \text{когда } \alpha < 0 \text{ или } 1 < \alpha. \tag{4}$$

◄ Дифференцируя функцию $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, находим $f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$ и $f'(x) = 0$ при $x = 1$. При переходе через точку 1 производная переходит от положительных значений к отрицательным, если $0 < \alpha < 1$, и от отрицательных к положительным, если $\alpha < 0$ или $1 < \alpha$. В первом случае в точке 1 строгий максимум, а во втором — строгий минимум (и не только локальный, что следует из соображений монотонности f на участках $0 < x < 1$, $1 < x$). Но

[1] В. Снеллиус (Снелл) (1580—1626) — нидерландский астроном и математик.

$f(1)=0$ и, таким образом, оба неравенства (3), (4) установлены. При этом показано даже, что оба неравенства строгие, если $x\neq 1$. ►

Заметим, что если заменить x на $1+x$, то мы обнаружим, что (3) и (4) — это развитие уже знакомого нам при натуральном показателе α неравенства Бернулли (гл. II, § 2; см. также задачу 2 в конце настоящего параграфа).

С помощью элементарных алгебраических преобразований из доказанных неравенств можно получить ряд классических и важных для анализа неравенств. Приведем их вывод.

a. Неравенства Юнга[1]**.** *Если* $a>0$ *и* $b>0$*, а числа* p*,* q *таковы, что* $p\neq 0, 1$*,* $q\neq 0, 1$ *и* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*, то*

$$a^{1/p}b^{1/q}\leqslant \frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b, \quad \text{если } p>1, \tag{5}$$

$$a^{1/p}b^{1/q}\geqslant \frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b, \quad \text{если } p<1, \tag{6}$$

причем знак равенства в (5) *и* (6) *имеет место только при* $a=b$.

◄ Для доказательства достаточно в (3) и (4) положить $x=\frac{a}{b}$ и $\alpha=\frac{1}{p}$, а также ввести обозначение $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$. ►

b. Неравенства Гёльдера[2]**.** *Пусть* $x_i\geqslant 0$, $y_i\geqslant 0$ $(i=1, \ldots, n)$ *и* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} \quad \text{при } p>1 \tag{7}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} \quad \text{при } p<1,\ p\neq 0. \tag{8}$$

В случае $p<0$ *в* (8) *предполагается, что* $x_i>0$ $(i=1, \ldots, n)$. *Знак равенства в* (7) *и* (8) *возможен только в случае пропорциональности векторов* $(x_1^p, \ldots, x_n^p)$, $(y_1^q, \ldots, y_n^q)$.

◄ Проверим неравенство (7). Пусть $X=\sum_{i=1}^{n} x_i^p>0$, $Y=\sum_{i=1}^{n} y_i^q>0$. Полагая в (5) $a=\frac{x_i^p}{X}$, $b=\frac{y_i^q}{Y}$, получаем

$$\frac{x_i y_i}{X^{1/p}\,Y^{1/q}}\leqslant \frac{1}{p}\frac{x_i^p}{X}+\frac{1}{q}\frac{y_i^q}{Y}.$$

Суммируя эти неравенства по i от 1 до n, получаем

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{X^{1/p}Y^{1/q}}\leqslant 1,$$

что эквивалентно (7).

[1] В. Юнг (Янг) (1882—1946) — английский математик.

[2] О. Гёльдер (1859—1937) — немецкий математик.

Аналогично, из (6) получаем (8). Поскольку знак равенства в (5) и (6) возможен лишь при $a=b$, заключаем, что в (7) и (8) он возможен лишь при пропорциональности $x_i^p=\lambda y_i^q$ или $y_i^q=\lambda x_i^p$. ►

c. Неравенства Минковского[1]**.** *Пусть* $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$ $(i=1, \ldots, n)$. *Тогда*

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p} \quad \text{при } p>1 \tag{9}$$

и

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p} \quad \text{при } p<1,\ p\neq 0. \tag{10}$$

◄ Применим неравенства Гёльдера к членам правой части тождества

$$\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p = \sum_{i=1}^n x_i(x_i+y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n y_i(x_i+y_i)^{p-1}.$$

Тогда левая часть будет оценена сверху или снизу в соответствии с неравенствами (7), (8) величиной

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{1/q}.$$

После деления полученных неравенств на $\left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{1/q}$ приходим к (9) и (10).

Зная условия равенства в неравенствах Гёльдера, проверяем, что знак равенства в неравенствах Минковского возможен лишь в случае коллинеарности векторов $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n)$. ►

При $n=3$ и $p=2$ неравенство Минковского (9), очевидно, является неравенством треугольника в трехмерном евклидовом пространстве.

Пример 8. Рассмотрим еще простейший пример использования высших производных при отыскании локальных экстремумов. Пусть $f(x)=\sin x$. Поскольку $f'(x)=\cos x$ и $f''(x)=-\sin x$, то все точки, где $f'(x)=\cos x=0$, являются локальными экстремумами функции $\sin x$, так как в них $f''(x)=-\sin x\neq 0$. При этом $f''(x)<0$, если $\sin x>0$, и $f''(x)>0$, если $\sin x<0$. Таким образом, точки, где $\cos x=0$, а $\sin x>0$, являются локальными максимумами, а точки, где $\cos x=0$, а $\sin x<0$, — локальными минимумами функции $\sin x$ (что, конечно, и так известно).

---

[1]Г. Минковский (1864—1909) — немецкий математик, предложивший адекватную математическую модель (пространство с индефинитной метрикой) специальной теории относительности.

3. Условия выпуклости функции

Определение 1. Функция $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$, определенная на интервале $]a, b[\subset \mathbb{R}$, называется *выпуклой* на нем, если для любых точек $x_1, x_2 \in]a, b[$ и любых чисел $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, имеет место неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \tag{11}$$

Если при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq 0$ это неравенство является строгим, то функция называется *строго выпуклой* на интервале $]a, b[$.

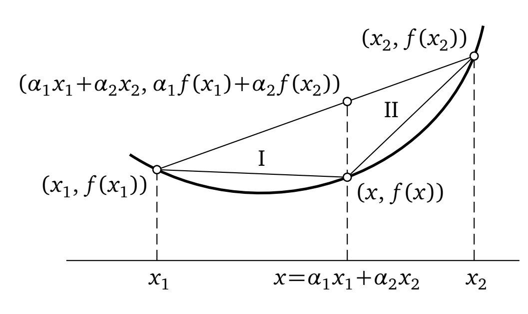


Рис. 23

Геометрически условие (11) выпуклости функции $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ означает (рис. 23), что точки любой дуги графика функции лежат под хордой, стягивающей эту дугу.

В самом деле, в левой части (11) стоит значение $f(x)$ функции в точке $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in [x_1, x_2]$, а справа — значение в той же точке линейной функции, график которой (прямая) проходит через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

Соотношение (11) означает, что множество $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]a, b[, f(x) < y\}$ точек плоскости, лежащих над графиком функции, является выпуклым, откуда и сам термин «выпуклая» функция.

Определение 2. Если для функции $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ в (11) имеет место обратное неравенство, то говорят, что функция *вогнута* на интервале $]a, b[$ или, чаще, что она *выпукла вверх* на этом интервале, в отличие от выпуклой функции, которую тогда называют *выпуклой вниз* на интервале $]a, b[$.

Поскольку все дальнейшие построения проводятся одинаково для функций, выпуклых вниз или вверх, мы ограничимся рассмотрением выпуклых (вниз) функций.

Сначала придадим неравенству (11) другой вид, более приспособленный для наших целей.

Из соотношений $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ имеем

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \alpha_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

поэтому (11) можно переписать в виде

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Учитывая, что $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и $x_1 < x_2$, после домножения на $x_2 - x_1$ получаем

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \geqslant 0.$$

Замечая, что $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, из последнего неравенства после элементарных преобразований находим, что

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{12}$$

при $x_1 < x < x_2$ и любых $x_1, x_2 \in]a, b[$.

Неравенство (12) является иной формой записи определения выпуклости функции $f(x)$ на интервале $]a, b[$. Геометрически (12) означает (см. рис. 23), что угловой коэффициент хорды I, соединяющей точки $(x_1, f(x_1))$, $(x, f(x))$, не больше (а в случае строгой выпуклости — меньше) углового коэффициента хорды II, соединяющей точки $(x, f(x))$, $(x_2, f(x_2))$.

Предположим теперь, что функция $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ дифференцируема на $]a, b[$. Тогда, устремляя в (12) x поочередно к x_1 и x_2, получаем

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2),$$

что устанавливает монотонность производной функции f.

Учитывая это, для строго выпуклой функции, пользуясь теоремой Лагранжа, находим

$$f'(x_1) \leqslant f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2) \leqslant f'(x_2)$$

при $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, т. е. строгая выпуклость влечет строгую монотонность производной.

Итак, если дифференцируемая функция f выпукла на интервале $]a, b[$, то f' не убывает на $]a, b[$, а в случае строгой выпуклости f ее производная f' возрастает на $]a, b[$.

Оказывается, это не только необходимые, но и достаточные условия выпуклости дифференцируемой функции.

В самом деле, для $a < x_1 < x < x_2 < b$ по теореме Лагранжа

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

где $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, и если $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$, то выполнено условие (12) выпуклости (или строгой выпуклости, если $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$).

Таким образом, мы доказали следующее

Утверждение 5. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале $]a, b[$ функция $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ была выпуклой (вниз) на $]a, b[$, необходимо и достаточно, чтобы ее производная f' не убывала на $]a, b[$. При этом строгому возрастанию f' соответствует строгая выпуклость f.*

Сопоставляя утверждение 5 и утверждение 3, получаем

Следствие. *Для того чтобы функция* $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$, *имеющая на интервале* $]a,b[$ *вторую производную, была выпуклой (вниз) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы на* $]a,b[$ *было* $f''(x)\geqslant 0$. *Если же* $f''(x)>0$ *на* $]a,b[$, *то этого достаточно, чтобы гарантировать строгую выпуклость функции* $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$.

Теперь мы в состоянии объяснить, например, почему графики простейших элементарных функций рисуют с тем или иным характером выпуклости.

Пример 9. Исследуем выпуклость функции $f(x)=x^{\alpha}$ на множестве $x>0$. Поскольку $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, то $f''(x)>0$ при $\alpha<0$ или при $\alpha>1$, т. е. при таких значениях показателя степени α степенная функция x^{α} строго выпукла (вниз). При $0<\alpha<1$ имеем $f''(x)<0$, поэтому для таких показателей степени она строго выпукла вверх. Например, параболу $f(x)=x^2$ мы всегда рисуем выпуклой вниз. Оставшиеся случаи $\alpha=0$ и $\alpha=1$ тривиальны: $x^0\equiv 1$, $x^1=x$. И в том и в другом случае графиком функции является луч (см. рис. 30 на с. 233).

Пример 10. Пусть $f(x)=a^x$, $0<a$, $a\neq 1$. Поскольку $f''(x)=a^x\ln^2 a>0$, показательная функция a^x при любом допустимом основании a строго выпукла (вниз) на $\mathbb{R}$ (см. рис. 24 на с. 232).

Пример 11. Для функции $f(x)=\log_a x$ имеем $f''(x)=-\frac{1}{x^2\ln a}$, поэтому функция строго выпукла (вниз), если $0<a<1$, и строго выпукла вверх, если $1<a$ (см. рис. 25 на с. 232).

Пример 12. Исследуем выпуклость функции $f(x)=\sin x$ (см. рис. 26 на с. 232).

Поскольку $f''(x)=-\sin x$, то $f''(x)<0$ на интервалах $\pi\cdot 2k<x<\pi(2k+1)$ и $f''(x)>0$ на интервалах $\pi(2k-1)<x<\pi\cdot 2k$, где $k\in\mathbb{Z}$. Отсюда, например, следует, что дуга графика функции $\sin x$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ лежит над стягивающей ее хордой всюду, кроме концевых точек; поэтому $\sin x>\frac{2}{\pi}x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Укажем теперь еще одну характеристику выпуклой функции, геометрически эквивалентную тому, что выпуклая область на плоскости лежит по одну сторону от касательной к ее границе.

Утверждение 6. *Дифференцируемая на интервале* $]a,b[$ *функция* $f\colon]a,b[\to\mathbb{R}$ *выпукла (вниз) на* $]a,b[$ *тогда и только тогда, когда ее график всеми своими точками лежит не ниже любой проведенной к нему касательной. При этом для строгой выпуклости функции необходимо и достаточно, чтобы все точки графика, за исключением самой точки касания, лежали строго выше этой касательной.*

◄ *Необходимость.* Пусть $x_0\in]a,b[$. Уравнение касательной к графику в точке $(x_0,f(x_0))$ имеет вид

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

поэтому

$$f(x)-y(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=(f'(\xi)-f'(x_0))(x-x_0),$$

где ξ — точка между x и x_0. Так как f выпукла, то функция $f'(x)$ не убывает на $]a,b[$ и знак разности $f'(\xi)-f'(x_0)$ совпадает со знаком разности $x-x_0$, поэтому $f(x)-y(x)\geqslant 0$ в любой точке $x\in]a,b[$. Если f строго выпукла, то f' строго возрастает на $]a,b[$ и, значит, $f(x)-y(x)>0$ при $x\in]a,b[$ и $x\neq x_0$.

Достаточность. Если для любых точек $x, x_0\in]a,b[$

$$f(x)-y(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\geqslant 0, \tag{13}$$

то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant f'(x_0)\quad \text{при } x<x_0,$$
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant f'(x_0)\quad \text{при } x_0<x.$$

Таким образом, для любой тройки точек $x_1, x, x_2\in]a,b[$ такой, что $x_1<$ $<x<x_2$, получаем

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

причем строгое неравенство в (13) влечет строгое неравенство в последнем соотношении, которое, как мы видим, совпадает с записью (12) определения выпуклой функции. ►

Рассмотрим примеры.

Пример 13. Функция $f(x)=e^x$ строго выпукла. Прямая $y=x+1$ является касательной к графику этой функции в точке (0, 1), так как $f(0)=e^0=1$ и $f'(0)=e^x|_{x=0}=1$. В силу утверждения 6 заключаем, что для любого $x\in\mathbb{R}$

$$e^x\geqslant 1+x,$$

причем если $x\neq 0$, то неравенство строгое.

Пример 14. Аналогично, пользуясь строгой выпуклостью вверх функции $\ln x$, можно проверить, что при $x>0$ справедливо неравенство

$$\ln x\leqslant x-1,$$

причем это неравенство является строгим, если $x\neq 1$.

При построении графиков функций бывает полезно выделять точки перегиба графика.

Определение 3. Пусть $f\colon U(x_0)\to\mathbb{R}$ — функция, определенная и дифференцируемая в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0\in\mathbb{R}$. Если на множестве $\mathring{U}^-(x_0)=\{x\in U(x_0)\mid x<x_0\}$ функция выпукла вниз (вверх), а на множестве $\mathring{U}^+(x_0)=\{x\in U(x_0)\mid x>x_0\}$ выпукла вверх (вниз), то точка $(x_0, f(x_0))$ графика называется его *точкой перегиба*.

Таким образом, при переходе через точку перегиба меняется направление выпуклости графика, а это, в частности, означает, что в точке $(x_0, f(x_0))$

график функции переходит с одной стороны касательной к нему в этой точке на другую ее сторону.

Аналитический признак абсциссы x_0 точки перегиба легко усмотреть, сопоставляя утверждение 5 и утверждение 3. А именно, можно сказать, что если f дважды дифференцируема в точке x_0, то, поскольку $f'(x)$ в точке x_0 имеет максимум или минимум, необходимо $f''(x_0)=0$.

Если же вторая производная $f''(x)$ определена в $U(x_0)$ и всюду в $\mathring{U}^-(x_0)$ имеет один знак, а всюду в $\mathring{U}^+(x_0)$ — противоположный знак, то этого достаточно для того, чтобы $f'(x)$ в $\mathring{U}^-(x_0)$ и в $\mathring{U}^+(x_0)$ была монотонна, но имела разный характер монотонности. Тогда в силу утверждения 5 в точке $(x_0, f(x_0))$ произойдет изменение направления выпуклости графика, т. е. $(x_0, f(x_0))$ будет точкой перегиба.

Пример 15. В примере 12, рассматривая функцию $f(x)=\sin x$, мы нашли участки выпуклости и вогнутости ее графика. Покажем теперь, что точки графика с абсциссами $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, являются точками перегиба.

Действительно, $f''(x)=-\sin x$; $f''(x)=0$ при $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Кроме того, при переходе через эти точки $f''(x)$ меняет знак, что является достаточным признаком точки перегиба (см. рис. 26 на с. 232).

Пример 16. Не следует думать, что переход кривой с одной стороны касательной на другую ее сторону в некоторой точке является достаточным признаком того, что эта точка является точкой перегиба. Ведь может так случиться, что ни в левой, ни в правой ее окрестности кривая не сохраняет определенный характер выпуклости. Пример легко построить, усовершенствовав пример 5, приведенный по схожему поводу.

Пусть
$$f(x)=\begin{cases} 2x^3+x^3\sin\frac{1}{x^2} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Тогда $x^3\leqslant f(x)\leqslant 3x^3$ при $0\leqslant x$ и $3x^3\leqslant f(x)\leqslant x^3$ при $x\leqslant 0$, поэтому график этой функции касается оси абсцисс в точке $x=0$ и переходит в этой точке из нижней полуплоскости в верхнюю. В то же время производная функции $f(x)$
$$f'(x)=\begin{cases} 6x^2+3x^2\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$
не монотонна ни в какой полуокрестности точки $x=0$.

В заключение вновь вернемся к определению (11) выпуклой функции и докажем следующее

Утверждение 7 (неравенство Иенсена[1]). *Если $f\colon]a,b[\,\to\mathbb{R}$ — выпуклая функция, $x_1,\dots,x_n$ — точки интервала $]a,b[$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ — неотрицательные*

[1] И. Л. Иенсен (1859—1925) — датский математик.

числа такие, что $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=1$, *то справедливо неравенство*

$$f(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\ldots+\alpha_nf(x_n). \tag{14}$$

◄ При $n=2$ условие (14) совпадает с определением (11) выпуклой функции.

Покажем, что если (14) справедливо для $n=m-1$, то оно справедливо и для $n=m$.

Пусть, для определенности, в наборе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеем $\alpha_n\neq0$. Тогда $\beta=\alpha_2+\ldots+\alpha_n>0$ и $\frac{\alpha_2}{\beta}+\ldots+\frac{\alpha_n}{\beta}=1$. Используя выпуклость функции, находим

$$f(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n)=f\left(\alpha_1x_1+\beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\ldots+\frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_1f(x_1)+\beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\ldots+\frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right),$$

поскольку $\alpha_1+\beta=1$ и $\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\ldots+\frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right)\in\,]a,b[$.

Далее, по предположению индукции

$$f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\ldots+\frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right)\leqslant\frac{\alpha_2}{\beta}f(x_2)+\ldots+\frac{\alpha_n}{\beta}f(x_n).$$

Следовательно,

$$f(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta}x_2+\ldots+\frac{\alpha_n}{\beta}x_n\right)\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\ldots+\alpha_nf(x_n).$$

В силу принципа индукции заключаем, что (14) верно для любого $n\in\mathbb{N}$. (Для $n=1$ (14) тривиально.) ►

Заметим, что, как видно из доказательства, строгой выпуклости отвечает строгое неравенство Иенсена, т. е. числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ отличны от нуля, то знак равенства в (14) может иметь место тогда и только тогда, когда $x_1=\ldots=x_n$.

Для функции, выпуклой вверх, разумеется, получается обратное по отношению к неравенству (14) неравенство

$$f(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n)\geqslant\alpha_1f(x_1)+\ldots+\alpha_nf(x_n). \tag{15}$$

Пример 17. Функция $f(x)=\ln x$ строго выпукла вверх на множестве положительных чисел, поэтому в силу (15)

$$\alpha_1\ln x_1+\ldots+\alpha_n\ln x_n\leqslant\ln(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n)$$

или

$$x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\leqslant\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n \tag{16}$$

при $x_i\geqslant0$, $\alpha_i\geqslant0$ $(i=1,\ldots,n)$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$.

В частности, если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1/n$, получаем классическое неравенство

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \tag{17}$$

между средним геометрическим и средним арифметическим n неотрицательных чисел. Знак равенства в (17) возможен, как отмечалось выше, только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Если же в (16) положить $n = 2$, $\alpha_1 = 1/p$, $\alpha_2 = 1/q$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, то вновь получим уже известное нам неравенство (5).

Пример 18. Пусть $f(x) = x^p$, $x \geqslant 0$, $p > 1$. Поскольку такая функция выпукла, имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^p.$$

Полагая здесь $q = \frac{p}{p-1}$, $\alpha_i = b_i^q \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{-1}$, $x_i = a_i b_i^{-1/(p-1)} \sum_{i=1}^{n} b_i^q$, вновь получаем неравенство (7) Гёльдера

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $p > 1$.

При $p < 1$ функция $f(x) = x^p$ выпукла вверх, поэтому аналогичными рассуждениями можно получить и другое неравенство (8) Гёльдера.

4. Правило Лопиталя. Остановимся теперь на одном частном, но иногда полезном приеме отыскания предела отношения функций, известном как правило Лопиталя[1].

Утверждение 8 (правило Лопиталя). *Пусть функции* $f\colon\,]a, b[\to \mathbb{R}$ *и* $g\colon\,]a, b[\to \mathbb{R}$ *дифференцируемы на интервале* $]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, *причем* $g'(x) \neq 0$ *на* $]a, b[$ *и*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A \quad \text{при } x \to a + 0 \quad (-\infty \leqslant A \leqslant +\infty).$$

Тогда в каждом из двух следующих случаев:

1° $(f(x) \to 0) \wedge (g(x) \to 0)$ *при* $x \to a + 0$

или

2° $g(x) \to \infty$ *при* $x \to a + 0$

будет

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A \quad \text{при } x \to a + 0.$$

Аналогичное утверждение справедливо и при $x \to b - 0$.

---

[1] Г. Ф. де Лопиталь (1661—1704) — французский математик, способный ученик Иоганна Бернулли, маркиз, для которого последний в 1691—1692 гг. написал первый учебник анализа. Часть этого учебника, посвященная дифференциальному исчислению, в слегка измененном виде была опубликована Лопиталем под своим именем. Таким образом, «правилом Лопиталя» мы обязаны Иоганну Бернулли.

Коротко, но не вполне точно правило Лопиталя формулируют так: *предел отношения функций равен пределу отношения их производных, если последний существует*.

◄ Если $g'(x) \neq 0$, то на основании теоремы Ролля заключаем, что $g(x)$ строго монотонна на $]a, b[$. Значит, уменьшив, если нужно, промежуток $]a, b[$ за счет сдвига в сторону конца a, можно считать, что $g(x) \neq 0$ на $]a, b[$. Для $x, y \in]a, b[$ по теореме Коши найдется точка $\xi \in]a, b[$ такая, что

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Перепишем это равенство в удобном для нас сейчас виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right).$$

При $x \to a+0$ согласованно с изменением x будем стремить y к $a+0$ так, чтобы при этом

$$\frac{f(y)}{g(x)} \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{g(y)}{g(x)} \to 0.$$

В любом из данных нам двух вариантов 1° и 2° это, очевидно, можно сделать. Так как ξ лежит между x и y, то вместе с x и y также $\xi \to a+0$. Значит, правая, а следовательно, и левая часть последнего равенства при этом стремятся к A. ►

Пример 19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

Этот пример не следует рассматривать как новое, независимое доказательство того, что $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$. Дело в том, что, например, при выводе соотношения $\sin' x = \cos x$ мы уже использовали вычисленный здесь предел.

В возможности применения правила Лопиталя всегда убеждаемся только после того, как найдем предел отношения производных. При этом не следует забывать о проверке условий 1° или 2°. Важность этих условий показывает следующий

Пример 20. Пусть $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$. Тогда $f'(x) = -\sin x$, $g'(x) = \cos x$ и $\frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty$ при $x \to +0$, в то время как $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to 0$ при $x \to +0$.

Пример 21.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha > 0.$$

Пример 22.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{a^x (\ln a)^n} = 0$$

при $a > 1$, ибо при $n > \alpha$ и $a > 1$, очевидно, $\frac{x^{\alpha-n}}{a^x} \to 0$, если $x \to +\infty$.

Заметим, что вся цепочка последних равенств носила условный характер до тех пор, пока мы не пришли к выражению, предел которого смогли найти.

5. Построение графика функции. Для наглядного описания функции очень часто используют ее графическое представление. Как правило, такое представление бывает полезно для обсуждения качественных вопросов поведения исследуемой функции.

Для точных расчетов графики используются реже. В связи с этим практически важным оказывается не столько скрупулезное воспроизведение функции в виде графика, сколько построение эскиза графика функции, правильно отражающего основные элементы ее поведения. Некоторые общие приемы, встречающиеся при построении эскизов графиков функций, мы и рассмотрим в этом пункте.

a. Графики элементарных функций. Напомним прежде всего, как выглядят графики основных элементарных функций, свободное владение которыми необходимо для дальнейшего (рис. 24—30).

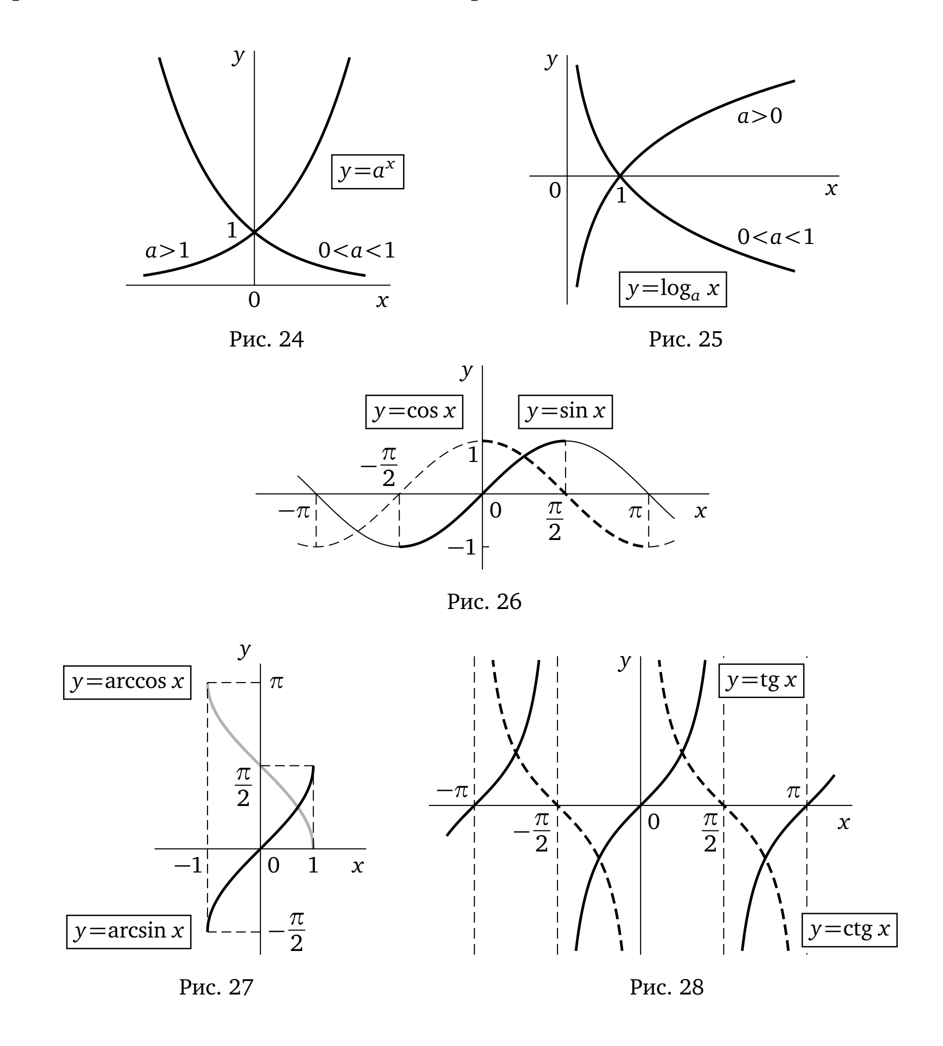


Рис. 24

Рис. 25

Рис. 26

Рис. 27

Рис. 28

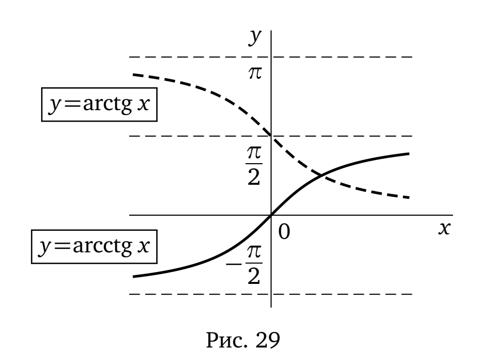


Рис. 29

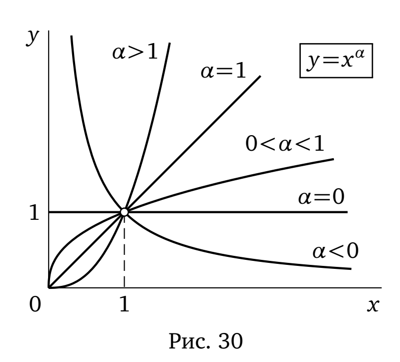


Рис. 30

b. Примеры построения эскизов графиков функций (без привлечения дифференциального исчисления). Рассмотрим теперь некоторые примеры, в которых эскиз графика функции может быть легко построен, если нам известны графики и свойства простейших элементарных функций.

Пример 23. Построим эскиз графика функции

$$y = \log_{x^2-3x+2} 2.$$

Учитывая, что

$$y = \log_{x^2-3x+2} 2 = \frac{1}{\log_2(x^2-3x+2)} = \frac{1}{\log_2(x-1)(x-2)},$$

строим последовательно график квадратного трехчлена $y_1 = x^2 - 3x + 2$, затем $y_2 = \log_2 y_1(x)$ и затем $y = \frac{1}{y_2(x)}$ (рис. 31).

«Угадать» такой вид графика можно было бы и иначе: выяснить область определения функции

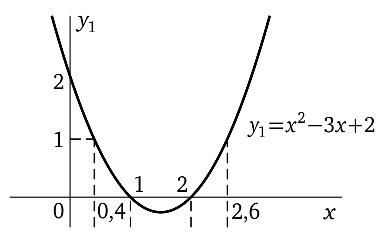
$$\log_{x^2-3x+2} 2 = (\log_2(x^2-3x+2))^{-1},$$

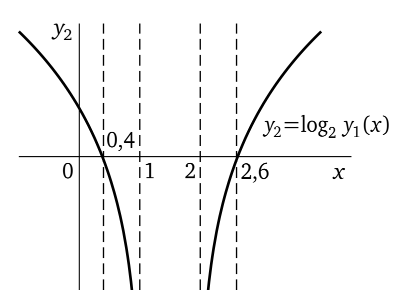
найти поведение функции при приближении к граничным точкам области определения и на промежутках, концы которых являются граничными точками области определения, нарисовать «плавную кривую» с учетом найденного поведения функции у концов промежутка.

Пример 24. Построение эскиза графика функции

$$y = \sin x^2$$

видно из рис. 32.





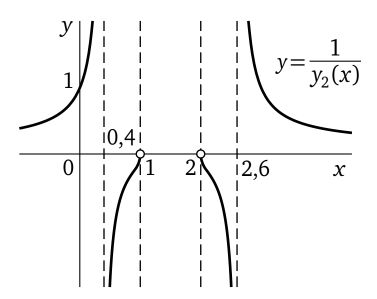


Рис. 31

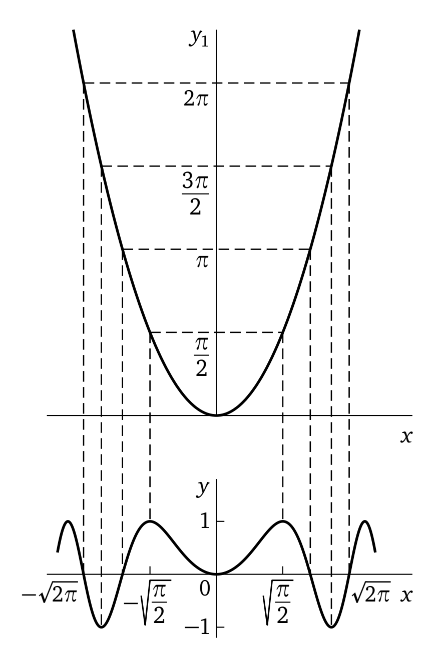


Рис. 32

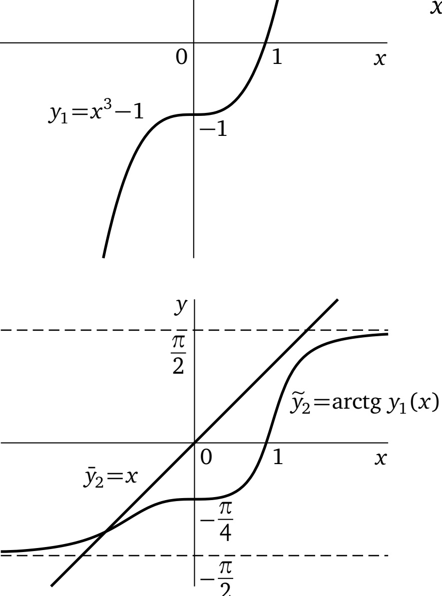
Мы построили этот график по некоторым характерным для данной функции точкам — тем точкам, где $\sin x^2 = -1$, $\sin x^2 = 0$ или $\sin x^2 = 1$. Между двумя соседними точками такого типа функция монотонна. Вид графика в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$ определяется тем, что $\sin x^2 \sim x^2$ при $x \to 0$. Кроме того, полезно заметить, что данная функция четна.

Поскольку мы все время будем говорить только об эскизном, а не точном построении графика функции, то условимся ради краткости в дальнейшем считать, что требование «построить график функции» для нас всегда будет равносильно требованию «построить эскиз графика функции».

Пример 25. Построим график функции

$$y = x + \operatorname{arctg}(x^3 - 1)$$

(рис. 33). При $x \to -\infty$ график хорошо приближается прямой $y = x - \frac{\pi}{2}$, а при $x \to +\infty$ — прямой $y = x + \frac{\pi}{2}$.



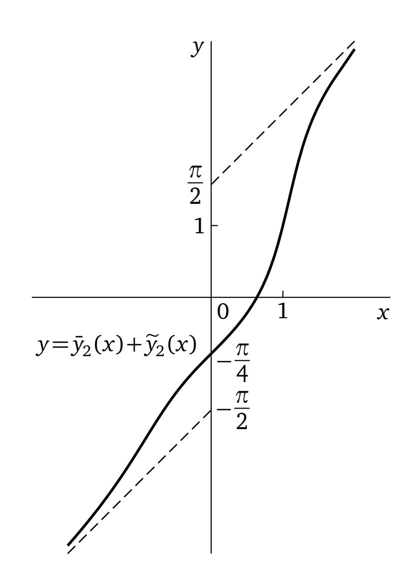


Рис. 33

Введем следующее полезное

Определение 4. Прямая $y=c_0+c_1x$ называется *асимптотой графика функции* $y=f(x)$ при $x\to-\infty$ (при $x\to+\infty$), если $f(x)-(c_0+c_1x)=o(1)$ при $x\to-\infty$ (при $x\to+\infty$).

Таким образом, в нашем случае при $x\to-\infty$ график имеет асимптоту $y=x-\frac{\pi}{2}$, а при $x\to+\infty$ — асимптоту $y=x+\frac{\pi}{2}$.

Если при $x\to a-0$ (или при $x\to a+0$) $|f(x)|\to\infty$, то ясно, что график функции в этом случае будет по мере приближения x к a все теснее примыкать к вертикальной прямой $x=a$. Эту прямую называют *вертикальной асимптотой* графика, в отличие от введенной в определении 4 асимптоты, которая всегда наклонна.

Так, график из примера 23 (см. рис. 31) имеет две вертикальные асимптоты и горизонтальную асимптоту (общую для $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$).

Из определения 4, очевидно, вытекает, что

$$c_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},$$
$$c_0=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-c_1x).$$

И вообще, если $f(x)-(c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n)=o(1)$ при $x\to-\infty$, то

$$\begin{aligned}c_n&=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^n},\\ c_{n-1}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-c_nx^n}{x^{n-1}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_0&=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(c_1x+\ldots+c_nx^n)).\end{aligned}$$

Эти соотношения, выписанные нами для случая $x\to-\infty$, разумеется, справедливы также в случае $x\to+\infty$ и могут быть использованы для описания асимптотического поведения графика функции $f(x)$ с помощью графика соответствующего алгебраического полинома $c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n$.

Пример 26. Пусть (ρ,φ) — полярные координаты на плоскости, и пусть точка движется по плоскости так, что в момент времени t ($t\geqslant 0$)

$$\rho=\rho(t)=1-e^{-t}\cos\frac{\pi}{2}t,$$
$$\varphi=\varphi(t)=1-e^{-t}\sin\frac{\pi}{2}t.$$

Требуется нарисовать траекторию точки.

Нарисуем для этого сначала графики функций $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ (рис. 34, a, 34, b).

Теперь, глядя одновременно на оба построенных графика, можем нарисовать общий вид траектории точки (рис. 34, c).

c. Использование дифференциального исчисления при построении графика функции. Как мы видели, графики многих функций можно в общих чертах нарисовать, не выходя за пределы самых простых соображений.

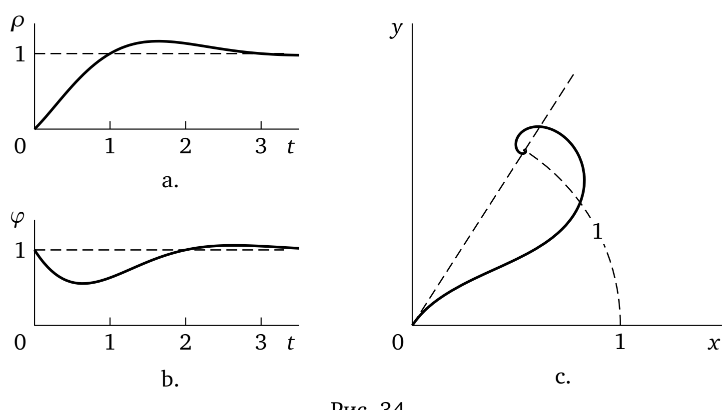


Рис. 34

Однако если мы желаем уточнить эскиз, то в случае, когда производная исследуемой функции не слишком сложная, можно привлечь аппарат дифференциального исчисления. Продемонстрируем это на примерах.

Пример 27. Построить график функции $y = f(x)$ в случае

$$f(x) = |x+2|e^{-1/x}.$$

Функция $f(x)$ определена при $x \in \mathbb{R} \setminus 0$. Поскольку $e^{-1/x} \to 1$ при $x \to \infty$, то

$$|x+2|e^{-1/x} \sim \begin{cases} -(x+2) & \text{при } x \to -\infty, \\ (x+2) & \text{при } x \to +\infty. \end{cases}$$

Далее, при $x \to -0$, очевидно, имеем $|x+2|e^{-1/x} \to +\infty$, а при $x \to +0$ $|x+2|e^{-1/x} \to +0$. Наконец, видно, что $f(x) \geqslant 0$ и $f(-2) = 0$. На основании этих наблюдений уже можно сделать первый набросок графика (рис. 35, a).

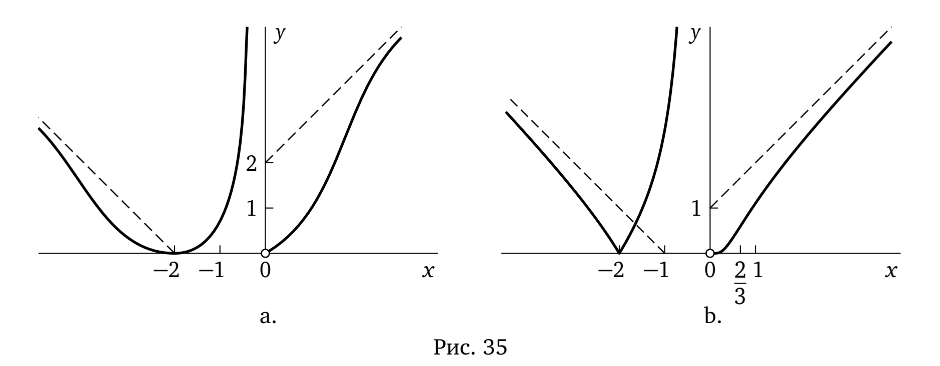


Рис. 35

Выясним теперь основательно, действительно ли данная функция монотонна на промежутках $]-\infty, -2]$, $[-2, 0[$, $]0, +\infty[$, действительно ли она имеет указанные асимптоты и правильно ли изображен характер выпуклости графика функции.

Поскольку

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2+x+2}{x^2}\, e^{-1/x}, & \text{если } x < -2, \\ \dfrac{x^2+x+2}{x^2}\, e^{-1/x}, & \text{если } -2 < x \text{ и } x \neq 0, \end{cases}$$

и $f'(x) \neq 0$, то можно составить следующую таблицу:

Промежуток	$]-\infty, -2[$	$]-2, 0[$	$]0, +\infty[$
Знак $f'(x)$	$-$	$+$	$+$
Поведение $f(x)$	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow +\infty$	$0 \nearrow +\infty$

На участках постоянства знака производной функция, как мы знаем, имеет соответствующий характер монотонности. В нижней строке таблицы символ $+\infty \searrow 0$ означает монотонное убывание от $+\infty$ до 0, а символ $0 \nearrow +\infty$ — монотонное возрастание значений функции от 0 до $+\infty$.

Заметим, что $f'(x) \to -4e^{-1/2}$ при $x \to -2-0$ и $f'(x) \to 4e^{-1/2}$ при $x \to \to -2+0$, поэтому точка $(-2, 0)$ должна быть угловой точкой графика (излом типа излома у графика функции $|x|$), а не обычной точкой, как это у нас изображено на рис. 35, а. Далее, $f'(x) \to 0$ при $x \to +0$, поэтому график должен выходить из начала координат, касаясь оси абсцисс (вспомните геометрический смысл $f'(x)$!).

Уточним теперь асимптотику функции при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

Поскольку $e^{-1/x} = 1 - x^{-1} + o(x^{-1})$ при $x \to \infty$, то

$$|x+2|e^{-1/x} \sim \begin{cases} -x-1+o(1) & \text{при } x \to -\infty, \\ x+1+o(1) & \text{при } x \to +\infty, \end{cases}$$

значит, на самом деле наклонные асимптоты графика суть $y = -x-1$ при $x \to -\infty$ и $y = x+1$ при $x \to +\infty$.

По этим данным уже можно построить достаточно надежный эскиз графика, но мы пойдем дальше и, вычислив

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2-3x}{x^4} e^{-1/x}, & \text{если } x < -2, \\ \dfrac{2-3x}{x^4} e^{-1/x}, & \text{если } -2 < x \text{ и } x \neq 0, \end{cases}$$

найдем участки выпуклости графика.

Поскольку $f''(x) = 0$ лишь при $x = 2/3$, то имеем следующую таблицу:

Промежуток	$]-\infty, -2[$	$]-2, 0[$	$]0, 2/3[$	$]2/3, +\infty[$
Знак $f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
Выпуклость $f(x)$	Вверх	Вниз	Вниз	Вверх

Поскольку при $x=2/3$ наша функция дифференцируема, а при переходе через эту точку $f''(x)$ меняет знак, то точка $(2/3, f(2/3))$ является точкой перегиба графика.

Между прочим, если бы производная $f'(x)$ обращалась в нуль, то из таблицы знаков $f'(x)$ можно было бы судить о наличии или отсутствии экстремума в соответствующей точке. В нашем случае $f'(x)$ нигде не обращается в нуль, но в точке $x=-2$ функция имеет локальный минимум: она непрерывна в этой точке и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с $-$ на $+$. Впрочем, то, что при $x=-2$ наша функция имеет минимум, видно уже из приведенного в таблице описания изменения значений функции $f(x)$ на соответствующих промежутках, если, конечно, учесть еще, что $f(-2)=0$.

Теперь можно нарисовать более точный эскиз графика данной функции (см. рис. 35, b).

В заключение рассмотрим еще один

Пример 28. Пусть (x, y) — декартовы координаты на плоскости, и пусть движущаяся точка в каждый момент t $(t \geqslant 0)$ имеет координаты

$$x=\frac{t}{1-t^2}, \quad y=\frac{t-2t^3}{1-t^2}.$$

Требуется изобразить траекторию движения точки.

Нарисуем сначала эскизы графиков каждой из данных координатных функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$ (рис. 36, a, 36, b).

Второй из этих графиков несколько интереснее, поэтому поясним его построение.

Поведение функции $y=y(t)$ при $t\to+0$, $t\to1-0$, $t\to1+0$ и асимптотику $y(t)=2t+o(1)$ при $t\to+\infty$ усматриваем непосредственно из вида аналитического выражения для $y(t)$.

Вычислив производную

$$\dot{y}(t)=\frac{1-5t^2+2t^4}{(1-t^2)^2},$$

находим ее нули: $t_1\approx0{,}5$ и $t_2\approx1{,}5$ в области $t\geqslant0$.

Составив таблицу:

Промежуток	$]0, t_1[$	$]t_1, 1[$	$]1, t_2[$	$]t_2, +\infty[$
Знак $\dot{y}(t)$	$+$	$-$	$-$	$+$
Поведение $y(t)$	$0 \nearrow y(t_1)$	$y(t_1)\searrow -\infty$	$+\infty \searrow y(t_2)$	$y(t_2)\nearrow +\infty$

находим участки монотонности и локальные экстремумы $y(t_1)\approx\frac{1}{3}$ (max) и $y(t_2)\approx4$ (min).

Теперь, глядя одновременно на оба графика $x=x(t)$ и $y=y(t)$, строим эскиз траектории движения точки по плоскости (см. рис. 36, c).

Этот эскиз можно уточнять. Например, можно выяснить асимптотику траектории.

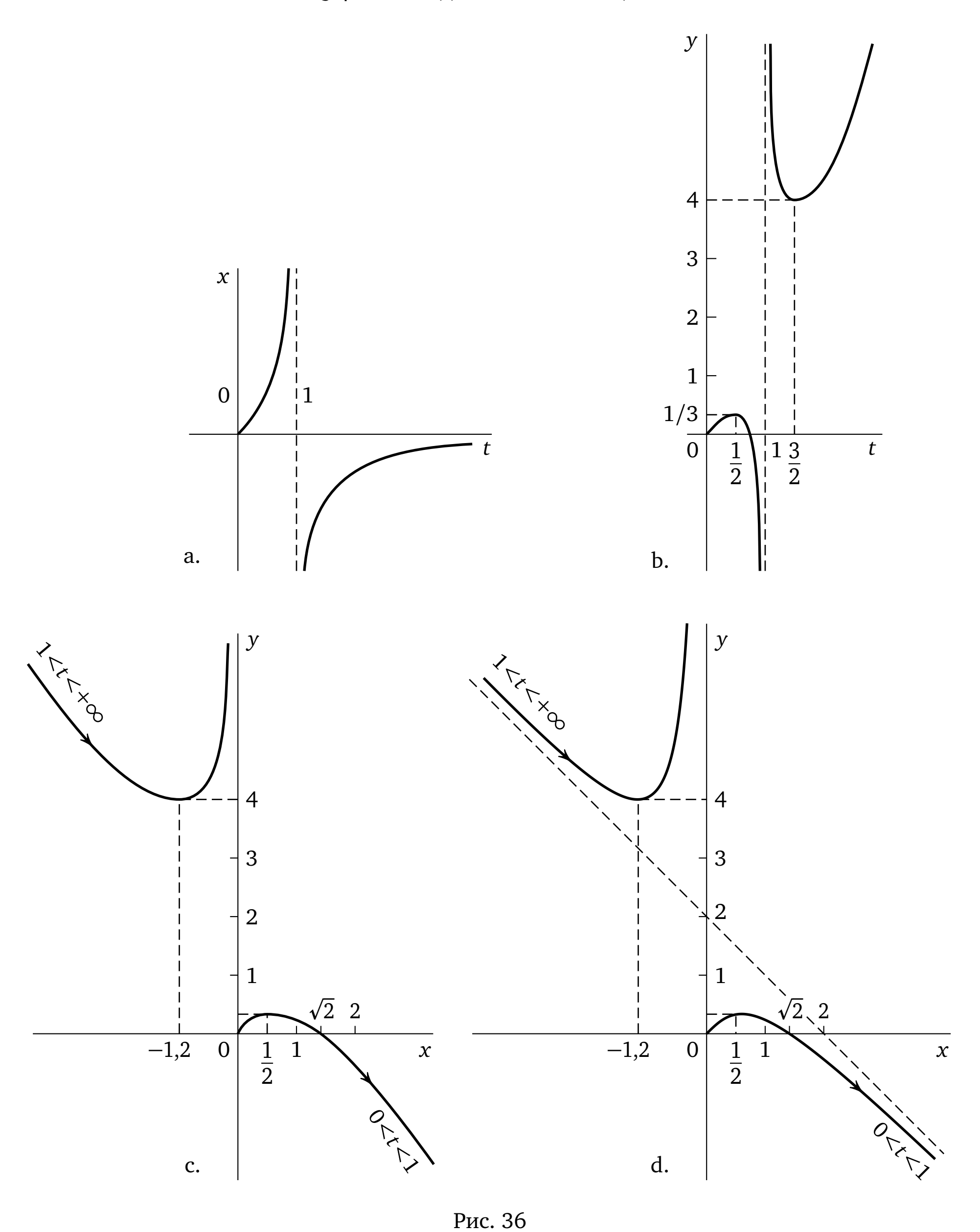


Рис. 36

Поскольку $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{y(t)}{x(t)}=-1$ и $\lim\limits_{t\to 1}(y(t)+x(t))=2$, то прямая $y=-x+2$ является асимптотой для обоих концов траектории, отвечающих стремлению t к 1. Ясно также, что прямая $x=0$ есть вертикальная асимптота для участка траектории, отвечающего $t\to+\infty$.

Найдем далее
$$y'_x = \frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t} = \frac{1-5t^2+2t^4}{1+t^2}.$$

Функция $\frac{1-5u+2u^2}{1+u}$, как легко выяснить, монотонно убывает от 1 до -1 при возрастании u от 0 до 1 и возрастает от -1 до $+\infty$ при возрастании u от 1 до $+\infty$.

Из характера монотонности y'_x можно сделать заключение о характере выпуклости траектории на соответствующем участке. С учетом сказанного теперь можно построить следующий, более точный эскиз траектории движения точки (см. рис. 36, d).

Если бы мы рассматривали траекторию также для $t<0$, то, как следует из нечетности функций $x(t)$, $y(t)$, к уже построенным на плоскости (x, y) линиям добавились бы еще центрально симметричные им кривые.

Подведем некоторые итоги в виде самых общих рекомендаций относительно порядка построения графика заданной аналитически функции. Вот эти рекомендации.

1° Указать область определения функции.

2° Отметить специфические особенности функции, если они очевидны (например, четность, нечетность, периодичность, совпадение с точностью до простейших преобразований координат с графиками уже известных функций).

3° Выяснить асимптотическое поведение функции при подходе к граничным точкам области определения и, в частности, найти асимптоты, если они существуют.

4° Найти промежутки монотонности функции и указать ее локальные экстремумы.

5° Уточнить характер выпуклости графика и указать точки перегиба.

6° Отметить характерные точки графика, в частности точки пересечения с осями координат, если таковые имеются и доступны вычислению.

Задачи и упражнения

1. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, причем $x_i \geqslant 0$, $\alpha_i>0$ при $i=1, \ldots, n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Для любого числа $t \neq 0$ рассмотрим *среднее порядка t чисел* $x_1, \ldots, x_n$ с весами α_i:
$$M_t(x, \alpha) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^t\right)^{1/t}.$$
В частности, при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1/n$ и $t=-1, 1, 2$ получаем соответственно среднее гармоническое, среднее арифметическое и среднее квадратическое.

Покажите, что

a) $\lim\limits_{t\to 0} M_t(x, \alpha) = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, т. е. в пределе можно получить среднее геометрическое;

b) $\lim\limits_{t\to +\infty} M_t(x, \alpha) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$;

c) $\lim\limits_{t\to-\infty} M_t(x,\alpha)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i$;

d) $M_t(x,\alpha)$ — неубывающая функция от t на $\mathbb{R}$, причем она строго возрастает, если $n>1$ и все числа x_i отличны от нуля.

2. Покажите, что $|1+x|^p\geqslant 1+px+c_p\varphi_p(x)$, где c_p — постоянная, зависящая только от p, а

$$\varphi_p(x)=\begin{cases}|x|^2 & \text{при } |x|\leqslant 1,\\ |x|^p & \text{при } |x|>1,\end{cases}\quad \text{если } 1<p\leqslant 2,$$

и $\varphi_p(x)=|x|^p$ на $\mathbb{R}$, если $2<p$.

3. Проверьте, что $\cos x<\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$ при $0<|x|<\frac{\pi}{2}$.

4. Исследуйте функцию $f(x)$ и постройте ее график, если

a) $f(x)=\operatorname{arctg}\,\log_2\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$;

b) $f(x)=\arccos\left(\frac{3}{2}-\sin x\right)$;

c) $f(x)=\sqrt[3]{x(x+3)^2}$;

d) постройте кривую, заданную в полярных координатах уравнением $\varphi=\frac{\rho}{\rho^2+1}$, $\rho\geqslant 0$, и укажите ее асимптоту;

e) укажите, как, зная график функции $y=f(x)$, получить графики функций $f(x)+B$; $Af(x)$; $f(x+b)$; $f(ax)$ и, в частности, $-f(x)$ и $f(-x)$.

5. Покажите, что если $f\in C(]a,b[)$ и для любых точек $x_1,x_2\in\,]a,b[$ выполнено неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

то функция f выпуклая на $]a,b[$.

6. Пусть $x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$, где $\alpha_1+\alpha_2=1$.

a) Опишите положение точки x по отношению к отрезку $[x_1,x_2]$ при различных значениях параметров α_1,α_2.

b) Нарисуйте график функции f, строго выпуклой на числовой оси, и прямую, проходящую через точки $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$ графика. После этого напишите очевидные неравенства между $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)$ и $\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)$ при различных значениях параметров α_1,α_2, удовлетворяющих соотношению $\alpha_1+\alpha_2=1$.

c) Каковы неравенства (Юнга) между $a^{1/p}b^{1/q}$ и $\frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b$ при различных значениях p,q, если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$?

d) Напишите уравнение касательной к графику функции $(1+x)^\alpha$ в точке $(0,1)$ и укажите правильный знак неравенства между величинами $(1+x)^\alpha$ и $1+\alpha x$ при $x>-1$ и различных значениях параметра α. В случае $\alpha\in\mathbb{N}$ имеем классическое неравенство Бернулли.

7. Покажите, что

a) если выпуклая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ограничена, то она постоянна;

b) если для выпуклой функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

то f — постоянная;

c) для любой выпуклой функции f, определенной на промежутке $a<x<+\infty$ (или $-\infty<x<a$), отношение $\frac{f(x)}{x}$ стремится к конечному пределу или к бесконечности при стремлении x к бесконечности по области определения функции.

8. Покажите, что если $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, то

a) в любой точке $x \in]a, b[$ она имеет левую f'_- и правую f'_+ производные:

$$f'_-(x) = \lim_{h\to -0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'_+(x) = \lim_{h\to +0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

причем $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$;

b) при $x_1, x_2 \in]a, b[$ и $x_1 < x_2$ имеет место неравенство $f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2)$;

c) множество угловых точек графика $f(x)$ (для которых $f'_-(x) \neq f'_+(x)$) не более чем счетно.

9. *Преобразованием Лежандра*[1] функции $f\colon I \to \mathbb{R}$, определенной в промежутке $I \subset \mathbb{R}$, называется функция

$$f^*(t) = \sup_{x\in I} (tx - f(x)).$$

Покажите, что:

a) Множество I^* тех значений $t \in \mathbb{R}$, для которых $f^*(t) \in \mathbb{R}$ (т. е. $f^*(t) \neq \infty$), либо пусто, либо состоит из одной точки, либо является числовым промежутком, причем в последнем случае функция $f^*(t)$ выпукла на I^*.

b) Если f — выпуклая функция, то $I^* \neq \varnothing$ и при $f^* \in C(I^*)$

$$(f^*)^*(x) = \sup_{t\in I^*} (xt - f^*(t)) = f(x)$$

для любого $x \in I$. Таким образом, преобразование Лежандра выпуклой функции *инволютивно* (квадрат его есть тождественное преобразование).

c) Имеет место неравенство

$$xt \leqslant f(x) + f^*(t) \quad \text{при } x \in I \text{ и } t \in I^*.$$

d) В случае, когда f — выпуклая дифференцируемая функция, $f^*(t) = tx_t - f(x_t)$, где x_t определяется из уравнения $t = f'(x)$; получите отсюда геометрическую интерпретацию преобразования Лежандра f^* и его аргумента t, показывающую, что преобразование Лежандра есть функция, определенная на множестве касательных к графику функции f.

e) Преобразованием Лежандра функции $f(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha$ при $\alpha > 1$ и $x \geqslant 0$ является функция $f^*(t) = \frac{1}{\beta} t^\beta$, где $t \geqslant 0$ и $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$; получите отсюда, с учетом c), уже знакомое неравенство Юнга

$$xt \leqslant \frac{1}{\alpha} x^\alpha + \frac{1}{\beta} t^\beta.$$

f) Преобразованием Лежандра функции $f(x) = e^x$ является функция $f^*(t) = t \ln \frac{t}{e}$, $t > 0$, и справедливо неравенство

$$xt \leqslant e^x + t \ln \frac{t}{e}$$

при $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$.

10. *Кривизна, радиус и центр кривизны кривой в точке.* Пусть некоторая точка движется в плоскости по закону, задаваемому парой дважды дифференцируемых координатных функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ от времени. При этом она описывает неко-

[1] А. М. Лежандр (1752—1833) — известный французский математик.

торую кривую, про которую говорят, что кривая задана в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$. Частным случаем такого задания является случай графика функции $y = f(x)$, где можно считать, что $x = t$ и $y = f(t)$. Мы хотим указать число, характеризующее кривизну кривой в некоторой точке, подобно тому как величина, обратная радиусу окружности, может служить показателем искривленности окружности. Этим сравнением мы и воспользуемся.

a) Найдите тангенциальную $\boldsymbol{a}_t$ и нормальную $\boldsymbol{a}_n$ составляющие вектора $\boldsymbol{a} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$ ускорения точки, т. е. представьте $\boldsymbol{a}$ в виде суммы $\boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$, где вектор $\boldsymbol{a}_t$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ скорости, т. е. направлен по касательной к траектории, а вектор $\boldsymbol{a}_n$ направлен по нормали к траектории.

b) Покажите, что при движении по окружности радиуса r имеет место соотношение

$$r = \frac{|\boldsymbol{v}(t)|}{|\boldsymbol{a}_n(t)|}.$$

c) При движении по любой кривой, учитывая b), величину

$$r(t) = \frac{|\boldsymbol{v}(t)|}{|\boldsymbol{a}_n(t)|}$$

естественно назвать *радиусом кривизны* кривой в точке $(x(t), y(t))$.

Покажите, что радиус кривизны вычисляется по формуле

$$r(t) = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}.$$

d) Величину, обратную радиусу кривизны, называют *абсолютной кривизной* плоской кривой в данной точке $(x(t), y(t))$. Наряду с абсолютной кривизной рассматривается величина

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}},$$

называемая *кривизной*.

Покажите, что знак кривизны характеризует направление поворота кривой по отношению к касательной. Выясните, какова размерность кривизны.

e) Покажите, что кривизну графика функции $y = f(x)$ в точке $(x, f(x))$ можно вычислить по формуле

$$k(x) = \frac{y''(x)}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Сопоставьте знаки $k(x)$ и $y''(x)$ с направлением выпуклости графика.

f) Подберите константы a, b, R так, чтобы окружность $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ имела с данной параметрически заданной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ в точке $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ касание возможно более высокого порядка. Предполагается, что $x(t)$, $y(t)$ дважды дифференцируемы и $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)) \neq (0, 0)$.

Указанная окружность называется *соприкасающейся окружностью* кривой в точке (x_0, y_0). Ее центр называется *центром кривизны* кривой в точке (x_0, y_0). Проверьте, что ее радиус совпадает с определенным в b) радиусом кривизны кривой в этой точке.

g) Частица без предварительного разгона под действием силы тяжести начинает скатываться с вершины ледяной горки параболического профиля. Уравнение профиля $x + y^2 = 1$, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Рассчитайте траекторию движения частицы до ее приземления.

§ 5. Комплексные числа и взаимосвязь элементарных функций

1. Комплексные числа. Подобно тому, как в области $\mathbb{Q}$ рациональных чисел алгебраическое уравнение $x^2=2$ не имело решений, уравнение $x^2=-1$ не имеет решений в области действительных чисел $\mathbb{R}$, и подобно тому, как, вводя внешний по отношению к $\mathbb{Q}$ символ $\sqrt{2}$ в качестве решения уравнения $x^2=2$, мы увязываем его с операциями в $\mathbb{Q}$ и получаем новые числа вида $r_1+\sqrt{2}r_2$, где $r_1, r_2\in\mathbb{Q}$, можно ввести символ i в качестве решения уравнения $x^2=-1$ и связать это внешнее по отношению к $\mathbb{R}$ число i с действительными числами и арифметическими операциями в $\mathbb{R}$.

Замечательной особенностью указанного расширения поля $\mathbb{R}$ действительных чисел, кроме многого другого, является то, что в получающемся при этом поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел уже любое алгебраическое уравнение с действительными или комплексными коэффициентами будет иметь решение.

Реализуем теперь намеченную программу.

a. Алгебраическое расширение поля $\mathbb{R}$. Итак, вводим (следуя обозначению Эйлера) новое число i — *мнимую единицу*, такое, что $i^2=-1$.

Взаимодействие i с действительными числами должно состоять в том, что можно умножать i на числа $y\in\mathbb{R}$, т. е. необходимо появляются числа вида iy, и складывать такие числа с вещественными, т. е. появляются числа вида $x+iy$, где $x, y\in\mathbb{R}$.

Если мы хотим, чтобы на множестве объектов вида $x+iy$, которые мы вслед за Гауссом назовем *комплексными числами*, были определены привычные операции коммутативного сложения и коммутативного умножения, дистрибутивного относительно сложения, то необходимо положить по определению, что

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2):=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \tag{1}$$

и

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2):=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \tag{2}$$

Два комплексных числа x_1+iy_1, x_2+iy_2 считаются равными в том и только в том случае, когда $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

Отождествим числа $x\in\mathbb{R}$ с числами вида $x+i\cdot 0$, а i — с числом $0+i\cdot 1$. Роль нуля в множестве комплексных чисел, как видно из (1), играет число $0+i\cdot 0=0\in\mathbb{R}$, роль единицы, как видно из (2), — число $1+i\cdot 0=1\in\mathbb{R}$.

Из свойств вещественных чисел и определений (1), (2) следует, что множество комплексных чисел является полем, содержащим $\mathbb{R}$ в качестве подполя.

Поле комплексных чисел будем обозначать символом $\mathbb{C}$, а его элементы — чаще всего буквами z и w.

Единственный не очевидный момент в утверждении о том, что $\mathbb{C}$ — поле, который нуждается в проверке, состоит в том, что любое отличное от нуля

комплексное число $z = x + iy$ имеет обратное z^{-1} по отношению к умножению, т. е. $z \cdot z^{-1} = 1$. Проверим это.

Число $x - iy$ назовем *сопряженным* к числу $z = x + iy$ и обозначим символом $\bar{z}$.

Заметим, что $z \cdot \bar{z} = (x^2 + y^2) + i \cdot 0 = x^2 + y^2 \neq 0$, если $z \neq 0$. Таким образом, в качестве z^{-1} следует взять $\frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \bar{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$.

b. Геометрическая интерпретация поля $\mathbb{C}$. Заметим, что после того, как алгебраические операции (1), (2) над комплексными числами введены, символ i, который привел нас к этим определениям, перестает быть необходимым.

Комплексное число $z = x + iy$ мы можем отождествить с упорядоченной парой (x, y) действительных чисел, называемых соответственно *действительной частью* и *мнимой частью* комплексного числа z (обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$[1]).

Но тогда, считая пару (x, y) декартовыми координатами точки плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, можно отождествить комплексные числа с точками этой плоскости или с двумерными векторами с координатами (x, y).

В такой векторной интерпретации покоординатное сложение (1) комплексных чисел соответствует правилу сложения векторов. Кроме того, такая интерпретация естественно приводит также к понятию *модуля* $|z|$ комплексного числа z как модуля или длины соответствующего ему вектора (x, y), т. е.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{если } z = x + iy, \tag{3}$$

а также к способу измерения расстояния между комплексными числами z_1, z_2 как расстояния между соответствующими им точками плоскости, т. е. с помощью величины

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{4}$$

Множество комплексных чисел, интерпретируемое как множество точек плоскости, называется *комплексной плоскостью* и также обозначается символом $\mathbb{C}$, подобно тому, как множество вещественных чисел и числовая прямая обозначаются одним символом $\mathbb{R}$.

Поскольку точку плоскости можно задать также полярными координатами (r, φ), связанными с декартовыми координатами формулами перехода

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

комплексное число

$$z = x + iy \tag{6}$$

[1]От лат. realis (вещественный) и imaginarius (мнимый).

можно также представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{7}$$

Записи (6) и (7) называют соответственно *алгебраической* и *тригонометрической* формами комплексного числа.

В записи (7) число $r \geqslant 0$ называется *модулем* комплексного числа z (ибо, как видно из (5), $r = |z|$), а φ — *аргументом* числа z. Аргумент имеет смысл только при $z \neq 0$. В силу периодичности функций $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ аргумент комплексного числа определен с точностью до величины, кратной 2π, и символом $\operatorname{Arg} z$ обозначают множество углов вида $\varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, где φ — какой-то угол, удовлетворяющий соотношению (7). Если желают, чтобы комплексное число однозначно определяло некоторый угол $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, то договариваются заранее о диапазоне, в котором его выбирают. Чаще всего это бывает полуинтервал $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или полуинтервал $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Если такой выбор сделан, то говорят, что выбрана *ветвь* (или *главная ветвь*) аргумента. Значения аргумента в пределах выбранного диапазона обычно обозначают символом $\arg z$.

Тригонометрическая форма (7) записи комплексных чисел удобна при выполнении операции умножения комплексных чисел. В самом деле, если

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (r_1\cos\varphi_1 + ir_1\sin\varphi_1)(r_2\cos\varphi_2 + ir_2\sin\varphi_2) = \\ = (r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - r_1r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ + i(r_1r_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + r_1r_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2), \end{aligned}$$

или

$$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \tag{8}$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Заметим, что мы на самом деле показали, что если $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$ и $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$, то $(\varphi_1 + \varphi_2) \in \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2)$. Но, поскольку аргумент определен с точностью до $2\pi k$, можно записать, что

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \tag{9}$$

понимая это равенство как равенство множеств, правое из которых есть совокупность чисел вида $\varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1$, а $\varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2$. Таким образом, сумму аргументов полезно понимать в смысле равенства (9).

При таком понимании равенства аргументов можно, например, утверждать, что два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда соответственно равны их модули и аргументы.

Из формулы (8) по индукции вытекает следующая формула Муавра[1]:

$$\text{если } z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ то } z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{10}$$

С учетом разъяснений по поводу аргумента комплексного числа формулу Муавра можно использовать, чтобы в явном виде выписать все комплексные решения уравнения $z^n = a$.

Действительно, если

$$a = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

и в силу формулы (10)

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

то $r = \sqrt[n]{\rho}$ и $n\varphi = \psi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, откуда $\varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$. Различные комплексные числа получаются, очевидно, только при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Итак, мы находим n различных корней из a:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

В частности, если $a = 1$, т. е. $\rho = 1$ и $\psi = 0$, имеем

$$z_k = (\sqrt[n]{1})_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1.)$$

Эти точки находятся на единичной окружности в вершинах правильного n-угольника.

В связи с геометрической интерпретацией самих комплексных чисел полезно упомянуть о геометрической интерпретации арифметических действий над ними.

При фиксированном $b \in \mathbb{C}$ сумму $z + b$ можно интерпретировать как отображение $\mathbb{C}$ в себя, задаваемой формулой $z \mapsto z + b$. Это сдвиг плоскости на вектор b.

При фиксированном $a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ произведение az можно интерпретировать как отображение $z \mapsto az$ $\mathbb{C}$ в себя, являющееся композицией растяжения в $|a|$ раз и поворота на угол $\varphi \in \operatorname{Arg} a$. Это видно из формулы (8).

2. Сходимость в $\mathbb{C}$ и ряды с комплексными членами. Расстояние (4) между комплексными числами позволяет определить ε-окрестность числа $z_0 \in \mathbb{C}$ как множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ — это круг (без граничной окружности) радиуса ε с центром в точке (x_0, y_0), если $z_0 = x_0 + iy_0$.

Будем говорить, что последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел *сходится к числу* $z_0 \in \mathbb{C}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$.

Из неравенств

$$\max\{|x_n - x_0|, |y_n - y_0|\} \leqslant |z_n - z_0| \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0| \tag{11}$$

---

[1] А. Муавр (1667—1754) — английский математик.

видно, что последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности действительных и мнимых частей членов этой последовательности.

По аналогии с последовательностями вещественных чисел последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называют *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при $n, m > N$ выполнено $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Из неравенств (11) видно, что последовательность комплексных чисел фундаментальна тогда и только тогда, когда фундаментальны последовательности действительных и мнимых частей членов данной последовательности.

Учитывая критерий Коши для вещественных последовательностей, мы, таким образом, на основании неравенств (11) заключаем, что справедливо следующее

Утверждение 1 (критерий Коши). *Последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Если сумму ряда комплексных чисел

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \tag{12}$$

понимать как предел его частичных сумм $s_n = z_1 + \ldots + z_n$ при $n \to \infty$, то получаем также критерий Коши сходимости ряда (12).

Утверждение 2. *Ряд (12) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N \in \mathbb{N}$ такое, что при любых натуральных $n \geqslant m > N$ имеем*

$$|z_m + \ldots + z_n| < \varepsilon. \tag{13}$$

Отсюда, как, впрочем, и из самого определения сходимости ряда (12), видно, что для сходимости ряда необходимо, чтобы $z_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Как и в вещественном случае, ряд (12) называется *абсолютно* сходящимся, если сходится ряд

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots \tag{14}$$

Из критерия Коши и неравенства

$$|z_m + \ldots + z_n| \leqslant |z_m| + \ldots + |z_n|$$

следует, что если ряд (12) сходится абсолютно, то он сходится.

Примеры. Ряды

1) $1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \ldots + \frac{1}{n!}z^n + \ldots$,

2) $z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \ldots$,

3) $1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \ldots$

сходятся абсолютно при любом $z \in \mathbb{C}$, ибо ряды

1′) $1 + \frac{1}{1!}|z| + \frac{1}{2!}|z|^2 + \ldots$,

2′) $|z| + \frac{1}{3!}|z|^3 + \frac{1}{5!}|z|^5 + \ldots,$

3′) $1 + \frac{1}{2!}|z|^2 + \frac{1}{4!}|z|^4 + \ldots,$

как мы знаем, сходятся при любом значении $|z| \in \mathbb{R}$. Заметим, что здесь мы воспользовались равенством $|z^n| = |z|^n$.

Пример 4. Ряд $1 + z + z^2 + \ldots$ сходится абсолютно при $|z| < 1$, и его сумма равна $s = \frac{1}{1-z}$. При $|z| \geqslant 1$ он не сходится, так как в этом случае общий член ряда не стремится к нулю.

Ряды вида

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots \tag{15}$$

называют *степенными* рядами.

Применяя признак Коши (см. гл. III, § 1, п. 4) к ряду

$$|c_0| + |c_1(z - z_0)| + \ldots + |c_n(z - z_0)^n| + \ldots, \tag{16}$$

заключаем, что он сходится, если

$$|z - z_0| < \Big(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\Big)^{-1},$$

и его общий член не стремится к нулю, если $|z - z_0| > \Big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\Big)^{-1}$.

Отсюда получаем следующее

Утверждение 3 (формула Коши—Адамара[1]). *Степенной ряд* (15) *сходится в круге $|z - z_0| < R$ с центром в точке z_0, радиус R которого определяется по формуле Коши—Адамара*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{17}$$

В любой точке, внешней по отношению к этому кругу, степенной ряд расходится.

В любой точке этого круга степенной ряд сходится абсолютно.

Замечание. По поводу сходимости на граничной окружности $|z - z_0| = R$ в утверждении 3 ничего не говорится, поскольку здесь возможны все логически допустимые варианты.

Примеры. Ряды

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$

сходятся в единичном круге $|z| < 1$, но ряд 5) расходится всюду при $|z| = 1$; ряд 6) расходится при $z = 1$ и, как можно показать, сходится при $z = -1$; ряд 7) сходится абсолютно при $|z| = 1$, так как $\left|\frac{1}{n^2} z^2\right| = \frac{1}{n^2}$.

[1]Ж. Адамар (1865—1963) — известный французский математик.

Следует иметь в виду не учтенный в формулировке утверждения 3, но возможный вырожденный случай, когда в формуле (17) $R=0$. В этом случае, разумеется, весь *круг сходимости* вырождается в единственную точку z_0 сходимости ряда (15).

Из утверждения 3, очевидно, вытекает

Следствие (первая теорема Абеля о степенных рядах). *Если степенной ряд* (15) *сходится при некотором значении* z^*, *то он сходится и даже абсолютно при любом* z, *удовлетворяющем неравенству* $|z-z_0|<|z^*-z_0|$.

Те утверждения, которые пока были получены, можно рассматривать как простое развитие уже известных нам фактов. Теперь докажем два общих утверждения о рядах, которые мы раньше не доказывали ни в каком виде, хотя частично обсуждали затрагиваемые в них вопросы.

Утверждение 4. *Если ряд* $z_1+z_2+\ldots+z_n+\ldots$ *комплексных чисел сходится абсолютно, то ряд* $z_{n_1}+z_{n_2}+\ldots+z_{n_k}+\ldots$, *полученный перестановкой*[1] *его членов, также абсолютно сходится и к той же сумме.*

◄ Учитывая сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$, по числу $\varepsilon>0$ найдем номер $N\in\mathbb{N}$ так, что $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}|z_n|<\varepsilon$.

Далее найдем номер $K\in\mathbb{N}$ так, что среди слагаемых суммы $\tilde{s}_k=z_{n_1}+\ldots+z_{n_k}$ при $k>K$ содержатся все слагаемые, входящие в сумму $s_N=z_1+\ldots+z_N$. Если $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$, то мы получаем, что при $k>K$

$$|s-\tilde{s}_k|\leqslant|s-s_N|+|s_N-\tilde{s}_k|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}|z_n|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|z_n|<2\varepsilon.$$

Таким образом, показано, что $\tilde{s}_k\to s$ при $k\to\infty$. Если применить уже доказанное к рядам $|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|+\ldots$ и $|z_{n_1}|+|z_{n_2}|+\ldots+|z_{n_k}|+\ldots$, получим, что последний ряд сходится. Тем самым утверждение 4 доказано полностью. ►

Следующее утверждение будет относиться к произведению

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots)\cdot(b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots)$$

рядов. Вопрос состоит в том, что если мы раскроем скобки и запишем всевозможные попарные произведения a_ib_j, то в них нет естественного порядка суммирования, ибо есть два индекса суммирования. Множество пар (i,j), где $i,j\in\mathbb{N}$, как нам известно, счетно, поэтому можно написать ряд с членами a_ib_j, взятыми в некотором порядке. От того, в каком порядке эти члены брать, может зависеть сумма такого ряда. Но, как мы только что видели, в

[1]Членом с номером k (k-м членом) второго ряда является член z_{n_k} с номером n_k исходного ряда. Отображение $\mathbb{N}\ni k\mapsto n_k\in\mathbb{N}$ предполагается биективным отображением множества натуральных чисел $\mathbb{N}$.

абсолютно сходящихся рядах сумма не зависит от перестановки слагаемых. Таким образом, желательно выяснить, когда ряд с членами $a_i b_j$ сходится абсолютно.

Утверждение 5. *Произведение абсолютно сходящихся рядов является абсолютно сходящимся рядом, сумма которого равна произведению сумм перемножаемых рядов.*

◄ Заметим сначала, что, какую бы конечную сумму $\sum a_i b_j$ членов вида $a_i b_j$ мы ни взяли, всегда можно указать N так, что произведение сумм $A_N = a_1 + \ldots + a_N$ и $B_N = b_1 + \ldots + b_N$ будет содержать все слагаемые исходной суммы. Поэтому

$$\Bigl|\sum a_i b_j\Bigr| \leqslant \sum |a_i b_j| \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} |a_i b_j| = \sum_{i=1}^{N} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{N} |b_j| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|,$$

откуда вытекает абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$, сумма которого, таким образом, однозначно определена независимо от порядка слагаемых. В таком случае ее можно получить, например, как предел произведения сумм $A_n = a_1 + \ldots + a_n$, $B_n = b_1 + \ldots + b_n$ при $n \to \infty$. Но $A_n B_n \to AB$ при $n \to \infty$, где $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $B = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, что и завершает доказательство высказанного утверждения 5. ►

Рассмотрим важный

Пример 8. Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n$, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} b^m$ сходятся абсолютно. В произведении этих рядов будем группировать мономы $a^n b^m$ с одинаковой суммой $n + m = k$ показателей степени. Тогда получим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n+m=k} \frac{1}{n!} a^n \frac{1}{m!} b^m \right).$$

Но

$$\sum_{m+n=k} \frac{1}{n!\,m!} a^n b^m = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!\,(k-n)!} a^n b^{k-n} = \frac{1}{k!} (a+b)^k,$$

поэтому мы получаем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} b^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (a+b)^k. \tag{18}$$

3. Формула Эйлера и взаимосвязь элементарных функций. В примерах 1)—3) мы установили абсолютную сходимость в $\mathbb{C}$ рядов, полученных распространением в комплексную область тейлоровских разложений функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, определенных на $\mathbb{R}$. По этой причине естественны следу-

ющие определения функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ в $\mathbb{C}$:

$$e^z = \exp z := 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \ldots, \tag{19}$$

$$\cos z := 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \ldots, \tag{20}$$

$$\sin z := z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \ldots \tag{21}$$

Подставим, следуя Эйлеру[1], в (19) $z = iy$. Группируя соответствующим образом слагаемые частичных сумм получающегося при этом ряда, найдем, что

$$1 + \frac{1}{1!}(iy) + \frac{1}{2!}(iy)^2 + \frac{1}{3!}(iy)^3 + \frac{1}{4!}(iy)^4 + \frac{1}{5!}(iy)^5 + \ldots = \\ = \Big(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - \ldots\Big) + i\Big(\frac{1}{1!}y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \ldots\Big),$$

т. е.

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y.} \tag{22}$$

Это и есть знаменитая *формула Эйлера*.

При ее выводе мы пользовались тем, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ и т. д. Число y в формуле (22) может быть как действительным, так и произвольным комплексным.

Из определений (20), (21) видно, что

$$\cos(-z) = \cos z,$$
$$\sin(-z) = -\sin z,$$

т. е. $\cos z$ — четная функция, а $\sin z$ — нечетная функция. Таким образом,

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

Сравнивая последнее равенство с формулой (22), получаем

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}),$$
$$\sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}).$$

Поскольку y — любое комплексное число, то эти равенства лучше переписать в обозначениях, не вызывающих недоразумений:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \end{aligned} \tag{23}$$

[1] Л. Эйлер (1707—1783) — выдающийся математик и механик, швейцарец по происхождению, большую часть жизни проживший в Петербурге. По выражению Лапласа, «Эйлер — общий учитель всех математиков второй половины XVIII века».

Таким образом, если принять, что $\exp z$ задается соотношением (19), то формулы (23) (равносильные разложениям (20), (21)), как и формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \\ \operatorname{sh} z &= \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \end{aligned} \tag{24}$$

можно принять в качестве определений соответствующих круговых и гиперболических функций. Забыв все наводящие и подчас не вполне строго обоснованные соображения, относившиеся к тригонометрическим функциям (которые, однако, привели нас к формуле Эйлера), можно было бы теперь проделать типичный математический трюк, приняв формулы (23), (24) за определения и получить из них уже совсем формально свойства круговых и гиперболических функций.

Например, основные тождества

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= 1, \\ \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= 1, \end{aligned}$$

как и свойства четности, проверяются непосредственно.

Более глубокие свойства, как, например, формулы для косинуса или синуса суммы, вытекают из характеристического свойства показательной функции

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2), \tag{25}$$

которое, очевидно, следует из определения (19) и формулы (18). Выведем формулы для косинуса и синуса суммы.

С одной стороны, по формуле Эйлера

$$e^{i(z_1+z_2)} = \cos(z_1 + z_2) + i \sin(z_1 + z_2). \tag{26}$$

С другой стороны, по свойству показательной функции и формуле Эйлера

$$\begin{aligned} e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} e^{iz_2} &= (\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) = \\ &= (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) + i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \end{aligned} \tag{27}$$

Если бы z_1 и z_2 были действительными числами, то, приравнивая действительные и мнимые части чисел из формул (26) и (27), мы уже получили бы искомые формулы. Поскольку мы собираемся доказать их для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, то, пользуясь четностью $\cos z$ и нечетностью $\sin z$, запишем еще одно равенство:

$$e^{-i(z_1+z_2)} = (\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2) - i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2). \tag{28}$$

Сравнивая (27) и (28), находим

$$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \frac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \frac{1}{2i}(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно было бы получить соответствующие формулы для гиперболических функций $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$, которые, кстати, как видно из формул (23), (24), связаны с функциями $\cos z$, $\sin z$ простыми соотношениями

$$\operatorname{ch} z = \cos iz,$$
$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz.$$

Однако получить такие геометрические очевидности, как $\sin \pi = 0$ или $\cos(z+2\pi) = \cos z$, из определений (23), (24) уже очень трудно. Значит, стремясь к точности, не следует забывать те задачи, где соответствующие функции естественным образом возникают. По этой причине мы не станем здесь преодолевать возможные затруднения в описании свойств тригонометрических функций, связанные с определениями (23), (24), а еще раз вернемся к этим функциям после теории интеграла. Наша цель сейчас состояла только в том, чтобы продемонстрировать замечательное единство, казалось бы, совершенно различных функций, которое невозможно было обнаружить без выхода в область комплексных чисел.

Если считать известным, что для $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x, \quad \sin(x+2\pi) = \sin x,$$
$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0,$$

то из формулы Эйлера (22) получаем соотношение

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0,} \tag{29}$$

в котором представлены важнейшие постоянные различных областей математики (1 — арифметика, π — геометрия, e — анализ, i — алгебра).

Из (25) и (29), как и из формулы (22), видно, что

$$\exp(z + i2\pi) = \exp z,$$

т. е. экспонента оказывается периодической функцией на $\mathbb{C}$ с чисто мнимым периодом $T = i2\pi$.

Учитывая формулу Эйлера, тригонометрическую запись (7) комплексного числа теперь можно представить в виде

$$z = re^{i\varphi},$$

где r — модуль числа z, а φ — его аргумент.

Формула Муавра теперь становится совсем простой:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}. \tag{30}$$

4. Представление функции степенным рядом, аналитичность. Функция $w = f(z)$ комплексного переменного z с комплексными значениями w, определенная на некотором множестве $E \subset \mathbb{C}$, есть отображение $f: E \to \mathbb{C}$. График такой функции есть подмножество в $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ и поэтому традиционной наглядности не имеет. Чтобы как-то компенсировать эту потерю, обычно берут два экземпляра комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и в одном отмечают точки области определения, а в другом — точки области значений.

В рассмотренных ниже примерах указаны область E и ее образ при соответствующем отображении.

Пример 9.

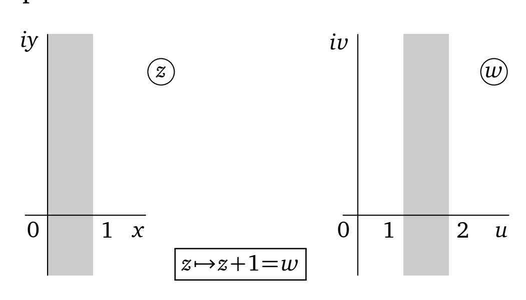


Рис. 37

Пример 10.

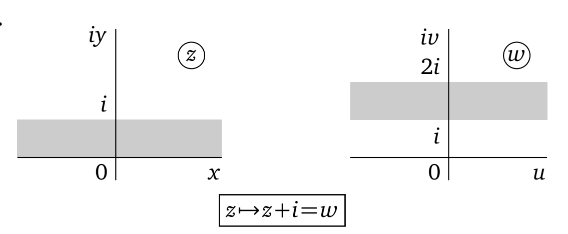


Рис. 38

Пример 11.

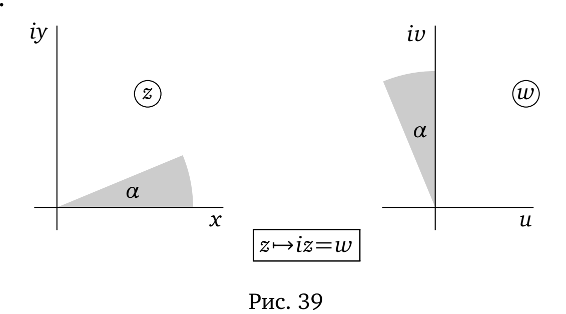


Рис. 39

Это следует из того, что $i = e^{i\pi/2}$, $z = re^{i\varphi}$ и $iz = re^{i(\varphi+\pi/2)}$, т. е. произошел поворот на угол $\frac{\pi}{2}$.

Пример 12.

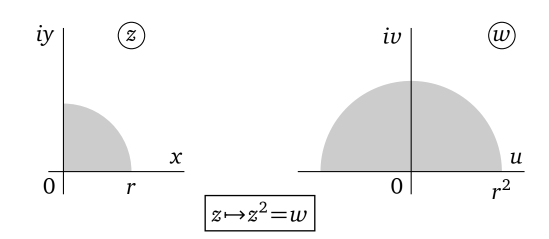


Рис. 40

Ибо если $z = re^{i\varphi}$, то $z^2 = r^2 e^{i2\varphi}$.

Пример 13.

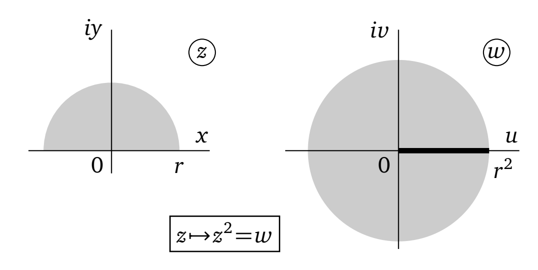


Рис. 41

Пример 14.

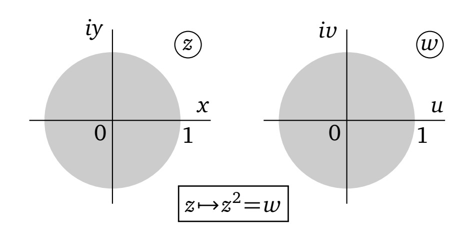


Рис. 42

Из примеров 12, 13 понятно, что в данном случае образом единичного круга снова будет единичный круг, но только накрытый в два слоя.

Пример 15.

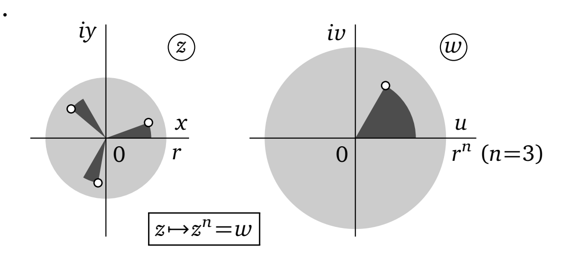


Рис. 43

Если $z=re^{i\varphi}$, то в силу (30) $z^n=r^ne^{in\varphi}$, поэтому в нашем случае образом круга радиуса r будет круг радиуса r^n и каждая точка последнего является образом n точек исходного круга (расположенных, кстати, в вершинах правильного n-угольника).

Исключение в этом смысле составляет только точка $w=0$, прообраз которой есть точка $z=0$. Однако при $z\to 0$ функция z^n есть бесконечно малая порядка n, поэтому говорят, что при $z=0$ функция имеет нуль порядка n. С учетом такой кратности нуля можно теперь говорить, что число прообразов любой точки w при отображении $z\mapsto z^n=w$ равно n. В частности, уравнение $z^n=0$ имеет n совпадающих корней $z_1=\ldots=z_n=0$.

В соответствии с общим определением непрерывности, функция $f(z)$ комплексного переменного называется *непрерывной* в точке $z_0\in\mathbb{C}$, если для любой окрестности $V(f(z_0))$ ее значения $f(z_0)$ найдется окрестность $U(z_0)$ такая, что при любом $z\in U(z_0)$ будет $f(z)\in V(f(z_0))$. Короче говоря,

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0).$$

Производной функции $f(z)$ в точке z_0, как и для вещественного случая, назовем величину

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, \tag{31}$$

если этот предел существует.

Равенство (31) эквивалентно равенству

$$f(z)-f(z_0)=f'(z_0)(z-z_0)+o(z-z_0) \tag{32}$$

при $z\to z_0$, соответствующему определению *дифференцируемости* функции в точке z_0.

Поскольку определение дифференцируемости в комплексном случае совпадает с соответствующим определением для вещественных функций, а арифметические свойства поля $\mathbb{C}$ и поля $\mathbb{R}$ одинаковы, то можно сказать, что все общие правила дифференцирования справедливы и в комплексном случае.

Пример 16.

$$(f+g)'(z)=f'(z)+g'(z),$$
$$(f\cdot g)'(z)=f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$
$$(g\circ f)'(z)=g'(f(z))\cdot f'(z),$$

поэтому если $f(z)=z^2$, то $f'(z)=1\cdot z+z\cdot 1=2z$, или если $f(z)=z^n$, то $f'(z)=$ $=nz^{n-1}$, а если

$$P_n(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n,$$

то

$$P_n'(z)=c_1+2c_2(z-z_0)+\ldots+nc_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Теорема 1. *Сумма* $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *степенного ряда — бесконечно дифференцируемая функция во всем круге сходимости ряда. При этом*

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^k}{dz^k}(c_n(z-z_0)^n), \quad k=0,1,\ldots,$$

и

$$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0), \quad n=0,1,\ldots$$

◄ Выражения для коэффициентов c_n очевидным образом получаются из выражений для $f^{(k)}(z)$ при $k=n$ и $z=z_0$.

В свою очередь, формулы для $f^{(k)}(z)$ достаточно проверить только при $k=1$, ибо тогда $f'(z)$ снова окажется суммой степенного ряда.

Итак, проверим, что функция $\varphi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$ действительно является производной для $f(z)$.

Прежде всего заметим, что в силу формулы Коши—Адамара (17) радиус сходимости последнего ряда совпадает с радиусом сходимости R исходного степенного ряда для $f(z)$.

В дальнейшем для упрощения записи будем считать, что $z_0=0$, т. е. что $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nz^n$, $\varphi(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_nz^{n-1}$ и ряды сходятся при $|z|<R$.

Поскольку внутри круга сходимости степенной ряд сходится абсолютно, можно заметить, и это существенно, что при $|z|\leqslant r<R$ справедлива оценка $|nc_nz^{n-1}|=n|c_n||z|^{n-1}\leqslant n|c_n|r^{n-1}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n|r^{n-1}$ сходится. Значит, для любого $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что при $|z|\leqslant r$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} nc_nz^{n-1}\right|\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty} nc_nr^{n-1}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, с точностью до $\varepsilon/3$ функция $\varphi(z)$ в любой точке круга $|z|<r$ совпадает с N-й частичной суммой определяющего ее ряда.

Пусть теперь ζ и z — произвольные точки этого круга. Преобразование

$$\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\frac{\zeta^n-z^n}{\zeta-z}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\zeta^{n-1}+\zeta^{n-2}z+\ldots+\zeta z^{n-2}+z^{n-1})$$

и оценка $|c_n(\zeta^{n-1}+\ldots+z^{n-1})|\leqslant|c_n|nr^{n-1}$ позволяют, как и выше, заключить, что интересующее нас разностное отношение при $|\zeta|<r$ и $|z|<r$ совпадает, с точностью до $\varepsilon/3$, с N-й частичной суммой определяющего его ряда. Значит, при $|\zeta|<r$ и $|z|<r$

$$\left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}-\varphi(z)\right|\leqslant\left|\sum_{n=1}^{N}c_n\frac{\zeta^n-z^n}{\zeta-z}-\sum_{n=1}^{N}nc_nz^{n-1}\right|+2\frac{\varepsilon}{3}.$$

Если теперь, фиксировав z, устремить ζ к z, то, переходя к пределу в конечной сумме, видим, что при ζ достаточно близких к z правая часть последнего неравенства, а с нею и левая становятся меньше ε.

Таким образом, для любой точки z в круге $|z|<r<R$, а ввиду произвольности r, и для любой точки круга $|z|<R$ проверено, что $f'(z)=\varphi(z)$. ►

Эта теорема позволяет точно указать тот класс функций, для которых их ряды Тейлора сходятся к ним.

Говорят, что функция *аналитична* в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, если в некоторой окрестности этой точки ее можно представить в следующем («аналитическом») виде:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

т. е. как сумму степенного ряда по степеням $z-z_0$.

Нетрудно проверить (см. задачу 7), что сумма степенного ряда аналитична в любой внутренней точке круга сходимости этого ряда.

С учетом определения аналитичности функции, из доказанной теоремы получаем

Следствие. a) *Если функция аналитична в точке, то она бесконечно дифференцируема в этой точке и ее ряд Тейлора сходится к ней в окрестности этой точки.*

b) *Ряд Тейлора функции, определенной в окрестности точки и бесконечно дифференцируемой в точке, сходится к функции в некоторой окрестности точки тогда и только тогда, когда функция аналитична в этой точке.*

В теории функции комплексного переменного доказывается замечательный факт, не имеющий аналогов для вещественных функций. А именно, оказывается, что если функция $f(z)$ дифференцируема в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, то она аналитична в этой точке. Это и в самом деле удивительно, поскольку в силу доказанной выше теоремы отсюда следует, что если функция $f(z)$ имеет одну производную $f'(z)$ в окрестности точки, то в этой окрестности она имеет также производные всех порядков.

На первый взгляд это так же неожиданно, как то, что, присоединив к $\mathbb{R}$ корень i одного конкретного уравнения $z^2=-1$, мы получаем поле $\mathbb{C}$, в котором любой алгебраический многочлен $P(z)$ имеет корень. Факт разрешимости в $\mathbb{C}$ алгебраического уравнения $P(z)=0$ мы собираемся использовать и поэтому докажем его в качестве хорошей иллюстрации к введенным в этом параграфе начальным представлениям о комплексных числах и функциях комплексного переменного.

5. Алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Если мы докажем, что любой полином $P(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n$, $n\geqslant 1$, с комплексными коэффициентами имеет корень в $\mathbb{C}$, то уже не возникнет надобности в расширении поля $\mathbb{C}$, вызванной неразрешимостью в $\mathbb{C}$ некоторого алгебраического уравнения. В этом смысле утверждение о наличии корня

у любого многочлена $P(z)$ устанавливает *алгебраическую замкнутость поля* $\mathbb{C}$.

Чтобы получить вполне наглядное представление о том, почему в $\mathbb{C}$ любой полином имеет корень, в то время как в $\mathbb{R}$ его могло не быть, воспользуемся геометрической интерпретацией комплексного числа и функции комплексного переменного.

Заметим, что

$$P(z) = z^n\left(\frac{c_0}{z^n} + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{z} + c_n\right)$$

и, следовательно, $P(z) = c_n z^n + o(z^n)$ при $|z| \to \infty$. Поскольку нас интересует корень уравнения $P(z) = 0$, то, поделив обе части уравнения на c_n, можно считать, что коэффициент c_n многочлена $P(z)$ равен 1 и потому

$$P(z) = z^n + o(z^n) \quad \text{при } |z| \to \infty. \tag{33}$$

Если вспомнить (см. пример 15), что при отображении $z \mapsto z^n$ окружность радиуса r переходит в окружность радиуса r^n с центром в точке 0, то при достаточно больших значениях r, в силу (33), с малой относительной погрешностью образ окружности $|z| = r$ будет совпадать с окружностью $|w| = r^n$ плоскости w (рис. 44). Во всяком случае, важно, что образом будет кривая, охватывающая точку $w = 0$.

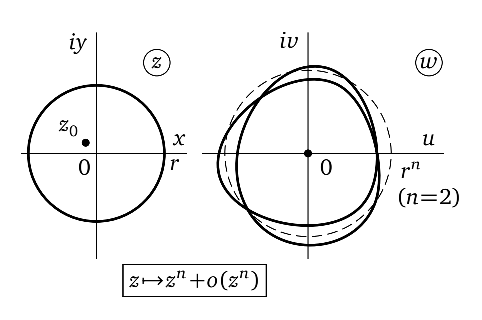


Рис. 44

Если круг $|z| \leqslant r$ рассматривать как пленку, натянутую на окружность $|z| = r$, то при непрерывном отображении, осуществляемом полиномом $w = P(z)$, эта пленка перейдет в пленку, натянутую на образ окружности. Но поскольку последний охватывает точку $w = 0$, то некоторая точка этой пленки обязана совпадать с $w = 0$ и, значит, в круге $|z| < r$ найдется точка z_0, которая при отображении $w = P(z)$ перешла именно в $w = 0$, т. е. $P(z_0) = 0$.

Это наглядное рассуждение приводит к ряду очень важных и полезных понятий топологии (*индекс* пути относительно точки, *степень отображения*) и с помощью этих понятий может быть доведено до полного доказательства, справедливого, как можно понять, не только для полиномов. Однако эти рассмотрения, к сожалению, отвлекли бы нас от основного предмета, которым мы сейчас занимаемся; поэтому мы проведем другое доказательство, лежащее в русле тех идей, с которыми мы уже достаточно освоились.

Теорема 2. *Каждый полином*

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$$

степени $n \geqslant 1$ *с комплексными коэффициентами имеет в* $\mathbb{C}$ *корень.*

◄ Без ограничения общности утверждения теоремы, очевидно, можно считать, что $c_n = 1$.

Пусть $\mu = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$. Поскольку $P(z) = z^n \left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{c_0}{z^n}\right)$, то

$$|P(z)| \geqslant |z|^n \left(1 - \frac{|c_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|c_0|}{|z|^n}\right),$$

и, очевидно, $|P(z)| > \max\{1, 2\mu\}$ при $|z| > R$, если R достаточно велико. Следовательно, точки последовательности $\{z_k\}$, в которых $0 < |P(z_k)| - \mu < 1/k$, лежат в круге $|z| \leqslant R$.

Проверим, что в $\mathbb{C}$ (и даже в этом круге) есть точка z_0, в которой $|P(z_0)| = \mu$. Для этого заметим, что если $z_k = x_k + iy_k$, то $\max\{|x_k|, |y_k|\} \leqslant |z_k| \leqslant R$ и, таким образом, последовательности действительных чисел $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ оказываются ограниченными. Извлекая сначала сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$ из $\{x_k\}$, а затем сходящуюся подпоследовательность $\{y_{k_{l_m}}\}$ из $\{y_{k_l}\}$, получим подпоследовательность $z_{k_{l_m}} = x_{k_{l_m}} + iy_{k_{l_m}}$ последовательности $\{z_k\}$, которая имеет предел

$$\lim_{m\to\infty} z_{k_{l_m}} = \lim_{m\to\infty} x_{k_{l_m}} + i \lim_{m\to\infty} y_{k_{l_m}} = x_0 + iy_0 = z_0,$$

и поскольку $|z_k| \to |z_0|$ при $k \to \infty$, то $|z_0| \leqslant R$. Чтобы избежать громоздких обозначений и не переходить к подпоследовательностям, будем считать, что уже сама последовательность $\{z_k\}$ сходится. Из непрерывности $P(z)$ в $z_0 \in \mathbb{C}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} P(z_k) = P(z_0)$. Но тогда[1] $|P(z_0)| = \lim\limits_{k\to\infty} |P(z_k)| = \mu$.

Теперь предположим, что $\mu > 0$, и приведем это предположение к противоречию. Если $P(z_0) \neq 0$, то рассмотрим полином $Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$. По построению, $Q(0) = 1$ и $|Q(z)| = \frac{|P(z+z_0)|}{|P(z_0)|} \geqslant 1$.

Поскольку $Q(0) = 1$, полином $Q(z)$ имеет вид

$$Q(z) = 1 + q_k z^k + q_{k+1} z^{k+1} + \ldots + q_n z^n,$$

где $|q_k| \neq 0$ и $1 \leqslant k \leqslant n$. Если $q_k = \rho e^{i\psi}$, то при $\varphi = \frac{\pi - \psi}{k}$ будем иметь $q_k \cdot (e^{i\varphi})^k = \rho e^{i\psi} e^{i(\pi-\psi)} = \rho e^{i\pi} = -\rho = -|q_k|$. Таким образом, при $z = re^{i\varphi}$ получим

$$\begin{aligned} |Q(re^{i\varphi})| \leqslant |1 + q_k z^k| + (|q_{k+1} z^{k+1}| + \ldots + |q_n z^n|) = \\ = |1 - r^k |q_k|| + r^{k+1}(|q_{k+1}| + \ldots + |q_n| r^{n-k-1}) = \\ = 1 - r^k(|q_k| - r|q_{k+1}| - \ldots - r^{n-k}|q_n|) < 1, \end{aligned}$$

[1] Обратите внимание — мы, с одной стороны, показали, что из любой ограниченной по модулю последовательности комплексных чисел можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, а с другой стороны, продемонстрировали еще одно из возможных доказательств теоремы о минимуме непрерывной функции на отрезке, как в данном случае это было сделано в круге $|z| \leqslant R$.

если r достаточно близко к нулю. Но $|Q(z)|\geqslant 1$ при $z\in\mathbb{C}$. Полученное противоречие показывает, что $P(z_0)=0$. ►

Замечание 1. Первые доказательства теоремы о разрешимости в $\mathbb{C}$ любого алгебраического уравнения с комплексными коэффициентами (которую по традиции часто называют основной теоремой алгебры) были даны Даламбером и Гауссом, который вообще вдохнул вполне реальную жизнь в так называемые «мнимые» числа, найдя им разнообразные и глубокие приложения.

Замечание 2. Многочлен с вещественными коэффициентами $P(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$, как мы знаем, не всегда имеет вещественные корни. Однако по отношению к произвольному многочлену с комплексными коэффициентами он обладает той особенностью, что если $P(z_0) = 0$, то и $P(\bar{z}_0) = 0$. Действительно, из определения сопряженного числа и правил сложения комплексных чисел следует, что $\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$. Из тригонометрической формы записи комплексного числа и правил умножения комплексных чисел видно, что

$$\overline{(z_1\cdot z_2)} = \overline{(r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2})} = \overline{r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}} = r_1r_2e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1e^{-i\varphi_1}\cdot r_2e^{-i\varphi_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2.$$

Таким образом,

$$\overline{P(z_0)} = \overline{a_0+\ldots+a_nz_0^n} = \bar{a}_0+\ldots+\bar{a}_n\bar{z}_0^n = a_0+\ldots+a_n\bar{z}_0^n = P(\bar{z}_0),$$

и если $P(z_0)=0$, то $\overline{P(z_0)}=P(\bar{z}_0)=0$.

Следствие 1. *Любой многочлен $P(z) = c_0 + \ldots + c_nz^n$ степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами допускает, и притом единственное с точностью до порядка сомножителей, представление в виде*

$$P(z) = c_n(z-z_1)\ldots(z-z_n), \tag{34}$$

где $z_1, \ldots, z_n \in\mathbb{C}$ (и, может быть, не все числа $z_1, \ldots, z_n$ различны между собой).

◄ Из алгоритма деления («уголком») многочлена $P(z)$ на многочлен $Q(z)$ степени $m\leqslant n$ находим, что $P(z)=q(z)Q(z)+r(z)$, где $q(z)$ и $r(z)$ — некоторые многочлены, причем степень $r(z)$ меньше степени $Q(z)$, т. е. меньше m. Таким образом, если $m=1$, то $r(z)=r$ — просто постоянная.

Пусть z_1 — корень многочлена $P(z)$. Тогда $P(z) = q(z)(z-z_1) + r$, и поскольку $P(z_1) = r$, то $r = 0$. Значит, если z_1 — корень многочлена $P(z)$, то справедливо представление $P(z)=(z-z_1)q(z)$. Степень многочлена $q(z)$ равна $n-1$, и с ним можно повторить то же самое рассуждение. По индукции получаем, что $P(z)=c(z-z_1)\ldots(z-z_n)$. Поскольку должно быть $cz^n=c_nz^n$, то $c=c_n$. ►

Следствие 2. *Любой многочлен $P(z)=a_0+\ldots+a_nz^n$ с действительными коэффициентами можно разложить в произведение линейных и квадратичных многочленов с действительными коэффициентами.*

◄ Это вытекает из предыдущего следствия 1 и замечания 2, в силу которого вместе с z_k корнем $P(z)$ является также число $\bar{z}_k$. Тогда, перемножив в разложении (34) многочлена скобки $(z-z_k)(z-\bar{z}_k)$, получим многочлен $z^2-(z_k+\bar{z}_k)z+|z_k|^2$ второго порядка с действительными коэффициентами. Число c_n, в нашем случае равное a_n, вещественное, и его можно внести в одну из скобок разложения, не меняя ее степени. ►

Перемножив одинаковые скобки в разложении (34), это разложение можно переписать в виде

$$P(z)=c_n(z-z_1)^{k_1}\ldots(z-z_p)^{k_p}. \tag{35}$$

Число k_j называется *кратностью* корня z_j.

Поскольку $P(z)=(z-z_j)^{k_j}Q(z)$, где $Q(z_j)\neq 0$, то

$$P'(z)=k_j(z-z_j)^{k_j-1}Q(z)+(z-z_j)^{k_j}Q'(z)=(z-z_j)^{k_j-1}R(z),$$

где $R(z_j)=k_jQ(z_j)\neq 0$. Таким образом, мы приходим к следующему заключению.

Следствие 3. *Каждый корень z_j многочлена $P(z)$ кратности $k_j>1$ является корнем кратности k_j-1 многочлена $P'(z)$ — производной $P(z)$.*

Не будучи пока в состоянии найти корни многочлена $P(z)$, мы на основании последнего утверждения и разложения (35) можем найти многочлен $p(z)=(z-z_1)\ldots(z-z_p)$, корни $z_1, \ldots, z_p$ которого совпадают с корнями $P(z)$, но все они уже кратности 1.

Действительно, по алгоритму Евклида сначала найдем многочлен $q(z)$ — наибольший общий делитель $P(z)$ и $P'(z)$. В силу следствия 3, разложения (35) и теоремы 2, многочлен $q(z)$ с точностью до постоянного множителя равен произведению $(z-z_1)^{k_1-1}\ldots(z-z_p)^{k_p-1}$, поэтому, поделив $P(z)$ на $q(z)$, с точностью до постоянного множителя (от которого можно затем избавиться дополнительным делением на коэффициент при z^p) получим многочлен $p(z)=(z-z_1)\ldots(z-z_p)$.

Рассмотрим теперь отношение $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ двух многочленов, где $Q(x)\not\equiv \not\equiv \mathrm{const}$. Если степень $P(x)$ не меньше степени $Q(x)$, то, применив алгоритм деления многочленов, представим $P(x)$ в виде $P(x)=p(x)Q(x)+r(x)$, где $p(x)$ и $r(x)$ — некоторые многочлены, причем степень $r(x)$ уже меньше, чем степень $Q(x)$. Таким образом, получаем представление $R(x)$ в виде $R(x)= =p(x)+\frac{r(x)}{Q(x)}$, где дробь $\frac{r(x)}{Q(x)}$ уже правильная в том смысле, что степень $r(x)$ меньше степени $Q(x)$.

Следствие, которое мы сейчас сформулируем, относится к представлению правильной дроби в виде суммы дробей, называемых *простейшими*.

Следствие 4. а) *Если $Q(z)=(z-z_1)^{k_1}\ldots(z-z_p)^{k_p}$ и $\frac{P(z)}{Q(z)}$ — правильная дробь, то существует и притом единственное представление дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$ в*

виде

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(z-z_j)^k} \right). \tag{36}$$

b) *Если $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами и*

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1} \ldots (x-x_l)^{k_l} (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \ldots (x^2+p_nx+q_n)^{m_n},$$

то существует и притом единственное представление правильной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk}x+c_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k} \right), \tag{37}$$

где a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} — действительные числа.

Заметим, что универсальным, хотя и не всегда самым коротким способом фактического отыскания разложений (36) или (37) является метод неопределенных коэффициентов, состоящий в том, что сумма в правой части (36) или (37) приводится к общему знаменателю $Q(x)$, после чего приравниваются коэффициенты полученного числителя и соответствующие коэффициенты многочлена $P(x)$. Система линейных уравнений, к которой мы при этом приходим, в силу следствия 4 всегда однозначно разрешима.

Поскольку нас, как правило, будет интересовать разложение конкретной дроби, которое мы получим методом неопределенных коэффициентов, то кроме уверенности, что это всегда можно сделать, нам от следствия 4 пока ничего больше не требуется. По этой причине мы не станем проводить его доказательство. Оно обычно излагается на алгебраическом языке в курсе высшей алгебры, а на аналитическом языке — в курсе теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим специально подобранный пример, на котором можно проиллюстрировать изложенное.

Пример 17. Пусть

$$P(x) = 2x^6+3x^5+6x^4+6x^3+10x^2+3x+2,$$
$$Q(x) = x^7+3x^6+5x^5+7x^4+7x^3+5x^2+3x+1;$$

требуется найти разложение (37) дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Прежде всего, задача осложнена тем, что мы не знаем разложения многочлена $Q(x)$. Попробуем упростить ситуацию, избавившись от кратности корней $Q(x)$, если таковая имеет место. Находим

$$Q'(x) = 7x^6+18x^5+25x^4+28x^3+21x^2+10x+3.$$

Довольно утомительным, но выполнимым счетом по алгоритму Евклида находим наибольший общий делитель

$$d(x) = x^4+2x^3+2x^2+2x+1$$

многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$. Мы выписали наибольший общий делитель с единичным коэффициентом при старшей степени x.

Разделив $Q(x)$ на $d(x)$, получаем многочлен

$$q(x) = x^3 + x^2 + x + 1,$$

имеющий те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но единичной кратности. Корень -1 многочлена $q(x)$ легко угадывается. После деления $q(x)$ на $x+1$ получаем x^2+1. Таким образом,

$$q(x) = (x+1)(x^2+1),$$

после чего последовательным делением $d(x)$ на x^2+1 и $x+1$ находим разложение $d(x)$:

$$d(x) = (x+1)^2(x^2+1),$$

а вслед за этим и разложение

$$Q(x) = (x+1)^3(x^2+1)^2.$$

Таким образом, в силу следствия 4b) ищем разложение дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_{11}}{x+1} + \frac{a_{12}}{(x+1)^2} + \frac{a_{13}}{(x+1)^3} + \frac{b_{11}x + c_{11}}{x^2+1} + \frac{b_{12}x + c_{12}}{(x^2+1)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты полученного в числителе многочлена и соответствующие коэффициенты многочлена $P(x)$, приходим к системе семи уравнений с семью неизвестными, решая которую, окончательно получаем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Задачи и упражнения

1. Используя геометрическую интерпретацию комплексного числа

a) поясните неравенства $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ и $|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + \ldots + |z_n|$;

b) укажите геометрическое место точек на плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющих соотношению $|z-1| + |z+1| \leqslant 3$;

c) изобразите все корни степени n из 1 и найдите их сумму;

d) поясните действие преобразования плоскости $\mathbb{C}$, задаваемого формулой $z \mapsto \bar{z}$.

2. Найдите суммы:

a) $1 + q + \ldots + q^n$;

b) $1 + q + \ldots + q^n + \ldots$ при $|q| < 1$;

c) $1 + e^{i\varphi} + \ldots + e^{in\varphi}$;

d) $1 + re^{i\varphi} + \ldots + r^n e^{in\varphi}$;

e) $1 + re^{i\varphi} + \ldots + r^n e^{in\varphi} + \ldots$ при $|r| < 1$;

f) $1 + r\cos\varphi + \ldots + r^n \cos n\varphi$;

g) $1 + r\cos\varphi + \ldots + r^n \cos n\varphi + \ldots$ при $|r| < 1$;

h) $1 + r\sin\varphi + \ldots + r^n \sin n\varphi$;

i) $1+r\sin\varphi+\ldots+r^n\sin n\varphi+\ldots$ при $|r|<1$.

3. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ и убедитесь, что это число есть e^z.

4. a) Покажите, что уравнение $e^w=z$ относительно w имеет решение $w=\ln|z|+i\operatorname{Arg}z$. Естественно считать w *натуральным логарифмом* числа z. Таким образом, $w=\operatorname{Ln}z$ не есть функциональное соотношение, поскольку $\operatorname{Arg}z$ многозначен.

b) Найдите $\operatorname{Ln}1$ и $\operatorname{Ln}i$.

c) Положим $z^\alpha=e^{\alpha\operatorname{Ln}z}$. Найдите 1^π и i^i.

d) Используя представление $w=\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$, получите выражение для $z=\arcsin z$.

e) Есть ли в $\mathbb{C}$ точки, где $|\sin z|=2$?

5. a) Исследуйте, во всех ли точках плоскости $\mathbb{C}$ функция $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ непрерывна.

b) Разложите функцию $\frac{1}{1+z^2}$ в степенной ряд при $z_0=0$ и найдите его радиус сходимости.

c) Решите задачи a) и b) для функции $\frac{1}{1+\lambda^2z^2}$, где $\lambda\in\mathbb{R}$ — параметр. Не возникает ли у вас гипотезы относительно того, взаимным расположением каких точек на плоскости $\mathbb{C}$ определяется радиус сходимости? Можно ли было понять это, оставаясь на вещественной оси, т. е. раскладывая функцию $\frac{1}{1+\lambda^2x^2}$, где $\lambda\in\mathbb{R}$ и $x\in\mathbb{R}$?

6. a) Исследуйте, является ли непрерывной функция Коши

$$f(z)=\begin{cases}e^{-1/z^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0\end{cases}$$

в точке $z=0$.

b) Будет ли непрерывно ограничение $f|_{\mathbb{R}}$ функции f из задачи a) на вещественную ось?

c) Существует ли ряд Тейлора функции f из a) в точке $z_0=0$?

d) Бывают ли аналитические в $z_0\in\mathbb{C}$ функции, ряд Тейлора которых сходится только в точке z_0?

e) Придумайте степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, который сходится только в точке z_0.

7. a) Выполнив в степенном ряде $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n$ формально подстановку $z-a=(z-z_0)+(z_0-a)$ и приведя подобные члены, получите ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ и выражения его коэффициентов через величины A_k, $(z_0-a)^k$, $k=0, 1, \ldots$

b) Проверьте, что если исходный ряд сходится в круге $|z-a|<R$, а $|z_0-a|=r<R$, то ряды, определяющие C_n, $n=0, 1, \ldots$, сходятся абсолютно и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ сходится при $|z-z_0|<R-r$.

c) Покажите, что если $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n(z-a)^n$ в круге $|z-a|<R$, а $|z_0-a|<R$, то в круге $|z-z_0|<R-|z_0-a|$ функция f допускает представление $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$.

8. Проверьте, что

a) когда точка $z\in\mathbb{C}$ пробегает окружность $|z|=r>1$, точка $w=z+z^{-1}$ пробегает эллипс с центром 0 и фокусами в точках ±2;

b) при возведении комплексных чисел в квадрат, точнее, при отображении $w \mapsto w^2$ такой эллипс переходит в дважды пробегаемый эллипс с фокусом в нуле;

c) при возведении комплексных чисел в квадрат любой эллипс с центром в нуле переходит в эллипс с фокусом в нуле.

§ 6. Некоторые примеры использования дифференциального исчисления в задачах естествознания

В этом параграфе мы разберем несколько довольно далеких друг от друга по постановке задач естествознания, которые, однако, как выяснится, имеют довольно близкие математические модели. Модель эта — не что иное, как простейшее дифференциальное уравнение для интересующей нас в задаче функции. С разбора одного такого примера — задачи двух тел — мы, кстати, вообще начинали построение дифференциального исчисления. Исследование той системы уравнений, которую мы при этом получили, пока нам недоступно. Здесь же будут рассмотрены вопросы, которые можно до конца решить уже на нашем нынешнем уровне. Кроме удовольствия увидеть математический аппарат в конкретной работе, из ряда примеров этого параграфа мы, в частности, извлечем также дополнительную убежденность как в естественности возникновения показательной функции $\exp x$, так и в пользе ее распространения в комплексную область.

1. Движение тела переменной массы. Рассмотрим ракету, перемещающуюся прямолинейно в открытом космосе далеко от притягивающих масс (рис. 45).

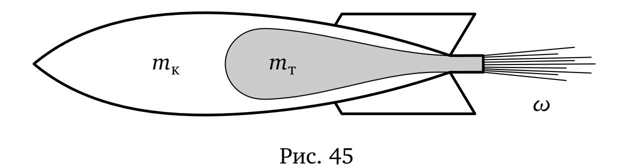


Рис. 45

Пусть $M(t)$ — масса ракеты (с топливом) в момент t; $V(t)$ — ее скорость в момент t; ω — скорость (относительно ракеты) истечения топлива из сопла ракеты при его сгорании.

Мы хотим установить взаимосвязь между этими величинами.

В силу сделанных предположений, ракету с топливом можно рассматривать как замкнутую систему, импульс (или количество движения) которой поэтому остается постоянным во времени.

В момент t импульс системы равен $M(t)V(t)$.

В момент $t+h$ импульс ракеты с оставшимся в ней топливом равен $M(t+h)V(t+h)$, а импульс ΔI выброшенной за это время массы $|\Delta M| =$

$=|M(t+h)-M(t)|=-(M(t+h)-M(t))$ топлива заключен в пределах

$$(V(t)-\omega)|\Delta M| < \Delta I < (V(t+h)-\omega)|\Delta M|,$$

т. е. $\Delta I=(V(t)-\omega)|\Delta M|+\alpha(h)|\Delta M|$, причем из непрерывности $V(t)$ следует, что $\alpha(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Приравнивая импульсы системы в моменты t и $t+h$, имеем

$$M(t)V(t)=M(t+h)V(t+h)+(V(t)-\omega)|\Delta M|+\alpha(h)|\Delta M|,$$

или, после подстановки $|\Delta M|=-(M(t+h)-M(t))$ и упрощений,

$$M(t+h)(V(t+h)-V(t))=-\omega(M(t+h)-M(t))+\alpha(h)(M(t+h)-M(t)).$$

Деля последнее равенство на h и переходя к пределу при $h\to 0$, получаем

$$M(t)V'(t)=-\omega M'(t). \tag{1}$$

Это и есть искомое соотношение между интересующими нас функциями $V(t)$, $M(t)$ и их производными.

Теперь надо найти связь между самими функциями $V(t)$, $M(t)$, исходя из соотношения между их производными. Вообще говоря, такого рода задачи много труднее задач нахождения соотношений между производными при известных соотношениях между функциями. Однако в нашем случае вопрос решается вполне элементарно.

Действительно, после деления на $M(t)$ равенство (1) можно переписать в виде

$$V'(t)=(-\omega\ln M)'(t). \tag{2}$$

Но если производные двух функций совпадают на некотором промежутке, то на этом промежутке сами функции отличаются разве что на некоторую постоянную.

Итак, из (2) следует, что

$$V(t)=-\omega\ln M(t)+c. \tag{3}$$

Если известно, например, что $V(0)=V_0$, то это начальное условие вполне определит константу c. Действительно, из (3) находим

$$c=V_0+\omega\ln M(0),$$

а затем находим искомую формулу[1]

$$V(t)=V_0+\omega\ln\frac{M(0)}{M(t)}. \tag{4}$$

---

[1]Эта формула иногда связывается с именем К. Э. Циолковского (1857—1935) — русского ученого, основоположника теории космических полетов. Но, по-видимому, впервые она была получена русским механиком И. В. Мещерским (1859—1935) в его труде 1897 г., посвященном динамике точки переменной массы.

Полезно заметить, что если $m_к$ — масса корпуса ракеты, $m_т$ — масса топлива, а V — конечная скорость, которую приобретает ракета после полной отработки топлива, то, подставляя в (4) $M(0)=m_к+m_т$ и $M(t)=m_к$, находим

$$V = V_0 + \omega \ln\left(1+\frac{m_т}{m_к}\right).$$

Последняя формула особенно ясно показывает, что на конечной скорости сказывается не столько отношение $m_т/m_к$, стоящее под знаком логарифма, сколько скорость истечения ω, связанная с видом топлива. Из этой формулы, в частности, следует, что если $V_0=0$, то, чтобы придать скорость V ракете, собственная масса которой $m_к$, необходимо иметь следующий начальный запас топлива:

$$m_т = m_к(e^{V/\omega}-1).$$

2. Барометрическая формула. Так называется формула, указывающая зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря.

Пусть $p(h)$ — давление на высоте h. Поскольку $p(h)$ есть вес столба воздуха над площадкой в 1 см^2, расположенной на высоте h, то $p(h+\Delta)$ отличается от $p(h)$ весом порции газа, попавшей в параллелепипед с основаниями в виде исходной площадки в 1 см^2, расположенной на высоте h, и такой же площадки на высоте $h+\Delta$. Пусть $\rho(h)$ — плотность воздуха на высоте h. Поскольку $\rho(h)$ непрерывно зависит от h, то можно считать, что масса указанной порции воздуха может быть вычислена по формуле

$$\rho(\xi)\ г/см^3 \cdot 1\ см^2 \cdot \Delta\ см = \rho(\xi)\Delta\ г,$$

где ξ — некоторый уровень высоты в промежутке от h до $h+\Delta$. Значит, вес этой массы[1] есть $g\cdot\rho(\xi)\Delta$.

Таким образом,

$$p(h+\Delta)-p(h) = -g\rho(\xi)\Delta.$$

Поделив это равенство на Δ и перейдя к пределу при $\Delta\to 0$ с учетом того, что тогда и $\xi\to h$, получаем

$$p'(h) = -g\rho(h). \tag{5}$$

Таким образом, скорость изменения давления естественно оказалась пропорциональной плотности воздуха на соответствующей высоте.

Чтобы получить уравнение для функции $p(h)$, исключим из (5) функцию $\rho(h)$. В силу закона Клапейрона[2] давление p, молярный объем V и темпера-

---

[1] В пределах наличия заметной атмосферы величину g можно считать постоянной.

[2] Б. П. Э. Клапейрон (1799—1864) — французский физик, занимавшийся термодинамикой.

тура (по шкале Кельвина[1]) T газа связаны соотношением

$$\frac{pV}{T} = R, \tag{6}$$

где R — так называемая универсальная газовая постоянная. Если M — масса одного моля воздуха, а V — его объем, то $\rho = \frac{M}{V}$, поэтому из (6) находим

$$p = \frac{1}{V} \cdot R \cdot T = \frac{M}{V} \cdot \frac{R}{M} \cdot T = \rho \cdot \frac{R}{M} T.$$

Полагая $\lambda = \frac{R}{M} T$, таким образом, имеем

$$p = \lambda(T)\rho. \tag{7}$$

Если теперь принять, что температура описываемых нами слоев воздуха постоянна, то из (5) и (7) окончательно находим

$$p'(h) = -\frac{g}{\lambda} p(h). \tag{8}$$

Это дифференциальное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{p'(h)}{p(h)} = -\frac{g}{\lambda}$$

или

$$(\ln p)'(h) = \left(-\frac{g}{\lambda} h\right)',$$

откуда

$$\ln p(h) = -\frac{g}{\lambda} h + c,$$

или

$$p(h) = e^c \cdot e^{-(g/\lambda)h}.$$

Множитель e^c определяется из известного начального условия $p(0) = p_0$, в силу которого $e^c = p_0$.

Итак, мы нашли следующую зависимость давления от высоты:

$$p = p_0 e^{-(g/\lambda)h}. \tag{9}$$

Для воздуха при комнатной температуре (порядка 300 К = 27 °C) известно значение $\lambda \approx 7{,}7 \cdot 10^8$ (см/с)^2. Известно также, что $g \approx 10^3$ см/с^2. Таким образом, формула (9) приобретает вполне законченный вид после подстановки этих числовых значений g и λ. В частности, из (9) видно, что давление упадет в e (≈ 3) раз на высоте $h = \frac{\lambda}{g} = 7{,}7 \cdot 10^5$ см = 7,7 км. Оно возрастет во столько же раз, если опуститься в шахту на глубину порядка 7,7 км.

---

[1] У. Томсон (лорд Кельвин) (1824—1907) — известный английский физик.

3. Радиоактивный распад, цепная реакция и атомный котел. Известно, что ядра тяжелых элементов подвержены самопроизвольному (спонтанному) распаду. Это так называемая *естественная радиоактивность*.

Основной статистический закон радиоактивности (справедливый, следовательно, для не слишком малых количеств и концентраций вещества) состоит в том, что количество распадов за малый промежуток времени h, прошедший от момента t, пропорционально h и количеству $N(t)$ не распавшихся к моменту t атомов вещества, т. е.

$$N(t+h)-N(t)\approx-\lambda N(t)h,$$

где $\lambda>0$ — числовой коэффициент, характерный для данного химического элемента.

Таким образом, функция $N(t)$ удовлетворяет уже знакомому дифференциальному уравнению

$$N'(t)=-\lambda N(t), \tag{10}$$

из которого следует, что

$$N(t)=N_0e^{-\lambda t},$$

где $N_0=N(0)$ — начальное количество атомов вещества.

Время T, за которое происходит распад половины из начального количества атомов, называют *периодом полураспада*. Величина T находится, таким образом, из уравнения $e^{-\lambda T}=\frac{1}{2}$, т. е. $T=\frac{\ln 2}{\lambda}\approx\frac{0{,}69}{\lambda}$.

Например, для полония Po^{210} $T\approx 138$ суток, для радия Ra^{226} $T\approx 1600$ лет, для урана U^{235} $T\approx 7{,}1\cdot 10^8$ лет, а для его изотопа U^{238} $T\approx 4{,}5\cdot 10^9$ лет.

Ядерная реакция — это взаимодействие ядер или взаимодействие ядра с элементарными частицами, в результате которого появляются ядра нового типа. Это может быть ядерный синтез, когда слияние ядер более легких элементов приводит к образованию ядер более тяжелого элемента (например, два ядра тяжелого водорода дают, с потерей массы и выделением энергии, ядро гелия); это может быть распад ядра и образование ядра (ядер) более легких элементов. В частности, такой распад происходит примерно в половине случаев столкновения нейтрона с ядром урана U^{235}. При делении ядра урана образуется 2—3 новых нейтрона, которые могут участвовать в дальнейшем взаимодействии с ядрами, вызывая их деление и тем самым размножение нейтронов. Ядерная реакция такого типа называется *цепной реакцией*.

Опишем принципиальную математическую модель цепной реакции в некотором радиоактивном веществе и получим закон изменения количества $N(t)$ нейтронов в зависимости от времени.

Возьмем вещество в виде шара радиуса r. Если r не слишком мало, то за малый промежуток времени h, отсчитываемый от момента t, с одной стороны, произойдет рождение новых нейтронов в количестве, пропорцио-

нальном h и $N(t)$, а с другой — потеря части нейтронов за счет их выхода за пределы шара.

Если v — скорость нейтрона, то за время h покинуть шар могут только те из них, которые удалены от границы не более чем на расстояние vh, да и то если их скорость направлена примерно по радиусу. Считая, что такие нейтроны составляют неизменную долю от попавших в рассматриваемую зону и что нейтроны в шаре распределены примерно равномерно, можно сказать, что количество теряемых за время h нейтронов пропорционально $N(t)$ и отношению объема указанной приграничной области к объему шара.

Сказанное приводит к равенству

$$N(t+h)-N(t)\approx\alpha N(t)h-\frac{\beta}{r}N(t)h \tag{11}$$

(ибо объем рассматриваемой зоны равен примерно $4\pi r^2vh$, а объем шара $\frac{4}{3}\pi r^3$). Коэффициенты α и β зависят только от рассматриваемого радиоактивного вещества.

Из соотношения (11) после деления на h и перехода к пределу при $h\to 0$ получаем

$$N'(t)=\left(\alpha-\frac{\beta}{r}\right)N(t), \tag{12}$$

откуда

$$N(t)=N_0\exp\left\{\left(\alpha-\frac{\beta}{r}\right)t\right\}.$$

Из полученной формулы видно, что при $\left(\alpha-\frac{\beta}{r}\right)>0$ количество нейтронов будет экспоненциально во времени расти. Характер этого роста, независимо от начального условия N_0, таков, что за очень короткое время происходит практически полный распад вещества с выделением колоссальной энергии — это и есть *взрыв*.

Если $\left(\alpha-\frac{\beta}{r}\right)<0$, то очень скоро реакция прекращается ввиду того, что теряется больше нейтронов, чем рождается.

Если же выполнено пограничное между рассмотренными случаями условие $\alpha-\frac{\beta}{r}=0$, то устанавливается равновесие между рождением нейтронов и их выходом из реакции, в результате чего их количество остается примерно постоянным.

Величина r, при которой $\alpha-\frac{\beta}{r}=0$, называется *критическим радиусом*, а масса вещества в шаре такого объема называется *критической массой* вещества.

Для урана U^{235} критический радиус равен примерно 8,5 см, а критическая масса около 50 кг.

В котлах, где подогрев пара происходит за счет цепной реакции в радиоактивном веществе, имеется искусственный источник нейтронов, который доставляет в делящуюся массу определенное количество n нейтронов

в единицу времени. Таким образом, для атомного реактора уравнение (12) немного видоизменяется:

$$N'(t) = \left(\alpha - \frac{\beta}{r}\right) N(t) + n. \tag{13}$$

Это уравнение решается тем же приемом, что и уравнение (12), ибо $\dfrac{N'(t)}{(\alpha - \beta/r)N(t) + n}$ есть производная функции $\dfrac{1}{\alpha - \beta/r} \ln\left[\left(\alpha - \dfrac{\beta}{r}\right) N(t) + n\right]$, если $\alpha - \dfrac{\beta}{r} \neq 0$. Следовательно, решение уравнения (13) имеет вид

$$N(t) = \begin{cases} N_0 e^{(\alpha - \beta/r)t} - \dfrac{n}{\alpha - \beta/r}[1 - e^{(\alpha - \beta/r)t}] & \text{при } \alpha - \dfrac{\beta}{r} \neq 0, \\ N_0 + nt & \text{при } \alpha - \dfrac{\beta}{r} = 0. \end{cases}$$

Из этого решения видно, что если $\alpha - \dfrac{\beta}{r} > 0$ (сверхкритическая масса), то произойдет взрыв. Если же масса докритическая, т. е. $\alpha - \dfrac{\beta}{r} < 0$, то очень скоро будем иметь

$$N(t) \approx \frac{n}{\dfrac{\beta}{r} - \alpha}.$$

Таким образом, если поддерживать массу радиоактивного вещества в докритическом состоянии, но близком к критическому, то независимо от мощности дополнительного источника нейтронов, т. е. независимо от величины n, можно получить большие значения $N(t)$, а значит, и большую мощность реактора. Удерживание процесса в прикритической зоне — дело деликатное и осуществляется довольно сложной системой автоматического регулирования.

4. Падение тел в атмосфере. Сейчас нас будет интересовать скорость $v(t)$ тела, падающего на Землю под действием силы тяжести.

Если бы не было сопротивления воздуха, то при падении с относительно небольших высот имело бы место соотношение

$$\dot{v}(t) = g, \tag{14}$$

вытекающее из второго закона Ньютона $ma = F$ и закона всемирного тяготения, в силу которого при $h \ll R$ (R — радиус Земли)

$$F(t) = G\frac{Mm}{(R + h(t))^2} \approx G\frac{Mm}{R^2} = gm.$$

Движущееся в атмосфере тело испытывает сопротивление, зависящее от скорости движения, в результате чего скорость свободного падения тяжелого тела в атмосфере не растет неограниченно, а устанавливается на некотором уровне. Например, при затяжном прыжке скорость парашютиста в нижних слоях атмосферы устанавливается в пределах 50—60 м/с.

Для диапазона скоростей от 0 до 80 м/с будем считать силу сопротивления пропорциональной скорости тела. Коэффициент пропорциональности, разумеется, зависит от формы тела, которую в одних случаях стремятся сделать хорошо обтекаемой (бомба), а в других случаях (парашют) имеют прямо противоположную цель. Приравнивая действующие на тело силы, приходим к следующему уравнению, которому должна удовлетворять скорость тела, падающего в атмосфере:

$$m\dot{v}(t) = mg - \alpha v. \tag{15}$$

Разделив это уравнение на m и обозначив $\frac{\alpha}{m}$ через β, окончательно получаем

$$\dot{v}(t) = -\beta v + g. \tag{13$'$}$$

Мы пришли к уравнению, которое только обозначениями отличается от уравнения (13). Заметим, что если положить $-\beta v(t) + g = f(t)$, то, поскольку $f'(t) = -\beta v'(t)$, из (13$'$) можно получить равносильное уравнение

$$f'(t) = -\beta f(t),$$

которое с точностью до обозначений совпадает с уравнением (8) или уравнением (10). Таким образом, мы вновь пришли к уравнению, решением которого является экспоненциальная функция

$$f(t) = f(0)e^{-\beta t}.$$

Отсюда следует, что решение уравнения (13$'$) имеет вид

$$v(t) = \frac{1}{\beta}g + \left(v_0 - \frac{1}{\beta}\right)e^{-\beta t},$$

а решение основного уравнения (15) имеет вид

$$v(t) = \frac{m}{\alpha}g + \left(v_0 - \frac{m}{\alpha}g\right)e^{-(\alpha/m)t}, \tag{16}$$

где $v_0 = v(0)$ — начальная вертикальная скорость тела.

Из (16) видно, что при $\alpha > 0$ падающее в атмосфере тело выходит на стационарный режим движения, причем $v(t) \approx \frac{m}{\alpha}g$. Таким образом, в отличие от падения в безвоздушном пространстве, скорость падения в атмосфере зависит не только от формы тела, но и от его массы. При $\alpha \to 0$ правая часть равенства (16) стремится к $v_0 + gt$, т. е. к решению уравнения (14), получающегося из (15) при $\alpha = 0$.

Используя формулу (16), можно составить представление о том, как быстро происходит выход на предельную скорость падения в атмосфере.

Например, если парашют рассчитан на то, что человек средней комплекции приземляется при раскрытом парашюте со скоростью порядка 10 м/с, то, раскрыв парашют после затяжного свободного падения, когда скорость падения составляет примерно 50 м/с, он уже через 3 секунды будет иметь скорость около 12 м/с.

Действительно, из приведенных данных и соотношения (16) находим $\frac{m}{\alpha}g \approx 10$, $\frac{m}{\alpha} \approx 1$, $v_0 = 50$ м/с, поэтому соотношение (16) приобретает вид

$$v(t) = 10 + 40e^{-t}.$$

Поскольку $e^3 \approx 20$, то при $t = 3$ получим $v \approx 12$ м/с.

5. Еще раз о числе *e* и функции exp *x*. На примерах мы убедились (см. также задачи 3, 4 в конце параграфа), что целый ряд явлений природы описывается с математической точки зрения одним и тем же дифференциальным уравнением

$$f'(x) = \alpha f(x), \tag{17}$$

решение которого $f(x)$ однозначно определяется, если указано «начальное условие» $f(0)$. Тогда

$$f(x) = f(0)e^{\alpha x}.$$

Число e и функцию $e^x = \exp x$ мы в свое время ввели довольно формально, сославшись на то, что это действительно важное число и действительно важная функция. Теперь нам ясно, что даже если бы мы не вводили раньше эту функцию, то ее, несомненно, пришлось бы ввести как решение важного, хотя и очень простого уравнения (17). Точнее, достаточно было бы ввести функцию, являющуюся решением уравнения (17) при некотором конкретном значении α, например при $\alpha = 1$, ибо общее уравнение (17) приводится к этому случаю после перехода к новой переменной t, связанной с x соотношением $x = \frac{t}{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$.

Действительно, тогда

$$f(x) = f\left(\frac{t}{\alpha}\right) = F(t), \qquad \frac{df(x)}{dx} = \frac{\frac{dF(t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \alpha F'(t)$$

и вместо уравнения $f'(x) = \alpha f(x)$ имеем теперь $\alpha F'(t) = \alpha F(t)$, или $F'(t) = F(t)$.

Итак, рассмотрим уравнение

$$f'(x) = f(x) \tag{18}$$

и обозначим через $\exp x$ то его решение, для которого $f(0) = 1$.

Прикинем, согласуется ли это определение с прежним определением функции $\exp x$.

Попробуем вычислить значение $f(x)$, исходя из того, что $f(0) = 1$ и f удовлетворяет уравнению (18). Поскольку f — дифференцируемая функция, то f непрерывна, но тогда в силу (18) непрерывна и функция $f'(x)$. Более того, из (18) следует, что f имеет также вторую производную $f''(x) = f'(x)$, и вообще из (18) следует, что f — бесконечно дифференцируемая функция. Так как скорость $f'(x)$ изменения функции $f(x)$ непрерывна, то

на малом промежутке h изменения аргумента функция f' меняется мало, поэтому $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(\xi)h\approx f(x_0)+f'(x_0)h$. Воспользуемся этой приближенной формулой и пройдем отрезок от 0 до x с малым шагом $h=\frac{x}{n}$, где $n\in\mathbb{N}$. Если $x_0=0$, $x_{k+1}=x_k+h$, то мы будем иметь

$$f(x_{k+1})\approx f(x_k)+f'(x_k)h.$$

Учитывая (18) и условие $f(0)=1$, имеем

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_n)\approx f(x_{n-1})+f'(x_{n-1})h=\\ =f(x_{n-1})(1+h)\approx (f(x_{n-2})+f'(x_{n-2})h)(1+h)=\\ =f(x_{n-2})(1+h)^2\approx\ldots\approx f(x_0)(1+h)^n=f(0)(1+h)^n=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

Представляется естественным (и это можно доказать), что чем мельче шаг $h=\frac{x}{n}$, тем точнее приближенная формула $f(x)\approx\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Таким образом, мы приходим к тому, что

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

В частности, если величину $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ обозначить через e и показать, что $e\neq 1$, то получаем, что

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{t\to 0}(1+t)^{x/t}=\lim_{t\to 0}[(1+t)^{1/t}]^x=e^x, \tag{19}$$

ибо мы знаем, что $u^\alpha\to v^\alpha$, если $u\to v$.

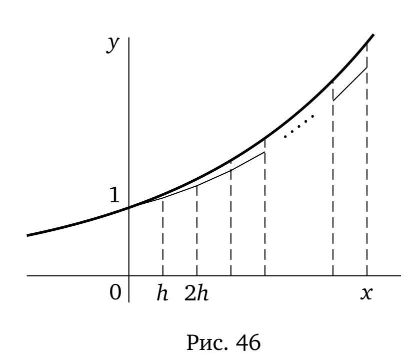


Рис. 46

Метод численного решения дифференциального уравнения (18), позволивший нам получить формулу (19), был предложен еще Эйлером и называется *методом ломаных Эйлера*. Такое название связано с тем, что проведенные выкладки геометрически означают замену решения $f(x)$, точнее, его графика, некоторой аппроксимирующей график ломаной, звенья которой на соответствующих участках $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0,\ldots,n-1)$ задаются уравнениями $y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$ (рис. 46).

Нам встречалось также определение функции $\exp x$ как суммы степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$. К нему тоже можно прийти из уравнения (18), если воспользоваться следующим часто применяемым приемом, называемым *методом неопределенных коэффициентов*. Будем искать решение уравнения (18) в виде суммы степенного ряда

$$f(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots, \tag{20}$$

коэффициенты которого подлежат определению.

Как мы видели (см. § 5, теорема 1), из (20) следует, что $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Но в силу (18) $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots$ и, поскольку $f(0) = 1$, имеем $c_n = \frac{1}{n!}$, т. е. если решение имеет вид (20) и $f(0) = 1$, то обязательно

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

Можно было бы независимо проверить, что функция, определяемая этим рядом, действительно дифференцируема (и не только при $x = 0$) и что она удовлетворяет уравнению (18) и начальному условию $f(0) = 1$. Однако мы не будем на этом останавливаться, ибо наша цель состояла только в том, чтобы понять, согласуется ли введение экспоненциальной функции как решения уравнения (18) при начальном условии $f(0) = 1$ с тем, что мы раньше подразумевали под функцией $\exp x$.

Заметим, что уравнение (18) можно было бы рассматривать в комплексной области, т. е. считать x произвольным комплексным числом. При этом все проведенные рассуждения останутся в силе, быть может, только частично потеряется геометрическая наглядность метода Эйлера.

Таким образом, естественно ожидать, что функция

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \ldots + \frac{1}{n!}z^n + \ldots$$

является и притом единственным решением уравнения

$$f'(z) = f(z),$$

удовлетворяющим условию $f(0) = 1$.

6. Колебания. Если тело, подвешенное на пружине, отклонить от положения равновесия, например, приподняв, а затем отпустив его, то оно будет совершать колебания около положения равновесия. Опишем этот процесс в общем виде.

Пусть известно, что на материальную точку массы m, способную перемещаться вдоль числовой оси Ox, действует сила $F = -kx$, пропорциональная [1] отклонению точки от начала координат. Пусть нам известны также начальное положение $x_0 = x(0)$ нашей точки и ее начальная скорость $v_0 = \dot{x}(0)$. Требуется найти зависимость $x = x(t)$ положения точки от времени.

В силу закона Ньютона, эту задачу можно переписать в следующем чисто математическом виде: решить уравнение

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \tag{21}$$

при начальных условиях $x_0 = x(0)$, $\dot{x}(0) = v_0$.

---

[1] В случае пружины коэффициент $k > 0$, характеризующий ее жесткость, называют *коэффициентом жесткости* пружины.

Перепишем уравнение (21) в виде

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \tag{22}$$

и попробуем вновь воспользоваться экспонентой, а именно попробуем подобрать число λ так, чтобы функция $x(t) = e^{\lambda t}$ удовлетворяла уравнению (22).

Подставляя $x(t) = e^{\lambda t}$ в (22), получаем

$$\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right)e^{\lambda t} = 0,$$

или

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0, \tag{23}$$

т. е. $\lambda_1 = -\sqrt{-\frac{k}{m}}$, $\lambda_2 = \sqrt{-\frac{k}{m}}$. Поскольку $m > 0$, то при $k > 0$ мы имеем два чисто мнимых числа: $\lambda_1 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$ и $\lambda_2 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$. На это мы не рассчитывали, но тем не менее продолжим рассмотрение. По формуле Эйлера

$$e^{-i\sqrt{k/m}\,t} = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t,$$
$$e^{i\sqrt{k/m}\,t} = \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Поскольку при дифференцировании по действительному времени t происходит отдельно дифференцирование действительной и мнимой частей функции $e^{\lambda t}$, то уравнению (22) должны удовлетворять порознь и функция $\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$, и функция $\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$. И это действительно так, в чем легко убедиться прямой проверкой. Итак, комплексная экспонента помогла нам угадать два решения уравнения (22), линейная комбинация которых

$$x(t) = c_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t, \tag{24}$$

очевидно, также является решением уравнения (22).

Коэффициенты c_1, c_2 в (24) подберем из условий

$$x_0 = x(0) = c_1,$$
$$v_0 = \dot{x}(0) = \left(-c_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\Bigg|_{t=0} = c_2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Таким образом, функция

$$x(t) = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \tag{25}$$

является искомым решением.

Делая стандартные преобразования, (25) можно переписать в виде

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + v_0^2\frac{m}{k}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha\right), \tag{26}$$

где

$$\alpha = \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + v_0^2 \frac{m}{k}}}.$$

Таким образом, при $k > 0$ точка будет совершать периодические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, т. е. с частотой $\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, и амплитудой $\sqrt{x_0^2 + v_0^2 \frac{m}{k}}$. Мы утверждаем это потому, что из физических соображений ясно, что решение (25) поставленной задачи единственно. (См. задачу 5 в конце параграфа.)

Движение, описываемое функцией (26), называют *простыми гармоническими колебаниями*, а уравнение (22) — *уравнением гармонических колебаний*.

Вернемся теперь к случаю, когда в уравнении (23) $k < 0$. Тогда две функции $e^{\lambda_1 t} = \exp\left(-\sqrt{-\frac{k}{m}}\, t\right)$, $e^{\lambda_2 t} = \exp\left(\sqrt{-\frac{k}{m}}\, t\right)$ будут вещественными решениями уравнения (22) и функция

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{27}$$

также будет решением. Постоянные c_1 и c_2 подберем из условий

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = c_1 + c_2, \\ v_0 = \dot{x}(0) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2. \end{cases}$$

Полученная система всегда однозначно разрешима, ибо ее определитель $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$.

Поскольку числа λ_1 и λ_2 противоположного знака, то из (27) видно, что при $k < 0$ сила $F = -kx$ не только не стремится вернуть точку в положение равновесия $x = 0$, но со временем неограниченно уводит ее от этого положения, если x_0 или v_0 отлично от нуля. То есть в этом случае $x = 0$ — точка неустойчивого равновесия.

В заключение рассмотрим одну вполне естественную модификацию уравнения (21), на которой еще ярче видна польза показательной функции и формулы Эйлера, связывающей основные элементарные функции.

Предположим, что рассматриваемая нами частица движется в среде (воздухе или жидкости), сопротивлением которой пренебречь нельзя. Пусть сила сопротивления среды пропорциональна скорости точки. Тогда вместо уравнения (21) мы должны написать уравнение

$$m\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x}(t) - kx(t),$$

которое перепишем в виде

$$\ddot{x}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{28}$$

Если вновь искать решение в виде $x(t) = e^{\lambda t}$, то мы придем к квадратному уравнению

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0,$$

корни которого $\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2m} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4mk}}{2m}$.

Случай, когда $\alpha^2 - 4mk > 0$, приводит к двум вещественным корням λ_1, λ_2, и решение может быть найдено в виде (27).

Мы рассмотрим подробнее более интересный для нас случай, когда $\alpha^2 - 4mk < 0$. Тогда оба корня λ_1, λ_2 комплексные (но не чисто мнимые!):

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha}{2m} - i\frac{\sqrt{4mk - \alpha^2}}{2m},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\alpha}{2m} + i\frac{\sqrt{4mk - \alpha^2}}{2m}.$$

Формула Эйлера в этом случае дает

$$e^{\lambda_1 t} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)(\cos\omega t - i\sin\omega t),$$

$$e^{\lambda_2 t} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)(\cos\omega t + i\sin\omega t),$$

где $\omega = \frac{\sqrt{4mk - \alpha^2}}{2m}$. Таким образом, мы находим два вещественных решения $\exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)\cos\omega t$, $\exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)\sin\omega t$ уравнения (28), угадать которые было бы уже довольно трудно. Затем ищем решение исходной задачи в виде их линейной комбинации

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t), \tag{29}$$

подбирая c_1 и c_2 так, чтобы удовлетворить начальным условиям $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

Получающаяся при этом система уравнений, как можно проверить, всегда однозначно разрешима. Таким образом, после преобразований из (29) получаем решение задачи в виде

$$x(t) = A\exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)\sin(\omega t + a), \tag{30}$$

где A и a — константы, определяемые начальными условиями.

Из этой формулы видно, что благодаря множителю $\exp\left(-\frac{\alpha}{2m}t\right)$, где $\alpha > 0$, $m > 0$, в рассматриваемом случае колебания будут *затухающими*, причем скорость затухания амплитуды зависит от отношения $\frac{\alpha}{m}$. Частота колебаний $\frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2}$ меняться во времени не будет. Величина ω тоже зависит только от отношений $\frac{k}{m}$, $\frac{\alpha}{m}$, что, впрочем, можно было предвидеть на основании записи (28) исходного уравнения. При $\alpha = 0$ мы вновь возвращаемся к незатухающим гармоническим колебаниям (26) и уравнению (22).

Задачи и упражнения

1. *Коэффициент полезного действия реактивного движения.*

a) Пусть Q — химическая энергия единицы массы топлива ракеты, ω — скорость истечения топлива. Тогда $\frac{1}{2}\omega^2$ есть кинетическая энергия выброшенной единицы массы топлива. Коэффициент α в равенстве $\frac{1}{2}\omega^2 = \alpha Q$ есть коэффициент полезного действия процессов горения и истечения топлива. Для двигателей на твердом топливе (бездымный порох) $\omega = 2$ км/с, $Q = 1000$ ккал/кг, а для двигателей на жидком (бензин с кислородом) $\omega = 3$ км/с, $Q = 2500$ ккал/кг. Определите в этих случаях коэффициент α.

b) Коэффициент полезного действия (к. п. д.) ракеты определяется как отношение ее конечной кинетической энергии $m_{\text{к}}v^2/2$ к химической энергии сгоревшего топлива $m_{\text{Т}}Q$. Пользуясь формулой (4), получите формулу для к. п. д. ракеты через $m_{\text{К}}$, $m_{\text{Т}}$, Q и α (см. a)).

c) Оцените к. п. д. автомобиля с жидкостным реактивным двигателем, если автомобиль разгоняется до установленной в городе скорости 60 км/час.

d) Оцените к. п. д. ракеты на жидком топливе, выводящей спутник на низкую околоземную орбиту.

e) Оцените, для какой конечной скорости реактивное движение на жидком топливе имеет наибольший к. п. д.

f) Укажите, при каком отношении масс $m_{\text{Т}}/m_{\text{К}}$ топлива и корпуса к. п. д. ракеты с любым видом топлива становится максимально возможным.

2. *Барометрическая формула.*

a) Используя данные п. 2 настоящего параграфа, получите формулу поправочного члена для учета зависимости давления от температуры столба воздуха, если эта температура подвержена изменениям (например, сезонным) в пределах ± 40 °C.

b) Найдите по формуле (9) зависимость давления от высоты при температурах -40 °C, 0 °C, 40 °C и сравните эти результаты с результатами, которые дает ваша приближенная формула из a).

c) Пусть температура воздуха в столбе меняется с высотой по закону $T'(h) = -\alpha T_0$, где T_0 — температура воздуха на поверхности Земли, а $\alpha \approx 7 \cdot 10^{-7}$ см$^{-1}$. Выведите при этих условиях формулу зависимости давления от высоты.

d) Найдите давление в шахте на глубинах 1 км, 3 км, 9 км по формуле (9) и по формуле, которую вы получили в c).

e) Воздух независимо от высоты примерно на 1/5 часть состоит из кислорода. Парциальное давление кислорода составляет также примерно 1/5 часть давления воздуха. Определенный вид рыб может жить при парциальном давлении кислорода не ниже 0,15 атмосфер. Можно ли ожидать, что этот вид встретится в реке на уровне моря? Может ли он встретиться в речке, впадающей в озеро Титикака на высоте 3,81 км?

3. *Радиоактивный распад.*

a) Измеряя количество радиоактивного вещества и продуктов его распада в пробах пород Земли и считая, что сначала продукта распада вообще не было, можно примерно оценить возраст Земли (во всяком случае, с того момента, когда это вещество уже возникло). Пусть в породе имеется m граммов радиоактивного вещества и r граммов продукта его распада. Зная период T полураспада вещества, найдите время, прошедшее с момента начала распада, и количество радиоактивного вещества в пробе того же объема в начальный момент.

b) Атомы радия в породе составляют примерно 10^{-12} часть всех атомов. Каково было содержания радия 10^5, 10^6 и $5 \cdot 10^9$ лет тому назад? ($5 \cdot 10^9$ лет ориентировочно считается возрастом Земли.)

c) В диагностике заболеваний почек часто определяют способность почек выводить из крови различные специально вводимые в организм вещества, например креатин («клиренс тест»). Примером, иллюстрирующим обратный процесс того же типа, может служить восстановление концентрации гемоглобина в крови у донора или у больного, внезапно потерявшего много крови. Во всех этих случаях уменьшение количества введенного вещества (или, наоборот, восстановление недостающего количества) подчиняется закону $N = N_0 e^{-t/\tau}$, где N — количество (или, иными словами, число молекул) вещества, еще оставшегося в организме по прошествии времени t после введения количества N_0, а τ — так называемая *постоянная времени*: это время, по прошествии которого в организме остается $1/e$ часть первоначально введенного количества вещества. Постоянная времени, как легко проверить, в 1,44 раза больше времени полужизни (или времени полураспада), по истечении которого в организме остается половина первоначального количества вещества.

Пусть радиоактивное вещество выводится из организма со скоростью, характеризуемой постоянной времени τ_0, и в то же время спонтанно распадается с постоянной времени τ_p. Покажите, что в этом случае постоянная времени τ, характеризующая длительность сохранения вещества в организме, определяется из соотношения $\tau^{-1} = \tau_0^{-1} + \tau_p^{-1}$.

d) У донора было взято некоторое количество крови, содержащее 201 мг железа; для того чтобы компенсировать потерю железа, ему было велено принимать трижды в день в течение недели таблетки сернокислого железа, содержащие каждая 67 мг железа. Количество железа в крови донора восстанавливается до нормы по экспоненциальному закону с постоянной времени, равной примерно семи суткам. Полагая, что с наибольшей скоростью железо из таблеток включается в кровь сразу же после взятия крови, определите, какая примерно часть железа, содержащегося в таблетках, включится в кровь за все время восстановления нормального содержания железа в крови.

e) Больному со злокачественной опухолью было введено с диагностическими целями некоторое количество радиоактивного фосфора P^{32}, после чего через равные промежутки времени измерялась радиоактивность кожи бедра. Уменьшение радиоактивности подчинялось экспоненциальному закону. Так как период полураспада фосфора известен — он составляет 14,3 суток, — по полученным данным можно было определить постоянную времени процесса уменьшения радиоактивности за счет биологических причин. Найдите эту постоянную, если наблюдениями установлено, что постоянная времени процесса уменьшения радиоактивности в целом составляет 9,4 суток (см. выше задачу c)).

4. *Поглощение излучения.*

Прохождение излучения через среду сопровождается частичным поглощением излучения этой средой. Во многих случаях (линейная теория) можно считать, что, проходя через слой толщиной 2 единицы, излучение ослабляется так же, как при последовательном прохождении через два слоя толщиной 1 каждый.

a) Покажите, что при указанном условии поглощение излучения подчиняется закону $I = I_0 e^{-kl}$, где I_0 — интенсивность излучения, падающего на поглощающее вещество, I — интенсивность после прохождения слоя толщиной l, а k — коэффициент, имеющий размерность, обратную размерности длины.

b) Коэффициент k в случае поглощения света водой в зависимости от длины

волны падающего света, например, таков: ультрафиолет, $k=1{,}4\cdot10^{-2}$ см$^{-1}$; синий, $k=4{,}6\cdot10^{-4}$ см$^{-1}$; зеленый, $k=4{,}4\cdot10^{-4}$ см$^{-1}$; красный, $k=2{,}9\cdot10^{-3}$ см$^{-1}$. Солнечный свет падает вертикально на поверхность чистого озера глубиной 10 м. Сравните интенсивности каждой из перечисленных выше компонент солнечного света над поверхностью озера и на дне.

5. Покажите, что если закон движения точки $x=x(t)$ удовлетворяет уравнению $m\ddot{x}+kx=0$ гармонических колебаний, то

a) величина $E=\dfrac{m\dot{x}^2(t)}{2}+\dfrac{kx^2(t)}{2}$ постоянна ($E=K+U$ — сумма кинетической $K=\dfrac{m\dot{x}^2(t)}{2}$ и потенциальной $U=\dfrac{kx^2(t)}{2}$ энергий точки в момент t);

b) если $x(0)=0$ и $\dot{x}(0)=0$, то $x(t)\equiv0$;

c) существует и притом единственное движение $x=x(t)$ с начальными условиями $x(0)=x_0$ и $\dot{x}(0)=v_0$.

d) Проверьте, что если точка движется в среде с трением и $x=x(t)$ удовлетворяет уравнению $m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=0$, $\alpha>0$, то величина E (см. a)) убывает. Найдите скорость этого убывания и объясните физический смысл полученного результата, учитывая физический смысл величины E.

6. *Движение под действием гуковской* [1] *центральной силы* (плоский осциллятор).

В развитие рассмотренного в п. 6 и задаче 5 уравнения (21) линейного осциллятора рассмотрим уравнение $m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=-k\boldsymbol{r}(t)$, которому удовлетворяет радиус-вектор $\boldsymbol{r}(t)$ точки массы m, движущейся в пространстве под действием притягивающей центральной силы, пропорциональной (с коэффициентом пропорциональности $k>0$) расстоянию $|\boldsymbol{r}(t)|$ от центра. Такая сила возникает, если точка соединена с центром гуковской упругой связью, например пружиной с коэффициентом жесткости k.

a) Продифференцировав векторное произведение $\boldsymbol{r}(t)\times\dot{\boldsymbol{r}}(t)$, покажите, что все движение будет происходить в плоскости, проходящей через центр и содержащей векторы $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ начального положения и начальной скорости точки (плоский осциллятор). Если векторы $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ коллинеарны, то движение будет происходить на прямой, содержащей центр и вектор $\boldsymbol{r}_0$ (линейный осциллятор, рассмотренный в п. 6).

b) Проверьте, что орбитой плоского осциллятора является эллипс и движение по нему периодично. Найдите период обращения.

c) Покажите, что величина $E=m\dot{\boldsymbol{r}}^2(t)+k\boldsymbol{r}^2(t)$ сохраняется во времени.

d) Покажите, что начальные данные $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}(t_0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0=\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$ вполне определяют дальнейшее движение точки.

7. *Эллиптичность планетных орбит.*

Предыдущая задача позволяет рассматривать движение точки под действием центральной гуковской силы происходящим в плоскости. Пусть это плоскость комплексной переменной $z=x+iy$. Движение определяется двумя вещественными функциями $x=x(t)$, $y=y(t)$ или, что то же самое, одной комплекснозначной функцией $z=z(t)$ времени t. Полагая для простоты в задаче 6 $m=1$, $k=1$, рассмотрим простейший вид уравнения такого движения $\ddot{z}(t)=-z(t)$.

a) Зная из задачи 6, что решение этого уравнения, отвечающее конкретным на-

---

[1] Р. Гук (1635—1703) — английский естествоиспытатель, разносторонний ученый и экспериментатор. Открыл клеточное строение тканей и ввел сам термин «клетка». Стоял у истоков математической теории упругости и волновой теории света, высказал гипотезу тяготения и закон обратных квадратов для гравитационного взаимодействия.

чальным данным $z_0 = z(t_0)$, $\dot z_0 = \dot z(t_0)$, единственно, найдите его в виде $z(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$ и, используя формулу Эйлера, проверьте еще раз, что траекторией движения является эллипс с центром в нуле (в определенных случаях он может превратиться в окружность или выродиться в отрезок — выясните когда).

b) Учитывая, что величина $|\dot z(t)|^2 + |z(t)|^2$ не меняется в процессе движения точки $z(t)$, подчиненного уравнению $\ddot z(t) = -z(t)$, проверьте, что точка $w(t) = z^2(t)$ по отношению к новому параметру (времени) τ, связанному с t соотношением $\tau = \tau(t)$ таким, что $\frac{d\tau}{dt} = |z(t)|^2$, движется при этом, подчиняясь уравнению $\frac{d^2 w}{d\tau^2} = -c\frac{w}{|w|^3}$, где c — постоянная, а $w = w(t(\tau))$. Таким образом, движения в центральном поле гуковских сил и движения в ньютоновском гравитационном поле оказались взаимосвязаны.

c) Сопоставьте это с результатом задачи 8 из § 5 и докажите теперь эллиптичность планетных орбит.

d) Если вам доступен компьютер, то, взглянув еще раз на изложенный в п. 5 метод ломаных Эйлера, для начала подсчитайте этим методом несколько значений e^x. (Заметьте, что кроме определения дифференциала, точнее, формулы $f(x_n) \approx f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})h$, где $h = x_n - x_{n-1}$, метод ничего не использует.)

Пусть теперь $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$, $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(0) = (1, 0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}(0) = (0, 1)$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -\frac{\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|^3}$. Опираясь на формулы

$$\boldsymbol{r}(t_n) \approx \boldsymbol{r}(t_{n-1}) + \boldsymbol{v}(t_{n-1})h,$$
$$\boldsymbol{v}(t_n) \approx \boldsymbol{v}(t_{n-1}) + \boldsymbol{a}(t_{n-1})h,$$

где $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t)$, $\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t)$, методом Эйлера рассчитайте траекторию движения точки, посмотрите, какой она формы и как она проходится точкой с течением времени.

§ 7. Первообразная

В дифференциальном исчислении, как мы убедились на примерах предыдущего параграфа, наряду с умением дифференцировать функции и записывать соотношения между их производными весьма ценным является умение находить функции по соотношениям, которым удовлетворяют их производные. Простейшей, но, как будет видно из дальнейшего, весьма важной задачей такого типа является вопрос об отыскании функции $F(x)$ по известной ее производной $F'(x) = f(x)$. Начальному обсуждению этого вопроса и посвящен настоящий параграф.

1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1. Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* или *первообразной* по отношению к функции $f(x)$ на некотором промежутке, если на этом промежутке функция F дифференцируема и удовлетворяет уравнению $F'(x) = f(x)$ или, что то же самое, соотношению $dF(x) = f(x)\,dx$.

Пример 1. Функция $F(x) = \operatorname{arctg} x$ является первообразной для $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на всей числовой прямой, поскольку $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$.

Пример 2. Функция $F(x) = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ как на промежутке всех положительных чисел, так и на полуоси отрицательных чисел, ибо при $x \neq 0$

$$F'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} = f(x).$$

Как обстоит дело с существованием первообразной и каково множество первообразных данной функции?

В интегральном исчислении будет доказан фундаментальный факт о том, что любая непрерывная на промежутке функция имеет на этом промежутке первообразную.

Мы приводим этот факт для информации читателя, а в этом параграфе используется, по существу, лишь следующая, уже известная нам (см. гл. V, § 3, п. 1) характеристика множества первообразных данной функции на числовом промежутке, полученная из теоремы Лагранжа.

Утверждение 1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные функции $f(x)$ на одном и том же промежутке, то их разность $F_1(x) - F_2(x)$ постоянна на этом промежутке.*

Условие, что сравнение F_1 и F_2 ведется на связном промежутке, как отмечалось при доказательстве этого утверждения, весьма существенно. Это можно заметить также из сопоставления примеров 1 и 2, в которых производные функций $F_1(x) = \operatorname{arctg} x$ и $F_2(x) = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$ совпадают в области $\mathbb{R} \setminus 0$ их совместного определения. Однако

$$F_1(x) - F_2(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x = 0,$$

если $x > 0$, в то время как $F_1(x) - F_2(x) \equiv -\pi$ при $x < 0$, ибо при $x < 0$ имеем $\operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \pi + \operatorname{arctg} x$.

Как и операция взятия дифференциала, имеющая свое название «дифференцирование» и свой математический символ $dF(x) = F'(x)\,dx$, операция перехода к первообразной имеет свое название «неопределенное интегрирование» и свой математический символ

$$\int f(x)\,dx, \tag{1}$$

называемый *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на заданном промежутке.

Таким образом, символ (1) мы будем понимать как обозначение любой из первообразных функции f на рассматриваемом промежутке.

В символе (1) знак $\int$ называется знаком *неопределенного интеграла*, f — *подынтегральная функция*, а $f(x)\,dx$ — *подынтегральное выражение*.

Из утверждения 1 следует, что если $F(x)$ — какая-то конкретная первооб-

разная функции $f(x)$ на промежутке, то на этом промежутке

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{2}$$

т. е. любая другая первообразная может быть получена из конкретной $F(x)$ добавлением некоторой постоянной.

Если $F'(x) = f(x)$, т. е. F — первообразная для f на некотором промежутке, то из (2) имеем

$$\boxed{d\int f(x)\,dx = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.} \tag{3}$$

Кроме того, в соответствии с понятием неопределенного интеграла как любой из первообразных, из (2) следует также, что

$$\boxed{\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C.} \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) устанавливают взаимность операций дифференцирования и неопределенного интегрирования. Эти операции взаимно обратны с точностью до появляющейся в формуле (4) неопределенной постоянной C.

До сих пор мы обсуждали лишь математическую природу постоянной C в формуле (2). Укажем теперь ее физический смысл на простейшем примере. Пусть точка движется по прямой так, что ее скорость $v(t)$ известна как функция времени (например, $v(t) \equiv v$). Если $x(t)$ — координата точки в момент t, то функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x}(t) = v(t)$, т. е. является первообразной для $v(t)$. Можно ли по скорости $v(t)$ в каком-то интервале времени восстановить положение точки на оси? Ясно, что нет. По скорости и промежутку времени можно определить величину пройденного за это время пути s, но не положение на оси. Однако это положение также будет полностью определено, если указать его хотя бы в какой-то момент, например при $t = 0$, т. е. задать начальное условие $x(0) = x_0$. До задания начального условия закон движения $x(t)$ мог быть любым среди законов вида $x(t) = \tilde{x}(t) + c$, где $\tilde{x}(t)$ — любая конкретная первообразная функции $v(t)$, а c — произвольная постоянная. Но после задания начального условия $x(0) = x_0$ вся неопределенность исчезает, ибо мы должны иметь $x(0) = \tilde{x}(0) + c = x_0$, т. е. $c = x_0 - \tilde{x}(0)$, и $x(t) = x_0 + [\tilde{x}(t) - \tilde{x}(0)]$. Последняя формула вполне физична, поскольку произвольная первообразная $\tilde{x}$ участвует в формуле только в виде разности, определяя пройденный путь или величину смещения от известной начальной метки $x(0) = x_0$.

2. Основные общие приемы отыскания первообразной. В соответствии с определением символа (1) неопределенного интеграла, он обозначает функцию, производная которой равна подынтегральной функции. Исходя из этого определения, с учетом соотношения (2) и законов дифференцирования можно утверждать, что справедливы следующие соотношения:

a. $$\int (\alpha u(x) + \beta v(x))\, dx = \alpha \int u(x)\, dx + \beta \int v(x)\, dx + c. \quad (5)$$

b. $$\int (uv)'(x)\, dx = \int u'(x)v(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx + c. \quad (6)$$

c. *Если на некотором промежутке* I_x

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

а $\varphi : I_t \to I_x$ *— гладкое (т. е. непрерывно дифференцируемое) отображение промежутка* I_t *в* I_x, *то*

$$\int (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\, dt = (F \circ \varphi)(t) + c. \quad (7)$$

Равенства (5), (6), (7) проверяются прямым дифференцированием их левой и правой частей с использованием в (5) линейности дифференцирования, в (6) правила дифференцирования произведения и в (7) правила дифференцирования композиции функций.

Подобно правилам дифференцирования, позволяющим дифференцировать линейные комбинации, произведения и композиции уже известных функций, соотношения (5), (6), (7), как мы увидим, позволяют в ряде случаев сводить отыскание первообразной данной функции либо к построению первообразных более простых функций, либо вообще к уже известным первообразным. Набор таких известных первообразных может составить, например, следующая краткая таблица неопределенных интегралов, полученная переписыванием таблицы производных основных элементарных функций (см. § 2, п. 3):

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1),$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c,$$

$$\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c \qquad (0 < a \neq 1),$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} \arcsin x + c, \\ -\arccos x + \tilde{c}, \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + c, \\ -\operatorname{arcctg} x + \tilde{c}, \end{cases}$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c,$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c,$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

Каждая из этих формул рассматривается на тех промежутках вещественной оси $\mathbb{R}$, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Если таких промежутков несколько, то постоянная c в правой части может меняться от промежутка к промежутку.

Рассмотрим теперь некоторые примеры, показывающие соотношения (5), (6) и (7) в работе.

Сделаем предварительно следующее общее замечание.

Поскольку, найдя одну какую-нибудь первообразную заданной на промежутке функции, остальные можно получить добавлением постоянных, то условимся для сокращения записи всюду в дальнейшем произвольную постоянную добавлять только к окончательному результату, представляющему из себя конкретную первообразную данной функции.

a. Линейность неопределенного интеграла. Этот заголовок должен означать, что в силу соотношения (5) первообразную от линейной комбинации функций можно искать как линейную комбинацию первообразных этих функций.

Пример 3.

$$\int (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\,dx = a_0 \int 1\,dx + a_1 \int x\,dx + \ldots + a_n \int x^n\,dx =$$
$$= c + a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}.$$

Пример 4.

$$\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\,dx =$$
$$= \int x^2\,dx + 2\int x^{1/2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^{3/2} + \ln|x| + c.$$

Пример 5.

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos x)\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int 1\, dx + \frac{1}{2}\int \cos x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + c.$$

b. Интегрирование по частям. Формулу (6) можно переписать в виде

$$u(x)v(x) = \int u(x)\, dv(x) + \int v(x)\, du(x) + c$$

или, что то же самое, в виде

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\, du(x) + c. \tag{6'}$$

Это означает, что при отыскании первообразной функции $u(x)v'(x)$ дело можно свести к отысканию первообразной функции $v(x)u'(x)$, перебросив дифференцирование на другой сомножитель и частично проинтегрировав функцию, как показано в $(6')$, выделив при этом член $u(x)v(x)$. Формулу $(6')$ называют формулой *интегрирования по частям*.

Пример 6.

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x\, d\ln x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$
$$= x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + c.$$

Пример 7.

$$\int x^2 e^x\, dx = \int x^2\, de^x = x^2e^x - \int e^x\, dx^2 = x^2e^x - 2\int xe^x\, dx =$$
$$= x^2e^x - 2\int x\, de^x = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\, dx\right) =$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = (x^2-2x+2)e^x + c.$$

c. Замена переменной в неопределенном интеграле. Формула (7) показывает, что при отыскании первообразной функции $(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)$ можно поступать следующим образом:

$$\int (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\, dt = \int f(\varphi(t))\, d\varphi(t) = \int f(x)\, dx = F(x) + c = F(\varphi(t)) + c,$$

т. е. сначала произвести замену $\varphi(t) = x$ под знаком интеграла и перейти к новой переменной x, а затем, найдя первообразную как функцию от x, вернуться к старой переменной t заменой $x = \varphi(t)$.

Пример 8.

$$\int \frac{t\, dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| + c = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + c.$$

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{du}{\operatorname{tg} u \cos^2 u} =$$
$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} u)}{\operatorname{tg} u} = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + c = \ln|\operatorname{tg} u| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

Мы рассмотрели несколько примеров, в которых использовались порознь свойства a, b, c неопределенного интеграла. На самом деле в большинстве случаев эти свойства используются совместно.

Пример 10.

$$\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x - \sin x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin 5x\, dx - \int \sin x\, dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\int \sin 5x\, d(5x) + \cos x\right) = \frac{1}{10}\int \sin u\, du + \frac{1}{2}\cos x =$$
$$= -\frac{1}{10}\cos u + \frac{1}{2}\cos x + c = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + c.$$

Пример 11.

$$\int \arcsin x\, dx = x\arcsin x - \int x\, d\arcsin x = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\, du =$$
$$= x\arcsin x + u^{1/2} + c = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Пример 12.

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\, de^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx - \frac{1}{a}\int e^{ax}\, d\cos bx =$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \sin bx\, de^{ax} =$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\, d\sin bx =$$
$$= \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2}e^{ax} - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx\, dx.$$

Из полученного равенства заключаем, что

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c.$$

К этому результату можно было бы прийти, воспользовавшись формулой Эйлера и тем обстоятельством, что первообразной функции $e^{(a+ib)x} = e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx$ является функция

$$\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x} = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + i\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

Это полезно иметь в виду и в будущем. При вещественном x это легко проверить непосредственно, продифференцировав действительную и мнимую части функции $\frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x}$.

В частности, отсюда получаем также, что

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + c.$$

Уже этот небольшой набор разобранных примеров показывает, что при отыскании первообразных даже элементарных функций часто приходится прибегать к дополнительным преобразованиям и ухищрениям, чего совсем не было при отыскании производных композиции тех функций, производные которых нам были известны. Оказывается, это не случайная трудность. Например, в отличие от дифференцирования, переход к первообразной элементарной функции может привести к функции, которая уже не является композицией элементарных. Поэтому не следует отождествлять фразу «найти первообразную» с невыполнимым порой заданием «выразить первообразную данной элементарной функции через элементарные функции». Вообще, класс элементарных функций — вещь очень условная. Имеется еще много важных для приложений специальных функций, которые изучены и затабулированы ничуть не хуже, чем, скажем, $\sin x$ или e^x.

Например, *интегральный синус* $\mathrm{Si}\,x$ есть та первообразная $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ функции $\frac{\sin x}{x}$, которая стремится к нулю при $x \to 0$. Такая первообразная существует, но, как и любая другая первообразная функции $\frac{\sin x}{x}$, она не является композицией элементарных функций.

Аналогично, функция

$$\mathrm{Ci}\,x = \int \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

выделяемая условием $\mathrm{Ci}\,x \to 0$ при $x \to \infty$, не является элементарной. Функция $\mathrm{Ci}\,x$ называется *интегральным косинусом*.

Первообразная $\int \frac{dx}{\ln x}$ функции $\frac{1}{\ln x}$ также неэлементарна. Одна из первообразных этой функции обозначается символом $\mathrm{li}\,x$ и называется *интегральным логарифмом*. Она удовлетворяет условию $\mathrm{li}\,x \to 0$ при $x \to +0$. (Подробнее о специальных функциях $\mathrm{Si}\,x$, $\mathrm{Ci}\,x$, $\mathrm{li}\,x$ будет сказано в гл. VI, § 5.)

Учитывая эти трудности отыскания первообразных, составлены довольно обширные таблицы неопределенных интегралов. Однако, чтобы успешно ими воспользоваться или чтобы не прибегать к ним, если вопрос совсем прост, необходимо иметь некоторые навыки обращения с неопределенными интегралами.

Дальнейшая часть этого параграфа посвящена интегрированию функций из некоторых специальных классов, первообразные которых выражаются в виде композиции элементарных функций.

3. Первообразные рациональных функций. Рассмотрим вопрос об интегралах вида $\int R(x)\,dx$, где $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ есть отношение полиномов.

Если действовать в области вещественных чисел, то, не выходя за пределы поля вещественных чисел, любую такую дробь, как известно из алгебры (см. формулу (37) из § 5, п. 4), можно разложить в сумму

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=p(x)+\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{k_j}\frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\frac{b_{jk}x+c_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}\right), \tag{8}$$

где $p(x)$ — многочлен (он появляется при делении $P(x)$ на $Q(x)$, только если степень $P(x)$ не меньше степени $Q(x)$), a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} — однозначно определяемые действительные числа, а

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{m_n}.$$

О том, как строить разложение (8), мы уже говорили в § 5. После того как разложение (8) построено, интегрирование функции $R(x)$ сводится к интегрированию отдельных слагаемых.

Многочлен мы уже интегрировали в примере 1, поэтому остается рассмотреть только интегрирование дробей вида

$$\frac{1}{(x-a)^k}\quad\text{и}\quad\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k},\quad\text{где } k\in\mathbb{N}.$$

Вопрос о первой из этих дробей решается сразу, ибо

$$\int\frac{1}{(x-a)^k}\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1}+c & \text{при } k\neq 1,\\ \ln|x-a|+c & \text{при } k=1.\end{cases} \tag{9}$$

С интегралом

$$\int\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

поступим следующим образом. Представим многочлен x^2+px+q в виде $\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2+\left(q-\frac{1}{4}p^2\right)$, где $q-\frac{1}{4}p^2>0$, так как многочлен x^2+px+q не имеет вещественных корней. Полагая $x+\frac{1}{2}p=u$ и $q-\frac{1}{4}p^2=a^2$, получаем

$$\int\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\int\frac{\alpha u+\beta}{(u^2+a^2)^k}\,du,$$

где $\alpha=b$, $\beta=c-\frac{1}{2}bp$.

Далее,

$$\int\frac{u}{(u^2+a^2)^k}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^k}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-k)}(u^2+a^2)^{-k+1} & \text{при } k\neq 1,\\ \dfrac{1}{2}\ln(u^2+a^2) & \text{при } k=1,\end{cases} \tag{10}$$

и остается разобраться с интегралом

$$I_k = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}. \tag{11}$$

Интегрируя по частям и делая элементарные преобразования, имеем

$$I_k = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{u^2\,du}{(u^2+a^2)^{k+1}} =$$

$$= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{(u^2+a^2)-a^2}{(u^2+a^2)^{k+1}}\,du = \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1},$$

откуда следует рекуррентное соотношение

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\frac{u}{(u^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2} I_k, \tag{12}$$

позволяющее понижать степень k в интеграле (11). Но I_1 легко вычислить:

$$I_1 = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{u}{a}\right)}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + c; \tag{13}$$

таким образом, используя (12) и (13), можно вычислить также первообразную (11).

Итак, мы доказали следующее

Утверждение 2. *Первообразная любой рациональной функции $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ выражается через рациональные функции, а также трансцендентные функции* ln *и* arctg. *Рациональная часть первообразной, будучи приведена к общему знаменателю, должна в качестве такового иметь произведение всех сомножителей, на которые раскладывается многочлен $Q(x)$, только с кратностями на единицу меньшими, чем кратность их вхождения в разложение $Q(x)$.*

Пример 13. Вычислим $\int \frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$.

Поскольку подынтегральная функция является правильной дробью и разложение знаменателя в произведение $(x-1)(x+1)(x+2)$ тоже известно, то сразу ищем разложение

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \tag{14}$$

нашей дроби в сумму простейших дробей.

Приведя правую часть равенства (14) к общему знаменателю, имеем

$$\frac{2x^2+5x+5}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{(A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C)}{(x-1)(x+1)(x+2)}.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты числителей, получаем систему

$$\begin{cases} A+B+C=2,\\ 3A+B=5,\\ 2A-2B-C=5, \end{cases}$$

из которой находим $(A, B, C) = (2, -1, 1)$.

Заметим, что в данном случае эти числа можно было бы найти и в уме. Действительно, домножая (14) на $x-1$ и полагая затем в полученном равенстве $x = 1$, справа получим A, а слева — значение при $x = 1$ дроби, полученной из нашей вычеркиванием в знаменателе сомножителя $x-1$, т. е. $A = \frac{2+5+5}{2 \cdot 3} = 2$. Аналогично можно было бы найти B и C.

Итак,

$$\int \frac{2x^2+5x+5}{(x^2-1)(x+2)}\,dx = 2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+2} =$$
$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + \ln|x+2| + c = \ln\left|\frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1}\right| + c.$$

Пример 14. Вычислим первообразную функции

$$R(x) = \frac{x^7-2x^6+4x^5-5x^4+4x^3-5x^2-x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}.$$

Прежде всего заметим, что дробь не является правильной, поэтому, раскрыв скобки и найдя знаменатель дроби $Q(x) = x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1$, делим на него числитель, после чего получаем

$$R(x) = x + \frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2},$$

а затем уже ищем разложение правильной дроби

$$\frac{x^5-x^4+x^3-3x^2-2x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}. \tag{15}$$

Конечно, разложение можно найти каноническим путем, выписав систему шести уравнений с шестью неизвестными. Однако вместо этого мы продемонстрируем иные, иногда используемые, технические возможности.

Коэффициент A находим, домножив равенство (15) на $(x-1)^2$ и положив затем $x = 1$: $A = -1$.

Перенесем дробь $\frac{A}{(x-1)^2}$ с уже известным значением $A = -1$ в левую часть равенства (15). Тогда получим

$$\frac{x^4+x^3+2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}, \tag{16}$$

откуда, домножая (16) на $x-1$ и полагая затем $x = 1$, находим $B = 1$.

Перенося теперь дробь $\frac{1}{x-1}$ в левую часть равенства (16), получим

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+1)^2} = \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}. \tag{17}$$

Приводя правую часть равенства (17) к общему знаменателю, приравниваем числители

$$x^2+x+2 = Ex^3+Fx^2+(C+E)x+(D+F),$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} E=0, \\ F=1, \\ C+E=1, \\ D+F=2, \end{cases}$$

или $(C, D, E, F)=(1, 1, 0, 1)$.

Теперь нам известны все коэффициенты в равенстве (15). Первые две дроби при интегрировании дают соответственно $\frac{1}{x-1}$ и $\ln|x-1|$. Далее,

$$\int \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}\,dx=\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}+\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{-1}{2(x^2+1)}+I_2,$$

где

$$I_2=\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x,$$

что следует из (12) и (13).

Наконец,

$$\int \frac{Ex+F}{x^2+1}\,dx=\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=\operatorname{arctg} x.$$

Собирая все интегралы, окончательно имеем

$$\int R(x)\,dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x-1}+\frac{x}{2(x^2+1)^2}+\ln|x-1|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg} x+c.$$

Рассмотрим теперь некоторые часто встречающиеся неопределенные интегралы, вычисление которых может быть сведено к отысканию первообразной рациональной функции.

4. Первообразные вида $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$. Пусть $R(u, v)$ — рациональная функция от u и v, т. е. отношение $\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ полиномов, являющихся линейными комбинациями мономов $u^m v^n$, где $m=0, 1, \ldots, n=0, 1, \ldots$

Для вычисления первообразной $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ существует несколько приемов, из которых один — вполне универсальный, хотя и не всегда самый экономный.

а. Сделаем замену $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Поскольку

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$dt=\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}},\quad \text{т. е.}\quad dx=\frac{2dt}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

то

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt,$$

и дело свелось к интегрированию рациональной функции.

Однако такой путь часто приводит к очень громоздкой рациональной функции, поэтому следует иметь в виду, что в ряде случаев существуют и другие возможности рационализации интеграла.

b. В случае интегралов вида $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\,dx$ или $\int r(\operatorname{tg} x)\,dx$, где $r(u)$ — рациональная функция, удобна подстановка $t = \operatorname{tg} x$, ибо

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$
$$dt = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \text{т. е.} \quad dx = \frac{dt}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Выполнив указанную подстановку, получим соответственно

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\,dx = \int R\Big(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\Big)\frac{dt}{1+t^2},$$
$$\int r(\operatorname{tg} x)\,dx = \int r(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

c. В случае интегралов вида

$$\int R(\cos x, \sin^2 x)\sin x\,dx \quad \text{или} \quad \int R(\cos^2 x, \sin x)\cos x\,dx$$

можно внести функции $\sin x$, $\cos x$ под знак дифференциала и сделать замену $t = \cos x$ или $t = \sin x$ соответственно. После замены эти интегралы будут иметь вид

$$-\int R(t, 1-t^2)\,dt \quad \text{или} \quad \int R(1-t^2, t)\,dt.$$

Пример 15.

$$\int \frac{dx}{3+\sin x} = \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} =$$
$$= 2\int \frac{dt}{3t^2+2t+3} = \frac{2}{3}\int \frac{d\big(t+\frac{1}{3}\big)}{\big(t+\frac{1}{3}\big)^2+\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{u^2+\big(\frac{2\sqrt{2}}{3}\big)^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3u}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}} + c.$$

Здесь мы воспользовались универсальной заменой $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Пример 16.

$$\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg} x+1)^2} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} x+1)^2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2} =$$
$$= -\frac{1}{t+1} + c = c - \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}.$$

Пример 17.

$$\int \frac{dx}{2\sin^2 3x - 3\cos^2 3x + 1} = \int \frac{dx}{\cos^2 3x\,(2\operatorname{tg}^2 3x - 3 + (1 + \operatorname{tg}^2 3x))} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\operatorname{tg} 3x}{3\operatorname{tg}^2 3x - 2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{3t^2 - 2} = \frac{1}{3\cdot 2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{d\sqrt{\frac{3}{2}}t}{\frac{3}{2}t^2 - 1} = \frac{1}{3\sqrt{6}}\int \frac{du}{u^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + c = \frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}t - 1}{\sqrt{\frac{3}{2}}t + 1}\right| + c = \frac{1}{6\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} 3x - \sqrt{\frac{2}{3}}}{\operatorname{tg} 3x + \sqrt{\frac{2}{3}}}\right| + c.$$

Пример 18.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x\, d\sin x}{\sin^x 7\, x} = \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t^7} =$$

$$= \int (t^{-7} - t^{-5})\,dt = -\frac{1}{6}t^{-6} + \frac{1}{4}t^{-4} + c = \frac{1}{4\sin^4 x} - \frac{1}{6\sin^6 x} + c.$$

5. Первообразные вида $\int R(x, y(x))\,dx$. Пусть, как и в пункте 4, $R(x, y)$ — рациональная функция. Рассмотрим некоторые специальные первообразные вида

$$\int R(x, y(x))\,dx,$$

где $y = y(x)$ — функция от x.

Прежде всего, ясно, что если удастся сделать замену $x = x(t)$ так, что обе функции $x = x(t)$ и $y = y(x(t))$ окажутся рациональными функциями от t, то $x'(t)$ — тоже рациональная функция и

$$\int R(x, y(x))\,dx = \int R(x(t), y(x(t)))x'(t)\,dt,$$

т. е. дело сведется к интегрированию рациональной функции.

Мы рассмотрим следующие специальные случаи задания функции $y = y(x)$.

а. Если $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где $n \in \mathbb{N}$, то, полагая $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, получаем

$$x = \frac{d\cdot t^n - b}{a - c\cdot t^n}, \qquad y = t,$$

и подынтегральное выражение рационализируется.

Пример 19.

$$\int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \int t\, d\Big(\frac{t^3+1}{1-t^3}\Big) = t\cdot\frac{t^3+1}{1-t^3} - \int \frac{t^3+1}{1-t^3}\,dt =$$

$$= t\cdot\frac{t^3+1}{1-t^3} - \int\Big(\frac{2}{1-t^3} - 1\Big)\,dt = t\cdot\frac{t^3+1}{1-t^3} + t - 2\int \frac{dt}{(1-t)(1+t+t^2)} =$$

$$= \frac{2t}{1-t^3} - 2\int \left(\frac{1}{3(1-t)} + \frac{2+t}{3(1+t+t^2)}\right) dt =$$

$$= \frac{2t}{1-t^3} + \frac{2}{3}\ln|1-t| - \frac{2}{3}\int \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\, dt =$$

$$= \frac{2t}{1-t^3} + \frac{2}{3}\ln|1-t| - \frac{1}{3}\ln\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)+c,$$

$$\text{где } t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}.$$

b. Рассмотрим теперь случай, когда $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, т. е. речь идет об интегралах вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx.$$

Выделяя полный квадрат в трехчлене $ax^2 + bx + c$ и делая соответствующую линейную замену переменной, сводим общий случай к одному из следующих трех простейших:

$$\int R\left(t, \sqrt{t^2+1}\right) dt, \quad \int R\left(t, \sqrt{t^2-1}\right) dt, \quad \int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) dt. \qquad (18)$$

Для рационализации этих интегралов теперь достаточно положить соответственно

$$\sqrt{t^2+1} = tu+1, \quad \text{или} \quad \sqrt{t^2+1} = tu-1, \quad \text{или} \quad \sqrt{t^2+1} = t-u;$$
$$\sqrt{t^2-1} = u(t-1), \quad \text{или} \quad \sqrt{t^2-1} = u(t+1), \quad \text{или} \quad \sqrt{t^2-1} = t-u;$$
$$\sqrt{1-t^2} = u(1-t), \quad \text{или} \quad \sqrt{1-t^2} = u(1+t), \quad \text{или} \quad \sqrt{1-t^2} = tu \pm 1.$$

Эти подстановки были предложены еще Эйлером (см. задачу 3 в конце параграфа).

Проверим, например, что после первой подстановки мы сведем первый интеграл к интегралу от рациональной функции.

В самом деле, если $\sqrt{t^2+1} = tu+1$, то $t^2+1 = t^2u^2+2tu+1$, откуда

$$t = \frac{2u}{1-u^2}$$

и, в свою очередь,

$$\sqrt{t^2+1} = \frac{1+u^2}{1-u^2}.$$

Таким образом, t и $\sqrt{t^2+1}$ выразились рационально через u, а следовательно, интеграл привелся к интегралу от рациональной функции.

Интегралы (18) подстановками $t = \operatorname{sh}\varphi$, $t = \operatorname{ch}\varphi$, $t = \sin\varphi$ (или $t = \cos\varphi$) соответственно приводятся также к тригонометрической форме

$$\int R(\operatorname{sh}\varphi,\ \operatorname{ch}\varphi)\operatorname{ch}\varphi\, d\varphi, \qquad \int R(\operatorname{ch}\varphi,\ \operatorname{sh}\varphi)\operatorname{sh}\varphi\, d\varphi$$

и

$$\int R(\sin\varphi,\ \cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi \quad \text{или} \quad -\int R(\cos\varphi,\ \sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Пример 20.

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{x+\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{dt}{t-1+\sqrt{t^2+1}}.$$

Полагая $\sqrt{t^2+1}=u-t$, имеем $1=u^2-2tu$, откуда $t=\frac{u^2-1}{2u}$. Поэтому

$$\int \frac{dt}{t-1+\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2(u-1)} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}\right)du =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + \frac{1}{2u} + c.$$

Теперь остается проделать обратный путь замен: $u=t+\sqrt{t^2+1}$ и $t=x+1$.

c. Эллиптические интегралы. Очень важными являются также первообразные вида

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx, \tag{19}$$

где $P(x)$ — многочлен степени $n>2$. Такой интеграл, как было показано Абелем и Лиувиллем, вообще говоря, уже не выражается через элементарные функции.

При $n=3$ и $n=4$ интеграл (19) называется *эллиптическим*, а при $n>4$ — *гиперэллиптическим*.

Можно показать, что общий эллиптический интеграл элементарными подстановками с точностью до слагаемых, выражающихся через элементарные функции, приводится к следующим трем стандартным эллиптическим интегралам:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{20}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{21}$$

$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{22}$$

где h и k — параметры, причем во всех трех случаях параметр k лежит в интервале $]0, 1[$.

Подстановкой $x=\sin\varphi$ эти интегралы можно свести к следующим каноническим интегралам или их комбинациям:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{23}$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{24}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{25}$$

Интегралы (23), (24), (25) называются соответственно *эллиптическими интегралами первого, второго* и *третьего рода* (в форме Лежандра). Через $F(k,\varphi)$ и $E(k,\varphi)$ обозначают эллиптические интегралы (23) и (24) первого и второго рода соответственно, выделяемые условиями $F(k,0)=0$ и $E(k,0)=0$.

Функции $F(k,\varphi)$, $E(k,\varphi)$ часто используются, и потому составлены достаточно подробные таблицы их значений для $0<k<1$ и $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

Эллиптические интегралы, как показал Абель, естественно рассматривать в комплексной области, в неразрывной связи с так называемыми эллиптическими функциями, которые соотносятся с эллиптическими интегралами так же, как, например, функция $\sin\varphi$ с интегралом $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}}=\arcsin\varphi$.

Задачи и упражнения

1. *Метод Остроградского*[1] *выделения рациональной части интеграла от правильной рациональной дроби.*

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь; $q(x)$ — многочлен, имеющий те же корни, что и $Q(x)$, но кратности 1; $Q_1(x)=\frac{Q(x)}{q(x)}$.

Покажите, что

a) Имеет место следующая формула Остроградского:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx, \tag{26}$$

где $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, $\frac{p(x)}{q(x)}$ — правильные рациональные дроби, причем $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ — трансцендентная функция.

(В силу этого результата дробь $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ в (26) называется *рациональной частью* интеграла $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.)

[1] М. В. Остроградский (1801—1861) — выдающийся русский механик и математик, один из инициаторов прикладного направления исследований в Петербургской математической школе.

b) В формуле
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)'+\frac{p(x)}{q(x)},$$
полученной дифференцированием формулы Остроградского, сумма справа после надлежащих сокращений приводится к знаменателю $Q(x)$.

c) Многочлены $q(x)$, $Q_1(x)$, а затем и многочлены $p(x)$, $P_1(x)$ можно найти алгебраическим путем, даже не зная корней многочлена $Q(x)$. Таким образом, рациональную часть интеграла (26) можно полностью найти, даже не вычислив всей первообразной.

d) Выделите рациональную часть интеграла (26), если
$$P(x)=2x^6+3x^5+6x^4+6x^3+10x^2+3x+2,$$
$$Q(x)=x^7+3x^6+5x^5+7x^4+7x^3+5x^2+3x+1$$
(см. пример 17 в § 5 этой главы).

2. Пусть ищется первообразная
$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx, \tag{27}$$
где $R(u,v)=\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ — рациональная функция.

Покажите, что

a) если $R(-u,v)=R(u,v)$, то $R(u,v)$ имеет вид $R_1(u^2,v)$;

b) если $R(-u,v)=-R(u,v)$, то $R(u,v)=u\cdot R_2(u^2,v)$ и подстановка $t=\sin x$ рационализирует интеграл (27);

c) если $R(-u,-v)=R(u,v)$, то $R(u,v)=R_3\left(\dfrac{u}{v},v^2\right)$ и подстановка $t=\operatorname{tg} x$ рационализирует интеграл (27).

3. *Интегралы вида*
$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx. \tag{28}$$

a) Проверьте, что интеграл (28) приводится к интегралу от рациональной функции следующими *подстановками Эйлера*:

$t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{a}x$, если $a>0$,

$t=\sqrt{a\dfrac{x-x_1}{x-x_2}}$, если x_1, x_2 — действительные корни трехчлена ax^2+bx+c.

b) Пусть (x_0,y_0) — точка кривой $y^2=ax^2+bx+c$, а t — угловой коэффициент прямой, проходящей через точку (x_0,y_0) и пересекающей кривую в некоторой точке (x,y). Выразите координаты (x,y) через (x_0,y_0) и t и свяжите эти формулы с подстановками Эйлера.

c) Кривая, задаваемая алгебраическим уравнением $P(x,y)=0$, называется *уникурсальной*, если она допускает параметрическую запись $x=x(t)$, $y=y(t)$ при помощи рациональных функций $x(t)$, $y(t)$. Покажите, что интеграл $\int R(x,y(x))\,dx$, где $R(u,v)$ — рациональная функция, а $y(x)$ — алгебраическая функция, удовлетворяющая уравнению $P(x,y)=0$, задающему уникурсальную кривую, приводится к интегралу от рациональной функции.

d) Покажите, что интеграл (28) всегда можно свести к вычислению интегралов следующих трех типов:
$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx,\quad \int\frac{dx}{(x-x_0)^k\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}},\quad \int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^m\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

4. a) Покажите, что интеграл

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx$$

от дифференциального бинома, где m, n, p — рациональные числа, приводится к интегралу

$$\int (a+bt)^p t^q \, dt, \tag{29}$$

где p, q — рациональные числа.

b) Интеграл (29) выражается через элементарные функции, если одно из трех чисел p, q, $p+q$ — целое. (П. Л. Чебышёв показал, что других случаев, при которых бы интеграл (29) выражался в элементарных функциях, не существует.)

5. *Эллиптические интегралы.*

a) Любой многочлен третьей степени с действительными коэффициентами имеет вещественный корень x_0 и заменой $x-x_0=t^2$ приводится к многочлену вида $t^2(at^4+ +bt^3+ct^2+dt+e)$, где $a\neq 0$.

b) Функция $R(x, \sqrt{P(x)})$, где $R(u, v)$ — рациональная функция, а P — полином степени 3 или 4, приводится к виду $R_1(t, \sqrt{at^4+bt^3+\ldots+e})$, где $a\neq 0$.

c) Многочлен четвертой степени $ax^4+bx^3+\ldots+e$ представляется в виде произведения $a(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)$ и заменой $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{\gamma t+1}$ всегда может быть приведен к виду $\dfrac{(M_1+N_1t^2)(M_2+N_2t^2)}{(\gamma t+1)^2}$.

d) Функция $R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+\ldots+e})$ заменой $x=\dfrac{\alpha t+\beta}{\gamma t+1}$ может быть приведена к виду

$$R_1\big(t, \sqrt{A(1+m_1t^2)(1+m_2t^2)}\big).$$

e) Функция $R(x, \sqrt{y})$ может быть представлена в виде суммы $R_1(x, y)+\dfrac{R_2(x, y)}{\sqrt{y}}$, где R_1 и R_2 — рациональные функции.

f) Любая рациональная функция может быть представлена как сумма четной и нечетной рациональных функций.

g) Если рациональная функция $R(x)$ четна, то она имеет вид $r(x^2)$, а если нечетна, то вид $xr(x^2)$, где $r(x)$ — рациональная функция.

h) Любая функция $R(x, \sqrt{y})$ приводится к виду

$$R_1(x, y)+\frac{R_2(x^2, y)}{\sqrt{y}}+\frac{R_3(x^2, y)}{\sqrt{y}}x.$$

i) Любой интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx$, где $P(x)$ — многочлен четвертой степени, с точностью до элементарных слагаемых приводится к интегралу

$$\int \frac{r(t^2)\, dt}{\sqrt{A(1+m_1t^2)(1+m_2t^2)}},$$

где $r(t)$ — рациональная функция, $A=\pm 1$.

j) Если $|m_1|>|m_2|>0$, то одной из замен вида $\sqrt{m_1}\,t=x$, $\sqrt{m_1}\,t=\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{m_1}\,t= =\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sqrt{m_1}\,t=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ интеграл $\displaystyle\int \frac{r(t^2)\, dt}{\sqrt{A(1+m_1t^2)(1+m_2t^2)}}$ приводится к виду $\displaystyle\int \frac{\tilde r(x^2)\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, где $0<k<1$, а $\tilde r$ — рациональная функция.

k) Выведите формулы понижения показателей $2n$, m для интегралов

$$\int \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{dx}{(x^2-a)^m \cdot \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

l) Любой эллиптический интеграл

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx,$$

где P — полином четвертой степени, с точностью до слагаемых, представляющихся в виде элементарных функций, приводится к одному из трех канонических интегралов (20), (21), (22).

m) Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ выразите через канонические эллиптические интегралы.

n) Выразите через эллиптические интегралы первообразные функций $\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha - \cos x}}$.

6. Используя вводимые ниже обозначения, найдите с точностью до линейной функции $Ax+B$ первообразные следующих неэлементарных специальных функций:

a) $\mathrm{Ei}\,(x) = \int \frac{e^x}{x}\, dx$ (интегральная экспонента);

b) $\mathrm{Si}\,(x) = \int \frac{\sin x}{x}\, dx$ (интегральный синус);

c) $\mathrm{Ci}\,(x) = \int \frac{\cos x}{x}\, dx$ (интегральный косинус);

d) $\mathrm{Shi}\,(x) = \int \frac{\operatorname{sh} x}{x}\, dx$ (интегральный гиперболический синус);

e) $\mathrm{Chi}\,(x) = \int \frac{\operatorname{ch} x}{x}\, dx$ (интегральный гиперболический косинус);

f) $S(x) = \int \sin x^2\, dx$

g) $C(x) = \int \cos x^2\, dx$ (интегралы Френеля);

h) $\Phi(x) = \int e^{-x^2}\, dx$ (интеграл Эйлера—Пуассона);

i) $\mathrm{li}\,(x) = \int \frac{dx}{\ln x}$ (интегральный логарифм).

7. Проверьте, что с точностью до постоянной справедливы следующие равенства:

a) $\mathrm{Ei}\,(x) = \mathrm{li}\,(e^x)$;

b) $\mathrm{Chi}\,(x) = \frac{1}{2}[\mathrm{Ei}\,(x) + \mathrm{Ei}\,(-x)]$;

c) $\mathrm{Shi}\,(x) = \frac{1}{2}[\mathrm{Ei}\,(x) - \mathrm{Ei}\,(-x)]$;

d) $\mathrm{Ei}\,(ix) = \mathrm{Ci}\,(x) + i\,\mathrm{Si}\,(x)$;

e) $e^{i\pi/4}\Phi(xe^{-i\pi/4}) = C(x) + iS(x)$.

8. Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

называют *уравнением с разделяющимися переменными*, поскольку его можно переписать в виде

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx,$$

в котором переменные x и y разделены. После этого уравнение можно решить:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c,$$

вычислив соответствующие первообразные.

Решите уравнения

a) $2x^3yy' + y^2 = 2$;

b) $xyy' = \sqrt{1+x^2}$;

c) $y' = \cos(y+x)$, положив $u(x) = y(x) + x$;

d) $x^2y' - \cos 2y = 1$ и выделите то решение, которое удовлетворяет условию $y(x) \to 0$ при $x \to +\infty$;

e) $\dfrac{1}{x}y'(x) = \operatorname{Si}(x)$;

f) $\dfrac{y'(x)}{\cos x} = C(x)$.

9. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Предельную скорость падения человека в воздухе нормальной плотности принять равной 50 м/с. Решите задачу в предположении, что сопротивление воздуха пропорционально

a) скорости;

b) квадрату скорости.

Изменением давления с высотой пренебречь.

10. Известно, что скорость истечения воды из небольшого отверстия в дне сосуда достаточно точно может быть вычислена по формуле $0{,}6\sqrt{2gH}$, где g — ускорение силы тяжести, а H — высота уровня воды над отверстием.

Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 мин. За какое время вытечет вся вода?

11. Какую форму должен иметь сосуд, являющийся телом вращения, чтобы при истечении из него воды уровень воды понижался равномерно? (Исходные данные см. в задаче 10.)

12. В рабочее помещение вместимостью 10^4 м^3 через вентиляторы в 1 минуту подается 10^3 м^3 свежего воздуха, содержащего 0,04 % CO_2, и одновременно такое же количество смеси выводится из помещения. В 9 часов утра в помещение входят служащие, и через полчаса содержание CO_2 в воздухе повышается до 0,12 %. Оцените содержание углекислого газа в помещении к 2 часам дня.

Глава VI

Интеграл

§ 1. Определение интеграла и описание множества интегрируемых функций

1. Задача и наводящие соображения. Пусть точка движется вдоль числовой оси, $s(t)$ — ее координата в момент t, а $v(t) = s'(t)$ — ее скорость в тот же момент t. Предположим, что мы знаем положение $s(t_0)$ точки в момент t_0 и к нам поступают данные о ее скорости. Располагая ими, мы хотим вычислить $s(t)$ для любого фиксированного значения $t > t_0$.

Если считать скорость $v(t)$ меняющейся непрерывно, то смещение точки за малый промежуток времени приближенно можно вычислить как произведение $v(\tau)\Delta t$ скорости в произвольный момент τ, относящийся к этому промежутку времени, на величину Δt самого промежутка. Учитывая это замечание, разобьем отрезок $[t_0, t]$, отметив некоторые моменты t_i $(i = 0, \ldots, n)$, так, что $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, и так, что промежутки $[t_{i-1}, t_i]$ малы. Пусть $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ и $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, тогда имеем приближенное равенство

$$s(t) - s(t_0) \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

По нашим представлениям, это приближенное равенство будет уточняться, если переходить к разбиениям отрезка $[t_0, t]$ на всё более мелкие промежутки. Таким образом, надо полагать, что в пределе, когда величина λ наибольшего из промежутков разбиения стремится к нулю, получим точное равенство

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i = s(t) - s(t_0). \qquad (1)$$

Это равенство есть не что иное, как фундаментальная для всего анализа формула Ньютона—Лейбница. Она позволяет, с одной стороны, численно находить первообразную $s(t)$ по ее производной $v(t)$, а с другой стороны, по найденной каким-либо способом первообразной $s(t)$ функции $v(t)$ найти стоящий слева предел сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$.

Такие суммы, называемые *интегральными суммами*, встречаются в самых разнообразных случаях.

Попробуем, например, следуя Архимеду, найти площадь под параболой $y = x^2$ над отрезком $[0, 1]$ (рис. 47). Не останавливаясь здесь на подробном обсуждении понятия площади фигуры, о котором речь будет идти несколько позже, мы, как и Архимед, будем действовать методом исчерпания фигуры посредством простейших фигур — прямоугольников, площади которых мы вычислять умеем. Разбив отрезок $[0, 1]$ точками $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ на мелкие отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, мы, очевидно, можем приближенно вычислить искомую площадь σ как сумму площадей изображенных на рисунке прямоугольников:

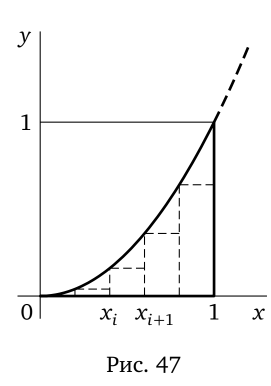


Рис. 47

$$\sigma \approx \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 \Delta x_i;$$

здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Полагая $f(x) = x^2$ и $\xi_i = x_{i-1}$, мы перепишем полученную формулу в виде

$$\sigma \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

В этих обозначениях в пределе будем иметь

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \sigma, \tag{2}$$

где, как и выше, λ — длина наибольшего из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения.

Формула (2) только обозначениями отличается от формулы (1). Забыв на миг о геометрическом смысле $f(\xi_i)$, Δx_i и считая x временем, а $f(x)$ скоростью, найдем первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ и тогда по формуле (1) получим, что $\sigma = F(1) - F(0)$.

В нашем случае $f(x) = x^2$, поэтому $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ и $\sigma = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$. Это и есть результат Архимеда, который он получил прямым вычислением предела в (2).

Предел интегральных сумм называется *интегралом*. Таким образом, формула (1) Ньютона—Лейбница связывает интеграл и первообразную.

Перейдем теперь к точным формулировкам и проверке того, что на эвристическом уровне было получено выше из общих соображений.

2. Определение интеграла Римана

a. Разбиения

Определение 1. *Разбиением* P отрезка $[a, b]$, $a < b$, называется такая конечная система точек $x_0, \ldots, x_n$ этого отрезка, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ называются *отрезками разбиения* P.

Максимум $\lambda(P)$ из длин отрезков разбиения называется *параметром разбиения* P.

Определение 2. Говорят, что имеется *разбиение* (P, ξ) *с отмеченными точками* отрезка $[a, b]$, если имеется разбиение P отрезка $[a, b]$ и в каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения P выбрано по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Набор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ обозначается одним символом ξ.

b. База в множестве разбиений. В множестве $\mathcal{P}$ разбиений с отмеченными точками данного отрезка $[a, b]$ рассмотрим следующую базу $\mathcal{B} = \{B_d\}$. Элемент B_d, $d > 0$, базы $\mathcal{B}$ есть совокупность всех тех разбиений (P, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, для которых $\lambda(P) < d$.

Проверим, что $\{B_d\}$, $d > 0$, — действительно база в $\mathcal{P}$.

Во-первых, $B_d \neq \varnothing$. В самом деле, каким бы ни было число $d > 0$, очевидно, существует разбиение P отрезка $[a, b]$ с параметром $\lambda(P) < d$ (например, разбиение на n конгруэнтных отрезков). Но тогда существует и разбиение (P, ξ) с отмеченными точками, для которого $\lambda(P) < d$.

Во-вторых, если $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ и $d = \min\{d_1, d_2\}$, то, очевидно, $B_{d_1} \cap B_{d_2} = B_d \in \mathcal{B}$.

Итак, $\mathcal{B} = \{B_d\}$ — действительно база в $\mathcal{P}$.

c. Интегральная сумма

Определение 3. Если функция f определена на отрезке $[a, b]$, а (P, ξ) — разбиение с отмеченными точками этого отрезка, то сумма

$$\sigma(f; P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{3}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции f, соответствующей разбиению (P, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Таким образом, при фиксированной функции f интегральная сумма $\sigma(f; P, \xi)$ оказывается функцией $\Phi(p) = \sigma(f; p)$ на множестве $\mathcal{P}$ разбиений $p = (P, \xi)$ с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Поскольку в $\mathcal{P}$ имеется база $\mathcal{B}$, то можно ставить вопрос о пределе функции $\Phi(p)$ по этой базе.

d. Интеграл Римана. Пусть f — функция, заданная на отрезке $[a, b]$.

Определение 4. Говорят, что число I является *интегралом Римана* от функции f на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения (P, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, параметр которого $\lambda(P) < \delta$, имеет место соотношение

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Поскольку разбиения $p = (P, \xi)$, для которых $\lambda(P) < \delta$, составляют элемент B_δ введенной выше базы $\mathcal{B}$ в множестве $\mathcal{P}$ разбиений с отмеченными точками, то определение 4 равносильно тому, что

$$I = \lim_{\mathcal{B}} \Phi(p),$$

т. е. интеграл I есть предел по базе $\mathcal{B}$ значений интегральных сумм функции f, отвечающих разбиению с отмеченными точками отрезка $[a, b]$.

Базу $\mathcal{B}$ естественно обозначить символом $\lambda(P) \to 0$, и тогда определение интеграла можно переписать в виде

$$I = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{4}$$

Интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

в котором числа a, b называются *нижним* и *верхним пределом интегрирования* соответственно; f — *подынтегральная функция*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральное выражение*, x — *переменная интегрирования*.

Итак,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.} \tag{5}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функция f называется *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$, если для нее существует указанный в (5) предел интегральных сумм при $\lambda(P) \to 0$ (т. е. если для нее определен интеграл Римана).

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будет обозначаться через $\mathcal{R}[a, b]$.

Поскольку пока мы не будем рассматривать другого интеграла, кроме интеграла Римана, условимся для краткости вместо терминов «интеграл Римана» и «функция, интегрируемая по Риману» говорить соответственно «интеграл» и «интегрируемая функция».

3. Множество интегрируемых функций. В силу определения интеграла (определение 4) и его переформулировок в виде (4) и (5), интеграл есть предел некоторой специальной функции $\Phi(p) = \sigma(f; P, \xi)$ — интегральной суммы, определенной на множестве $\mathcal{P}$ разбиений $p = (P, \xi)$ с отмеченными точками отрезка $[a, b]$. Предел этот берется по базе $\mathcal{B}$ в $\mathcal{P}$, которую мы обозначили как $\lambda(P) \to 0$.

Таким образом, интегрируемость функции f на $[a, b]$ зависит от наличия указанного предела.

В силу критерия Коши этот предел существует тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется элемент $B_\delta \in \mathcal{B}$ базы, в любых точках p', p'' которого выполнено соотношение

$$|\Phi(p') - \Phi(p'')| < \varepsilon.$$

В более подробной записи сказанное означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых разбиений (P', ξ'), (P'', ξ'') с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, для которых $\lambda(P') < \delta$ и $\lambda(P'') < \delta$, выполнено неравенство

$$|\sigma(f; P', \xi') - \sigma(f; P'', \xi'')| < \varepsilon$$

или, что то же самое, неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n'} f(\xi'_i)\Delta x'_i - \sum_{i=1}^{n''} f(\xi''_i)\Delta x''_i\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Мы воспользуемся сформулированным критерием Коши для того, чтобы получить сначала простое необходимое, а затем и достаточное условие интегрируемости функции по Риману.

a. Необходимое условие интегрируемости

Утверждение 1. *Для того чтобы функция f, определенная на отрезке $[a, b]$, была интегрируема на нем по Риману, необходимо, чтобы она была ограничена на этом отрезке.*

Короче,

$$(f \in \mathcal{R}[a, b]) \Rightarrow (f \text{ ограничена на } [a, b]).$$

◄ Если f не ограничена на $[a, b]$, то при любом разбиении P отрезка $[a, b]$ функция f окажется неограниченной по крайней мере на одном из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения P. Это означает, что, выбирая различным образом точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, можно сделать величину $|f(\xi_i)\Delta x_i|$ сколь угодно большой. Но тогда и интегральную сумму $\sigma(f; P, \xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ можно сделать по модулю сколь угодно большой за счет изменений только точки ξ_i в этом отрезке.

Ясно, что в таком случае не может быть и речи о конечном пределе интегральных сумм, что, впрочем, видно и из критерия Коши, ибо соотношение (6) в этом случае, очевидно, не имеет места даже для сколь угодно мелких разбиений. ►

Как мы увидим, полученное необходимое условие еще очень далеко от необходимого и достаточного условия интегрируемости, однако оно уже позволяет нам в дальнейшем исследовать только ограниченные функции.

b. Достаточное условие интегрируемости и важнейшие классы интегрируемых функций. Начнем с нескольких обозначений и замечаний, которые используются в дальнейшем изложении.

Условимся, когда задано разбиение P

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

отрезка $[a, b]$, наряду с символом Δx_i, обозначающим разность $x_i - x_{i-1}$, употреблять символ Δ_i для обозначения отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Если разбиение $\widetilde{P}$ отрезка $[a, b]$ получено из разбиения P только добавлением к P некоторых новых точек, то условимся называть разбиение $\widetilde{P}$ *продолжением* разбиения P.

При построении продолжения $\widetilde{P}$ разбиения P некоторые (быть может, и все) отрезки $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ разбиения P сами подвергаются разбиению $x_{i-1} = x_{i0} < \ldots < x_{in_i} = x_i$. В связи с этим нам будет удобно нумеровать точки разбиения $\widetilde{P}$ двумя индексами. В записи x_{ij} первый индекс означает, что $x_{ij} \in \in \Delta_i$, а второй индекс есть порядковый номер точки на отрезке Δ_i. Теперь естественно положить $\Delta x_{ij} := x_{ij} - x_{ij-1}$ и $\Delta_{ij} := [x_{ij-1}, x_{ij}]$. Таким образом, $\Delta x_i = \Delta x_{i1} + \ldots + \Delta x_{in_i}$.

Примером разбиения, являющегося продолжением как разбиения P', так и разбиения P'', может служить разбиение $\widetilde{P} = P' \cup P''$, полученное объединением точек разбиений P' и P''.

Напомним, наконец, что, как и прежде, символ $\omega(f; E)$ будет обозначать колебание функции f на множестве E, т. е.

$$\omega(f; E) := \sup_{x', x'' \in E} |f(x') - f(x'')|.$$

В частности, $\omega(f; \Delta_i)$ есть колебание функции f на отрезке Δ_i. Это колебание заведомо конечно, если f — ограниченная функция.

Теперь сформулируем и докажем следующее

Утверждение 2. *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f была интегрируема на нем, достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашлось число $\delta > 0$ такое, что при любом разбиении P отрезка $[a, b]$ с параметром $\lambda(P) < \delta$ выполнялось соотношение*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \varepsilon.$$

◄ Пусть P — разбиение отрезка $[a, b]$ и $\widetilde{P}$ — продолжение разбиения P. Оценим разность интегральных сумм $\sigma(f; \widetilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P, \xi)$. Используя введенные выше обозначения, можем написать

$$\begin{aligned} |\sigma(f; \widetilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P, \xi)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_i) \Delta x_{ij} \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \bigl(f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)\bigr) \Delta x_{ij} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} |f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)| \Delta x_{ij} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i. \end{aligned}$$

В этих выкладках мы использовали то, что $\Delta x_i = \sum\limits_{j=1}^{n_i} \Delta x_{ij}$, а также то, что $|f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)| \leqslant \omega(f; \Delta_i)$, поскольку $\xi_{ij} \in \Delta_{ij} \subset \Delta_i$ и $\xi_i \in \Delta_i$.

Из полученной оценки разности интегральных сумм следует, что если функция f удовлетворяет достаточному условию, сформулированному в

утверждении 2, то по любому числу $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что для любого разбиения P отрезка $[a, b]$ с параметром $\lambda(P) < \delta$ и его продолжения $\widetilde{P}$ при любом выборе отмеченных точек ξ и $\tilde{\xi}$ будем иметь

$$|\sigma(f; \widetilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P, \xi)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если теперь (P', ξ') и (P'', ξ'') — произвольные разбиения с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, параметры которых удовлетворяют условиям $\lambda(P') < \delta$, $\lambda(P'') < \delta$, то, рассмотрев разбиение $\widetilde{P} = P' \cup P''$, являющееся продолжением обоих разбиений P', P'', по доказанному будем иметь

$$|\sigma(f; \widetilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P', \xi')| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$|\sigma(f; \widetilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P'', \xi'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$|\sigma(f; P', \xi') - \sigma(f; P'', \xi'')| < \varepsilon,$$

как только $\lambda(P') < \delta$, $\lambda(P'') < \delta$. Таким образом, в силу критерия Коши существует предел

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

интегральных сумм, т. е. $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ►

Следствие 1. $(f \in C[a, b]) \Rightarrow (f \in \mathcal{R}[a, b])$, *т. е. любая непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.*

◄ Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на нем, так что необходимое условие интегрируемости в этом случае, очевидно, выполнено. Однако непрерывная на отрезке функция еще и равномерно непрерывна на нем, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что на любом отрезке $\Delta \subset [a, b]$ длины меньше δ будем иметь $\omega(f; \Delta) < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда для любого разбиения P с параметром $\lambda(P) < \delta$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

В силу утверждения 2 теперь можно заключить, что $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ►

Следствие 2. *Если ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f непрерывна на этом отрезке всюду, кроме, быть может, конечного множества точек, то $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

◄ Пусть $\omega(f; [a, b]) \leqslant C < \infty$ и f имеет k точек разрыва на отрезке $[a, b]$. Проверим выполнимость достаточного условия интегрируемости функции f.

При заданном $\varepsilon > 0$ возьмем число $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{8C \cdot k}$ и построим δ_1-окрестности каждой из k точек разрыва функции f на $[a, b]$. Дополнительное к объединению этих окрестностей множество точек отрезка $[a, b]$ состоит из конечного числа отрезков, на каждом из которых f непрерывна и, значит, равномерно непрерывна. Поскольку таких отрезков конечное число, по $\varepsilon > 0$

можно указать $\delta_2 > 0$ так, что на любом отрезке Δ, длина которого меньше δ_2 и который полностью содержится в одном из указанных выше отрезков непрерывности f, будем иметь $\omega(f; \Delta) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Возьмем теперь число $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Пусть P — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, для которого $\lambda(P) < \delta$. Сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i$, отвечающую разбиению P, разобьем на две части:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i = \sum\nolimits' \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i + \sum\nolimits'' \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i.$$

В сумму $\sum'$ включим те слагаемые, которые отвечают отрезкам Δ_i разбиения P, не имеющим общих точек с построенными δ_1-окрестностями точек разрыва. Для таких отрезков Δ_i имеем $\omega(f; \Delta_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, поэтому

$$\sum\nolimits' \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum\nolimits' \Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сумма длин оставшихся отрезков разбиения P, как легко видеть, меньше $(\delta + 2\delta_1 + \delta)k \leqslant 4\frac{\varepsilon}{8C \cdot k} \cdot k = \frac{\varepsilon}{2C}$, поэтому

$$\sum\nolimits'' \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i \leqslant C \sum\nolimits'' \Delta x_i < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, мы получаем, что при $\lambda(P) < \delta$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon,$$

т. е. выполнено достаточное условие интегрируемости и $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ►

Следствие 3. *Монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.*

◄ Из монотонности функции f на отрезке $[a, b]$ следует, что $\omega(f; [a, b]) = |f(b) - f(a)|$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|}$. Мы считаем, что $f(b) - f(a) \neq 0$, поскольку в противном случае f постоянна и интегрируемость f не вызывает сомнений. Пусть P — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ с параметром $\lambda(P) < \delta$.

Тогда для него с учетом монотонности f имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i < \delta \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i) = \delta \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| =$$
$$= \delta \left| \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right| = \delta |f(b) - f(a)| = \varepsilon.$$

Таким образом, f удовлетворяет достаточному условию интегрируемости, т. е. $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ►

Монотонная функция может иметь уже бесконечно много точек разрыва на отрезке (счетное множество). Например, функция, определяемая соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} 1-\frac{1}{2^{n-1}} & \text{при } 1-\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant x < 1-\frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$, не убывает и в каждой точке вида $1-\frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет разрыв.

Замечание. Отметим, что хотя мы сейчас имеем дело с вещественными функциями на отрезке, однако ни в определении интеграла, ни в доказанных выше утверждениях, за исключением следствия 3, мы по существу не использовали то, что рассматриваемые функции вещественнозначные, а не комплексно- или, например, векторнозначные функции точки отрезка $[a, b]$.

Понятия верхней и нижней интегральной суммы, к которым мы переходим, напротив, специфичны только для функций с действительными значениями.

Определение 6. Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — действительнозначная функция, определенная и ограниченная на отрезке $[a, b]$; P — разбиение отрезка $[a, b]$; Δ_i $(i = 1, \dots, n)$ — отрезки разбиения P. Пусть

$$m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Суммы

$$s(f; P) := \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

и

$$S(f; P) := \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

называются соответственно *нижней* и *верхней интегральной суммой* функции f на отрезке $[a, b]$, соответствующей разбиению P этого отрезка[1]. Суммы $s(f; P)$ и $S(f; P)$ называют также *нижней* и *верхней суммой Дарбу*, соответствующей разбиению P отрезка $[a, b]$.

Если (P, ξ) — произвольное разбиение с отмеченными точками отрезка $[a, b]$, то, очевидно,

$$s(f; P) \leqslant \sigma(f; P, \xi) \leqslant S(f; P). \tag{7}$$

Лемма 1.

$$s(f; P) = \inf_{\xi} \sigma(f; P, \xi), \quad S(f; P) = \sup_{\xi} \sigma(f; P, \xi).$$

[1] Термин «интегральная сумма» здесь формально не вполне законен, так как не всегда m_i и M_i являются значениями функции f в некоторой точке $\xi_i \in \Delta_i$.

◄ Проверим, например, что верхняя сумма Дарбу, отвечающая разбиению P отрезка $[a, b]$, является верхней гранью значений интегральных сумм, соответствующих разбиению с отмеченными точками (P, ξ) отрезка $[a, b]$, причем верхняя грань берется по всевозможным наборам $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ отмеченных точек.

Ввиду (7), для доказательства достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ нашелся такой набор $\bar{\xi}$ отмеченных точек, что имеет место неравенство

$$S(f; P) < \sigma(f; P, \bar{\xi}) + \varepsilon. \tag{8}$$

По определению чисел M_i, при каждом $i \in \{1, \ldots, n\}$ найдется точка $\bar{\xi}_i \in \Delta_i$, в которой $M_i < f(\bar{\xi}_i) + \frac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \left(f(\bar{\xi}_i) + \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\xi}_i) \Delta x_i + \varepsilon,$$

что и завершает доказательство второго утверждения леммы. Первое утверждение проверяется аналогично. ►

Из доказанной леммы и неравенства (7) с учетом определения интеграла Римана заключаем, что справедливо следующее

Утверждение 3. *Ограниченная вещественнозначная функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[a, b]$ *тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой пределы*

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f; P), \quad \overline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f; P). \tag{9}$$

При этом их общее значение $I = \underline{I} = \overline{I}$ *совпадает с интегралом*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

◄ Действительно, если пределы (9) существуют и равны между собой, то по свойствам предела из (7) заключаем о существовании предела интегральных сумм, причем

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; P, \xi) = \overline{I}.$$

С другой стороны, если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, т. е. существует предел

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; P, \xi) = I,$$

то из (7) и (8) заключаем, что существует предел $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f; P) = \overline{I}$, причем $\overline{I} = I$.

Аналогично проверяется, что $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f; P) = \underline{I} = I$. ►

В качестве следствия утверждения 3 получаем следующее уточнение утверждения 2.

Утверждение 2′. *Для того чтобы функция $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, заданная на отрезке $[a,b]$, была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно выполнение соотношения*

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=0. \tag{10}$$

◄ Учитывая утверждение 2, нам остается лишь убедиться в необходимости соотношения (10) для интегрируемости f.

Заметим, что $\omega(f;\Delta_i)=M_i-m_i$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=S(f;P)-s(f;P),$$

и теперь (10) следует из утверждения 3, коль скоро $f\in\mathcal{R}[a,b]$. ►

c. Векторное пространство $\mathcal{R}[a,b]$. Над интегрируемыми функциями можно выполнять ряд операций, не выходя за пределы множества $\mathcal{R}[a,b]$.

Утверждение 4. *Если $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$, то*

a) $(f+g)\in\mathcal{R}[a,b]$;

b) $(\alpha f)\in\mathcal{R}[a,b]$, *где α — числовой множитель*;

c) $|f|\in\mathcal{R}[a,b]$;

d) $f|_{[c,d]}\in\mathcal{R}[c,d]$, *если* $[c,d]\subset[a,b]$;

e) $(f\cdot g)\in\mathcal{R}[a,b]$.

Мы сейчас рассматриваем только вещественнозначные функции, но полезно отметить, что свойства a), b), c), d) окажутся справедливыми и для комплекснозначных и векторнозначных функций. Для векторнозначных функций, вообще говоря, не определено произведение $f\cdot g$, поэтому свойство e) для них не рассматривается. Однако это свойство остается в силе для функций с комплексными значениями.

Перейдем теперь к доказательству утверждения 4.

◄ a) Это утверждение очевидно, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n}(f+g)(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i.$$

b) Это утверждение очевидно, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha f)(\xi_i)\Delta x_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

c) Поскольку $\omega(|f|;E)\leqslant\omega(f;E)$, то можно написать, что

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(|f|;\Delta_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i,$$

и на основании утверждения 2 заключить, что $(f\in\mathcal{R}[a,b])\Rightarrow(|f|\in\mathcal{R}[a,b])$.

d) Мы хотим проверить, что ограничение $f|_{[c,d]}$ интегрируемой на отрезке $[a,b]$ функции на любой отрезок $[c,d]\subset[a,b]$ является функцией, инте-

грируемой на $[c, d]$. Пусть π — разбиение отрезка $[c, d]$. Добавив к π некоторые точки, достроим π до разбиения P отрезка $[a, b]$, но так, чтобы иметь $\lambda(P) \leqslant \lambda(\pi)$. Ясно, что это всегда можно сделать.

Теперь можно написать, что

$$\sum\nolimits_\pi \omega(f|_{[c,d]}; \Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum\nolimits_P \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i,$$

где $\sum_\pi$ — сумма по всем отрезкам разбиения π, а $\sum_P$ — сумма по всем отрезкам разбиения P.

При $\lambda(\pi) \to 0$ по построению также $\lambda(P) \to 0$, и на основании утверждения $2'$ из полученного неравенства заключаем, что $(f \in \mathcal{R}[a, b]) \Rightarrow (f \in \mathcal{R}[c, d])$, если $[c, d] \subset [a, b]$.

e) Проверим сначала, что если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $f^2 \in \mathcal{R}[a, b]$.

Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$. Пусть $|f(x)| \leqslant C < \infty$ на $[a, b]$. Тогда

$$|f^2(x_1) - f^2(x_2)| = |(f(x_1) + f(x_2)) \cdot (f(x_1) - f(x_2))| \leqslant 2C|f(x_1) - f(x_2)|,$$

поэтому $\omega(f^2; E) \leqslant 2C\omega(f; E)$, если $E \subset [a, b]$. Значит,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f^2; \Delta_i)\Delta x_i \leqslant 2C \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i,$$

откуда на основании утверждения $2'$ заключаем, что

$$(f \in \mathcal{R}[a, b]) \Rightarrow (f^2 \in \mathcal{R}[a, b]).$$

Теперь перейдем к общему случаю. Запишем тождество

$$(f \cdot g)(x) = \frac{1}{4}[(f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)].$$

Из этого тождества с учетом только что доказанного утверждения и проверенных пунктов a) и b) утверждения 4 заключаем, что

$$(f \in \mathcal{R}[a, b]) \wedge (g \in \mathcal{R}[a, b]) \Rightarrow (f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]). \ ►$$

Из курса алгебры вам уже известно понятие векторного пространства. Вещественнозначные функции, определенные на некотором множестве, можно поточечно складывать и умножать на действительное число, получая при этом снова функцию с вещественными значениями на том же множестве. Если функции рассматривать как векторы, то можно проверить, что при этом выполнены все аксиомы векторного пространства над полем действительных чисел и указанное множество действительных функций является векторным пространством относительно операций поточечного сложения функций и умножения функций на действительные числа.

В пунктах a), b) утверждения 4 сказано, что сложение интегрируемых функций и умножение интегрируемой функции на число не выводит за пределы множества $\mathcal{R}[a, b]$ интегрируемых функций. Таким образом, $\mathcal{R}[a, b]$ само является векторным пространством — подпространством векторного пространства вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a, b]$.

d. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. В заключение приведем пока без доказательства теорему Лебега, дающую внутреннее описание интегрируемой по Риману функции.

Для этого введем следующее полезное само по себе понятие.

Определение 7. Говорят, что множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет *меру нуль* или является *множеством меры нуль* (в смысле Лебега), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие множества E не более чем счетной системой $\{I_k\}$ интервалов, сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k|$ длин которых не превышает ε.

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k|$ сходится абсолютно, порядок суммирования длин промежутков покрытия не влияет на сумму (см. утверждение 4 из гл. V, § 5, п. 2), поэтому данное определение корректно.

Лемма 2. a) *Точка и конечное число точек суть множества меры нуль.*

b) *Объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

c) *Подмножество множества меры нуль само есть множество меры нуль.*

d) *Отрезок $[a, b]$ при $a < b$ не является множеством меры нуль.*

◄ a) Точку можно покрыть одним интервалом длины меньшей, чем любое наперед заданное число $\varepsilon > 0$, поэтому точка является множеством меры нуль. В остальном a) вытекает из b).

b) Пусть $E = \bigcup\limits_{n} E^n$ — не более чем счетное объединение множеств E^n меры нуль. По $\varepsilon > 0$ для каждого E^n строим покрытие $\{I_k^n\}$ множества E^n такое, что $\sum\limits_{k} |I_k^n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Поскольку объединение не более чем счетного числа не более чем счетных множеств само не более чем счетно, промежутки I_k^n, $k, n \in \mathbb{N}$, образуют не более чем счетное покрытие множества E, причем

$$\sum_{n,k} |I_k^n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \ldots = \varepsilon.$$

Порядок суммирования $\sum\limits_{n,k} |I_k^n|$ по индексам n и k безразличен, ибо ряд сходится к одной и той же сумме при любом порядке суммирования, если он сходится для какого-то порядка суммирования. Последнее в нашем случае имеет место, ибо любые частичные суммы нашего ряда ограничены сверху числом ε.

Итак, E есть множество меры нуль в смысле Лебега.

c) Это утверждение, очевидно, непосредственно следует из определения множества меры нуль и определения покрытия.

d) Поскольку из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное покрытие, сумма длин промежутков которого, очевидно, не превосходит суммы длин промежутков исходного покрытия, то нам достаточно проверить, что сумма длин интервалов, образующих конечное покрытие отрезка $[a, b]$, не меньше длины $b - a$ этого отрезка.

Проведем индукцию по количеству интервалов покрытия.

При $n = 1$, т. е. когда отрезок $[a, b]$ содержится в одном интервале (α, β), очевидно, имеем $\alpha < a < b < \beta$ и $\beta - \alpha > b - a$.

Пусть утверждение доказано до индекса $k \in \mathbb{N}$ включительно. Рассмотрим покрытие, состоящее из $k + 1$ интервалов. Возьмем интервал (α_1, α_2), покрывающий точку a. Если $\alpha_2 \geqslant b$, то $\alpha_2 - \alpha_1 > b - a$ и все доказано. Если же $a < \alpha_2 < b$, то отрезок $[\alpha_2, b]$ покрыт системой, состоящей уже не более чем из k интервалов, сумма длин которых по предположению индукции не меньше чем $b - \alpha_2$. Но

$$b - a = (b - \alpha_2) + (\alpha_2 - a) < (b - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)$$

и, таким образом, сумма длин интервалов исходного покрытия отрезка $[a, b]$ больше, чем его длина $b - a$. ►

Интересно отметить, что в силу пунктов a) и b) леммы 2 множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных точек числовой прямой $\mathbb{R}$ является множеством меры нуль, что на первый взгляд выглядит несколько неожиданным при сопоставлении с пунктом d) той же леммы.

Определение 8. Если некоторое свойство выполнено в любой точке множества X, кроме, быть может, точек множества меры нуль, то говорят, что это свойство имеет место *почти всюду* на множестве X или *почти во всех точках* множества X.

Теперь сформулируем критерий Лебега.

Теорема. *Функция, определенная на отрезке, интегрируема по Риману на этом отрезке в том и только в том случае, когда она ограничена на этом отрезке и непрерывна почти во всех его точках.*

Итак,

$$(f \in \mathcal{R}[a, b]) \iff (f \text{ ограничена на } [a, b]) \land$$
$$\land (f \text{ непрерывна почти всюду на } [a, b]).$$

Из критерия Лебега и свойств множеств меры нуль, изложенных в лемме 2, очевидно, легко можно получить как следствия 1, 2, 3 утверждения 2, так и утверждение 4.

Мы не станем сейчас доказывать критерий Лебега, поскольку при работе с достаточно регулярными функциями, с которыми нам предстоит иметь дело, он нам пока не нужен. Однако идейную сторону критерия Лебега вполне можно объяснить уже сейчас.

Утверждение 2′ содержало критерий интегрируемости, выраженный соотношением (10). Сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i$ может быть мала, прежде всего, за счет множителей $\omega(f; \Delta_i)$, которые малы в малых окрестностях точек непрерывности функции. Если же некоторые из отрезков Δx_i содержат точки разрыва функции, то для них $\omega(f; \Delta_i)$ не стремится к нулю, сколь мелким бы ни было разбиение P отрезка $[a, b]$. Однако $\omega(f; \Delta_i) \leqslant \omega(f; [a, b]) < \infty$

в силу ограниченности f на $[a, b]$, поэтому сумма тех слагаемых, которые содержат точки разрыва, тоже может оказаться маленькой, если только мала сумма длин отрезков разбиения, покрывающих множество точек разрыва, или, точнее, если рост колебания функции на некоторых отрезках разбиения компенсируется малостью длин этих отрезков.

Точной реализацией и формулировкой этого наблюдения и является критерий Лебега.

Приведем теперь два классических примера, поясняющих свойство функции быть интегрируемой по Риману.

Пример 1. Функция Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

рассматриваемая на отрезке $[0, 1]$, не интегрируема на нем, поскольку для любого разбиения P отрезка $[0, 1]$ в каждом отрезке Δ_i разбиения P можно отметить как рациональную точку ξ_i', так и иррациональную точку ξ_i''. Тогда

$$\sigma(f; P, \xi') = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1,$$

в то время как

$$\sigma(f; P, \xi'') = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Таким образом, интегральные суммы функции $\mathcal{D}(x)$ не могут иметь предел при $\lambda(P) \to 0$.

С точки зрения критерия Лебега неинтегрируемость функции Дирихле тоже очевидна, поскольку функция $\mathcal{D}(x)$ разрывна в каждой точке отрезка $[0, 1]$, который, как было показано в лемме 2, не есть множество меры нуль.

Пример 2. Рассмотрим функцию Римана

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \text{ и } x = \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь, } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Мы уже рассматривали эту функцию в гл. IV, § 2, п. 2, и знаем, что функция $\mathcal{R}(x)$ непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных точках. Таким образом, множество точек разрыва функции $\mathcal{R}(x)$ счетно и потому имеет меру нуль. В силу критерия Лебега можно заключить, что функция $\mathcal{R}(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, несмотря на то, что точки разрыва этой функции попадают в любой отрезок любого разбиения отрезка интегрирования.

Пример 3. Рассмотрим теперь еще один, менее классический вопрос и пример.

Пусть $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — интегрируемая на $[a, b]$ функция, принимающая значения на отрезке $[c, d]$, на котором непрерывна функция $g\colon [c, d] \to \mathbb{R}$.

Тогда композиция $g \circ f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, очевидно, определена и непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$, в которых непрерывна функция f. В силу критерия Лебега отсюда следует, что $(g \circ f) \in \mathcal{R}[a, b]$.

Покажем теперь на примере, что композиция произвольных интегрируемых функций — уже не всегда интегрируемая функция.

Рассмотрим функцию $g(x) = |\operatorname{sgn}|(x)$. Эта функция равна единице при $x \neq 0$ и нулю при $x = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что если, например, на отрезке $[1, 2]$ рассмотреть в качестве f функцию Римана $\mathcal{R}(x)$, то на этом отрезке композиция $(g \circ f)(x)$ есть не что иное, как функция Дирихле $\mathcal{D}(x)$. Таким образом, наличие даже одной точки разрыва у $g(x)$ привело к неинтегрируемости композиции $g \circ f$.

Задачи и упражнения

1. *Теорема Дарбу.*

a) Пусть $s(f; P)$ и $S(f; P)$ — нижняя и верхняя суммы Дарбу вещественнозначной функции f, определенной и ограниченной на отрезке $[a, b]$, отвечающие разбиению P этого отрезка. Покажите, что для любых двух разбиений P_1, P_2 отрезка $[a, b]$ справедливо неравенство

$$s(f; P_1) \leqslant S(f; P_2).$$

b) Пусть разбиение $\widetilde{P}$ является продолжением разбиения P отрезка $[a, b]$ и пусть $\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{i_k}$ — те отрезки разбиения P, которые содержат точки разбиения $\widetilde{P}$, не входящие в разбиение P. Покажите, что справедливы оценки

$$0 \leqslant S(f; P) - S(f; \widetilde{P}) \leqslant \omega(f; [a, b]) \cdot (\Delta x_{i_1} + \ldots + \Delta x_{i_k}),$$
$$0 \leqslant s(f; \widetilde{P}) - s(f; P) \leqslant \omega(f; [a, b]) \cdot (\Delta x_{i_1} + \ldots + \Delta x_{i_k}).$$

c) Величины $\underline{I} = \sup\limits_P s(f; P)$, $\overline{I} = \inf\limits_P S(f; P)$ называются соответственно *нижним* и *верхним интегралом Дарбу* функции f на отрезке $[a, b]$. Покажите, что $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.

d) Докажите теорему Дарбу:

$$\underline{I} = \lim_{\lambda(P) \to 0} s(f; P), \quad \overline{I} = \lim_{\lambda(P) \to 0} S(f; P).$$

e) Покажите, что $(f \in \mathcal{R}[a, b]) \Leftrightarrow (\underline{I} = \overline{I})$.

f) Покажите, что $f \in \mathcal{R}[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение P отрезка $[a, b]$, что $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$.

2. *Канторово множество лебеговой меры нуль.*

a) Канторово множество, описанное в задаче 7 § 4 гл. II, несчетно. Проверьте, что оно тем не менее есть множество меры нуль в смысле Лебега. Укажите, как следует видоизменить конструкцию канторова множества, чтобы получить аналогичное всюду «дырявое» множество, не являющееся множеством меры нуль. (Его тоже называют канторовым.)

b) Покажите, что заданная на отрезке $[0, 1]$ функция, равная нулю вне канторова множества и единице в точках канторова множества, интегрируема по Риману на этом отрезке, если и только если канторово множество имеет меру нуль.

c) Постройте неубывающую, непрерывную и не постоянную на отрезке $[0,1]$ функцию, которая имеет нулевую производную всюду, кроме, быть может, точек канторова множества меры нуль.

3. *Критерий Лебега.*

a) Проверьте непосредственно (без ссылки на критерий Лебега) интегрируемость функции Римана из примера 2 настоящего параграфа.

b) Покажите, что ограниченная функция $f \in \mathcal{R}[a,b]$ тогда и только тогда, когда для любых двух чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется разбиение P отрезка $[a,b]$ такое, что сумма длин тех отрезков разбиения, на которых колебание функции больше ε, не превосходит δ.

c) Покажите, что $f \in \mathcal{R}[a,b]$ тогда и только тогда, когда f ограничена на $[a,b]$ и для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ множество точек отрезка $[a,b]$, в которых f имеет колебание больше чем ε, можно покрыть конечным число интервалов, сумма длин которых меньше δ (*критерий Дюбуа-Реймона*[1]).

d) Используя предыдущую задачу, докажите критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

4. Покажите, что если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ и f, g действительны, то $\max\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\min\{f,g\} \in \mathcal{R}[a,b]$.

5. Покажите, что

a) если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f(x) = g(x)$ почти всюду на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$;

b) если $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f(x) = g(x)$ почти всюду на $[a,b]$, то g может не быть интегрируемой по Риману на $[a,b]$, даже если g определена и ограничена на $[a,b]$.

6. *Интеграл от векторнозначной функции.*

a) Пусть $\boldsymbol{r}(t)$ — радиус-вектор точки, движущейся в пространстве; $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(0)$ — начальное положение точки; $\boldsymbol{v}(t)$ — вектор скорости как функция времени. Восстановите $\boldsymbol{r}(t)$ по $\boldsymbol{r}_0$ и функции $\boldsymbol{v}(t)$.

b) Сводится ли интегрирование векторнозначной функции к интегрированию вещественнозначных функций?

c) Верен ли для векторнозначных функций критерий интегрируемости, выраженный в утверждении $2'$?

d) Верен ли критерий Лебега для векторнозначных функций?

e) Какие из понятий и фактов этого параграфа переносятся на функции с комплексными значениями?

§ 2. Линейность, аддитивность и монотонность интеграла

1. Интеграл как линейная функция на пространстве $\mathcal{R}[a,b]$

Теорема 1. *Если f и g — интегрируемые на отрезке $[a,b]$ функции, то их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также является интегрируемой на $[a,b]$ функцией, причем*

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\,dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

[1]П. Дюбуа-Реймон (1831—1889) — немецкий математик.

◄ Рассмотрим интегральную сумму для интеграла, стоящего в левой части соотношения (1), и преобразуем ее:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha f+\beta g)(\xi_i)\Delta x_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i. \tag{2}$$

Поскольку правая часть последнего равенства стремится к линейной комбинации интегралов, стоящих в правой части равенства (1), если параметр $\lambda(P)$ разбиения стремится к нулю, то левая часть равенства (2) тоже имеет предел при $\lambda(P)\to 0$ и этот предел совпадает с пределом правой части. Таким образом, $(\alpha f+\beta g)\in\mathcal{R}[a,b]$ и выполнено равенство (1). ►

Если множество $\mathcal{R}[a,b]$ рассматривать как векторное пространство над полем действительных чисел, а интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ — как действительнозначную функцию, определенную на векторах пространства $\mathcal{R}[a,b]$, то теорема 1 утверждает, что интеграл есть линейная функция на векторном пространстве $\mathcal{R}[a,b]$.

Во избежание возможной путаницы, функции, определенные на функциях, называют обычно *функционалами*. Таким образом, мы доказали, что интеграл есть линейный функционал на векторном пространстве интегрируемых функций.

2. Интеграл как аддитивная функция отрезка интегрирования. Значение интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = I(f;[a,b])$$

зависит как от подынтегральной функции, так и от отрезка, по которому ведется интегрирование. Например, если $f\in\mathcal{R}[a,b]$, то, как мы уже знаем, $f|_{[\alpha,\beta]}\in\mathcal{R}[\alpha,\beta]$, если $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, т. е. определен интеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$, который мы можем исследовать с точки зрения его зависимости от отрезка $[\alpha,\beta]$ интегрирования.

Лемма 1. *Если $a<b<c$ и $f\in\mathcal{R}[a,c]$, то $f|_{[a,b]}\in\mathcal{R}[a,b]$, $f|_{[b,c]}\in\mathcal{R}[b,c]$ и имеет место равенство*[1]

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx. \tag{3}$$

[1]Напомним, что символ $f|_E$ обозначает сужение функции f на множество E, лежащее в области определения функции f. В правой части равенства (3) формально полагалось бы написать не f, а сужения f на соответствующие отрезки.

◄ Отметим прежде всего, что интегрируемость ограничений функции f на отрезки $[a, b]$ и $[b, c]$ гарантируется утверждением 4 из предыдущего параграфа.

Далее, поскольку $f \in \mathcal{R}[a, c]$, то при вычислении интеграла $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ как предела интегральных сумм мы вправе выбирать любые удобные нам разбиения отрезка $[a, c]$. В качестве таковых будем сейчас рассматривать только те разбиения P отрезка $[a, c]$, которые содержат точку b. Каждое такое разбиение с отмеченными точками (P, ξ), очевидно, порождает разбиения (P', ξ') и (P'', ξ'') отрезков $[a, b]$ и $[b, c]$ соответственно, причем $P = P' \cup P''$ и $\xi = \xi' \cup \xi''$.

Но тогда имеет место следующее равенство между соответствующими интегральными суммами:

$$\sigma(f; P, \xi) = \sigma(f; P', \xi') + \sigma(f; P'', \xi'').$$

Поскольку $\lambda(P') \leqslant \lambda(P)$ и $\lambda(P'') \leqslant \lambda(P)$, то при достаточно малом $\lambda(P)$ каждая из написанных интегральных сумм близка к соответствующему интегралу из (3). Таким образом, равенство (3) действительно имеет место. ►

Чтобы несколько расширить применимость полученного результата, вернемся временно вновь к определению интеграла.

Мы определили интеграл как предел интегральных сумм

$$\sigma(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{4}$$

отвечающих разбиениям с отмеченными точками (P, ξ) отрезка интегрирования $[a, b]$. Разбиение P составляла монотонная конечная последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$, причем точка x_0 совпадала с нижним пределом интегрирования a, а последняя точка x_n совпадала с верхним пределом интегрирования b. Эта конструкция проводилась в предположении, что $a < b$. Если теперь взять произвольно два числа a и b, не требуя, чтобы обязательно было $a < b$, и, считая a нижним пределом интегрирования, а b верхним, провести указанную конструкцию, то мы вновь получим сумму вида (4), в которой на сей раз будет $\Delta x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, если $a < b$, и $\Delta x_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ при $a > b$, ибо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Таким образом, сумма (4) при $a > b$ будет отличаться от интегральной суммы соответствующего разбиения отрезка $[b, a]$ $(b < a)$ только знаком.

По этим соображениям принимается следующее соглашение: если $a > b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := -\int\limits_b^a f(x)\,dx. \tag{5}$$

В связи с этим естественно также положить, что

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx := 0. \tag{6}$$

После этих соглашений с учетом леммы 1 приходим к следующему важному свойству интеграла.

Теорема 2. *Пусть* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *и пусть* f — *функция, интегрируемая на наибольшем из отрезков с концами в указанных точках. Тогда сужение* f *на каждый из двух других отрезков также интегрируемо на соответствующем отрезке и имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0. \tag{7}$$

◄ В силу симметрии равенства (7) относительно a, b, c, мы без ограничения общности можем считать, что $a = \min\{a, b, c\}$.

Если $\max\{a, b, c\} = c$ и $a < b < c$, то по лемме 1

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = 0,$$

что с учетом соглашения (5) дает равенство (7).

Если $\max\{a, b, c\} = b$ и $a < c < b$, то по лемме 1

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

что с учетом (5) вновь дает (7).

Наконец, если какие-то две из точек a, b, c или все три совпадают, то (7) следует из соглашений (5) и (6). ►

Определение 1. Пусть каждой упорядоченной паре (α, β) точек α, β отрезка $[a, b]$ поставлено в соответствие число $I(\alpha, \beta)$, причем так, что для любой тройки точек $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ выполнено равенство

$$I(\alpha, \gamma) = I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma).$$

Тогда функция $I(\alpha, \beta)$ называется *аддитивной функцией ориентированного промежутка*, определенной на промежутках, лежащих в отрезке $[a, b]$.

Если $f \in \mathcal{R}[A, B]$ и $a, b, c \in [A, B]$, то, полагая $I(a, b) = \int_a^b f(x)\,dx$, из (7) заключаем, что

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx, \tag{8}$$

т. е. интеграл есть аддитивная функция промежутка интегрирования. Ориентированность промежутка состоит в данном случае в том, что мы упорядочиваем пару концов отрезка интегрирования, указывая, какой из них первый (являющийся нижним пределом интегрирования) и какой второй (являющийся верхним пределом интегрирования).

3. Оценка интеграла, монотонность интеграла, теоремы о среднем

a. Одна общая оценка интеграла. Начнем с одной общей оценки интеграла, которая, как потом выяснится, справедлива не только для интегралов от действительнозначных функций.

Теорема 3. *Если $a \leqslant b$ и $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ и справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|(x)\,dx. \tag{9}$$

Если при этом $|f|(x) \leqslant C$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b |f|(x)\,dx \leqslant C(b-a). \tag{10}$$

◄ При $a=b$ утверждение тривиально, поэтому будем считать, что $a<b$.

Для доказательства теоремы достаточно вспомнить теперь, что $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ (см. утверждение 4 из § 1), и написать следующую оценку интегральной суммы $\sigma(f; P, \xi)$:

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)||\Delta x_i| = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|\Delta x_i \leqslant C \sum_{i=1}^n \Delta x_i = C(b-a).$$

Переходя к пределу при $\lambda(P) \to 0$, получаем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|(x)\,dx \leqslant C(b-a). \ ►$$

b. Монотонность интеграла и первая теорема о среднем. Все дальнейшее специфично для интегралов от действительнозначных функций.

Теорема 4. *Если $a \leqslant b$, $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ в любой точке $x \in [a, b]$, то*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_2(x)\,dx. \tag{11}$$

◄ При $a=b$ утверждение тривиально. Если же $a<b$, то достаточно записать для интегральных сумм неравенство

$$\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i)\Delta x_i,$$

справедливое, поскольку $\Delta x_i > 0$ $(i=1, \ldots, n)$, и затем перейти в нем к пределу при $\lambda(P) \to 0$. ►

Теорему 4 можно трактовать как утверждение о монотонности зависимости интеграла от подынтегральной функции.

Из теоремы 4 получается ряд полезных следствий.

Следствие 1. *Если* $a \leqslant b$, $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *и* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *на* $x \in [a,b]$, *то*

$$m \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M \cdot (b-a), \tag{12}$$

и, в частности, если $0 \leqslant f(x)$ *на* $[a,b]$, *то*

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

◄ Соотношение (12) получается, если проинтегрировать каждый член неравенств $m \leqslant f(x) \leqslant M$ и воспользоваться теоремой 4. ►

Следствие 2. *Если*

$$f \in \mathcal{R}[a,b], \quad m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x),$$

то найдется число $\mu \in [m, M]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu \cdot (b-a). \tag{13}$$

◄ Если $a = b$, то утверждение тривиально. Если $a \neq b$, то положим $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Тогда из (12) следует, что $m \leqslant \mu \leqslant M$, если $a < b$. Но обе части (13) меняют знак при перестановке местами a и b, поэтому (13) справедливо и при $b < a$. ►

Следствие 3. *Если* $f \in C[a,b]$, *то найдется точка* $\xi \in [a,b]$ *такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{14}$$

◄ По теореме о промежуточном значении для непрерывной функции, на отрезке $[a,b]$ найдется точка ξ, в которой $f(\xi) = \mu$, если только

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \leqslant \mu \leqslant \max_{x \in [a,b]} f(x) = M.$$

Таким образом, (14) следует из (13). ►

Равенство (14) часто называют *первой теоремой о среднем* для интеграла. Мы же зарезервируем это название для следующего, несколько более общего утверждения.

Теорема 5 (первая теорема о среднем для интеграла). *Пусть*

$$f, g \in \mathcal{R}[a, b], \quad m = \inf_{x \in [a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Если функция g неотрицательна (или неположительна) на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\, dx = \mu \int_a^b g(x)\, dx, \tag{15}$$

где $\mu \in [m, M]$.

Если, кроме того, известно, что $f \in C[a, b]$, то найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx. \tag{16}$$

◄ Поскольку перестановка пределов интегрирования приводит к изменению знака одновременно в обеих частях равенства (15), то достаточно проверить это равенство в случае $a < b$. Изменение знака функции $g(x)$ тоже одновременно меняет знак обеих частей равенства (15), поэтому можно без ограничения общности доказательства считать, что $g(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$.

Поскольку $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, то при $g(x) \geqslant 0$

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Поскольку $m \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$, $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$ и $M \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$, то, применяя теорему 4 и теорему 1, получаем

$$m \int_a^b g(x)\, dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\, dx \leqslant M \int_a^b g(x)\, dx. \tag{17}$$

Если $\int\limits_a^b g(x)\, dx = 0$, то, как видно из этих неравенств, соотношение (15) выполнено.

Если же $\int\limits_a^b g(x)\, dx \neq 0$, то, полагая

$$\mu = \left(\int_a^b g(x)\, dx \right)^{-1} \cdot \int_a^b (f \cdot g)(x)\, dx,$$

из (17) находим, что

$$m \leqslant \mu \leqslant M,$$

но это равносильно соотношению (15).

Равенство (16) теперь следует из (15) и теоремы о промежуточном значении для функции $f \in C[a, b]$, с учетом того, что в случае $f \in C[a, b]$

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{и} \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x). \ ►$$

Заметим, что равенство (13) получается из (15), если $g(x) \equiv 1$ на $[a, b]$.

с. Вторая теорема о среднем для интеграла. Значительно более специальной и деликатной в рамках теории интеграла Римана является так называемая *вторая теорема о среднем*[1].

Чтобы не осложнять доказательство этой теоремы, сделаем несколько полезных заготовок, представляющих и самостоятельный интерес.

Преобразование Абеля. Так называется следующее преобразование суммы $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Пусть $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$; положим также $A_0 = 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=1}^{n} A_{i-1} b_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

Итак,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (A_n b_n - A_0 b_1) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}), \tag{18}$$

или, поскольку $A_0 = 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}). \tag{19}$$

На основе преобразования Абеля легко проверяется следующая

Лемма 2. *Если числа $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ $(k = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют неравенствам $m \leqslant A_k \leqslant M$, а числа b_i $(i = 1, \ldots, n)$ неотрицательны и $b_i \geqslant b_{i+1}$ при $i = 1, \ldots, n-1$, то*

$$m b_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant M b_1. \tag{20}$$

◄ Используя то, что $b_n \geqslant 0$ и $b_i - b_{i+1} \geqslant 0$ при $i = 1, \ldots, n-1$, из (19) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant M b_n + \sum_{i=1}^{n-1} M (b_i - b_{i+1}) = M b_n + M (b_1 - b_n) = M b_1.$$

Аналогично проверяется и левое неравенство в соотношении (20). ►

Лемма 3. *Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то при любом $x \in [a, b]$ определена функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \tag{21}$$

и $F(x) \in C[a, b]$.

---

[1]При некотором дополнительном и часто вполне приемлемом условии на функции основную теорему 6 этого раздела можно легко получить из первой теоремы о среднем. См. по этому поводу задачу 3 к следующему параграфу.

◄ Существование интеграла (21) при любом $x \in [a, b]$ нам уже известно из утверждения 4 § 1, поэтому остается проверить непрерывность функции $F(x)$. Поскольку $f \in \mathcal{R}[a, b]$, имеем $|f| \leqslant C < \infty$ на $[a, b]$. Пусть $x \in [a, b]$ и $x + h \in [a, b]$. Тогда в силу аддитивности интеграла и неравенств (9), (10) получаем

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int\limits_a^{x+h} f(t)\, dt - \int\limits_a^x f(t)\, dt \right| = \\ = \left| \int\limits_x^{x+h} f(t)\, dt \right| \leqslant \left| \int\limits_x^{x+h} |f(t)|\, dt \right| \leqslant C|h|.$$

Мы воспользовались неравенством (10) с учетом того, что при $h < 0$ имеем

$$\left| \int\limits_x^{x+h} |f(t)|\, dt \right| = \left| - \int\limits_{x+h}^x |f(t)|\, dt \right| = \int\limits_{x+h}^x |f(t)|\, dt.$$

Итак, мы показали, что если $x, x+h \in [a, b]$, то

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant C|h|, \tag{22}$$

откуда, очевидно, следует непрерывность функции F в любой точке отрезка $[a, b]$. ►

Теперь докажем лемму, которая уже является вариантом второй теоремы о среднем.

Лемма 4. *Если $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ и g — неотрицательная и невозрастающая на отрезке $[a, b]$ функция, то найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b (f \cdot g)(x)\, dx = g(a) \int\limits_a^\xi f(x)\, dx. \tag{23}$$

Прежде чем переходить к доказательству, отметим, что, в отличие от соотношения (16) первой теоремы о среднем, в (23) под знаком интеграла осталась функция f, а не монотонная функция g.

◄ Для доказательства формулы (23), как и в уже рассмотренных выше случаях, постараемся оценить соответствующую интегральную сумму.

Пусть P — разбиение отрезка $[a, b]$. Запишем сначала тождество

$$\int\limits_a^b (f \cdot g)(x)\, dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (f \cdot g)(x)\, dx = \\ = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_{i-1})] f(x)\, dx$$

и покажем, что при $\lambda(P) \to 0$ последняя сумма стремится к нулю.

Поскольку $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $|f(x)| \leqslant C < \infty$ на $[a, b]$. Тогда, используя уже доказанные свойства интеграла, получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_{i-1})] f(x)\, dx\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})| |f(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})|\, dx \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \omega(g; \Delta_i) \Delta x_i \to 0$$

при $\lambda(P) \to 0$, ввиду того, что $g \in \mathcal{R}[a, b]$ (см. утверждение 2 из § 1). Значит,

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\, dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx. \tag{24}$$

Оценим теперь сумму, стоящую в правой части равенства (24). Положив

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

по лемме 3 получаем функцию, непрерывную на отрезке $[a, b]$.

Пусть

$$m = \min_{x \in [a,b]} F(x) \quad \text{и} \quad M = \max_{x \in [a,b]} F(x).$$

Поскольку $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx = F(x_i) - F(x_{i-1})$, то

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1}))\, g(x_{i-1}). \tag{25}$$

Учитывая неотрицательность и невозрастание функции g на $[a, b]$ и полагая

$$a_i = F(x_i) - F(x_{i-1}), \qquad b_i = g(x_{i-1}),$$

по лемме 2 находим, что

$$mg(a) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) g(x_{i-1}) \leqslant Mg(a), \tag{26}$$

поскольку

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = F(x_k) - F(x_0) = F(x_k) - F(a) = F(x_k).$$

Мы показали, что суммы (25) удовлетворяют неравенствам (26). Вспоминая соотношение (24), теперь имеем

$$mg(a) \leqslant \int_a^b (f \cdot g)(x)\, dx \leqslant Mg(a). \tag{27}$$

Если $g(a)=0$, то, как показывают неравенства (27), доказываемое соотношение (23), очевидно, справедливо.

Если же $g(a)>0$, то положим

$$\mu = \frac{1}{g(a)} \int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx.$$

Из (27) следует, что $m \leqslant \mu \leqslant M$, а из непрерывности функции $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ на $[a,b]$ следует, что найдется точка $\xi\in[a,b]$, в которой $F(\xi)=\mu$. Но именно это и утверждает формула (23). ►

Теорема 6 (вторая теорема о среднем для интеграла). *Если $f, g\in\mathcal{R}[a,b]$ и g — монотонная на $[a,b]$ функция, то найдется точка $\xi\in[a,b]$ такая, что*

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{28}$$

Равенство (28) (как, впрочем, и равенство (23)) часто называют *формулой Бонне*[1].

◄ Пусть g — неубывающая на $[a,b]$ функция. Тогда $G(x)=g(b)-g(x)$ — неотрицательная, невозрастающая, интегрируемая на $[a,b]$ функция. Применяя формулу (23), находим

$$\int_a^b (f\cdot G)(x)\,dx = G(a)\int_a^\xi f(x)\,dx. \tag{29}$$

Но

$$\int_a^b (f\cdot G)(x)\,dx = g(b)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b (f\cdot g)(x)\,dx,$$

$$G(a)\int_a^\xi f(x)\,dx = g(b)\int_a^\xi f(x)\,dx - g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Учитывая эти соотношения и свойство аддитивности интеграла, из (29) получаем доказываемое равенство (28).

Если g — невозрастающая функция, то, полагая $G(x)=g(x)-g(b)$, получим, что $G(x)$ — неотрицательная, невозрастающая, интегрируемая на $[a,b]$ функция. Далее вновь получаем формулу (29), а за ней и формулу (28). ►

[1]П. О. Бонне (1819—1892) — французский математик и астроном. Наиболее значительные математические работы Бонне связаны с дифференциальной геометрией.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то

a) при условии, что в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$ непрерывности функция $f(x)$ принимает положительное значение $f(x_0) > 0$, имеет место строгое неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0;$$

b) из условия $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ следует, что $f(x) = 0$ почти во всех точках отрезка $[a, b]$.

2. Покажите, что если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $m = \inf\limits_{]a,b[} f(x)$, $M = \sup\limits_{]a,b[} f(x)$, то

a) $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$, где $\mu \in [m, M]$ (см. задачу 5a) предыдущего параграфа);

b) при условии непрерывности f на $[a, b]$ найдется такая точка $\xi \in]a, b[$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

3. Покажите, что если $f \in C[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$ и $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n} = M.$$

4. a) Покажите, что если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $|f|^p \in \mathcal{R}[a, b]$ при $p \geqslant 0$.

b) Исходя из неравенства Гёльдера для сумм, получите неравенство Гёльдера для интегралов[1]:

$$\left|\int_a^b (f \cdot g)(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p(x)\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g|^q(x)\,dx\right)^{1/q},$$

если $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ и $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

c) Исходя из неравенства Минковского для сумм, получите неравенство Минковского для интегралов:

$$\left(\int_a^b |f+g|^p(x)\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p(x)\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p(x)\,dx\right)^{1/p},$$

если $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ и $p \geqslant 1$. Покажите, что это неравенство меняется на противоположное, если $0 < p < 1$, а f и g — неотрицательные функции.

---

[1]Алгебраическое неравенство Гёльдера при $p = q = 2$ впервые было получено в 1821 г. Коши и носит его имя. Неравенство Гёльдера для интегралов при $p = q = 2$ впервые нашел в 1859 г. русский математик В. Я. Буняковский (1804—1889). Это важное интегральное неравенство (в случае $p = q = 2$) называют *неравенством Буняковского* или *неравенством Коши—Буняковского*. Встречается иногда и менее точное его название «неравенство Шварца» — по имени немецкого математика Г. К. А. Шварца (1843—1921), в работах которого оно появилось в 1884 г.

d) Проверьте, что если f — непрерывная, выпуклая на $\mathbb{R}$ функция, а φ — произвольная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, то при $c \neq 0$ справедливо неравенство Иенсена:

$$f\left(\frac{1}{c}\int_0^c \varphi(t)\,dt\right) \leqslant \frac{1}{c}\int_0^c f(\varphi(t))\,dt.$$

§ 3. Интеграл и производная

1. Интеграл и первообразная. Пусть f — интегрируемая по Риману на отрезке $[a, b]$ функция. Рассмотрим на этом же отрезке функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{1}$$

часто называемую *интегралом с переменным верхним пределом*.

Поскольку $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $f|_{[a,x]} \in \mathcal{R}[a, x]$, если $[a, x] \subset [a, b]$; поэтому функция $x \mapsto F(x)$ корректно определена для $x \in [a, b]$.

Если $|f(t)| \leqslant C < +\infty$ на $[a, b]$ (а f, как интегрируемая функция, ограничена на $[a, b]$), то из аддитивности интеграла и простейшей оценки интеграла следует, что

$$|F(x+h) - F(x)| \leqslant C|h|, \tag{2}$$

если $x, x+h \in [a, b]$.

Об этом мы, кстати, уже говорили, доказывая лемму 3 предыдущего параграфа.

Из неравенства (2), в частности, следует непрерывность функции F на $[a, b]$. Итак, $F \in C[a, b]$.

Теперь мы исследуем функцию F более тщательно.

Имеет место следующая основная для всего дальнейшего

Лемма 1. *Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и функция f непрерывна в некоторой точке $x \in [a, b]$, то функция F, определяемая на $[a, b]$ формулой* (1)*, дифференцируема в этой точке x, причем имеет место равенство*

$$F'(x) = f(x).$$

◀ Пусть $x, x+h \in [a, b]$. Оценим разность $F(x+h) - F(x)$. Из непрерывности f в точке x следует, что $f(t) = f(x) + \Delta(t)$, где $\Delta(t) \to 0$ при $t \to x$, $t \in [a, b]$. Функция $\Delta(t) = f(t) - f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, как разность интегрируемой функции $t \mapsto f(t)$ и постоянной $f(x)$, если x — фиксированная точка. Обозначим через $M(h)$ величину $\sup\limits_{t \in I(h)} |\Delta(t)|$, где $I(h)$ — отрезок с концами $x, x+h \in [a, b]$. По условию, $M(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Теперь запишем

$$F(x+h)-F(x)=\int\limits_a^{x+h} f(t)\,dt-\int\limits_a^{x} f(t)\,dt=\int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_x^{x+h}(f(x)+\Delta(t))\,dt=\int\limits_x^{x+h} f(x)\,dt+\int\limits_x^{x+h}\Delta(t)\,dt=f(x)h+\alpha(h)h,$$

где положено

$$\int\limits_x^{x+h}\Delta(t)\,dt=\alpha(h)h.$$

Поскольку

$$\left|\int\limits_x^{x+h}\Delta(t)\,dt\right|\leqslant\left|\int\limits_x^{x+h}|\Delta(t)|\,dt\right|\leqslant\left|\int\limits_x^{x+h}M(h)\,dt\right|=M(h)|h|,$$

то $|\alpha(h)|\leqslant M(h)$ и потому $\alpha(h)\to 0$, когда $h\to 0$ (но так, что $x+h\in[a,b]$).

Таким образом, показано, что если функция f непрерывна в точке $x\in\in[a,b]$, то при смещениях h от точки x таких, что $x+h\in[a,b]$, имеет место равенство

$$F(x+h)-F(x)=f(x)h+\alpha(h)h, \tag{3}$$

где $\alpha(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Но это и означает, что функция $F(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ в точке $x\in[a,b]$ и что $F'(x)=f(x)$. ►

Важнейшим непосредственным следствием леммы 1 является следующая

Теорема 1. *Каждая непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *имеет на этом отрезке первообразную, причем любая первообразная функции* f *на* $[a,b]$ *имеет вид*

$$\mathscr{F}(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt+c, \tag{4}$$

где c — *некоторая постоянная.*

◄ $(f\in C[a,b])\Rightarrow(f\in\mathscr{R}[a,b])$, поэтому на основании леммы 1 функция (1) является первообразной для f на $[a,b]$. Но две первообразные $\mathscr{F}(x)$ и $F(x)$ одной и той же функции на отрезке могут отличаться на этом отрезке только на постоянную, поэтому $\mathscr{F}(x)=F(x)+c$. ►

Для дальнейших приложений удобно несколько расширить понятие первообразной и принять

Определение 1. Непрерывная на числовом промежутке функция $x\mapsto\mapsto\mathscr{F}(x)$ называется *первообразной* (*обобщенной первообразной*) функции $x\mapsto f(x)$, определенной на том же промежутке, если во всех точках промежутка, за исключением, быть может, конечного их числа, имеет место соотношение $\mathscr{F}'(x)=f(x)$.

Учитывая это определение, можно утверждать, что справедлива следующая

Теорема 1′. *Каждая определенная и ограниченная на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *с конечным множеством точек разрыва имеет на этом отрезке (обобщенную) первообразную, причем любая первообразная функции* f *на* $[a,b]$ *имеет вид* (4).

◄ Поскольку f имеет конечное множество точек разрыва, то $f\in\mathcal{R}[a,b]$ и по лемме 1 функция (1) является обобщенной первообразной для f на $[a,b]$. При этом мы учли, что, как уже отмечалось, в силу (2) функция (1) непрерывна на $[a,b]$. Если $\mathcal{F}(x)$ — другая первообразная функции f на $[a,b]$, то $\mathcal{F}(x)-F(x)$ — непрерывная функция, постоянная на каждом из конечного числа промежутков, на которые точки разрыва функции f разбивают отрезок $[a,b]$. Из непрерывности $\mathcal{F}(x)-F(x)$ на $[a,b]$ тогда следует, что $\mathcal{F}(x)-F(x)\equiv\mathrm{const}$ на $[a,b]$. ►

2. Формула Ньютона—Лейбница

Теорема 2. *Если* $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ — *ограниченная функция с конечным числом точек разрыва, то* $f\in\mathcal{R}[a,b]$ *и*

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx=\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a),} \tag{5}$$

где $\mathcal{F}\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ — *любая из первообразных функции* f *на отрезке* $[a,b]$.

◄ Интегрируемость ограниченной на отрезке функции с конечным числом точек разрыва нам уже известна (см. § 1, следствие 2 утверждения 2). Наличие обобщенной первообразной $\mathcal{F}(x)$ функции f на $[a,b]$ гарантирует теорема 1′, в силу которой $\mathcal{F}(x)$ имеет вид (4). Полагая в (4) $x=a$, получим, что $\mathcal{F}(a)=c$, откуда

$$\mathcal{F}(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt+\mathcal{F}(a).$$

В частности,

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt=\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a),$$

что с точностью до обозначения переменной интегрирования совпадает с доказываемой формулой (5). ►

Фундаментальное для всего анализа соотношение (5) называется *формулой Ньютона—Лейбница*.

Разность $\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a)$ значений любой функции часто записывают символом $\mathcal{F}(x)\big|_a^b$. В этих обозначениях формула Ньютона—Лейбница приобретает вид

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx=\mathcal{F}(x)\Big|_a^b.}$$

Поскольку обе части этой формулы одновременно меняют знак при перестановке a и b, то формула справедлива при любом соотношении величин a и b, т. е. как при $a \leqslant b$, так и при $a \geqslant b$.

На упражнениях по анализу формула Ньютона—Лейбница большей частью используется только для вычисления стоящего слева интеграла, и это может породить несколько искаженное представление об ее использовании. На самом деле положение вещей таково, что конкретные интегралы редко находят через первообразную, а чаще прибегают к прямому счету на ЭВМ с помощью хорошо разработанных численных методов. Формула Ньютона—Лейбница занимает ключевую, связывающую интегрирование и дифференцирование, позицию в самой теории математического анализа, в которой она, в частности, получает далеко идущее развитие в виде так называемой *общей формулы Стокса*[1].

Примером того, как формула Ньютона—Лейбница используется в самом анализе, может служить уже материал следующего пункта настоящего параграфа.

3. Интегрирование по частям в определенном интеграле и формула Тейлора

Утверждение 1. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке с концами a и b, то справедливо соотношение*

$$\int_a^b (u \cdot v')(x)\,dx = (u \cdot v)(x)\Big|_a^b - \int_a^b (v \cdot u')(x)\,dx. \tag{6}$$

Эту формулу принято записывать в сокращенном виде

$$\int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

и называть *формулой интегрирования по частям* в определенном интеграле.

◄ По правилу дифференцирования произведения функций имеем

$$(u \cdot v)'(x) = (u' \cdot v)(x) + (u \cdot v')(x).$$

По условию все функции в этом равенстве непрерывны, а значит, и интегрируемы на отрезке с концами a и b. Используя линейность интеграла и формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$(u \cdot v)(x)\Big|_a^b = \int_a^b (u' \cdot v)(x)\,dx + \int_a^b (u \cdot v')(x)\,dx. \ ►$$

В качестве следствия получим теперь формулу Тейлора с интегральным остаточным членом.

[1]Д. Г. Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.

Пусть на отрезке с концами a и x функция $t \mapsto f(t)$ имеет n непрерывных производных. Используя формулу Ньютона—Лейбница и формулу (6), проделаем следующую цепочку преобразований, в которых все дифференцирования и подстановки производятся по переменной t:

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt=-\int_a^x f'(t)(x-t)'dt=$$
$$=-f'(t)(x-t)\Big|_a^x+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt=$$
$$=f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}\int_a^x f''(t)\big((x-t)^2\big)'\,dt=$$
$$=f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2\Big|_a^x+\frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2dt=$$
$$=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\frac{1}{2\cdot 3}\int_a^x f'''(t)\big((x-t)^3\big)'dt=\ldots$$
$$\ldots=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}+r_{n-1}(a;x),$$

где

$$\boxed{r_{n-1}(a;x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt.} \tag{7}$$

Итак, доказано следующее

Утверждение 2. *Если функция $t \mapsto f(t)$ имеет на отрезке с концами a и x непрерывные производные до порядка n включительно, то справедлива формула Тейлора*

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}+r_{n-1}(a;x)$$

с остатком $r_{n-1}(a;x)$, представленным в интегральной форме (7).

Отметим, что функция $(x-t)^{n-1}$ не меняет знак на отрезке с концами a и x, и поскольку функция $t \mapsto f^{(n)}(t)$ непрерывна на этом отрезке, то по первой теореме о среднем на нем найдется такая точка ξ, что

$$r_{n-1}(a;x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt=\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)\int_a^x (x-t)^{n-1}dt=$$
$$=\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)\left(-\frac{1}{n}(x-t)^n\right)\Big|_a^x=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n.$$

Мы вновь получили знакомую форму Лагранжа остаточного члена формулы Тейлора. (На основании задачи 2 b) из предыдущего параграфа, можно считать, что ξ лежит в интервале с концами a, x.)

Это рассуждение можно было бы повторить, вынося из-под знака интеграла (7) $f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-k}$, где $k \in [1, n]$. Значениям $k=1$ и $k=n$ отвечают получаемые при этом соответственно формулы Коши и Лагранжа остаточного члена.

4. Замена переменной в интеграле. Одной из основных формул интегрального исчисления является формула замены переменной в определенном интеграле. Эта формула в теории интеграла столь же важна, как в дифференциальном исчислении формула дифференцирования композиции функций, с которой она может быть при определенных условиях связана посредством формулы Ньютона—Лейбница.

Утверждение 3. *Если $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ — непрерывно дифференцируемое отображение отрезка $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ в отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ такое, что $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, то при любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{8}$$

◄ Пусть $\mathscr{F}(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. Тогда, по теореме о дифференцировании композиции функций, функция $\mathscr{F}(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, непрерывной, как композиция и произведение непрерывных функций на отрезке $[\alpha, \beta]$. По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathscr{F}(b) - \mathscr{F}(a) \quad \text{и} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \mathscr{F}(\varphi(\beta)) - \mathscr{F}(\varphi(\alpha)).$$

Но, по условию, $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$; таким образом, равенство (8) действительно имеет место. ►

Из формулы (8) видно, насколько удобно иметь под интегралом не просто знак функции, а дифференциальное выражение $f(x)dx$, позволяющее после подстановки $x = \varphi(t)$ автоматически получать правильное подынтегральное выражение в интеграле по новой переменной.

Для того чтобы не осложнять дела громоздким доказательством, мы в утверждении 3 умышленно сузили истинную область применимости формулы (8) и получили (8) из формулы Ньютона—Лейбница. Теперь перейдем к основной теореме о замене переменной, условия которой несколько отличаются от условий утверждения 3. Доказательство этой теоремы будет опираться непосредственно на определение интеграла как предела интегральных сумм.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ — *непрерывно дифференцируемое, строго монотонное отображение отрезка* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *в отрезок* $a \leqslant x \leqslant b$ *с соответствием концов* $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ *или* $\varphi(\alpha)=b$, $\varphi(\beta)=a$. *Тогда при любой функции* $f(x)$, *интегрируемой на отрезке* $[a, b]$, *функция* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ *интегрируема на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *и справедливо равенство*

$$\boxed{\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.} \tag{9}$$

◄ Поскольку φ — строго монотонное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$ с соответствием концов, то любое разбиение P_t $(\alpha = t_0 < \ldots < t_n = \beta)$ отрезка $[\alpha, \beta]$ посредством образов $x_i = \varphi(t_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ точек разбиения P_t порождает соответствующее разбиение P_x отрезка $[a, b]$, которое можно условно обозначить как $\varphi(P_t)$. При этом $x_0 = a$, если $\varphi(\alpha) = a$, и $x_0 = b$, если $\varphi(\alpha) = b$. Из равномерной непрерывности φ на $[\alpha, \beta]$ следует, что если $\lambda(P_t) \to 0$, то величина $\lambda(P_x) = \lambda(\varphi(P_t))$ тоже стремится к нулю.

Используя теорему Лагранжа, преобразуем интегральную сумму $\sigma(f; P_x, \xi)$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i.$$

Здесь $x_i = \varphi(t_i)$, $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, ξ_i лежит на отрезке с концами x_{i-1}, x_i, а точки τ_i, $\tilde{\tau}_i$ лежат на отрезке с концами t_{i-1}, t_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Далее,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i + \\ + \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))(\varphi'(\tilde{\tau}_i) - \varphi'(\tau_i))\Delta t_i.$$

Оценим последнюю сумму. Поскольку $f \in \mathcal{R}[a, b]$, функция f ограничена на $[a, b]$. Пусть $|f(x)| \leqslant C$ на $[a, b]$. Тогда

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))(\varphi'(\tilde{\tau}_i) - \varphi'(\tau_i))\Delta t_i\right| \leqslant C \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega(\varphi'; \Delta_i)\Delta t_i,$$

где Δ_i — отрезок с концами t_{i-1}, t_i.

Последняя сумма стремится к нулю при $\lambda(P_t) \to 0$, поскольку φ' — непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция.

Таким образом, мы показали, что

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i + \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ при $\lambda(P_t) \to 0$. Как уже отмечалось, если $\lambda(P_t) \to 0$, то и $\lambda(P_x) \to 0$. Но $f \in \mathcal{R}[a, b]$, поэтому при $\lambda(P_x) \to 0$ сумма в левой части последнего равенства стремится к интегралу $\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$. Значит, при $\lambda(P_t) \to 0$ и сумма в правой части этого равенства имеет и притом тот же предел.

Но сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$ можно считать совершенно произвольной интегральной суммой функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, соответствующей разбиению P_t с отмеченными точками $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, поскольку, ввиду строгой монотонности φ, любой набор точек τ можно получить из некоторого соответствующего ему набора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ точек, отмеченных в отрезках разбиения $P_x = \varphi(P_t)$.

Таким образом, предел этой суммы есть, по определению, интеграл от функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ по отрезку $[\alpha, \beta]$, и мы доказали одновременно как интегрируемость функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, так и формулу (9). ►

5. Некоторые примеры. Рассмотрим теперь некоторые примеры использования полученных формул и доказанных в последних двух параграфах теорем о свойствах интеграла.

Пример 1.

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\Big(t + \frac{1}{2}\sin 2t\Big)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Для вычисления интеграла мы сделали замену переменной $x = \sin t$, а затем, найдя первообразную получившейся после этой замены подынтегральной функции, воспользовались формулой Ньютона—Лейбница.

Конечно, можно было бы поступить и иначе: найти довольно громоздкую первообразную $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$ функции $\sqrt{1-x^2}$ и затем воспользоваться формулой Ньютона—Лейбница. Пример показывает, что при вычислении определенного интеграла, к счастью, иногда удается избежать отыскания первообразной подынтегральной функции.

Пример 2. Покажем, что

$$\text{a) } \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0, \quad \text{b) } \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \pi, \quad \text{c) } \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi$$

при $m, n \in \mathbb{N}$.

$$\text{a)}\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n+m)x - \sin(n-m)x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{n+m}\cos(n+m)x + \frac{1}{n-m}\cos(n-m)x\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

если $n-m \neq 0$. Случай, когда $n-m=0$, можно рассмотреть отдельно, и в этом случае, очевидно, вновь приходим к тому же результату.

$$\text{b)}\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2mx)\, dx = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

$$\text{c)}\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)\, dx = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\Big)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Пример 3. Пусть $f \in \mathcal{R}[-a, a]$. Покажем, что

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx, & \text{если } f \text{ — четная функция,} \\ 0, & \text{если } f \text{ — нечетная функция.} \end{cases}$$

Если $f(-x) = f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-1)\, dt + \int_{0}^{a} f(x)\, dx =$$
$$= \int_{0}^{a} f(-t)\, dt + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} (f(-x) + f(x))\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx.$$

Если же $f(-x) = -f(x)$, то, как видно из тех же выкладок, получим

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} (f(-x) + f(x))\, dx = \int_{0}^{a} 0\, dx = 0.$$

Пример 4. Пусть f — определенная на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ периодическая функция с периодом T, т. е. $f(x+T) = f(x)$ при $x \in \mathbb{R}$.

Если f — интегрируемая на каждом конечном отрезке функция, то при любом $a \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\, dx = \int_{0}^{T} f(x)\, dx,$$

т. е. интеграл от периодической функции по отрезку длины периода T этой функции не зависит от положения отрезка интегрирования на числовой

прямой:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx =$$
$$= \int_0^T f(x)\,dx + \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(t+T)\cdot 1\,dt =$$
$$= \int_0^T f(x)\,dx + \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Мы сделали замену $x = t + T$ и воспользовались периодичностью функции $f(x)$.

Пример 5. Пусть нам нужно вычислить интеграл $\int_0^1 \sin x^2\,dx$, например, с точностью до 10^{-2}.

Мы знаем, что первообразная $\int \sin x^2\,dx$ (интеграл Френеля) не выражается в элементарных функциях, поэтому использовать формулу Ньютона—Лейбница здесь в традиционном смысле нельзя.

Поступим иначе. Исследуя в дифференциальном исчислении формулу Тейлора, мы в качестве примера (см. гл. V, § 3, пример 11) нашли, что на отрезке $[-1, 1]$ с точностью до 10^{-3} имеет место равенство

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 =: P(x).$$

Но если $|\sin x - P(x)| < 10^{-3}$ на отрезке $[-1, 1]$, то верно также, что $|\sin x^2 - P(x^2)| < 10^{-3}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Следовательно,

$$\left|\int_0^1 \sin x^2\,dx - \int_0^1 P(x^2)\,dx\right| \leqslant \int_0^1 |\sin x^2 - P(x^2)|\,dx < \int_0^1 10^{-3}\,dx < 10^{-3}.$$

Таким образом, для вычисления интеграла $\int_0^1 \sin x^2\,dx$ с нужной точностью достаточно вычислить интеграл $\int_0^1 P(x^2)\,dx$. Но

$$\int_0^1 P(x^2)\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10}\right)dx =$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3!\,7}x^7 + \frac{1}{5!\,11}x^{11}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\,7} + \frac{1}{5!\,11} = 0{,}310 \pm 10^{-3},$$

поэтому

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = 0{,}310 \pm 2\cdot 10^{-3} = 0{,}31 \pm 10^{-2}.$$

Пример 6. Величина $\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *интегральным средним значений функции на отрезке* $[a, b]$.

Пусть f — определенная на $\mathbb{R}$ и интегрируемая на любом отрезке функция.

Построим по f новую функцию

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt,$$

значение которой в точке x есть интегральное среднее значений f в δ-окрестности точки x.

Покажем, что функция $F_\delta(x)$ (называемая *усреднением* f) более регулярна по сравнению с f. Точнее, если f интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, то $F_\delta(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а если $f \in C(\mathbb{R})$, то $F_\delta(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R})$.

Проверим сначала непрерывность функции $F_\delta(x)$:

$$|F_\delta(x+h) - F_\delta(x)| = \frac{1}{2\delta}\left|\int\limits_{x+\delta}^{x+\delta+h} f(t)\,dt + \int\limits_{x-\delta+h}^{x-\delta} f(t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\delta}(C|h| + C|h|) = \frac{C}{\delta}|h|,$$

если $|f(t)| \leqslant C$, например, в 2δ-окрестности точки x и $|h| < \delta$. Из этой оценки, очевидно, следует непрерывность функции $F_\delta(x)$.

Если же $f \in C(\mathbb{R})$, то по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{d\varphi}\int\limits_a^{\varphi} f(t)\,dt \cdot \frac{d\varphi}{dx} = f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

поэтому из записи

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_a^{x+\delta} f(t)\,dt - \frac{1}{2\delta}\int\limits_a^{x-\delta} f(t)\,dt$$

получаем, что

$$F'_\delta(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x-\delta)}{2\delta}.$$

Функцию $F_\delta(x)$ после замены $t = x + u$ переменной интегрирования можно записать в виде

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\,du.$$

Если $f \in C(\mathbb{R})$, то, применяя первую теорему о среднем, находим, что

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} f(x+\tau)\cdot 2\delta = f(x+\tau),$$

где $|\tau| \leqslant \delta$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\delta \to +0} F_\delta(x) = f(x),$$

что вполне естественно.

Задачи и упражнения

1. Используя интеграл, найдите

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{n}{(n+1)^2} + \ldots + \dfrac{n}{(2n)^2}\right]$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, если $\alpha \geqslant 0$.

2. a) Покажите, что любая непрерывная на интервале функция имеет на нем первообразную.

b) Покажите, что если $f \in C^{(1)}[a, b]$, то f может быть представлена как разность двух неубывающих на отрезке $[a, b]$ функций (см. задачу 4 из § 1).

3. Покажите, что в предположении гладкости функции g вторая теорема о среднем (теорема 6 из § 2) интегрированием по частям непосредственно сводится к первой теореме о среднем.

4. Покажите, что если $f \in C(\mathbb{R})$, то для любого фиксированного отрезка $[a, b]$ по заданному $\varepsilon > 0$ можно так подобрать $\delta > 0$, что на $[a, b]$ будет выполнено неравенство $|F_\delta(x) - f(x)| < \varepsilon$, где F_δ — осреднение функции, рассмотренное в примере 6.

5. Покажите, что

$$\int\limits_1^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt \sim \frac{1}{x^2} e^{x^2} \quad \text{при } x \to +\infty.$$

6. a) Проверьте, что функция $f(x) = \int\limits_x^{x+1} \sin t^2\,dt$ при $x \to \infty$ имеет следующее представление:

$$f(x) = \frac{\cos x^2}{2x} - \frac{\cos(x+1)^2}{2(x+1)} + O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

b) Найдите $\varliminf\limits_{x\to\infty} xf(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to\infty} xf(x)$.

7. Покажите, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — периодическая, интегрируемая на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функция, то функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

может быть представлена в виде суммы линейной и периодической функций.

8. a) Проверьте, что при $x > 1$ и $n \in \mathbb{N}$ функция

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos\varphi)^n\,d\varphi$$

есть полином степени n (*n-й полином Лежандра*).

b) Покажите, что

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{d\psi}{(x - \sqrt{x^2 - 1}\cos\psi)^n}.$$

9. Пусть f — вещественнозначная функция, определенная на отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$, а $\xi_1,\dots,\xi_m$ — различные точки этого отрезка. Значения *интерполяционного полинома Лагранжа* степени $m-1$

$$L_{m-1}(x):=\sum_{j=1}^{m}f(\xi_j)\prod_{i\neq j}\frac{x-\xi_i}{\xi_j-\xi_i}$$

совпадают в точках $\xi_1,\dots,\xi_m$ (узлах интерполяции) со значениями функции f, причем если $f\in C^{(m)}[a,b]$, то

$$f(x)-L_{m-1}(x)=\frac{1}{m!}f^{(m)}(\zeta(x))\omega_m(x),$$

где $\omega_m(x)=\prod\limits_{i=1}^{m}(x-\xi_i)$, а $\zeta(x)\in\,]a,b[$ (см. задачу 11 в § 3 гл. V).

Пусть $\xi_i=\dfrac{b+a}{2}+\dfrac{b-a}{2}\theta_i$, тогда $\theta_i\in[-1,1]$, $i=1,\dots,m$.

a) Покажите, что

$$\int_a^b L_{m-1}(x)\,dx=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{m}c_if(\xi_i),$$

где

$$c_i=\int_{-1}^{1}\Big(\prod_{i\neq j}\frac{t-\theta_i}{\theta_j-\theta_i}\Big)\,dt.$$

В частности,

α_1) $\displaystyle\int_a^b L_0(x)\,dx=(b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$, если $m=1$, $\theta_1=0$;

α_2) $\displaystyle\int_a^b L_1(x)\,dx=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$, если $m=2$, $\theta_1=-1$, $\theta_2=1$;

α_3) $\displaystyle\int_a^b L_2(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\Big[f(a)+4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f(b)\Big]$, если $m=3$, $\theta_1=-1$, $\theta_2=0$, $\theta_3=1$.

b) Считая, что $f\in C^{(m)}[a,b]$ и полагая $M_m=\max\limits_{x\in[a,b]}|f^{(m)}(x)|$, оцените величину R_m абсолютной погрешности в формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b L_{m-1}(x)\,dx+R_m \tag{$*$}$$

и покажите, что $|R_m|\leqslant\dfrac{M_m}{m!}\displaystyle\int_a^b|\omega_m(x)|\,dx$.

c) В случаях α_1), α_2), α_3) формула $(*)$ называется соответственно формулой *прямоугольников*, *трапеций* и *парабол*. В последнем случае ее называют также формулой Симпсона[1]. Покажите, что в случаях α_1), α_2), α_3) имеют место следующие формулы:

$$R_1=\frac{f'(\xi_1)}{4}(b-a)^2,\quad R_2=-\frac{f''(\xi_2)}{12}(b-a)^3,\quad R_3=-\frac{f^{(4)}(\xi_3)}{2880}(b-a)^5,$$

где $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in[a,b]$, а функция f принадлежит соответствующему классу $C^{(k)}[a,b]$.

[1] Т. Симпсон (1710—1761) — английский математик.

d) Пусть f есть полином P. Какова наивысшая степень полиномов P, для которых точны формулы прямоугольников, трапеций и парабол соответственно?

Пусть $h=\dfrac{b-a}{n}$; $x_k=a+hk$, $k=0, 1, \ldots, n$; $y_k=f(x_k)$.

e) Покажите, что в следующей *формуле прямоугольников*

$$\int_a^b f(x)\,dx = h(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})+R_1$$

остаток имеет вид $R_1=\dfrac{f'(\xi)}{2}(b-a)h$, где $\xi\in[a, b]$.

f) Покажите, что в следующей *формуле трапеций*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[(y_0+y_n)+2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})]+R_2$$

остаток имеет вид $R_2=-\dfrac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$, где $\xi\in[a, b]$.

g) Покажите, что в следующей *формуле Симпсона* (*формуле парабол*)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})]+R_3,$$

которая пишется при четных значениях n, остаток R_3 имеет вид

$$R_3=-\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4, \quad \text{где } \xi\in[a, b].$$

h) Исходя из соотношения

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

вычислите π с точностью до 10^{-3}, пользуясь формулами прямоугольников, трапеций и парабол. Обратите внимание на эффективность формулы Симпсона, которая по этой причине является наиболее распространенной *квадратурной* формулой (так называют формулы численного интегрирования в одномерном случае, отождествляя интеграл с площадью соответствующей криволинейной трапеции).

10. Преобразуя формулу (7), получите следующие виды записи остаточного члена формулы Тейлора, где положено $h=x-a$:

a) $\dfrac{h^n}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(a+\tau h)(1-\tau)^{n-1}\,d\tau$;

b) $\dfrac{h^n}{n!}\displaystyle\int_0^1 f^{(n)}(x-h\sqrt[n]{t})\,dt$.

11. Покажите, что важная формула (9) замены переменной в интеграле остается в силе и без предположения монотонности функции замены.

§ 4. Некоторые приложения интеграла

Использование интеграла в приложениях часто происходит по одной и той же схеме, которую по этой причине полезно изложить один раз в чистом виде. Этому посвящен первый пункт настоящего параграфа.

1. Аддитивная функция ориентированного промежутка и интеграл. Обсуждая в § 2 свойство аддитивности интеграла, мы ввели понятие *аддитивной функции ориентированного промежутка*. Напомним, что это функция $(\alpha, \beta) \mapsto I(\alpha, \beta)$, которая каждой упорядоченной паре (α, β) точек $\alpha, \beta \in [a, b]$ фиксированного отрезка $[a, b]$ ставит в соответствие число $I(\alpha, \beta)$, причем так, что для любой тройки точек $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ выполнено равенство

$$I(\alpha, \gamma) = I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma). \tag{1}$$

Из (1) при $\alpha = \beta = \gamma$ следует, что $I(\alpha, \alpha) = 0$, а при $\alpha = \gamma$ получаем, что $I(\alpha, \beta) + I(\beta, \alpha) = 0$, т. е. $I(\alpha, \beta) = -I(\beta, \alpha)$. В этом сказывается влияние порядка точек α, β.

Полагая

$$\mathscr{F}(x) = I(a, x),$$

в силу аддитивности функции I имеем

$$I(\alpha, \beta) = I(a, \beta) - I(a, \alpha) = \mathscr{F}(\beta) - \mathscr{F}(\alpha).$$

Таким образом, каждая аддитивная функция ориентированного промежутка имеет вид

$$I(\alpha, \beta) = \mathscr{F}(\beta) - \mathscr{F}(\alpha), \tag{2}$$

где $x \mapsto \mathscr{F}(x)$ — функция точки отрезка $[a, b]$.

Легко проверить, что верно и обратное, т. е. что любая функция $x \mapsto \mathscr{F}(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, порождает по формуле (2) аддитивную функцию ориентированного промежутка.

Приведем два типичных примера.

Пример 1. Если $f \in \mathscr{R}[a, b]$, то функция $\mathscr{F}(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ порождает, в силу формулы (2), аддитивную функцию

$$I(\alpha, \beta) = \int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt.$$

Заметим, что в данном случае функция $\mathscr{F}(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Пример 2. Пусть отрезок $[0, 1]$ есть невесомая струна с бусинкой единичной массы, прикрепленной к струне в точке $x = 1/2$.

Пусть $\mathscr{F}(x)$ есть масса, находящаяся на отрезке $[0, x]$ струны. Тогда по условию

$$\mathscr{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1/2, \\ 1 & \text{при } 1/2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Физический смысл аддитивной функции

$$I(\alpha, \beta) = \mathscr{F}(\beta) - \mathscr{F}(\alpha)$$

при $\beta > \alpha$ — масса, попавшая в полуинтервал $]\alpha, \beta]$.

Поскольку функция $\mathscr{F}$ разрывна, аддитивная функция $I(\alpha, \beta)$ в рассматриваемом случае не может быть представлена как интеграл Римана от некоторой функции — плотности массы. (Эта плотность, т. е. предел отношения массы промежутка к его длине, должна была бы равняться нулю в любой точке отрезка $[a, b]$, кроме точки $x = 1/2$, где она должна была бы быть бесконечной.)

Теперь докажем полезное для дальнейшего достаточное условие того, что аддитивная функция порождается интегралом.

Утверждение 1. *Пусть аддитивная функция $I(\alpha, \beta)$, определенная для точек α, β отрезка $[a, b]$, такова, что существует функция $f \in \mathcal{R}[a, b]$, связанная с I следующим образом: для любого отрезка $[\alpha, \beta]$ такого, что $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, выполняется соотношение*

$$\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \leqslant I(\alpha, \beta) \leqslant \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha).$$

Тогда

$$I(a, b) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

◄ Пусть P — произвольное разбиение $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$;

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Для каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения P имеем по условию

$$m_i \Delta x_i \leqslant I(x_{i-1}, x_i) \leqslant M_i \Delta x_i.$$

Суммируя эти неравенства и пользуясь аддитивностью функции $I(\alpha, \beta)$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant I(a, b) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Крайние члены в последнем соотношении суть знакомые нам нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению P отрезка $[a, b]$. При $\lambda(P) \to 0$ обе они имеют своим пределом интеграл от f по отрезку $[a, b]$. Таким образом, переходя к пределу при $\lambda(P) \to 0$, получаем, что

$$I(a, b) = \int_a^b f(x)\, dx. \ ►$$

Продемонстрируем теперь утверждение 1 в работе.

2. Длина пути. Пусть частица движется в пространстве $\mathbb{R}^3$, и пусть известен закон ее движения $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — прямоугольные декартовы координаты точки в момент времени t.

Мы хотим определить длину $l[a, b]$ пути, пройденного точкой за промежуток времени $a \leqslant t \leqslant b$.

Уточним некоторые понятия.

Определение 1. *Путем* в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется отображение $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ числового промежутка в пространство $\mathbb{R}^3$, задаваемое непрерывными на этом промежутке функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Определение 2. Если $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ есть путь, для которого областью изменения параметра t является отрезок $[a, b]$, то точки

$$A = (x(a), y(a), z(a)), \quad B = (x(b), y(b), z(b))$$

пространства $\mathbb{R}^3$ называются соответственно *началом* и *концом* пути.

Определение 3. Путь называется *замкнутым*, если он имеет и начало, и конец и эти точки совпадают.

Определение 4. Если $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ — путь, то образ $\Gamma(I)$ промежутка I в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется *носителем* пути.

Носитель абстрактного пути может оказаться вовсе не тем, что мы хотели бы назвать линией. Существуют примеры путей, носители которых, например, содержат целый трехмерный куб (так называемые «кривые» Пеано). Однако если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ достаточно регулярны (как, например, в случае механического движения, когда они дифференцируемы), то ничего противоречащего нашей интуиции, как можно строго проверить, заведомо не произойдет.

Определение 5. Путь $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$, для которого отображение $I \to \Gamma(I)$ взаимно однозначно, называется *простым путем* или *параметризованной кривой*, а его носитель — *кривой* в $\mathbb{R}^3$.

Определение 6. Замкнутый путь $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ называется *простым замкнутым путем* или *простой замкнутой кривой*, если путь $\Gamma\colon [a, b[\to \mathbb{R}^3$ является простым.

Значит, простой путь отличается от произвольного пути тем, что при движении по его носителю мы не возвращаемся в прежние точки, т. е. не пересекаем свою траекторию нигде, кроме, быть может, ее конца, если простой путь замкнут.

Определение 7. Путь $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ называется путем *данного класса гладкости*, если задающие его функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ принадлежат указанному классу.

(Например, классу $C[a, b]$, $C^{(1)}[a, b]$ или $C^{(k)}[a, b]$.)

Определение 8. Путь $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ называется *кусочно гладким*, если отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых соответствующее ограничение отображения Γ задается непрерывно дифференцируемыми функциями.

Именно гладкие пути, т. е. пути класса $C^{(1)}$, и кусочно гладкие пути мы и будем сейчас рассматривать.

Вернемся к исходной задаче, которую теперь можно сформулировать как задачу определения длины гладкого пути $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$.

Наши исходные представления о длине $l[\alpha, \beta]$ пути, пройденного в промежуток времени $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, таковы: во-первых, если $\alpha < \beta < \gamma$, то

$$l[\alpha, \gamma] = l[\alpha, \beta] + l[\beta, \gamma],$$

и, во-вторых, если $\boldsymbol{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ есть скорость точки в момент t, то

$$\inf_{x \in [\alpha, \beta]} |\boldsymbol{v}(t)|(\beta - \alpha) \leqslant l[\alpha, \beta] \leqslant \sup_{x \in [\alpha, \beta]} |\boldsymbol{v}(t)|(\beta - \alpha).$$

Таким образом, если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, то в силу утверждения 1 мы однозначно приходим к формуле

$$l[a, b] = \int_a^b |\boldsymbol{v}(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt, \tag{3}$$

которую и принимаем теперь как определение длины гладкого пути $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$.

Если $z(t) \equiv 0$, то носитель пути лежит в плоскости и формула (3) приобретает вид

$$l[a, b] = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt. \tag{4}$$

Пример 3. Опробуем формулу (4) на знакомом объекте. Пусть точка движется в плоскости по закону

$$x = R\cos 2\pi t, \quad y = R\sin 2\pi t. \tag{5}$$

За промежуток времени $[0, 1]$ точка один раз пробежит окружность радиуса R, т. е. пройдет путь длины $2\pi R$, если длина окружности вычисляется по этой формуле.

Проведем расчет по формуле (4):

$$l[0, 1] = \int_0^1 \sqrt{(-2\pi R\sin 2\pi t)^2 + (2\pi R\cos 2\pi t)^2}\, dt = 2\pi R.$$

Несмотря на ободряющее совпадение результатов, проведенное рассуждение содержит некоторые логические пробелы, на которые стоит обратить внимание.

Функции $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если принять их школьное определение, суть декартовы координаты образа p точки $p_0 = (1, 0)$ при повороте на угол α.

Величина α с точностью до знака измеряется длиной дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$, заключенной между p_0 и p. Таким образом, при этом подходе к

тригонометрическим функциям их определение опирается на понятие длины дуги окружности и, значит, вычисляя выше длину окружности, мы совершили в известном смысле логический круг, задав параметризацию окружности в виде (5).

Однако эта трудность, как мы сейчас увидим, не принципиальная, ибо параметризацию окружности можно задать, вовсе не прибегая к тригонометрическим функциям.

Рассмотрим задачу о вычислении длины графика функции $y=f(x)$, определенной на некотором отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Имеется в виду вычисление длины пути $\Gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2$, имеющего специальный вид параметризации

$$x\mapsto (x,f(x)),$$

из которого можно заключить, что отображение $\Gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2$ взаимно однозначно. Значит, по определению 5 график функции есть кривая в $\mathbb{R}^2$.

Формула (4) в данном случае упрощается, поскольку, полагая в ней $x=t$, $y=f(t)$, получаем

$$l[a,b]=\int\limits_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (6)$$

В частности, если рассмотреть полуокружность

$$y=\sqrt{1-x^2},\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

окружности $x^2+y^2=1$, то для нее получим

$$l=\int\limits_{-1}^{+1}\sqrt{1+\left[\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right]^2}\,dx=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (7)$$

Но под знаком последнего интеграла стоит неограниченная функция и, значит, он не существует в традиционном, изученном нами смысле. Означает ли это, что полуокружность не имеет длины? Пока это только означает, что указанная параметризация полуокружности не удовлетворяет условиям непрерывности функций $\dot{x}$, $\dot{y}$, при которых была выписана формула (4), а значит, и формула (6). Поэтому нам следует либо подумать о расширении понятия интеграла, с тем чтобы интеграл в (7) получил определенный смысл, либо перейти к параметризации, удовлетворяющей условиям применимости формулы (6).

Заметим, что если взятую параметризацию рассматривать на любом отрезке вида $[-1+\delta,1-\delta]$, где $-1<-1+\delta<1-\delta<1$, то на нем формула (6) применима и по ней находим длину

$$l[-1+\delta,1-\delta]=\int\limits_{-1+\delta}^{1-\delta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

дуги окружности, лежащей над отрезком $[-1+\delta,1-\delta]$.

Естественно поэтому считать, что длина l полуокружности есть предел $\lim\limits_{\delta\to+0} l[-1+\delta, 1-\delta]$. В таком же смысле можно понимать и интеграл в соотношении (7). Этим естественно возникающим расширением понятия интеграла Римана мы подробнее займемся в следующем параграфе.

Что же касается рассматриваемого конкретного вопроса, то, даже не меняя параметризацию, можно найти, например, длину $l\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ дуги единичной окружности, опирающейся на хорду, конгруэнтную радиусу окружности. Тогда (уже из геометрических соображений) должно быть $l=3\cdot l\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Заметим также, что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(1-x^2+x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \sqrt{1-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x\,d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ = 2\int \sqrt{1-x^2}\,dx - x\sqrt{1-x^2},$$

поэтому

$$l[-1+\delta, 1-\delta] = 2\int\limits_{-1+\delta}^{1-\delta} \sqrt{1-x^2}\,dx - \left(x\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_{-1+\delta}^{1-\delta}.$$

Таким образом,

$$l = \lim_{\delta\to+0} l[-1+\delta, 1-\delta] = 2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Длина полуокружности единичного радиуса обозначается символом π, и мы приходим к следующей формуле:

$$\pi = 2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Последний интеграл есть обычный (а не обобщенный) интеграл Римана, и его можно вычислить с любой точностью.

Если для $x\in[-1, 1]$ величину $l[x, 1]$ назвать $\arccos x$, то в силу проведенных выше выкладок

$$\arccos x = \int\limits_{x}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \text{или} \quad \arccos x = x\sqrt{1-x^2} + 2\int\limits_{x}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Если считать длину дуги первичным понятием, то первичными надо считать функцию $x\mapsto \arccos x$, введенную только что, и функцию $x\mapsto \arcsin x$, которую можно ввести аналогично, а функции $x\mapsto \cos x$ и $x\mapsto \sin x$ тогда можно получить как им обратные на соответствующих отрезках. В сущности, именно это и делается в элементарной геометрии.

Пример с длиной полуокружности поучителен не только тем, что, разбирая его, мы сделали, быть может, небесполезное для кого-то замечание об

определении тригонометрических функций, но еще и тем, что он естественно порождает вопрос о том, не зависит ли вообще определенное формулой (3) число от выбора системы координат x, y, z и параметризации кривой, когда речь идет о длине кривой.

Оставляя читателю анализ роли пространственных декартовых координат, рассмотрим здесь роль параметризации.

Уточним, что под *параметризацией* некоторой кривой в $\mathbb{R}^3$ мы подразумеваем задание простого пути $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$, носителем которого является данная кривая. Точку или число $t \in I$ называют *параметром*, а промежуток I — *областью изменения параметра*.

Если $\Gamma\colon I \to \mathscr{L}$ и $\widetilde{\Gamma}\colon \tilde{I} \to \mathscr{L}$ — два взаимно однозначных отображения с одним и тем же множеством значений $\mathscr{L}$, то естественно возникают взаимно однозначные отображения $\widetilde{\Gamma}^{-1} \circ \Gamma\colon I \to \tilde{I}$, $\Gamma^{-1} \circ \widetilde{\Gamma}\colon \tilde{I} \to I$ между областями определения I и $\tilde{I}$ этих отображений.

В частности, если имеются две параметризации одной кривой, то между самими параметрами $t \in I$, $\tau \in \tilde{I}$ устанавливается естественное соответствие $t = t(\tau)$ или $\tau = \tau(t)$, позволяющее по параметру точки в одной параметризации определять ее же параметр в другой параметризации.

Пусть $\Gamma\colon [a, b] \to \mathscr{L}$ и $\widetilde{\Gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathscr{L}$ — две параметризации одной кривой с соответствием $\Gamma(a) = \widetilde{\Gamma}(\alpha)$, $\Gamma(b) = \widetilde{\Gamma}(\beta)$ начала и конца. Тогда *функции* $t = t(\tau)$, $\tau = \tau(t)$ *перехода* от одного параметра к другому будут непрерывными, строго монотонными отображениями отрезков $a \leqslant t \leqslant b$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ друг на друга с соответствием начал $a \longleftrightarrow \alpha$ и концов $b \longleftrightarrow \beta$.

Если кривые Γ и $\widetilde{\Gamma}$ при этом задавались такими тройками $(x(t), y(t), z(t))$, $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ гладких функций, что $|\boldsymbol{v}(t)|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) \neq 0$ на $[a, b]$ и $|\tilde{\boldsymbol{v}}(\tau)|^2 = \dot{\tilde{x}}^2(\tau) + \dot{\tilde{y}}^2(\tau) + \dot{\tilde{z}}^2(\tau) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$, то можно проверить, что в этом случае функции перехода $t = t(\tau)$ и $\tau = \tau(t)$ будут гладкими функциями, имеющими положительную производную на отрезке своего определения.

Мы не станем сейчас заниматься проверкой этого утверждения, оно будет в свое время получено как одно из следствий важной теоремы о неявной функции. В данный же момент высказанное утверждение служит скорее мотивировкой следующего определения.

Определение 9. Говорят, что путь $\widetilde{\Gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ получен из пути $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *допустимым изменением параметризации*, если существует такое гладкое отображение $T\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$, что $T(\alpha) = a$, $T(\beta) = b$, $T'(\tau) > 0$ на $[\alpha, \beta]$ и $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \circ T$.

Проверим теперь следующее общее

Утверждение 2. *Если гладкий путь $\widetilde{\Gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ получен из гладкого пути $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ допустимым изменением параметризации, то длины этих путей совпадают.*

◄ Пусть $\widetilde{\Gamma}\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ и $\Gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ задаются соответственно тройками $\tau \mapsto (\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{z}(\tau))$ и $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ гладких функций, а $t = t(\tau)$ —

допустимое изменение параметризации, при котором

$$\tilde{x}(\tau) = x(t(\tau)), \quad \tilde{y}(\tau) = y(t(\tau)), \quad \tilde{z}(\tau) = z(t(\tau)).$$

Используя определение (3) длины пути, правило дифференцирования композиции функций и правило замены переменной в интеграле, имеем

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2(t(\tau)) + \dot{y}^2(t(\tau)) + \dot{z}^2(t(\tau))}\, t'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{[\dot{x}(t(\tau))t'(\tau)]^2 + [\dot{y}(t(\tau))t'(\tau)]^2 + [\dot{z}(t(\tau))t'(\tau)]^2}\, d\tau =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\tilde{x}}^2(\tau) + \dot{\tilde{y}}^2(\tau) + \dot{\tilde{z}}^2(\tau)}\, d\tau. \quad \blacktriangleright$$

Итак, в частности, показано, что длина кривой не зависит от ее гладкой параметризации.

Длину кусочно гладкого пути определяют как сумму длин гладких путей, на которые он подразделяется; поэтому легко проверить, что и длина кусочно гладкого пути не меняется при допустимом изменении его параметризации.

Заканчивая обсуждение понятия длины пути и длины кривой (о которой мы после утверждения 2 теперь вправе говорить), рассмотрим еще один

Пример 4. Найдем длину эллипса, задаваемого каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geqslant b > 0). \tag{8}$$

Взяв параметризацию $x = a\sin\psi$, $y = b\cos\psi$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, получаем

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\cos\psi)^2 + (-b\sin\psi)^2}\, d\psi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\psi}\, d\psi =$$

$$= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\psi}\, d\psi = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\, d\psi,$$

где $k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ — квадрат эксцентриситета эллипса.

Интеграл

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\, d\psi$$

не выражается в элементарных функциях и ввиду указанной связи с эллипсом называется эллиптическим. Точнее, $E(k, \varphi)$ — *эллиптический интеграл второго рода* в форме Лежандра. Значение, которое он принимает при

$\varphi = \pi/2$, зависит только от k, обозначается через $E(k)$ и называется *полным эллиптическим интегралом второго рода*. Итак, $E(k) = E(k, \pi/2)$, поэтому длина эллипса в этих обозначениях имеет вид $l = 4aE(k)$.

3. Площадь криволинейной трапеции. Рассмотрим фигуру $aABb$ (рис. 48), называемую *криволинейной трапецией*. Фигура ограничена вертикальными отрезками aA, bB, отрезком $[a, b]$ оси абсцисс и кривой AB, являющейся графиком некоторой интегрируемой на $[a, b]$ функции $y = f(x)$.

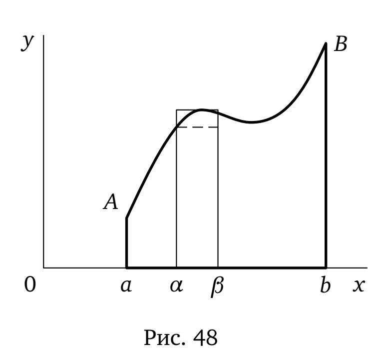


Рис. 48

Пусть $[\alpha, \beta]$ — отрезок, содержащийся в $[a, b]$. Обозначим через $S(\alpha, \beta)$ площадь соответствующей ему криволинейной трапеции $\alpha f(\alpha) f(\beta) \beta$.

Наши представления о площади таковы: если $a \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant b$, то

$$S(\alpha, \gamma) = S(\alpha, \beta) + S(\beta, \gamma)$$

(аддитивность площади) и

$$\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \leqslant S(\alpha, \beta) \leqslant \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha)$$

(площадь объемлющей фигуры не меньше площади объемлемой).

Значит, в силу утверждения 1, площадь указанной фигуры надо вычислять по формуле

$$S(a, b) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{9}$$

П р и м е р 5. Используем формулу (9) для подсчета площади эллипса, заданного каноническим уравнением (8).

В силу симметрии фигуры и предполагаемой аддитивности площади, достаточно найти площадь только той части эллипса, которая расположена в первом квадранте, и затем учетверить полученный результат. Проведем вычисления:

$$S = 4 \int_0^a \sqrt{b^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)}\, dx = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\, a \cos t\, dt =$$
$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\, dt = \pi ab.$$

По дороге мы сделали замену $x = a \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Итак, $S = \pi ab$. В частности, при $a = b = R$ получаем формулу πR^2 площади круга радиуса R.

Замечание. Необходимо отметить, что формула (9) дает площадь криволинейной трапеции при условии, что $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$. Если же f — произвольная интегрируемая функция, то интеграл (9), очевидно, даст алгебраическую сумму площадей соответствующих криволинейных трапеций, лежащих над и под осью абсцисс. Причем площади трапеций, лежащих над осью абсцисс, будут суммироваться со знаком плюс, а площади трапеций, лежащих под осью, — со знаком минус.

4. Объем тела вращения. Пусть теперь изображенная на рис. 48 криволинейная трапеция вращается вокруг отрезка $[a, b]$. Определим объем получающегося при этом тела.

Обозначим через $V(\alpha, \beta)$ объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $\alpha f(\alpha) f(\beta)\beta$ (см. рис. 48), отвечающей отрезку $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

По нашим представлениям об объеме, должны быть справедливы следующие соотношения: если $a \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant b$, то

$$V(\alpha, \gamma) = V(\alpha, \beta) + V(\beta, \gamma)$$

и

$$\pi\Big(\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\Big)^2(\beta-\alpha) \leqslant V(\alpha, \beta) \leqslant \pi\Big(\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\Big)^2(\beta-\alpha).$$

В последнем соотношении мы оценили объем $V(\alpha, \beta)$ через объемы вписанного и описанного цилиндров и воспользовались формулой объема цилиндра (которую нетрудно получить, если уже найдена площадь круга).

Тогда в силу утверждения 1

$$V(a, b) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx. \tag{10}$$

Пример 6. Вращением вокруг оси абсцисс полукруга, ограниченного отрезком $[-R, R]$ этой оси и дугой окружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leqslant x \leqslant R$, можно получить трехмерный шар радиуса R, объем которого легко вычислить по формуле (10):

$$V = \pi \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Подробнее об измерении длин, площадей и объемов будет сказано в части II курса. Тогда же мы решим и вопрос об инвариантности данных определений.

5. Работа и энергия. Энергетические затраты, связанные с перемещением тела под действием постоянной силы в направлении действия силы, измеряют произведением $F \cdot S$ величины силы на величину перемещения. Эта величина называется работой силы на данном перемещении. В общем

случае направление данной силы и перемещение могут быть неколлинеарны (например, везем за веревочку санки), и тогда работа определяется как скалярное произведение $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{S} \rangle$ вектора силы и вектора перемещения.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления работы и использования связанного с ней понятия энергии.

Пример 7. Работа, которую нужно совершить против силы тяжести, чтобы поднять вертикально вверх тело массы m с уровня h_1 над поверхностью Земли на уровень h_2, в силу данного определения равна $mg(h_2 - h_1)$. Предполагается, что вся операция происходит у поверхности Земли, когда изменением силы тяжести mg можно пренебречь. Общий случай разобран в примере 10.

Пример 8. Пусть имеется идеально упругая пружина, один конец которой закреплен в точке 0 числовой оси, а другой находится в точке x. Известно, что сила, с которой при этом приходится удерживать этот конец пружины, равна kx, где k — коэффициент жесткости пружины.

Вычислим работу, которую надо совершить, чтобы переместить подвижный конец пружины из положения $x = a$ в положение $x = b$.

Считая работу $A(\alpha, \beta)$ аддитивной функцией промежутка $[\alpha, \beta]$ и принимая, что верны оценки

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]} (kx)(\beta - \alpha) \leqslant A(\alpha, \beta) \leqslant \sup_{x\in[\alpha,\beta]} (kx)(\beta - \alpha),$$

получаем в силу утверждения 1, что

$$A(a, b) = \int_a^b kx\, dx = \frac{kx^2}{2}\Big|_a^b.$$

Это работа против силы. Работа же самой силы пружины на том же перемещении отличается только знаком.

Функция $U(x) = \frac{kx^2}{2}$, которую мы нашли, позволяет вычислять работу, которую мы совершаем, меняя состояние пружины, а значит, и ту работу, которую пружина может совершить при возвращении в исходное состояние. Такая функция $U(x)$, зависящая только от конфигурации системы, называется *потенциальной энергией системы*. Из построения видно, что производная от нее дает силу пружины с обратным знаком.

Если точка массы m движется вдоль оси под действием указанной упругой силы, то ее координата $x(t)$ как функция времени удовлетворяет уравнению

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{11}$$

Мы уже однажды проверяли (см. гл. V, § 6, п. 6), что величина

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = K(t) + U(x(t)) = E, \tag{12}$$

представляющая из себя сумму кинетической и (как мы теперь понимаем) потенциальной энергий системы, остается во время движения постоянной.

Пример 9. Теперь рассмотрим еще один пример. В нем встретится сразу целый ряд понятий, которые мы ввели и освоили в дифференциальном и интегральном исчислении.

Заметим сначала, что по аналогии с функцией (12), записанной для конкретной механической системы, удовлетворяющей уравнению (11), для произвольного уравнения вида

$$\ddot{s}(t) = f(s(t)), \tag{13}$$

где $f(s)$ — заданная функция, можно проверить, что сумма

$$\frac{\dot{s}^2}{2} + U(s) = E \tag{14}$$

не меняется со временем, если $U'(s) = -f(s)$.

Действительно,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{s}^2}{dt} + \frac{dU(s)}{dt} = \dot{s}\ddot{s} + \frac{dU}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \dot{s}(\ddot{s} - f(s)) = 0.$$

Таким образом, из (14), считая E постоянной величиной, последовательно находим

$$\dot{s} = \pm\sqrt{2(E - U(s))}$$

(где знак корня должен соответствовать знаку производной $\frac{ds}{dt}$), затем

$$\frac{dt}{ds} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(E-U(s))}}$$

и, наконец,

$$t = c_1 \pm \int \frac{ds}{\sqrt{2(E-U(s))}}.$$

Следовательно, используя закон сохранения «энергии» (14) уравнения (13), нам удалось в принципе решить это уравнение, но найдя не функцию $s(t)$, а обратную к ней функцию $t(s)$.

Уравнение (13) возникает, например, при описании движения точки вдоль заданной кривой. Пусть частица перемещается под действием силы тяжести по узкому идеально гладкому желобу (рис. 49).

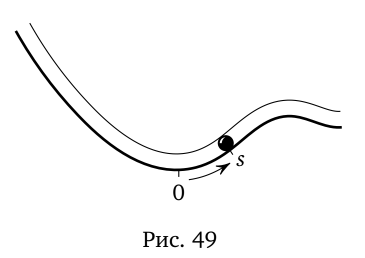


Рис. 49

Пусть $s(t)$ — расстояние вдоль желоба (т. е. длина пути) от некоторой фиксированной точки O — начала отсчета — до точки, в которой находится частица в момент t. Ясно, что тогда $\dot{s}(t)$ есть величина скорости частицы, а $\ddot{s}(t)$ — величина тангенциальной составляющей ее ускорения, которая должна равняться величине тангенциальной составляющей силы тяжести в данной точке желоба. Ясно также, что тангенциальная составляющая силы тяжести зависит только от точки желоба, т. е. зависит только от s, ибо s можно считать параметром, параметризующим

кривую[1], с которой мы отождествляем желоб. Если эту составляющую силы тяжести обозначить через $f(s)$, то мы получим, что

$$m\ddot{s} = f(s).$$

Для данного уравнения сохраняться будет величина

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + U(s) = E,$$

где $U'(s) = -f(s)$.

Поскольку слагаемое $\frac{1}{2}m\dot{s}^2$ есть кинетическая энергия точки, а движение вдоль желоба происходит без трения, то можно, минуя вычисления, догадаться, что функция $U(s)$ с точностью до постоянного слагаемого должна иметь вид $mgh(s)$, где $mgh(s)$ — потенциальная энергия точки, находящейся на высоте $h(s)$ в поле тяжести.

Если в начальный момент $t = 0$ было $\dot{s}(0) = 0$, $s(0) = s_0$ и $h(s_0) = h_0$, то из соотношения

$$\frac{2E}{m} = \dot{s}^2 + 2gh(s) = C$$

находим, что $C = 2gh(s_0)$, поэтому $\dot{s}^2 = 2g(h_0 - h(s))$,

$$t = \int\limits_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{2g(h_0 - h(s))}}. \tag{15}$$

В частности, если, как в случае маятника, точка движется вдоль окружности радиуса R, отсчет длины s ведется от нижней точки O окружности, а начальные условия состоят в том, что при $t = 0$ $\dot{s}(0) = 0$ и дан начальный угол $-\varphi_0$ отклонения (рис. 50), то, как легко проверить, выражая s и $h(s)$ через угол отклонения φ, получим

$$t = \int\limits_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{2g(h_0 - h(s))}} = \int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi} \frac{R\,d\psi}{\sqrt{2gR(\cos\psi - \cos\varphi_0)}},$$

или

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}}. \tag{16}$$

Рис. 50

Таким образом, для полупериода $\frac{1}{2}T$ качания маятника получаем

$$\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}}, \tag{17}$$

[1]Параметризация кривой посредством ее же длины называется *натуральной*, а s в этом случае называют *натуральным параметром*.

откуда после подстановки $\dfrac{\sin(\psi/2)}{\sin(\varphi_0/2)} = \sin\theta$ находим

$$T = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \tag{18}$$

где $k^2 = \sin^2\dfrac{\varphi_0}{2}$.

Напомним, что функция

$$F(k, \varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

называется *эллиптическим интегралом первого рода* в форме Лежандра. При $\varphi = \pi/2$ она зависит только от k^2, обозначается $K(k)$ и называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*. Таким образом, период колебаний маятника равен

$$T = 4\sqrt{\frac{R}{g}}K(k). \tag{19}$$

Если угол φ_0 начального отклонения мал, то можно положить $k = 0$ и тогда получим приближенную формулу

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{20}$$

Теперь, когда формула (18) получена, все же следует проанализировать весь ход рассуждений, и тогда мы заметим, что под знаками интегралов (15)—(17) стоят неограниченные на отрезке интегрирования функции. Подобная трудность нам уже встречалась при рассмотрении длины кривой, и мы примерно представляем себе, как и какой смысл можно придать интегралам (15)—(17).

Но раз этот вопрос возник вторично, то его следует разобрать в точной математической постановке, что и будет сделано в следующем параграфе.

Пример 10. Тело массы m совершает подъем над поверхностью Земли по траектории $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, где t — время, $a \leqslant t \leqslant b$, а x, y, z — декартовы координаты точки в пространстве. Необходимо вычислить работу тела против силы тяжести на промежутке времени $[a, b]$.

Работа $A(\alpha, \beta)$ есть аддитивная функция промежутка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Постоянная сила $\boldsymbol{F}$ при действии на тело, движущееся с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$, за время h совершает работу $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}h\rangle = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}\rangle h$, поэтому представляется естественной оценка

$$\inf_{t\in[\alpha,\beta]} \langle \boldsymbol{F}(p(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle(\beta-\alpha) \leqslant A(\alpha, \beta) \leqslant \sup_{t\in[\alpha,\beta]} \langle \boldsymbol{F}(p(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle(\beta-\alpha),$$

где $\boldsymbol{v}(t)$ — скорость тела в момент t, $p(t)$ — точка пространства, в которой находится тело в момент t, а $\boldsymbol{F}(p(t))$ — сила, которая в точке $p = p(t)$ действует на тело.

Если функция $\langle \boldsymbol{F}(p(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle$ окажется интегрируемой, то в силу утверждения 1 мы должны считать, что

$$A(a, b) = \int_a^b \langle \boldsymbol{F}(p(t)), \boldsymbol{v}(t)\rangle\, dt.$$

В нашем случае $\boldsymbol{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$, и если $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то по закону всемирного тяготения находим

$$\boldsymbol{F}(p) = \boldsymbol{F}(x, y, z) = G\frac{mM}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r} = \frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x, y, z),$$

где M — масса Земли, а ее центр предполагается совпадающим с началом системы координат.

Тогда

$$\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}\rangle(t) = GmM\frac{x(t)\dot{x}(t)+y(t)\dot{y}(t)+z(t)\dot{z}(t)}{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))^{3/2}},$$

поэтому

$$\int_a^b \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}\rangle(t)\, dt = \frac{1}{2}GmM\int_a^b \frac{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))'}{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))^{3/2}}\, dt =$$
$$= -\frac{GmM}{(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t))^{1/2}}\bigg|_a^b = -\frac{GmM}{|\boldsymbol{r}(t)|}\bigg|_a^b.$$

Итак,

$$A(a, b) = \frac{GmM}{|\boldsymbol{r}(b)|} - \frac{GmM}{|\boldsymbol{r}(a)|}.$$

Мы обнаружили, что искомая работа зависит только от величин $|\boldsymbol{r}(a)|$, $|\boldsymbol{r}(b)|$ удаления тела m от центра Земли в начальный и конечный моменты времени рассматриваемого промежутка $[a, b]$.

Полагая

$$U(r) = \frac{GM}{r},$$

получаем, что работа против силы тяжести по перемещению тела массы m из любой точки сферы радиуса r_0 в любую точку сферы радиуса r_1 вычисляется по формуле

$$A_{r_0 r_1} = m(U(r_0) - U(r_1)).$$

Функция $U(r)$ называется *потенциалом Ньютона*. Если через R обозначить радиус Земли, то, поскольку $\frac{GM}{R^2} = g$, функцию $U(r)$ можно переписать в виде

$$U(r) = \frac{gR^2}{r}.$$

Учитывая это, можно получить следующее выражение для работы, необходимой для выхода из поля тяготения Земли, точнее, для увода массы m с поверхности Земли на бесконечное расстояние от центра Земли. Под этой величиной естественно понимать предел $\lim\limits_{r\to+\infty} A_{Rr}$.

Итак, *работа выхода*:

$$A = A_{R\infty} = \lim_{r\to+\infty} A_{Rr} = \lim_{r\to+\infty} m\left(\frac{gR^2}{R} - \frac{gR^2}{r}\right) = mgR.$$

Задачи и упражнения

1. На рисунке 51 изображен график зависимости $F = F(x)$ силы, действующей вдоль оси абсцисс на пробную частицу, находящуюся в точке x этой оси.

Рис. 51

a) Нарисуйте в той же системе координат эскиз потенциала этой силы.

b) Изобразите потенциал силы $-F(x)$.

c) Исследуйте, в каком из разобранных случаев положение x_0 является устойчивым положением равновесия и с каким свойством потенциала это связано.

2. На основе результата примера 10 вычислите скорость, которую должно иметь тело, чтобы оно вышло из поля тяготения Земли (вторая космическая скорость для Земли).

3. На основе примера 9

a) выведите уравнение $R\ddot{\varphi} = -g\sin\varphi$ колебаний математического маятника;

b) считая колебания малыми, получите его приближенное решение;

c) определите по приближенному решению период колебаний маятника и сравните результат с формулой (20).

4. По горизонтальной плоскости равномерно со скоростью v катится без проскальзывания колесо радиуса r. Пусть в момент $t = 0$ верхняя точка A колеса имеет координаты $(0, 2r)$ в системе декартовых координат, ось абсцисс которой лежит в указанной плоскости и направлена по вектору скорости.

a) Запишите закон движения $t \mapsto (x(t), y(t))$ точки A.

b) Найдите скорость точки A как функцию времени.

c) Изобразите графически траекторию точки A (эта кривая называется *циклоидой*).

d) Найдите длину одной арки циклоиды (длину одного периода этой периодической кривой).

e) Циклоида обладает рядом интересных свойств, одно из которых, открытое Гюйгенсом[1], состоит в том, что период колебаний циклоидального маятника (шарика, катающегося в циклоидальной ямке) не зависит от высоты его подъема над нижней точкой ямки. Попробуйте доказать это, опираясь на пример 9. (См. также задачу 6 следующего параграфа, посвященного несобственным интегралам.)

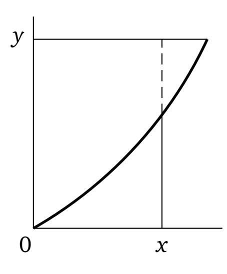


Рис. 52

5. a) Исходя из рис. 52, объясните, почему если $y = f(x)$ и $x = g(y)$ — взаимно обратные непрерывные неотрицательные функции, равные нулю при $x = 0$ и $y = 0$ соответственно, то должно быть выполнено неравенство

$$xy \leqslant \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y g(t)\,dt.$$

[1] Х. Гюйгенс (1629—1695) — нидерландский механик, физик, математик и астроном.

b) Получите из a) неравенства Юнга

$$xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

при $x, y \geqslant 0$, $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

c) Какой геометрический смысл имеет знак равенства в неравенствах задач a) и b)?

6. *Задача Бюффона*[1]. Число π можно вычислять следующим весьма неожиданным способом.

Берем большой лист бумаги, разлинованный параллельными прямыми с шагом h, и бросаем на него, никак специально не целясь, иголку длины $l < h$. Пусть мы бросили иголку N раз и пусть n раз из них иголка после падения пересекала какую-нибудь из прямых линий на листе. Если число N достаточно велико, то $\pi \approx \frac{2l}{ph}$, где $p = \frac{n}{N}$ можно трактовать как приближенное значение вероятности того, что при бросании иголка пересечет одну из линий.

Исходя из геометрических соображений, связанных с вычислением площадей, попробуйте дать удовлетворительное объяснение этому методу вычисления π.

§ 5. Несобственный интеграл

В предыдущем параграфе мы уже столкнулись с необходимостью несколько расширить понятие интеграла Римана. Там же на разборе конкретной задачи мы составили себе представление о том, в каком направлении и как это следует сделать. Настоящий параграф посвящен реализации этих представлений.

1. Определения, примеры и основные свойства несобственных интегралов

Определение 1. Пусть функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty[$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, содержащемся в этом промежутке.

Величина

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

если указанный предел существует, называется несобственным интегралом Римана или просто *несобственным интегралом от функции f по промежутку $[a, +\infty[$*.

Сам символ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ также называют несобственным интегралом и тогда говорят, что несобственный интеграл *сходится*, если указанный предел

[1] Ж. Л. Л. Бюффон (1707—1788) — французский естествоиспытатель.

существует, и *расходится* в противном случае. Таким образом, вопрос о сходимости несобственного интеграла равносилен вопросу о том, определен ли вообще этот несобственный интеграл или нет.

Пример 1. Исследуем, при каких значениях параметра α сходится или, что то же самое, определен несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}. \tag{1}$$

Поскольку

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left.\dfrac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right|_1^b & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \left.\ln x\right|_1^b & \text{при } \alpha = 1, \end{cases}$$

то предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

существует только при $\alpha > 1$.

Итак,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}, \quad \text{если } \alpha > 1,$$

а при других значениях параметра α интеграл (1) расходится, т. е. не определен.

Определение 2. Пусть функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a, B[$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset [a, B[$. Величина

$$\int_a^B f(x)\,dx := \lim_{b\to B-0} \int_a^b f(x)\,dx,$$

если указанный предел существует, называется *несобственным интегралом от функции f по промежутку* $[a, B[$.

Суть этого определения состоит в том, что в любой окрестности конечной точки B функция f может оказаться неограниченной.

Аналогично, если функция $x \mapsto f(x)$ определена на промежутке $]A, b]$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset]A, b]$, то по определению полагают

$$\int_A^b f(x)\,dx := \lim_{a\to A+0} \int_a^b f(x)\,dx$$

и также по определению полагают

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Пример 2. Исследуем, при каких значениях параметра α сходится интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}. \tag{2}$$

Поскольку при $a \in]0, 1]$

$$\int\limits_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_a^1, & \text{если } \alpha \neq 1, \\ \ln x\Big|_a^1, & \text{если } \alpha = 1, \end{cases}$$

то предел

$$\lim_{a \to +0} \int\limits_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

существует только при $\alpha < 1$.

Итак, интеграл (2) определен только при $\alpha < 1$.

Пример 3.

$$\int\limits_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^0 e^x dx = \lim_{a \to -\infty} \left(e^x\Big|_a^0\right) = \lim_{a \to -\infty} (1 - e^a) = 1.$$

Поскольку вопрос о сходимости несобственного интеграла решается одинаково как для несобственного интеграла по неограниченному промежутку, так и для несобственного интеграла от функции, неограниченной около одного из концов промежутка интегрирования, то в дальнейшем мы будем рассматривать оба эти случая вместе, введя следующее основное

Определение 3. Пусть $[a, \omega[$ — конечный или бесконечный промежуток, а $x \mapsto f(x)$ — функция, определенная на нем и интегрируемая на каждом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$. Тогда по определению

$$\int\limits_a^\omega f(x)\, dx := \lim_{b \to \omega} \int\limits_a^b f(x)\, dx, \tag{3}$$

если указанный предел при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$, существует.

В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматривая несобственный интеграл (3), мы будем предполагать, что подынтегральная функция удовлетворяет условиям определения 3.

Кроме того, для определенности мы будем пока считать, что несобственность интеграла связана только с верхним пределом интегрирования. Рассмотрение случая, когда особенность интеграла связана с нижним пределом, проводится дословно так же.

Из определения 3, свойств интеграла и свойств предела можно сделать следующее заключение о свойствах несобственного интеграла.

Утверждение 1. *Пусть* $x \mapsto f(x)$ *и* $x \mapsto g(x)$ — *функции, определенные на промежутке* $[a, \omega[$ *и интегрируемые на любом отрезке* $[a, b] \subset [a, \omega[$. *Пусть для них определены несобственные интегралы*

$$\int_a^\omega f(x)\, dx, \tag{4}$$

$$\int_a^\omega g(x)\, dx. \tag{5}$$

Тогда

a) *если* $\omega \in \mathbb{R}$ *и* $f \in \mathcal{R}[a, \omega]$, *то значения интеграла* (4), *понимаемого как в несобственном, так и в собственном смысле, совпадают*;

b) *при любых* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *функция* $(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)$ *интегрируема в несобственном смысле на* $[a, \omega[$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^\omega (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)\, dx = \lambda_1 \int_a^\omega f(x)\, dx + \lambda_2 \int_a^\omega g(x)\, d;$$

c) *если* $c \in [a, \omega[$, *то*

$$\int_a^\omega f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^\omega f(x)\, dx;$$

d) *если* $\varphi\colon [\alpha, \gamma[\to [a, \omega[$ — *гладкое, строго монотонное отображение, причем* $\varphi(\alpha) = a$ *и* $\varphi(\beta) \to \omega$ *при* $\beta \to \gamma$, $\beta \in [\alpha, \gamma[$, *то несобственный интеграл от функции* $t \mapsto (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)$ *на* $[\alpha, \gamma[$ *существует и справедливо равенство*

$$\int_a^\omega f(x)\, dx = \int_\alpha^\gamma (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\, dt.$$

◄ a) Следует из непрерывности функции

$$\mathcal{F}(b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

на отрезке $[a, \omega]$, на котором $f \in \mathcal{R}[a, \omega]$.

b) Следует из того, что при $b \in [a, \omega[$

$$\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)\, dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)\, dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)\, dx.$$

c) Следует из равенства

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,$$

справедливого при любых $b, c \in [a, \omega[$.

d) Следует из формулы

$$\int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,dt$$

замены переменной в определенном интеграле. ►

Замечание 1. К свойствам несобственного интеграла, выраженным в утверждении 1, следует еще добавить весьма полезное правило интегрирования по частям в несобственном интеграле, которое мы приведем в следующей формулировке:

Если $f, g \in C^{(1)}[a, \omega[$ *и существует предел* $\lim\limits_{\substack{x\to\omega\\ x\in[a,\omega[}} (f\cdot g)(x)$, *то функции* $f\cdot g'$ *и* $f'\cdot g$ *одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на* $[a, \omega[$ *и в случае интегрируемости справедливо равенство*

$$\int_a^{\omega} (f\cdot g')(x)\,dx = (f\cdot g)(x)\Big|_a^{\omega} - \int_a^{\omega} (f'\cdot g)(x)\,dx,$$

где

$$(f\cdot g)(x)\Big|_a^{\omega} = \lim_{\substack{x\to\omega\\ x\in[a,\omega[}} (f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(a).$$

◄ Это следует из формулы

$$\int_a^{b} (f\cdot g')(x)\,dx = (f\cdot g)(x)\Big|_a^{b} - \int_a^{b} (f'\cdot g)(x)\,dx$$

интегрирования по частям в собственном интеграле. ►

Замечание 2. Из пункта c) утверждения 1 видно, что несобственные интегралы

$$\int_a^{\omega} f(x)\,dx, \qquad \int_c^{\omega} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно. Таким образом, в несобственных интегралах, как и в рядах, сходимость не зависит от начального куска ряда или интеграла.

По этой причине иногда, ставя вопрос о сходимости несобственного интеграла, вообще опускают тот предел интегрирования, около которого интеграл не имеет особенности.

При таком соглашении полученные в примерах 1, 2 результаты можно записать так:

интеграл $\int^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится только при $\alpha > 1$;

интеграл $\int_{+0} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится только при $\alpha < 1$.

Знак $+0$ в последнем интеграле показывает, что рассматривается область $x>0$.

Заменой переменной из последнего интеграла сразу получаем, что интеграл $\int\limits_{x_0+0} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha}$ сходится только при $\alpha<1$.

2. Исследование сходимости несобственного интеграла

a. Критерий Коши. В силу определения 3, сходимость несобственного интеграла (3) равносильна существованию предела функции

$$\mathcal{F}(b)=\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \text{при } b\to\omega,\ b\in[a,\omega[. \tag{6}$$

Поэтому справедливо следующее

Утверждение 2 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла). *Если функция $x\mapsto f(x)$ определена на промежутке $[a,\omega[$ и интегрируема на любом отрезке $[a,b]\subset[a,\omega[$, то интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ можно указать $B\in[a,\omega[$ так, что при любых $b_1, b_2\in[a,\omega[$ таких, что $B<b_1$, $B<b_2$, имеет место соотношение*

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

◄ Действительно, ведь

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx=\int\limits_a^{b_2} f(x)\,dx-\int\limits_a^{b_1} f(x)\,dx=\mathcal{F}(b_2)-\mathcal{F}(b_1),$$

поэтому выписанное условие есть просто критерий Коши существования предела функции $\mathcal{F}(b)$ при $b\to\omega$, $b\in[a,\omega[$. ►

b. Абсолютная сходимость несобственного интеграла

Определение 4. Про несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ говорят, что он *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int\limits_a^\omega |f|(x)\,dx$.

В силу неравенства

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} |f|(x)\,dx\right|$$

и утверждения 2 можем заключить, что если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Исследование абсолютной сходимости сводится к исследованию сходимости интеграла от неотрицательной функции. Но в этом случае имеем

Утверждение 3. *Если функция f удовлетворяет условиям определения* 3 *и* $f(x) \geqslant 0$ *на* $[a, \omega[$, *то несобственный интеграл* (3) *существует в том и только в том случае, когда функция* (6) *ограничена на* $[a, \omega[$.

◄ Действительно, если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, \omega[$, то функция (6) неубывающая на $[a, \omega[$ и потому она имеет предел при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$, если и только если она ограничена. ►

В качестве примера использования этого утверждения рассмотрим такое его

Следствие (интегральный признак сходимости ряда). *Если $x \mapsto f(x)$ — определенная на промежутке* $[1, +\infty[$ *неотрицательная, невозрастающая, интегрируемая на каждом отрезке* $[1, b] \subset [1, +\infty[$ *функция, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots$$

и интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

◄ Из приведенных условий вытекает, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$f(n+1) \leqslant \int_{n}^{n+1} f(x)\, dx \leqslant f(n).$$

После суммирования этих неравенств получаем

$$\sum_{n=1}^{k} f(n+1) \leqslant \int_{1}^{k+1} f(x)\, dx \leqslant \sum_{n=1}^{k} f(n)$$

или

$$s_{k+1} - f(1) \leqslant \mathscr{F}(k+1) \leqslant s_k,$$

где $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} f(n)$, а $\mathscr{F}(b) = \int\limits_{1}^{b} f(x)\, dx$. Поскольку s_k и $\mathscr{F}(b)$ — неубывающие функции своих аргументов, то полученные неравенства и доказывают высказанное утверждение. ►

В частности, теперь можно сказать, что результат примера 1 эквивалентен тому, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

сходится только при $\alpha > 1$.

Наиболее часто используемым следствием утверждения 3 является следующая

Теорема (теорема сравнения). *Пусть функции* $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto g(x)$ *определены на промежутке* $[a, \omega[$ *и интегрируемы на любом отрезке* $[a, b] \subset [a, \omega[$.

Если на $[a, \omega[$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

то из сходимости интеграла (5) *следует сходимость интеграла* (4) *и справедливо неравенство*

$$\int_a^\omega f(x)\,dx \leqslant \int_a^\omega g(x)\,dx,$$

а из расходимости интеграла (4) *следует расходимость интеграла* (5).

◄ Из условий теоремы и неравенств для собственного интеграла Римана при любом $b \in [a, \omega[$ имеем

$$\mathscr{F}(b) = \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx = \mathscr{G}(b).$$

Поскольку обе функции $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ неубывающие на $[a, \omega[$, то теорема следует из написанного неравенства и утверждения 3. ►

Замечание 3. Если про функции f, g, участвующие в теореме, вместо неравенств $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ известно, что они неотрицательны на $[a, \omega[$ и одного порядка при $x \to \omega$, $x \in [a, \omega[$, т. е. что найдутся такие положительные константы c_1, c_2, что

$$c_1 f(x) \leqslant g(x) \leqslant c_2 f(x),$$

то с учетом линейности несобственного интеграла из доказанной теоремы в этом случае можно заключить, что интегралы (4), (5) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 4. Интеграл

$$\int^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

сходится, так как

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}} \sim \frac{1}{x^{3/2}} \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Пример 5. Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

сходится абсолютно, ибо

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2} \quad \text{при } x \geqslant 1.$$

Следовательно,

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Пример 6. Интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

сходится, так как $e^{-x^2} < e^{-x}$ при $x > 1$ и

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \int_{1}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}.$$

Пример 7. Интеграл

$$\int^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$$

расходится, ибо

$$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$$

при достаточно больших значениях x.

Пример 8. Интеграл Эйлера

$$\int_{0}^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$$

сходится, так как

$$|\ln\sin x| \sim |\ln x| < \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{при } x \to +0.$$

Пример 9. Эллиптический интеграл

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

при $0 \leqslant k^2 < 1$ сходится, поскольку

$$\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \sim \sqrt{2(1-k^2)}\,(1-x)^{1/2} \quad \text{при } x \to 1-0.$$

Пример 10. Интеграл

$$\int_{0}^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}}$$

сходится, так как

$$\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi} = \sqrt{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}} \sim \sqrt{\sin\varphi}\,(\varphi-\theta)^{1/2} \quad \text{при } \theta \to \varphi - 0.$$

Пример 11. Интеграл

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \int_{0}^{\varphi_0} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}} \tag{7}$$

при $0<\varphi_0<\pi$ сходится, поскольку при $\psi\to\varphi_0-0$

$$\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\psi}{2}}\sim\sqrt{\sin\varphi_0}\,(\varphi_0-\psi)^{1/2}. \tag{8}$$

Соотношение (7) выражает зависимость периода колебаний математического маятника от его длины L и начального угла его отклонения, отсчитываемого от радиуса, идущего в нижнюю точку траектории качания. Формула (7) является элементарной вариацией формулы (17) предыдущего параграфа.

Маятник можно себе представлять, например, как невесомый стержень, один конец которого шарнирно закреплен, а другой, с присоединенной к нему точечной массой, свободен.

В таком случае можно говорить о любых начальных углах $\varphi_0\in[0,\pi]$. При $\varphi_0=0$ и $\varphi_0=\pi$ маятник качаться вообще не будет, находясь в первом случае в состоянии устойчивого, а во втором случае в состоянии неустойчивого равновесия.

Интересно отметить, что из (7) и (8) нетрудно получить, что $T\to\infty$ при $\varphi_0\to\pi-0$, т. е. период колебаний маятника неограниченно растет по мере приближения его начального положения φ_0 к верхнему положению (неустойчивого) равновесия.

c. Условная сходимость несобственного интеграла

Определение 5. Если несобственный интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он *сходится условно*.

Пример 12. Используя замечание 1, по формуле интегрирования по частям в несобственном интеграле находим, что

$$\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=-\frac{\cos x}{x}\bigg|_{\pi/2}^{+\infty}-\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx=-\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx,$$

коль скоро последний интеграл сходится. Но, как мы видели в примере 5, этот интеграл сходится, поэтому сходится также интеграл

$$\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{9}$$

Вместе с тем интеграл (9) не является абсолютно сходящимся. Действительно, при $b\in[\pi/2,+\infty[$ имеем

$$\int_{\pi/2}^{b}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\geqslant\int_{\pi/2}^{b}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{b}\frac{\cos 2x}{x}\,dx. \tag{10}$$

Интеграл

$$\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,dx,$$

как можно проверить интегрированием по частям, является сходящимся, поэтому при $b \to +\infty$ разность в правой части соотношения (10) стремится к $+\infty$ и в силу оценки (10) интеграл (9) не является абсолютно сходящимся.

Приведем теперь один специальный признак сходимости несобственных интегралов, опирающийся на вторую теорему о среднем и, значит, в сущности на ту же формулу интегрирования по частям.

Утверждение 4 (признак Абеля—Дирихле сходимости интеграла). *Пусть $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto g(x)$ — функции, определенные на промежутке $[a, \omega[$ и интегрируемые на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$. Пусть g — монотонная функция.*

Тогда для сходимости несобственного интеграла

$$\int\limits_a^\omega (f \cdot g)(x)\, dx \tag{11}$$

достаточно, чтобы выполнялась либо пара условий

α_1) интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\, dx$ сходится,

β_1) функция g ограничена на $[a, \omega[$,

либо пара условий

α_2) функция $\mathscr{F}(b) = \int\limits_a^b f(x)\, dx$ ограничена на $[a, \omega[$,

β_2) функция $g(x)$ стремится к нулю при $x \to \omega$, $x \in [a, \omega[$.

◄ Для любых $b_1, b_2 \in [a, \omega[$ по второй теореме о среднем имеем

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} (f \cdot g)(x)\, dx = g(b_1) \int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)\, dx + g(b_2) \int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)\, dx,$$

где ξ — точка, лежащая между b_1 и b_2. Отсюда в силу критерия Коши (утверждение 2) заключаем, что интеграл (11) действительно сходится, если выполнена любая из двух указанных выше пар условий. ►

3. Несобственные интегралы с несколькими особенностями. До сих пор мы говорили о несобственных интегралах с одной особенностью, связанной с неограниченностью функции у одного из пределов интегрирования или с неограниченностью самого этого предела. Здесь мы укажем, в каком смысле понимаются другие возможные варианты несобственного интеграла.

Если оба предела интегрирования являются особенностями того или другого из указанных выше типов, то полагают по определению

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\, dx := \int\limits_{\omega_1}^{c} f(x)\, dx + \int\limits_{c}^{\omega_2} f(x)\, dx, \tag{12}$$

где c — произвольная точка промежутка $]\omega_1, \omega_2[$.

При этом предполагается, что каждый из несобственных интегралов в правой части соотношения (12) сходится. В противном случае говорят, что интеграл, стоящий в левой части (12), расходится.

В силу замечания 2 и свойства аддитивности несобственного интеграла, определение (12) корректно в том смысле, что оно на самом деле не зависит от выбора точки $c \in]\omega_1, \omega_2[$.

Пример 13.

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{0} + \arcsin x\Big|_{0}^{1} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \pi.$$

Пример 14. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

называется *интегралом Эйлера—Пуассона*, а иногда еще и *интегралом Гаусса*. Он, очевидно, сходится в указанном выше смысле. Позже будет показано, что он равен $\sqrt{\pi}$.

Пример 15. Интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

расходится, поскольку при любом α разойдется по крайней мере один из двух интегралов

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Пример 16. Интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

сходится, если сходится каждый из интегралов

$$\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx.$$

Первый из этих интегралов сходится, если $\alpha < 2$, ибо

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}} \quad \text{при } x \to +0.$$

Второй интеграл сходится при $\alpha > 0$, что можно проверить непосредственно интегрированием по частям, аналогичным проделанному в примере 12, или сославшись на признак Абеля—Дирихле. Таким образом, исходный интеграл имеет смысл при $0 < \alpha < 2$.

В том случае, когда подынтегральная функция не ограничена в окрестности одной из внутренних точек ω отрезка интегрирования $[a,b]$, полагают

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^\omega f(x)\,dx + \int_\omega^b f(x)\,dx, \tag{13}$$

требуя, чтобы оба стоящих справа интеграла существовали.

Пример 17. В смысле соглашения (13)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4.$$

Пример 18. Интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не определен.

Существует и отличное от (13) соглашение о вычислении интеграла от функции, неограниченной в окрестности внутренней точки ω отрезка интегрирования. А именно, полагают

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta\to+0}\left(\int_a^{\omega-\delta} f(x)\,dx + \int_{\omega+\delta}^{b} f(x)\,dx\right), \tag{14}$$

если стоящий справа предел существует. Этот предел называют, следуя Коши, интегралом в смысле *главного значения* и, чтобы отличить определения (13) и (14), во втором случае перед знаком интеграла ставят начальные буквы v. p. французских слов valeur principal (главное значение). В англоязычном варианте используется обозначение p. v. (от principal value).

В соответствии с этим соглашением имеем

Пример 19. $\text{v. p.} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0.$

Принимается также следующее определение:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \tag{15}$$

Пример 20. $\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0.$

Наконец, если на промежутке интегрирования имеется несколько (конечное число) тех или иных особенностей, лежащих внутри промежутка или совпадающих с его концами, то неособыми точками промежуток разбивают на конечное число таких промежутков, в каждом из которых имеется только одна особенность, а интеграл вычисляют как сумму интегралов по отрезкам разбиения.

Можно проверить, что результат такого расчета не зависит от произвола в выборе разбиения.

Пример 21. Точное определение *интегрального логарифма* теперь можно записать в виде

$$\operatorname{li} x = \begin{cases} \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}, & \text{если } 0 < x < 1, \\ \text{v. p.} \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}, & \text{если } 1 < x. \end{cases}$$

В последнем случае символ v. p. относится к единственной внутренней для промежутка $]0, x]$ особенности, расположенной в точке 1. Заметим, что в смысле определения (13) этот интеграл не является сходящимся.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что функция

a) $\operatorname{Si} x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ (*интегральный синус*) определена на $\mathbb{R}$, нечетна и имеет предел при $x \to +\infty$;

b) $\operatorname{si} x = -\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ определена на $\mathbb{R}$ и отличается от функции $\operatorname{Si} x$ только на постоянную;

c) $\operatorname{Ci} x = -\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$ (*интегральный косинус*) при достаточно больших значениях x может вычисляться по приближенной формуле $\operatorname{Ci} x \approx \frac{\sin x}{x}$; оцените область тех значений, где абсолютная погрешность этого приближения меньше 10^{-4}.

2. Покажите, что

a) интегралы $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ сходятся только при $\alpha > 0$, причем сходятся абсолютно только при $\alpha > 1$;

b) *интегралы Френеля*

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\sqrt{x}} \cos t^2\,dt, \quad S(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\sqrt{x}} \sin t^2\,dt$$

являются бесконечно дифференцируемыми функциями в промежутке $]0, +\infty[$, причем обе они имеют предел при $x \to +\infty$.

3. Покажите, что

a) эллиптический интеграл первого рода

$$F(k, \varphi) = \int\limits_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

определен при $0 \leqslant k < 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и приводится к виду

$$F(k, \varphi) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}};$$

b) полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}$$

неограниченно возрастает при $k \to 1-0$.

4. Покажите, что

a) интегральная показательная функция (*интегральная экспонента*) $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$ определена и бесконечно дифференцируема при $x < 0$;

b) $-\mathrm{Ei}(-x) = \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \ldots + (-1)^n \frac{n!}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right)$ при $x \to +\infty$;

c) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{x^n}$ не сходится ни при каком значении $x \in \mathbb{R}$;

d) $\mathrm{li}\, x \sim \frac{x}{\ln x}$ при $x \to +0$. (Определение интегрального логарифма $\mathrm{li}\, x$ см. в примере 21.)

5. Покажите, что

a) функция $\mathrm{Fi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2}\, dt$, называемая *интегралом вероятности ошибок* и часто обозначаемая символом $\mathrm{erf}(x)$ (от англ. error function — функция ошибок), определена, нечетна, бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и имеет предел при $x \to +\infty$;

b) если упомянутый в a) предел равен единице (а это так), то

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right)\right) \quad \text{при } x \to +\infty.$$

6. Покажите, что:

a) Если тяжелая частица под действием силы тяжести скользит вдоль кривой, заданной в параметрическом виде $x = x(\theta)$, $y = y(\theta)$, причем в момент $t = 0$ частица имела нулевую скорость и находилась в точке $x_0 = x(\theta_0)$, $y_0 = y(\theta_0)$, то между параметром θ, определяющим точку на кривой, и моментом t прохождения частицей этой точки имеется связь (см. формулу (15) из § 4)

$$t = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}{2g(y_0 - y(\theta))}}\, d\theta,$$

в которой несобственный интеграл заведомо сходится, если $y'(\theta_0) \neq 0$ (знак выбирается в зависимости от того, имеют ли t и θ одинаковый или противоположный характер монотонности, причем если росту t отвечает рост θ, то, разумеется, следует брать знак плюс).

b) Период колебания частицы в ямке, имеющей профиль циклоиды

$$\begin{aligned} x &= R(\theta + \pi + \sin\theta), \\ y &= -R(1 + \cos\theta), \end{aligned} \qquad |\theta| \leqslant \pi,$$

не зависит от уровня $y_0 = -R(1 + \cos\theta_0)$, с которого она начинает скольжение, и равен $4\pi\sqrt{R/g}$ (см. задачу 4 из § 4).

Глава VII

Функции многих переменных, их предел и непрерывность

До сих пор мы рассматривали почти исключительно числовые функции $x \mapsto f(x)$, в которых число $f(x)$ определялось заданием одного числа x из области определения функции.

Однако многие величины, представляющие интерес, зависят не от одного, а от очень многих факторов, и если сама величина и каждый из определяющих ее факторов могут быть охарактеризованы некоторым числом, то указанная зависимость сводится к тому, что упорядоченному набору $(x^1, \ldots, x^n)$ чисел, каждое из которых описывает состояние соответствующего фактора, ставится в соответствие значение $y = f(x^1, \ldots, x^n)$ исследуемой величины, которое она приобретает при этом состоянии определяющих величину факторов.

Например, площадь прямоугольника есть произведение длин его сторон; объем данного количества газа вычисляется по формуле

$$V = R\frac{mT}{p},$$

где R — постоянная, m — масса, T — абсолютная температура и p — давление газа. Таким образом, значение V зависит от переменной упорядоченной тройки чисел (m, T, p) или, как говорят, V есть функция трех переменных m, T и p.

Мы ставим себе целью научиться исследовать функции многих переменных так же, как мы научились исследовать функции одного переменного.

Как и в случае функций одного переменного, изучение функций многих числовых переменных начинается с описания их области определения.

§ 1. Пространство $\mathbb{R}^m$ и важнейшие классы его подмножеств

1. Множество $\mathbb{R}^m$ и расстояние в нем. Условимся через $\mathbb{R}^m$ обозначать множество всех упорядоченных наборов $(x^1, \ldots, x^m)$, состоящих из m действительных чисел $x^i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Каждый такой набор будем обозначать одной буквой $x = (x^1, \ldots, x^m)$ и в соответствии с удобной геометрической терминологией называть *точкой* множества $\mathbb{R}^m$. Число x^i в наборе $(x^1, \ldots, x^m)$ называют i-й *координатой* точки $x = (x^1, \ldots, x^m)$.

Геометрические аналогии можно продолжить и ввести на множестве $\mathbb{R}^m$ расстояние между точками $x_1=(x_1^1, \ldots, x_1^m)$, $x_2=(x_2^1, \ldots, x_2^m)$ по формуле

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_1^i - x_2^i)^2}. \tag{1}$$

Функция

$$d\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$

определяемая формулой (1), очевидно, обладает следующими свойствами:

a) $d(x_1, x_2) \geqslant 0$;

b) $(d(x_1, x_2)=0) \Leftrightarrow (x_1=x_2)$;

c) $d(x_1, x_2)=d(x_2, x_1)$;

d) $d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2)+d(x_2, x_3)$.

Последнее неравенство (называемое опять-таки по геометрической аналогии *неравенством треугольника*) есть частный случай неравенства Минковского (см. гл. V, § 4, п. 2).

Функцию, определенную на парах (x_1, x_2) точек некоторого множества X и обладающую свойствами a), b), c), d), называют *метрикой* или *расстоянием* в X.

Множество X вместе с фиксированной в нем метрикой называют *метрическим пространством*.

Таким образом, мы превратили $\mathbb{R}^m$ в метрическое пространство, наделив множество $\mathbb{R}^m$ метрикой, заданной соотношением (1).

Сведения о произвольных метрических пространствах читатель сможет получить в главе IX (часть II). Здесь же мы не хотим отвлекаться от необходимого нам сейчас конкретного метрического пространства $\mathbb{R}^m$.

Поскольку в этой главе множество $\mathbb{R}^m$ с метрикой (1) будет для нас единственным метрическим пространством, составляющим объект изучения, то общее определение метрического пространства нам по существу пока не нужно. Оно приведено только для пояснения употребляемого по отношению к множеству $\mathbb{R}^m$ термина «пространство» и по отношению к функции (1) термина «метрика».

Из соотношения (1) следует, что при $i\in\{1, \ldots, m\}$

$$|x_1^i - x_2^i| \leqslant d(x_1, x_2) \leqslant \sqrt{m} \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_1^i - x_2^i|, \tag{2}$$

т. е. расстояние между точками $x_1, x_2\in\mathbb{R}^m$ мало в том и только в том случае, когда мало отличаются соответствующие координаты этих точек.

Из (2), как и из (1), видно, что при $m=1$ множество $\mathbb{R}^1$ совпадает с множеством действительных чисел, расстояние между точками которого измеряется стандартным образом посредством модуля разности чисел.

2. Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^m$

Определение 1. При $\delta > 0$ множество

$$B(a; \delta) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a, x) < \delta\}$$

называется *шаром с центром $a \in \mathbb{R}^m$ радиуса δ* или также *δ-окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}^m$.

Определение 2. Множество $G \subset \mathbb{R}^m$ называется *открытым в* $\mathbb{R}^m$, если для любой точки $x \in G$ найдется шар $B(x; \delta)$ такой, что $B(x; \delta) \subset G$.

Пример 1. $\mathbb{R}^m$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$.

Пример 2. Пустое множество $\varnothing$ вообще не содержит точек и потому может считаться удовлетворяющим определению 2, т. е. $\varnothing$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$.

Пример 3. Шар $B(a; r)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$.

Действительно, если $x \in B(a; r)$, т. е. $d(a, x) < r$, то при $0 < \delta < r - d(a, x)$ будет $B(x; \delta) \subset B(a; r)$, поскольку

$$(\xi \in B(x; \delta)) \Rightarrow (d(x, \xi) < \delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big(d(a, \xi) < d(a, x) + d(x, \xi) < d(a, x) + r - d(a, x) = r\big).$$

Пример 4. Множество $G = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a, x) > r\}$, т. е. совокупность точек, удаленных от фиксированной точки $a \in \mathbb{R}^m$ на расстояние, большее чем r, является открытым, что, как и в примере 3, легко проверить, используя неравенство треугольника для метрики.

Определение 3. Множество $F \subset \mathbb{R}^m$ называется *замкнутым в* $\mathbb{R}^m$, если его дополнение $G = \mathbb{R}^m \setminus F$ в $\mathbb{R}^m$ является множеством, открытым в $\mathbb{R}^m$.

Пример 5. Множество $\overline{B}(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a, x) \leqslant r\}$, $r \geqslant 0$, т. е. совокупность точек, удаленных от фиксированной точки $a \in \mathbb{R}^m$ не больше чем на r, является замкнутым, что следует из определения 3 и примера 4. Множество $\overline{B}(a; r)$ называют *замкнутым шаром с центром a радиуса r*.

Утверждение 1. a) *Объединение $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ множеств любой системы $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ множеств, открытых в $\mathbb{R}^m$, является множеством, открытым в $\mathbb{R}^m$.*

b) *Пересечение $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ конечного числа множеств, открытых в $\mathbb{R}^m$, является множеством, открытым в $\mathbb{R}^m$.*

a′) *Пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ множеств любой системы $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ множеств F_α, замкнутых в $\mathbb{R}^m$, является множеством, замкнутым в $\mathbb{R}^m$.*

b′) *Объединение $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ конечного числа множеств F_i, замкнутых в $\mathbb{R}^m$, является множеством, замкнутым в $\mathbb{R}^m$.*

◄ a) Если $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, то найдется такое $\alpha_0 \in A$, что $x \in G_{\alpha_0}$, и, следовательно, найдется такая δ-окрестность $B(x; \delta)$ точки x, что $B(x; \delta) \subset G_{\alpha_0}$. Значит, $B(x; \delta) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$.

b) Пусть $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Тогда $x \in G_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть $\delta_1, \ldots, \delta_n$ — такие положительные числа, что $B(x; \delta_i) \subset G_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, очевидно, получим, что $\delta > 0$ и $B(x; \delta) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i$.

a′) Покажем, что множество $C\Big(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\Big)$, дополнительное к $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ в $\mathbb{R}^m$, является открытым подмножеством $\mathbb{R}^m$.

Действительно,

$$C\Big(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in A} (CF_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha,$$

где $G_\alpha = CF_\alpha$ открыты в $\mathbb{R}^m$. Теперь a′) следует из a).

b′) Аналогично, из b) получаем

$$C\Big(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{n} (CF_i) = \bigcap_{i=1}^{n} G_i. \ \blacktriangleright$$

Пример 6. Множество $S(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a, x) = r\}$, $r \geqslant 0$, называется *сферой с центром* $a \in \mathbb{R}^m$ *радиуса* r. Дополнение к $S(a; r)$ в $\mathbb{R}^m$ в силу примеров 3 и 4 является объединением открытых множеств. Значит, в силу доказанного утверждения оно открыто, а сфера $S(a; r)$ есть замкнутое подмножество $\mathbb{R}^m$.

Определение 4. Открытое в $\mathbb{R}^m$ множество, содержащее данную точку, называется *окрестностью* этой точки в $\mathbb{R}^m$.

В частности, как следует из примера 3, δ-окрестность точки является ее окрестностью.

Определение 5. Точка $x \in \mathbb{R}^m$ по отношению к множеству $E \subset \mathbb{R}^m$ называется

внутренней точкой E, если она содержится в E вместе с некоторой своей окрестностью;

внешней точкой E, если она является внутренней точкой дополнения к E в $\mathbb{R}^m$;

граничной точкой E, если она не является ни внешней, ни внутренней точкой множества E.

Из этого определения следует, что характеристическое свойство граничной точки множества состоит в том, что в любой ее окрестности имеются как точки этого множества, так и точки, ему не принадлежащие.

Пример 7. Сфера $S(a; r)$, $r > 0$, является множеством граничных точек как открытого шара $B(a; r)$, так и замкнутого шара $\overline{B}(a; r)$.

Пример 8. Точка $a \in \mathbb{R}^m$ является граничной точкой множества $\mathbb{R}^m \setminus a$, которое не имеет внешних точек.

Пример 9. Все точки сферы $S(a; r)$ являются ее граничными точками; внутренних точек множество $S(a; r)$ как подмножество $\mathbb{R}^m$ не имеет.

Определение 6. Точка $a \in \mathbb{R}^m$ называется *предельной* точкой множества $E \subset \mathbb{R}^m$, если для любой окрестности $O(a)$ точки a пересечение $E \cap O(a)$ есть бесконечное множество.

Определение 7. Объединение множества E и всех его предельных точек из $\mathbb{R}^m$ называется *замыканием* множества E в $\mathbb{R}^m$.

Замыкание множества E обычно обозначают символом $\overline{E}$.

Пример 10. Множество $\overline{B}(a;r) = B(a;r) \cup S(a;r)$ есть множество предельных точек для открытого шара $B(a;r)$, поэтому $\overline{B}(a;r)$, в отличие от $B(a;r)$, и назвали замкнутым шаром.

Пример 11. $\overline{S}(a;r) = S(a;r)$.

Вместо того чтобы обосновывать последнее равенство, докажем следующее полезное

Утверждение 2. (F *замкнуто в* $\mathbb{R}^m$) $\Leftrightarrow$ ($F = \overline{F}$ *в* $\mathbb{R}^m$).

Иными словами, F — замкнутое в $\mathbb{R}^m$ множество тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

◄ Пусть F замкнуто в $\mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$ и $x \notin F$. Тогда открытое множество $G = \mathbb{R}^m \setminus F$ является окрестностью точки x, вообще не содержащей точек множества F. Таким образом, показано, что если $x \notin F$, то x — не предельная точка F.

Пусть $F = \overline{F}$. Проверим, что множество $G = \mathbb{R}^m \setminus \overline{F}$ открыто в $\mathbb{R}^m$. Если $x \in G$, то $x \notin \overline{F}$ и потому x не является предельной точкой множества F. Значит, найдется окрестность точки x, в которой имеется только конечное число точек $x_1, \ldots, x_n$ множества F. Поскольку $x \notin F$, то можно построить, например, шаровые окрестности $O_1(x), \ldots, O_n(x)$ точки x так, что $x_i \notin O_i(x)$. Тогда $O(x) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i(x)$ будет открытой окрестностью точки x, которая вообще не содержит точек F, т. е. $O(x) \subset \mathbb{R}^m \setminus F$ и, следовательно, множество $\mathbb{R}^m \setminus F = \mathbb{R}^m \setminus \overline{F}$ открыто, т. е. F замкнуто в $\mathbb{R}^m$. ►

3. Компакты в $\mathbb{R}^m$

Определение 8. Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ называется *компактом*, если из любого покрытия K множествами, открытыми в $\mathbb{R}^m$, можно выделить конечное покрытие.

Пример 12. Отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ является компактом в $\mathbb{R}^1$ в силу леммы о конечном покрытии.

Пример 13. Обобщением отрезка в $\mathbb{R}^m$ является множество

$$I = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \ldots, m\},$$

которое называется *m-мерным промежутком*, m-мерным брусом или m-мерным параллелепипедом.

Покажем, что I — компакт в $\mathbb{R}^m$.

◄ Предположим, что из некоторого открытого покрытия I нельзя выделить конечное покрытие. Разделив каждый из координатных отрезков $I^i = \{x^i \in$

$\in \mathbb{R} \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ пополам, мы разобьем промежуток I на 2^m промежутков, из которых по крайней мере один не допускает конечного покрытия множествами нашей системы. С ним поступим так же, как и с исходным промежутком. Продолжая этот процесс деления, получим последовательность вложенных промежутков $I = I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, ни один из которых не допускает конечного покрытия. Если $I_n = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a_n^i \leqslant x^i \leqslant b_n^i$, $i = 1, \ldots, m\}$, то при каждом $i \in \{1, \ldots, m\}$ координатные отрезки $a_n^i \leqslant x^i \leqslant b_n^i$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют, по построению, систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. Найдя при каждом $i \in \{1, \ldots, m\}$ точку $\xi^i \in \in [a_n^i, b_n^i]$, общую для всех этих отрезков, получим точку $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$, принадлежащую всем промежуткам $I = I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ Поскольку $\xi \in I$, то найдется такое открытое множество G нашей системы покрывающих множеств, что $\xi \in G$. Тогда при некотором $\delta > 0$ также $B(\xi; \delta) \subset G$. Но по построению в силу соотношения (2) найдется номер N такой, что $I_n \subset B(\xi; \delta) \subset G$ при $n > N$, и мы вступаем в противоречие с тем, что промежутки I_n не допускают конечного покрытия множествами данной системы. ►

Утверждение 3. *Если K — компакт в $\mathbb{R}^m$, то*

a) *K — замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$;*

b) *любое замкнутое в $\mathbb{R}^m$ множество, содержащееся в K, само является компактом.*

◄ a) Покажем, что любая точка $a \in \mathbb{R}^m$, предельная для K, принадлежит K. Пусть $a \notin K$. Для каждой точки $x \in K$ построим такую окрестность $G(x)$, что точка a обладает окрестностью, не имеющей с $G(x)$ общих точек. Совокупность $\{G(x)\}$, $x \in K$, всех таких окрестностей образует открытое покрытие компакта K, из которого выделяется конечное покрытие $G(x_1), \ldots, G(x_n)$. Если теперь $O_i(a)$ — такая окрестность точки a, что $G(x_i) \cap O_i(a) = \varnothing$, то множество $O(a) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i(a)$ также является окрестностью точки a, причем, очевидно, $K \cap O(a) = \varnothing$. Таким образом, a не может быть предельной точкой для K.

b) Пусть F — замкнутое в $\mathbb{R}^m$ множество и $F \subset K$. Пусть $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathrm{A}$, — покрытие F множествами, открытыми в $\mathbb{R}^m$. Присоединив к нему еще одно открытое множество $G = \mathbb{R}^m \setminus F$, получим открытое покрытие $\mathbb{R}^m$ и, в частности, K, из которого извлекаем конечное покрытие K. Это конечное покрытие K будет покрывать также множество F. Замечая, что $G \cap F = \varnothing$, можно сказать, что если G входит в это конечное покрытие, то, даже удалив G, мы получим конечное покрытие F множествами исходной системы $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathrm{A}$. ►

Определение 9. *Диаметром* множества $E \subset \mathbb{R}^m$ называется величина

$$d(E) := \sup_{x_1, x_2 \in E} d(x_1, x_2).$$

Определение 10. Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется *ограниченным*, если его диаметр конечен.

Утверждение 4. *Если K — компакт в $\mathbb{R}^m$, то K — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^m$.*

◄ Возьмем произвольную точку $a \in \mathbb{R}^m$ и рассмотрим последовательность шаров $\{B(a; n)\}$ $(n = 1, 2, \dots)$. Они образуют открытое покрытие $\mathbb{R}^m$, а следовательно, и K. Если бы K не было ограниченным множеством, то из этого покрытия нельзя было бы извлечь конечное покрытие K. ►

Утверждение 5. *Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ является компактом в том и только в том случае, если K замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^m$.*

◄ Необходимость этих условий нами уже показана в утверждениях 3 и 4.

Проверим достаточность этих условий. Поскольку K — ограниченное множество, то найдется m-мерный промежуток I, содержащий K. Как было показано в примере 13, I является компактом в $\mathbb{R}^m$. Но если K — замкнутое множество, содержащееся в компакте I, то по утверждению 3b) оно само является компактом. ►

Задачи и упражнения

1. *Расстоянием $d(E_1, E_2)$ между множествами $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^m$* называется величина
$$d(E_1, E_2) := \inf_{x_1 \in E_1,\, x_2 \in E_2} d(x_1, x_2).$$
Приведите пример замкнутых в $\mathbb{R}^m$ множеств E_1, E_2 без общих точек, для которых $d(E_1, E_2) = 0$.

2. Покажите, что

a) замыкание $\overline{E}$ в $\mathbb{R}^m$ любого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ является множеством, замкнутым в $\mathbb{R}^m$;

b) множество ∂E граничных точек любого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ является замкнутым множеством;

c) если G — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, а F замкнуто в $\mathbb{R}^m$, то $G \setminus F$ — открытое подмножество $\mathbb{R}^m$.

3. Покажите, что если $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ — последовательность вложенных компактов, то $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i \neq \varnothing$.

4. a) В пространстве $\mathbb{R}^k$ двумерная сфера S^2 и окружность S^1 расположились так, что расстояние от любой точки сферы до любой точки окружности одно и то же. Может ли такое быть?

b) Рассмотрите задачу a) для произвольных по размерности сфер S^m, S^n в $\mathbb{R}^k$. При каком соотношении между m, n и k описанная ситуация возможна?

§ 2. Предел и непрерывность функции многих переменных

1. Предел функции. В главе III мы подробно изучили операцию предельного перехода для вещественнозначных функций $f: X \to \mathbb{R}$, определенных на множестве X, в котором фиксирована база $\mathcal{B}$.

В ближайших параграфах нам предстоит рассматривать функции $f: X \to \mathbb{R}^n$, определенные на подмножествах пространства $\mathbb{R}^m$, со значениями в

$\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ или вообще в $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$. Мы сделаем сейчас ряд добавлений к теории предела, связанных со спецификой этого класса функций.

Начнем, однако, с общего основного определения.

Определение 1. Точка $A\in\mathbb{R}^n$ называется *пределом отображения* $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ *по базе* $\mathcal{B}$ в X, если для любой окрестности $V(A)$ этой точки найдется элемент $B\in\mathcal{B}$ базы $\mathcal{B}$, образ которого $f(B)$ содержится в $V(A)$.

Короче,

$$\Bigl(\lim_{\mathcal{B}} f(x)=A\Bigr):=\bigl(\forall V(A)\ \exists B\in\mathcal{B}\ (f(B)\subset V(A))\bigr).$$

Мы видим, что определение предела функции $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ полностью совпадает с определением предела функции $f\colon X\to\mathbb{R}$, если мы представляем себе, что такое окрестность $V(A)$ точки $A\in\mathbb{R}^n$ для любого $n\in\mathbb{N}$.

Определение 2. Отображение $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если множество $f(X)\subset\mathbb{R}^n$ ограничено в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. Пусть $\mathcal{B}$ — база в множестве X. Отображение $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ называется *финально ограниченным* при базе $\mathcal{B}$, если найдется элемент B базы $\mathcal{B}$, на котором f ограничено.

Учитывая эти определения, нетрудно проверить теми же рассуждениями, которые мы провели в главе III, что

функция $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ *может иметь не более одного предела по данной базе* $\mathcal{B}$ *в* X;

функция $f\colon X\to\mathbb{R}^n$*, имеющая предел по базе* $\mathcal{B}$*, финально ограничена при этой базе* $\mathcal{B}$.

Определение 1 можно переписать также в иной форме, явно использующей наличие в $\mathbb{R}^n$ метрики. А именно,

Определение 3′.

$$\Bigl(\lim_{\mathcal{B}} f(x)=A\in\mathbb{R}^n\Bigr):=\bigl(\forall\varepsilon>0\ \exists B\in\mathcal{B}\ \forall x\in B\ (d(f(x),A)<\varepsilon)\bigr)$$

или

Определение 3″.

$$\Bigl(\lim_{\mathcal{B}} f(x)=A\in\mathbb{R}^n\Bigr):=\Bigl(\lim_{\mathcal{B}} d(f(x),A)=0\Bigr).$$

Специфическая особенность отображения $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ состоит в том, что поскольку точка $y\in\mathbb{R}^n$ есть упорядоченный набор $(y^1,\ldots,y^n)$ из n вещественных чисел, то задание функции $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ равносильно заданию n вещественнозначных функций $f^i\colon X\to\mathbb{R}$ $(i=1,\ldots,n)$, где $f^i(x)=y^i$ $(i=1,\ldots,n)$.

Если $A=(A^1,\ldots,A^n)$ и $y=(y^1,\ldots,y^n)$, то справедливы неравенства

$$|y^i-A^i|\leqslant d(y,A)\leqslant\sqrt{n}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|y^i-A^i|, \tag{1}$$

из которых видно, что

$$\lim_{\mathcal{B}} f(x)=A\iff\lim_{\mathcal{B}} f^i(x)=A^i\quad(i=1,\ldots,n), \tag{2}$$

т. е. сходимость в $\mathbb{R}^n$ покоординатная.

Пусть теперь $X=\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а $\mathcal{B}$ — база $k\to\infty$, $k\in\mathbb{N}$ в нем. Функция $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n$ в данном случае есть последовательность $\{y_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, точек пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 4. Последовательность $\{y_k\}$, $k\in\mathbb{N}$, точек $y_k\in\mathbb{R}^n$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое число $N\in\mathbb{N}$, что при любых $k_1, k_2>N$ выполнено $d(y_{k_1}, y_{k_2})<\varepsilon$.

Из неравенств (1) можно заключить, что последовательность точек $y_k = (y_k^1, \ldots, y_k^n)\in\mathbb{R}^n$ фундаментальна тогда и только тогда, когда фундаментальна каждая из последовательностей $\{y_k^i\}$, $k\in\mathbb{N}$, $i=1,\ldots,n$, их одноименных координат.

Учитывая соотношение (2) и критерий Коши для числовых последовательностей, можно теперь утверждать, что последовательность точек в $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Иными словами, критерий Коши справедлив и в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Впоследствии метрические пространства, в которых каждая фундаментальная последовательность имеет предел, мы назовем *полными* метрическими пространствами. Таким образом, мы сейчас установили, что $\mathbb{R}^n$ при любом $n\in\mathbb{N}$ является полным метрическим пространством.

Определение 5. *Колебанием* функции $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ на множестве $E\subset X$ называется величина

$$\omega(f;E):=d(f(E)),$$

где $d(f(E))$ — диаметр множества $f(E)$.

Как видно, это есть прямое обобщение определения колебания вещественнозначной функции, в которое определение 5 и переходит при $n=1$.

С полнотой $\mathbb{R}^n$ связано то, что для функций $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ справедлив следующий критерий Коши существования предела.

Теорема 1. *Пусть X — множество, $\mathcal{B}$ — база в X. Функция $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ имеет предел по базе $\mathcal{B}$ в том и только в том случае, когда для любого числа $\varepsilon>0$ найдется элемент $B\in\mathcal{B}$ базы, на котором колебание функции меньше ε.*

Итак,

$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) \iff \forall\varepsilon>0\ \exists B\in\mathcal{B}\ (\omega(f;B)<\varepsilon).$$

Доказательство теоремы 1 дословно повторяет доказательство критерия Коши для числовых функций (гл. III, § 2, теорема 4) с единственным изменением, сводящимся к тому, что теперь вместо $|f(x_1)-f(x_2)|$ следует всюду писать $d(f(x_1), f(x_2))$.

В справедливости теоремы 1 можно убедиться и иначе, если считать известным критерий Коши для вещественнозначных функций и воспользоваться соотношениями (2) и (1).

Для функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ остается в силе также важная теорема о пределе композиции.

Теорема 2. *Пусть Y — множество, $\mathcal{B}_Y$ — база в Y, $g\colon Y\to\mathbb{R}^n$ — отображение, имеющее предел по базе $\mathcal{B}_Y$.*

Пусть X — множество, $\mathcal{B}_X$ — база в X, $f\colon X\to Y$ — такое отображение X в Y, что для любого элемента $B_Y\in\mathcal{B}_Y$ базы $\mathcal{B}_Y$ найдется элемент $B_X\in\mathcal{B}_X$ базы $\mathcal{B}_X$, образ которого $f(B_X)$ содержится в B_Y.

При этих условиях композиция $g\circ f\colon X\to\mathbb{R}^n$ отображений f и g определена, имеет предел по базе $\mathcal{B}_X$ и

$$\lim_{\mathcal{B}_X}(g\circ f)(x)=\lim_{\mathcal{B}_Y}g(y).$$

Доказательство теоремы 2 можно провести, либо повторив доказательство теоремы 5 из § 2 гл. III, с заменой там $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n$, либо сослаться на указанную теорему и воспользоваться соотношением (2).

До сих пор мы рассматривали функции $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, никак не конкретизируя область их определения X. В дальнейшем нас прежде всего будет интересовать случай, когда X есть подмножество пространства $\mathbb{R}^m$.

Условимся, что, как и прежде,

$U(a)$ — окрестность точки $a\in\mathbb{R}^m$;

$\overset{\circ}{U}(a)$ — проколотая окрестность точки $a\in\mathbb{R}^m$, т. е. $\overset{\circ}{U}(a):=U(a)\setminus a$;

$U_E(a)$ — окрестность точки a в множестве $E\subset\mathbb{R}^m$, т. е. $U_E(a):=E\cap U(a)$;

$\overset{\circ}{U}_E(a)$ — проколотая окрестность точки a в множестве E, т. е. $\overset{\circ}{U}_E(a):=E\cap\cap\overset{\circ}{U}(a)$;

$x\to a$ — база проколотых окрестностей точки a в $\mathbb{R}^m$;

$x\to\infty$ — база окрестностей бесконечности, т. е. база, состоящая из множеств $\mathbb{R}^m\setminus B(a;r)$;

$x\to a$, $x\in E$, или $(E\ni x\to a)$ — база проколотых окрестностей точки a в множестве E, если a — предельная точка для E;

$x\to\infty$, $x\in E$, или $(E\ni x\to\infty)$ — база окрестностей бесконечности в множестве E, состоящая из множеств $E\setminus B(a;r)$, если E — неограниченное множество.

В соответствии с этими обозначениями можно, например, дать следующие конкретизации определения 1 предела функции, если речь идет о функции $f\colon E\to\mathbb{R}^n$, отображающей множество $E\subset\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\Bigl(\lim_{E\ni x\to a}f(x)=A\Bigr):=\Bigl(\forall\varepsilon>0\ \exists\overset{\circ}{U}_E(a)\ \forall x\in\overset{\circ}{U}_E(a)\ \bigl(d(f(x),A)<\varepsilon\bigr)\Bigr).$$

Это же можно записать и иначе:

$$\Bigl(\lim_{E\ni x\to a}f(x)=A\Bigr):=\\ =\Bigl(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in E\ \bigl(0<d(x,a)<\delta\Rightarrow d(f(x),A)<\varepsilon\bigr)\Bigr).$$

Здесь подразумевается, что расстояния $d(x,a)$ и $d(f(x),A)$ измеряются в тех пространствах ($\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$), в которых лежат указанные точки.

Наконец,

$$\Bigl(\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Bigr):=\Bigl(\forall\varepsilon>0\ \exists B(a;r)\ \forall x\in\mathbb{R}^m\setminus B(a;r)\ \bigl(d(f(x),A)<\varepsilon\bigr)\Bigr).$$

Условимся также, что запись «$f(x)\to\infty$ при базе $\mathscr{B}$» в случае отображения $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ всегда будет означать, что для любого шара $B(A;r)\subset\mathbb{R}^n$ найдется элемент $B\in\mathscr{B}$ базы $\mathscr{B}$ такой, что $f(B)\subset\mathbb{R}^n\setminus B(A;r)$.

Пример 1. Пусть $x\mapsto\pi^i(x)$ — отображение $\pi^i\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, состоящее в том, что каждой точке $x=(x^1,\ldots,x^m)$ пространства $\mathbb{R}^m$ ставится в соответствие ее i-я координата x^i. Итак,

$$\pi^i(x)=x^i.$$

Если $a=(a^1,\ldots,a^m)$, то, очевидно,

$$\pi^i(x)\to a^i \quad \text{при } x\to a.$$

Функция $x\mapsto\pi^i(x)$ не стремится ни к конечной величине, ни к бесконечности при $x\to\infty$, если $m>1$.

Вместе с тем

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}(\pi^i(x))^2\to\infty \quad \text{при } x\to\infty.$$

Не следует думать, что предел функции нескольких переменных можно найти, вычисляя последовательно пределы по каждой из координат. В этом можно убедиться на следующих примерах.

Пример 2. Пусть функция $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ в точке $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ определена так:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Тогда $f(0,y)=f(x,0)=0$, а $f(x,x)=\frac{1}{2}$ при $x\neq 0$.

Таким образом, эта функция не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

Вместе с тем

$$\lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0}f(x,y)\Bigr)=\lim_{y\to 0}(0)=0,$$
$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0}f(x,y)\Bigr)=\lim_{x\to 0}(0)=0.$$

Пример 3. Для функции

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

имеем

$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0}f(x,y)\Bigr)=\lim_{x\to 0}\Bigl(\frac{x^2}{x^2}\Bigr)=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0}f(x,y)\Bigr)=\lim_{y\to 0}\Bigl(-\frac{y^2}{y^2}\Bigr)=-1.$$

Пример 4. Для функции

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

имеем

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to 0} f(x, y)\Bigr) = 0,$$

и в то же время повторный предел

$$\lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 0} f(x, y)\Bigr)$$

вообще не существует.

Пример 5. Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

имеет нулевой предел при стремлении к началу координат по любому лучу $x = \alpha t$, $y = \beta t$.

Вместе с тем функция равна $\frac{1}{2}$ в любой точке вида (a, a^2), где $a \neq 0$, поэтому функция не имеет предела при $(x, y) \to (0, 0)$.

2. Непрерывность функции многих переменных и свойства непрерывных функций. Пусть E — множество в пространстве $\mathbb{R}^m$ и $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ — определенная на нем функция со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 6. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ называется *непрерывной* в точке $a \in E$, если для любой окрестности $V(f(a))$ значения $f(a)$ этой функции, принимаемого ею в точке a, найдется такая окрестность $U_E(a)$ точки a в множестве E, образ которой $f(U_E(a))$ содержится в $V(f(a))$.

Итак,

$$\bigl(f\colon E \to \mathbb{R}^n \text{ непрерывна в } a \in E\bigr) := \\ = \bigl(\forall V(f(a))\ \exists U_E(a)\ (f(U_E(a)) \subset V(f(a)))\bigr).$$

Мы видим, что по форме определение 6 совпадает со знакомым нам определением 1 непрерывности вещественнозначной функции, приведенным в § 1 гл. IV. Как и там, мы можем дать следующие вариации записи этого определения:

$$\bigl(f\colon E \to \mathbb{R}^n \text{ непрерывна в } a \in E\bigr) := \\ = \bigl(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon)\bigr),$$

или, если a — предельная точка множества E,

$$\bigl(f\colon E \to \mathbb{R}^n \text{ непрерывна в } a \in E\bigr) := \bigl(\lim_{E \ni x \to a} f(x) = f(a)\bigr).$$

Как уже отмечалось в главе IV, понятие непрерывности представляет интерес именно в том случае, когда речь идет о точке $a \in E$, предельной для множества E, на котором определена функция f.

Из определения 6 и соотношения (2) следует, что отображение $f: E \to \mathbb{R}^n$, задаваемое соотношением

$$(x^1, \ldots, x^m) = x \overset{f}{\longmapsto} y = (y^1, \ldots, y^n) = (f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^m)),$$

непрерывно в некоторой точке в том и только в том случае, когда каждая из функций $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^m)$ непрерывна в этой точке.

В частности, вспомним, что путем в $\mathbb{R}^n$ мы назвали отображение $f: I \to \mathbb{R}^n$ промежутка $I \subset \mathbb{R}$, задаваемое непрерывными функциями $f^1(x), \ldots, f^n(x)$ в виде

$$x \mapsto y = (y^1, \ldots, y^n) = (f^1(x), \ldots, f^n(x)).$$

Таким образом, мы теперь можем сказать, что *путь в $\mathbb{R}^n$ есть непрерывное отображение* промежутка $I \subset \mathbb{R}$ вещественной оси в пространство $\mathbb{R}^n$.

По аналогии с определением колебания вещественнозначной функции в точке, вводится понятие колебания в точке функции со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Пусть E — множество в $\mathbb{R}^m$, $a \in E$ и $B_E(a; r) = E \cap B(a; r)$.

Определение 7. *Колебанием функции* $f: E \to \mathbb{R}^n$ в точке $a \in E$ называется величина

$$\omega(f; a) := \lim_{r \to +0} \omega(f; B_E(a; r)).$$

Из определения 6 непрерывности функции, с учетом свойств предела и критерия Коши, получаем совокупность часто используемых локальных свойств непрерывных функций. Перечислим эти

Локальные свойства непрерывных функций

a) *Отображение $f: E \to \mathbb{R}^n$ множества $E \subset \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке $a \in E$ тогда и только тогда, когда $\omega(f; a) = 0$.*

b) *Отображение $f: E \to \mathbb{R}^n$, непрерывное в точке $a \in E$, ограничено в некоторой окрестности $U_E(a)$ этой точки.*

c) *Если отображение $g: Y \to \mathbb{R}^k$ множества $Y \subset \mathbb{R}^n$ непрерывно в точке $y_0 \in Y$, а отображение $f: X \to Y$ множества $X \subset \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке $x_0 \in X$, причем $f(x_0) = y_0$, то определено отображение $g \circ f: X \to \mathbb{R}^k$ и оно непрерывно в точке $x_0 \in X$.*

Вещественнозначные функции, кроме того, обладают еще следующими свойствами.

d) *Если функция $f: E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in E$ и $f(a) > 0$ (или $f(a) < 0$), то найдется такая окрестность $U_E(a)$ точки a в E, что для $x \in U_E(a)$ справедливо $f(x) > 0$ (соответственно, $f(x) < 0$).*

e) *Если функции $f: E \to \mathbb{R}$ и $g: E \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $a \in E$, то их линейная комбинация $(\alpha f + \beta g): E \to \mathbb{R}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, произведение $(f \cdot g): E \to \mathbb{R}$, а если $g(x) \neq 0$ на E, то и частное $\left(\frac{f}{g}\right): E \to \mathbb{R}$, определены на E и непрерывны в точке $a \in E$.*

Условимся говорить, что функция $f: E \to \mathbb{R}^n$ *непрерывна на множестве E*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Множество функций $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, непрерывных на E, будем обозначать символом $C(E;\mathbb{R}^n)$ или символом $C(E)$, если область значений функций однозначно определяется по контексту; как правило, это сокращение будет использоваться в случае, когда $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$.

Пример 6. Функции $(x^1, \ldots, x^m) \overset{\pi^i}{\longmapsto} x^i$ $(i = 1, \ldots, m)$, отображающие $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}$ (проекции), очевидно, непрерывны в любой точке $a = (a^1, \ldots, a^m) \in \mathbb{R}^m$, ибо $\lim\limits_{x\to a} \pi^i(x) = a^i = \pi^i(a)$.

Пример 7. Любую функцию $x \mapsto f(x)$, определенную на $\mathbb{R}$, например $x \mapsto \sin x$, можно рассматривать и как функцию $(x, y) \overset{F}{\longmapsto} f(x)$, определенную, положим, на $\mathbb{R}^2$. В таком случае, если f была непрерывна как функция на $\mathbb{R}$, новая функция $(x, y) \overset{F}{\longmapsto} f(x)$ будет непрерывна как функция на $\mathbb{R}^2$. Это можно проверить либо непосредственно по определению непрерывности, либо заметить, что функция F есть композиция $(f \circ \pi^1)(x, y)$ непрерывных функций.

В частности, отсюда с учетом c) и e) следует, что, например, функции

$$f(x, y) = \sin x + e^{xy}, \quad f(x, y) = \operatorname{arctg}(\ln(|x| + |y| + 1))$$

непрерывны на $\mathbb{R}^2$.

Заметим, что проведенные рассуждения по существу своему локальны, а то, что в примере 7 функции f и F рассматривались соответственно на всей оси $\mathbb{R}$ или плоскости $\mathbb{R}^2$, является обстоятельством случайным.

Пример 8. Функция $f(x, y)$ из примера 2 непрерывна в любой точке пространства $\mathbb{R}^2$, кроме точки $(0, 0)$. Заметим, что, несмотря на разрывность функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$, эта функция непрерывна по любой из двух своих переменных при каждом фиксированном значении другой переменной.

Пример 9. Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ непрерывна на множестве E, а $\widetilde{E}$ — подмножество E, то ограничение $f|_{\widetilde{E}}$ функции f на это подмножество есть функция, непрерывная на $\widetilde{E}$, что непосредственно следует из определения непрерывности функции в точке.

Перейдем теперь к глобальным свойствам непрерывных функций. Чтобы сформулировать их для функций $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, дадим сначала два определения.

Определение 8. Отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ множества $E \subset \mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^n$ называется *равномерно непрерывным* на E, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любых точек $x_1, x_2 \in E$ таких, что $d(x_1, x_2) < \delta$, выполнено $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Как и прежде, подразумевается, что расстояния $d(x_1, x_2)$, $d(f(x_1), f(x_2))$ измеряются соответственно в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$.

При $m = n = 1$ мы возвращаемся к уже знакомому нам определению равномерной непрерывности числовых функций.

Определение 9. Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется *линейно связным*, если для любой пары x_0, x_1 его точек существует путь $\Gamma\colon I \to E$ с носителем в E и с концами в этих точках.

Иными словами, из любой точки $x_0 \in E$ можно пройти к любой точке $x_1 \in \in E$, не выходя за пределы множества E.

Поскольку мы пока не будем рассматривать иного понятия связности множества, кроме понятия линейной связности, то для краткости условимся пока линейно связные множества назвать просто *связными*.

Определение 10. *Областью* в пространстве $\mathbb{R}^m$ называется открытое связное множество.

Пример 10. Шар $B(a;r)$, $r>0$, в $\mathbb{R}^m$ является областью. Открытость $B(a;r)$ в $\mathbb{R}^m$ нам уже известна. Проверим, что шар связен. Пусть $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m)$ и $x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^m)$ — две точки шара. Путь, задаваемый функциями $x^i(t) = tx_1^i + (1-t)x_0^i$ $(i=1, \ldots, m)$, определенными на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$, имеет своими концами точки x_0 и x_1. Кроме того, его носитель лежит в шаре $B(a;r)$, поскольку, в силу неравенства Минковского, при любом $t \in [0, 1]$

$$d(x(t), a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x^i(t)-a^i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(t(x_1^i-a^i)+(1-t)(x_0^i-a^i))^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(t(x_1^i-a^i))^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}((1-t)(x_0^i-a^i))^2} =$$

$$= t \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_1^i-a^i)^2} + (1-t) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_0^i-a^i)^2} < tr + (1-t)r = r.$$

Пример 11. Окружность (одномерная сфера) радиуса $r>0$ есть подмножество в $\mathbb{R}^2$, задаваемое уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2$. Полагая $x^1 = r\cos t$, $x^2 = r\sin t$, видим, что любые точки окружности можно соединить путем, идущим по этой окружности. Значит, окружность — связное множество. Однако это множество не является областью в $\mathbb{R}^2$, поскольку оно не открыто в $\mathbb{R}^2$.

Сформулируем теперь основные

Глобальные свойства непрерывных функций

a) *Если отображение $f\colon K \to \mathbb{R}^n$ непрерывно на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, то оно равномерно непрерывно на K.*

b) *Если отображение $f\colon K \to \mathbb{R}^n$ непрерывно на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, то оно ограничено на K.*

c) *Если функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, то она принимает в некоторых точках K минимальное и максимальное из своих значений на K.*

d) *Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна на связном множестве E, принимает в точках $a, b \in E$ значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдется точка $c \in E$, в которой $f(c) = C$.*

Изучая в свое время (гл. IV, § 2) локальные и глобальные свойства числовых функций одной переменной, мы дали такие их доказательства, которые

переносятся и на рассматриваемый здесь более общий случай. Единственное изменение, которое при этом следует сделать в прежних доказательствах, состоит в том, что выражения типа $|x_1 - x_2|$ или $|f(x_1) - f(x_2)|$ надо заменить на $d(x_1, x_2)$ и $d(f(x_1), f(x_2))$, где d — метрика в том пространстве, где лежат рассматриваемые точки. Это замечание относится в полной мере ко всему, кроме последнего утверждения d), доказательство которого мы сейчас проведем.

◄ d) Пусть $\Gamma\colon I \to E$ — путь, являющийся таким непрерывным отображением отрезка $[\alpha, \beta] = I \subset \mathbb{R}$, что $\Gamma(\alpha) = a$, $\Gamma(\beta) = b$. В силу связности E такой путь существует. Функция $f \circ \Gamma\colon I \to \mathbb{R}$, как композиция непрерывных функций, непрерывна, поэтому на отрезке $[\alpha, \beta]$ найдется точка $\gamma \in [\alpha, \beta]$, в которой $f \circ \Gamma(\gamma) = C$. Положим $c = \Gamma(\gamma)$. Тогда $c \in E$ и $f(c) = C$. ►

Пример 12. Сфера $S(0; r)$, задаваемая в $\mathbb{R}^m$ уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2 = r^2,$$

является компактом.

Действительно, из непрерывности функции

$$(x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2$$

следует замкнутость сферы, а из того, что на сфере $|x^i| \leqslant r$ $(i = 1, \ldots, m)$, следует ее ограниченность.

Функция

$$(x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^m)^2$$

непрерывна на всем пространстве $\mathbb{R}^m$, поэтому ее ограничение на сферу есть также непрерывная функция, которая в силу глобального свойства c) непрерывных функций имеет на сфере минимальное и максимальное значения. В точках сферы $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, \ldots, 0, 1)$ рассматриваемая функция принимает значения 1 и −1 соответственно. Ввиду связности сферы (см. задачу 3 в конце параграфа) на основании глобального свойства d) непрерывных функций можно утверждать, что на сфере есть точка, в которой рассматриваемая функция обращается в нуль.

Пример 13. Открытое множество $\mathbb{R}^m \setminus S(0; r)$ при $r > 0$ не является областью, так как оно несвязно.

Действительно, если $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ есть путь, один конец которого совпадает с точкой $x_0 = (0, \ldots, 0)$, а другой — с некоторой точкой $x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^m)$ такой, что $(x_1^1)^2 + \ldots + (x_1^m)^2 > r^2$, то композиция непрерывных отображений $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ и $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, где

$$(x^1, \ldots, x^m) \stackrel{f}{\longmapsto} (x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2,$$

есть непрерывная на отрезке I функция, принимающая на его концах значения, меньшее и большее чем r^2. Значит, на этом отрезке найдется точка γ, в которой $(f \circ \Gamma)(\gamma) = r^2$. Тогда точка $x_\gamma = \Gamma(\gamma)$ носителя нашего пути оказы-

вается лежащей на сфере $S(0; r)$. Мы показали, что нельзя выйти из шара $B(0; r) \subset \mathbb{R}^m$, не пересекая его граничной сферы $S(0; r)$.

Задачи и упражнения

1. Пусть $f \in C(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$. Покажите, что

a) множество $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) < c\}$ открыто в $\mathbb{R}^m$;

b) множество $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \leqslant c\}$ замкнуто в $\mathbb{R}^m$;

c) множество $E_3 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = c\}$ замкнуто в $\mathbb{R}^m$;

d) если $f(x) \to +\infty$ при $x \to \infty$, то E_2 и E_3 компактны в $\mathbb{R}^m$;

e) для любой функции $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ множество $E_4 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \omega(f; x) \geqslant \varepsilon\}$ замкнуто в $\mathbb{R}^m$.

2. Покажите, что отображение $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого в $\mathbb{R}^n$ множества является открытым в $\mathbb{R}^m$ множеством.

3. Покажите, что

a) образ $f(E)$ связного множества $E \subset \mathbb{R}^m$ при непрерывном отображении $f: E \to \mathbb{R}^n$ является множеством связным;

b) объединение связных множеств, имеющих общую точку, является связным множеством;

c) полусфера $(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2 = 1$, $x^m \geqslant 0$, является связным множеством;

d) сфера $(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2 = 1$ является связным множеством;

e) если $E \subset \mathbb{R}$ и E связно, то E есть промежуток на $\mathbb{R}$ (т. е. отрезок, полуинтервал, интервал, луч или вся числовая ось);

f) если x_0 — внутренняя, а x_1 — внешняя точка множества $M \subset \mathbb{R}^m$, то носитель любого пути с концами x_0, x_1 пересекает границу множества M.

Глава VIII

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

§ 1. Векторная структура в $\mathbb{R}^m$

1. $\mathbb{R}^m$ как векторное пространство. Из курса алгебры вам уже хорошо известно понятие векторного пространства.

Если в $\mathbb{R}^m$ ввести операцию сложения элементов $x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^m)$, $x_2 = (x_2^1, \ldots, x_2^m)$ по формуле

$$x_1 + x_2 = (x_1^1 + x_2^1, \ldots, x_1^m + x_2^m), \tag{1}$$

а умножение элемента $x = (x^1, \ldots, x^m)$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ — соотношением

$$\lambda x = (\lambda x^1, \ldots, \lambda x^m), \tag{2}$$

то $\mathbb{R}^m$ становится векторным пространством над полем действительных чисел. Его точки теперь можно называть векторами.

Векторы

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

(где единица стоит лишь на i-м месте) образуют максимальную линейно независимую систему векторов этого пространства, ввиду чего оно оказывается m-мерным векторным пространством.

Любой вектор $x \in \mathbb{R}^m$ может быть разложен по базису (3), т. е. представлен в виде

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^m e_m. \tag{4}$$

Индекс при векторе мы условимся писать внизу, а координаты, как и до сих пор, будем отмечать верхним индексом. Это удобно по многим причинам, одна из которых, в частности, состоит в том, что, следуя Эйнштейну[1], можно условиться выражения типа (4) записывать коротко в виде

$$x = x^i e_i, \tag{5}$$

считая, что появление одинакового индекса сверху и снизу означает суммирование по этому индексу в пределах диапазона его изменения.

---

[1] А. Эйнштейн (1879—1955) — крупнейший физик XX столетия, работы которого по квантовой теории и особенно по теории относительности оказали революционизирующее влияние на всю современную физику.

2. Линейные отображения $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Напомним, что отображение $L\colon X \to Y$ векторного пространства X в векторное пространство Y называется *линейным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ выполнено

$$L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 L(x_1) + \lambda_2 L(x_2).$$

Нас будут интересовать линейные отображения $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Если $\{e_1, \ldots, e_m\}$ и $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ — фиксированные базисы пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно, то, зная разложения

$$L(e_i) = a_i^1 \tilde{e}_1 + \ldots + a_i^n \tilde{e}_n = a_i^j \tilde{e}_j \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{6}$$

образов векторов базиса при линейном отображении $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, мы в силу линейности преобразования L можем найти разложение по базису $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\}$ образа $L(h)$ любого вектора $h = h^1 e_1 + \ldots + h^m e_m = h^i e_i$. А именно:

$$L(h) = L(h^i e_i) = h^i L(e_i) = h^i a_i^j \tilde{e}_j = a_i^j h^i \tilde{e}_j. \tag{7}$$

Значит, в координатной записи:

$$L(h) = (a_i^1 h^i, \ldots, a_i^n h^i). \tag{8}$$

Отображение $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ при фиксированном в $\mathbb{R}^n$ базисе можно, таким образом, рассматривать как набор

$$L = (L^1, \ldots, L^n) \tag{9}$$

из n (координатных) отображений $L^j\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

С учетом (8) легко заключаем, что отображение $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ линейно тогда и только тогда, когда каждое отображение L^j набора (9) линейно.

Если записать набор (9) в виде столбца, то с учетом соотношения (8) имеем

$$L(h) = \begin{pmatrix} L^1(h) \\ \ldots\ldots \\ L^n(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_m^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & \ldots & a_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \ldots \\ h^m \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Итак, фиксация базисов в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ позволяет установить взаимно однозначное соответствие между линейными отображениями $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $m \times n$-матрицами (a_i^j) $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$. При этом столбец с номером i матрицы (a_i^j), отвечающей отображению L, состоит из координат образа $L(e_i)$ вектора $e_i \in \{e_1, \ldots, e_m\}$. Координаты образа $L(h)$ произвольного вектора $h = h^i e_i \in \mathbb{R}^m$ могут быть получены из соотношения (10) умножением матрицы линейного отображения на столбец координат вектора h.

При наличии в $\mathbb{R}^n$ структуры векторного пространства можно говорить о линейной комбинации $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ отображений $f_1\colon X \to \mathbb{R}^n$, $f_2\colon X \to \mathbb{R}^n$, полагая

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) := \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x). \tag{11}$$

В частности, линейная комбинация линейных отображений $L_1: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $L_2: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ есть, в соответствии с определением (11), отображение

$$h \mapsto \lambda_1 L_1(h) + \lambda_2 L_2(h) = L(h),$$

которое, очевидно, линейно. Матрица этого отображения есть соответствующая линейная комбинация матриц отображений L_1 и L_2.

Композиция $C = B \circ A$ линейных отображений $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, очевидно, также является линейным отображением, матрица которого, как следует из (10), есть произведение матрицы отображения A и матрицы отображения B (на которую умножаем слева). Кстати, закон умножения матриц определен известным вам образом именно для того, чтобы композиции отображений отвечало произведение матриц.

3. Норма в $\mathbb{R}^m$. Величину

$$\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2} \tag{12}$$

назовем *нормой* вектора $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$.

Из этого определения с учетом неравенства Минковского следует, что

1° $\|x\| \geqslant 0$,
2° $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$,
3° $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, где $\lambda \in \mathbb{R}$,
4° $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$.

Вообще, любую функцию $\| \ \|: X \to \mathbb{R}$ на векторном пространстве X, удовлетворяющую условиям 1°—4°, называют *нормой* в векторном пространстве. Иногда, чтобы уточнить, о какой норме идет речь, знак нормы вектора наделяют символом того пространства, в котором эту норму рассматривают. Например, можно написать $\|x\|_{\mathbb{R}^m}$ или $\|y\|_{\mathbb{R}^n}$, однако мы, как правило, не станем этого делать, ибо из контекста всегда будет ясно, о каком пространстве и какой норме идет речь.

Заметим, что в силу (12)

$$\|x_2 - x_1\| = d(x_1, x_2), \tag{13}$$

где $d(x_1, x_2)$ — расстояние в $\mathbb{R}^m$ между векторами x_1 и x_2, рассматриваемыми как точки метрического пространства $\mathbb{R}^m$.

Из соотношения (13) видно, что следующие условия равносильны:

$$x \to x_0, \quad d(x, x_0) \to 0, \quad \|x - x_0\| \to 0.$$

Ввиду (13), в частности, имеем

$$\|x\| = d(0, x).$$

Свойство 4° нормы называют *неравенством треугольника*, и теперь ясно почему.

Неравенство треугольника по индукции распространяется на сумму любого конечного числа слагаемых. А именно, справедливо неравенство

$$\|x_1 + \ldots + x_k\| \leqslant \|x_1\| + \ldots + \|x_k\|.$$

Наличие нормы вектора позволяет сравнивать по величине значения функций $f: X \to \mathbb{R}^m$, $g: X \to \mathbb{R}^n$.

Условимся писать, что $f(x) = o(g(x))$ или $f = o(g)$ при базе $\mathcal{B}$ в X, если $\|f(x)\|_{\mathbb{R}^m} = o(\|g(x)\|_{\mathbb{R}^n})$ при этой базе $\mathcal{B}$.

Если $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$ — координатное представление отображения $f: X \to \mathbb{R}^m$, то ввиду неравенств

$$|f^i(x)| \leqslant \|f(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |f^i(x)| \tag{14}$$

можно сделать следующее полезное для дальнейшего наблюдение:

$$(f = o(g) \text{ при базе } \mathcal{B}) \iff (f^i = o(g) \text{ при базе } \mathcal{B};\ i = 1, \ldots, m). \tag{15}$$

Условимся также, что запись $f = O(g)$ при базе $\mathcal{B}$ в X будет означать, что $\|f(x)\|_{\mathbb{R}^m} = O(\|g(x)\|_{\mathbb{R}^n})$ при этой базе $\mathcal{B}$.

Тогда из (14) получаем, что

$$(f = O(g) \text{ при базе } \mathcal{B}) \iff (f^i = O(g) \text{ при базе } \mathcal{B};\ i = 1, \ldots, m). \tag{16}$$

Пример. Рассмотрим линейное отображение $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Пусть $h = h^1 e_1 + \ldots + h^m e_m$ — произвольный вектор пространства $\mathbb{R}^m$. Оценим $\|L(h)\|_{\mathbb{R}^n}$:

$$\|L(h)\| = \left\| \sum_{i=1}^{m} h^i L(e_i) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|L(e_i)\|\, |h^i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \|L(e_i)\| \right) \|h\|. \tag{17}$$

Таким образом, можно утверждать, что

$$L(h) = O(h) \quad \text{при } h \to 0. \tag{18}$$

В частности, из этого следует, что $L(x - x_0) = L(x) - L(x_0) \to 0$ при $x \to x_0$, т. е. линейное отображение $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывно в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Из оценки (17) видна даже равномерная непрерывность линейного отображения.

4. Евклидова структура в $\mathbb{R}^m$. Из алгебры известно понятие *скалярного произведения* в вещественном векторном пространстве как числовой функции $\langle x, y \rangle$, определенной на парах векторов пространства и обладающей свойствами

$$\langle x, x \rangle \geqslant 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0,$$
$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle,$$
$$\langle \lambda x_1, x_2 \rangle = \lambda \langle x_1, x_2 \rangle, \text{ где } \lambda \in \mathbb{R},$$
$$\langle x_1 + x_2, x_3 \rangle = \langle x_1, x_3 \rangle + \langle x_2, x_3 \rangle.$$

Из этих свойств, в частности, следует, что если в пространстве фиксирован базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$, то через координаты $(x^1, \ldots, x^m)$, $(y^1, \ldots, y^m)$ векторов x и y их скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ запишется в виде билинейной формы

$$\langle x, y\rangle = g_{ij}x^i y^j \tag{19}$$

(подразумевается суммирование по i и по j), в которой $g_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$.

Векторы называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$ называется *ортонормированным*, если $g_{ij} = \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

В ортонормированном базисе скалярное произведение (19) имеет самый простой вид

$$\langle x, y\rangle = \delta_{ij}x^i y^j,$$

или

$$\langle x, y\rangle = x^1 \cdot y^1 + \ldots + x^m \cdot y^m. \tag{20}$$

Координаты, в которых скалярное произведение имеет такой вид, называют *декартовыми* координатами.

Напомним, что пространство $\mathbb{R}^m$ с определенным в нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством*.

Между скалярным произведением (20) и нормой вектора (12) имеется очевидная связь

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

Из алгебры известно следующее неравенство:

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$

которое, в частности, показывает, что для любой пары векторов найдется угол $\varphi \in [0, \pi]$ такой, что

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\| \cos\varphi.$$

Этот угол называют *углом между векторами x и y*. Именно по этой причине естественно считать ортогональными векторы, скалярное произведение которых равно нулю.

Полезным для нас будет также следующий известный из алгебры простой, но очень важный факт:

любая линейная функция $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ в евклидовом пространстве имеет вид

$$L(x) = \langle \xi, x\rangle,$$

где $\xi \in \mathbb{R}^m$ — фиксированный и однозначно соответствующий функции L вектор.

§ 2. Дифференциал функции многих переменных

1. Дифференцируемость и дифференциал функции в точке

Определение 1. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, называется *дифференцируемой в точке* $x \in E$, предельной для множества E, если

$$\boxed{f(x+h) - f(x) = L(x)h + \alpha(x;h),} \tag{1}$$

где $L(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейная относительно h функция[1], а $\alpha(x;h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x + h \in E$.

Векторы

$$\Delta x(h) := (x+h) - x = h,$$
$$\Delta f(x;h) := f(x+h) - f(x)$$

называются соответственно *приращением аргумента* и *приращением функции* (отвечающим этому приращению аргумента). Эти векторы по традиции обозначают символами Δx и $\Delta f(x)$ самих функций от h.

Линейная функция $L(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ в соотношении (1) называется *дифференциалом*, *касательным отображением* или *производным отображением функции* $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ *в точке* $x \in E$.

Дифференциал функции $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ в точке $x \in E$ обозначается символами $df(x)$, $Df(x)$ или $f'(x)$.

В соответствии с введенными обозначениями, соотношение (1) можно переписать в виде

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \alpha(x;h)$$

или

$$\Delta f(x;h) = df(x)h + \alpha(x;h).$$

Заметим, что дифференциал, в сущности, определен на смещениях h от рассматриваемой точки $x \in \mathbb{R}^m$.

Чтобы это подчеркнуть, с точкой $x \in \mathbb{R}^m$ связывают свой экземпляр векторного пространства $\mathbb{R}^m$ и обозначают его через $T_x\mathbb{R}^m$, $T\mathbb{R}^m(x)$ или $T\mathbb{R}^m_x$; $T\mathbb{R}^m_x$ можно трактовать как совокупность векторов, приложенных к точке $x \in \mathbb{R}^m$. Векторное пространство $T\mathbb{R}^m_x$ называют *касательным пространством к* $\mathbb{R}^m$ *в точке* $x \in \mathbb{R}^m$. Происхождение этой терминологии прояснится позже.

Значение дифференциала на векторе $h \in T\mathbb{R}^m_x$ есть вектор $f'(x)h \in T\mathbb{R}^n_{f(x)}$, приложенный к точке $f(x)$ и аппроксимирующий приращение $f(x+h) - f(x)$ функции, вызванное приращением h аргумента x.

Итак, $df(x)$ или $f'(x)$ есть линейное отображение $f'(x)\colon T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^n_{f(x)}$.

---

[1] По аналогии с одномерным случаем, мы позволим себе писать $L(x)h$ вместо $L(x)(h)$. Отметим также, что в определении мы подразумеваем, что $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ наделены указанной в § 1 нормой.

Мы видим, что, в полном соответствии с уже изученным нами одномерным случаем, функция многих переменных с векторными значениями дифференцируема в точке, если ее приращение $\Delta f(x; h)$ в этой точке как функция приращения аргумента h линейно по h с точностью до поправки $\alpha(x; h)$, бесконечно малой при $h \to 0$ в сравнении с приращением аргумента.

2. Дифференциал и частные производные вещественнозначной функции. Если векторы $f(x+h)$, $f(x)$, $L(x)h$, $\alpha(x; h)$ из $\mathbb{R}^n$ записать в координатах, то равенство (1) окажется равносильным n равенствам

$$f^i(x+h) - f^i(x) = L^i(x)h + \alpha^i(x; h) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

между вещественнозначными функциями, в которых, как следует из соотношений (9) и (15) § 1, $L^i(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ суть линейные функции, а $\alpha^i(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x + h \in E$ для любого $i = 1, \ldots, n$.

Таким образом, справедливо

Утверждение 1. *Отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ множества $E \subset \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x \in E$, предельной для множества E, тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы функции $f^i\colon E \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, задающие координатное представление данного отображения.*

Поскольку соотношения (1) и (2) равносильны, то для отыскания дифференциала $L(x)$ отображения $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ достаточно научиться находить дифференциалы $L^i(x)$ его координатных функций $f^i\colon E \to \mathbb{R}$.

Итак, рассмотрим вещественнозначную функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$, определенную на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$ и дифференцируемую во внутренней точке $x \in E$ этого множества. Заметим, что в дальнейшем нам большей частью придется иметь дело с тем случаем, когда E будет областью в $\mathbb{R}^m$. Если x есть внутренняя точка множества E, то при любом достаточно малом смещении h от точки x точка $x + h$ также будет принадлежать E и, следовательно, будет находиться в области определения функции $f\colon E \to \mathbb{R}$.

Если перейти к координатной записи точки $x = (x^1, \ldots, x^m)$, вектора $h = (h^1, \ldots, h^m)$ и линейной функции $L(x)h = a_1(x)h^1 + \ldots + a_m(x)h^m$, то условие

$$f(x+h) - f(x) = L(x)h + o(h) \quad \text{при } h \to 0 \tag{3}$$

перепишется в виде

$$f(x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) = \\ = a_1(x)h^1 + \ldots + a_m(x)h^m + o(h) \quad \text{при } h \to 0, \tag{4}$$

где $a_1(x), \ldots, a_m(x)$ — связанные с точкой x вещественные числа.

Мы хотим найти эти числа. Для этого вместо произвольного смещения h рассмотрим специальное смещение

$$h_i = h^i e_i = 0 \cdot e_1 + \ldots + 0 \cdot e_{i-1} + h^i e_i + 0 \cdot e_{i+1} + \ldots + 0 \cdot e_m$$

на вектор h_i, коллинеарный вектору e_i базиса $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в $\mathbb{R}^m$.

При $h = h_i$, очевидно, $\|h\| = |h^i|$, поэтому из (4) при $h = h_i$ получаем

$$f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + h^i, x^{i+1}, \ldots, x^m) - f(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^m) = \\ = a_i(x)h^i + o(h^i) \quad \text{при } h^i \to 0. \quad (5)$$

Это означает, что если фиксировать в функции $f(x^1, \ldots, x^m)$ все переменные, кроме i-й, то получаемая при этом функция i-й переменной оказывается дифференцируемой в точке x^i.

Из равенства (5), таким образом, находим, что

$$a_i(x) = \lim_{h^i \to 0} \frac{f(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + h^i, x^{i+1}, \ldots, x^m) - f(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^m)}{h^i}. \quad (6)$$

Определение 2. Предел (6) называется *частной производной* функции $f(x)$ в точке $x = (x^1, \ldots, x^m)$ по переменной x^i. Его обозначают одним из следующих символов:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x), \quad \partial_i f(x), \quad D_i f(x), \quad f'_{x^i}(x).$$

Пример 1. Если $f(u, v) = u^3 + v^2 \sin u$, то

$$\partial_1 f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = 3u^2 + v^2 \cos u,$$
$$\partial_2 f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 2v \sin u.$$

Пример 2. Если $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xy^2) + e^z$, то

$$\partial_1 f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y^2}{1 + x^2 y^4},$$
$$\partial_2 f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{2xy}{1 + x^2 y^4},$$
$$\partial_3 f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = e^z.$$

Итак, мы доказали

Утверждение 2. *Если функция $f: E \to \mathbb{R}$, определенная на множестве $E \subset \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируема во внутренней точке $x \in E$ этого множества, то в этой точке функция имеет частные производные по каждой переменной и дифференциал функции однозначно определяется этими частными производными в виде*

$$df(x)h = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x)h^m. \quad (7)$$

Формулу (7), используя соглашение о суммировании по повторяющемуся снизу и сверху индексу, можно записать компактно:

$$df(x)h = \partial_i f(x)h^i. \quad (8)$$

Пример 3. Если бы мы знали (а скоро мы это узнаем), что рассмотренная в примере 2 функция $f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $(0, 1, 0)$, то можно было бы сразу записать, что

$$df(0,1,0)h = 1\cdot h^1 + 0\cdot h^2 + 1\cdot h^3 = h^1 + h^3$$

и, в соответствии с этим,

$$f(h^1, 1+h^2, h^3) - f(0,1,0) = df(0,1,0)h + o(h)$$

или

$$\operatorname{arctg}(h^1(1+h^2)^2) + e^{h^3} = 1 + h^1 + h^3 + o(h) \quad \text{при } h\to 0.$$

Пример 4. Для функции $x = (x^1, \dots, x^m) \overset{\pi^i}{\longmapsto} x^i$, которая точке $x \in \mathbb{R}^m$ ставит в соответствие ее i-ю координату, имеем

$$\Delta\pi^i(x; h) = (x^i + h^i) - x^i = h^i,$$

т. е. приращение этой функции само есть линейная по h функция $h \overset{\pi^i}{\longmapsto} h^i$. Таким образом, $\Delta\pi^i(x; h) = d\pi^i(x)h$, причем отображение $d\pi^i(x) = d\pi^i$ на самом деле оказывается не зависящим от $x \in \mathbb{R}^m$ в том смысле, что $d\pi^i(x)h = h^i$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^m$. Если вместо $\pi^i(x)$ писать $x^i(x)$, то получаем, что $dx^i(x)h = dx^i h = h^i$.

Учитывая это обстоятельство и формулу (8), мы теперь можем представить дифференциал любой функции в виде линейной комбинации дифференциалов координат ее аргумента $x \in \mathbb{R}^m$. А именно:

$$df(x) = \partial_i f(x)dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x)dx^m, \tag{9}$$

поскольку для любого вектора $h \in T\mathbb{R}^m_x$ имеем

$$df(x)h = \partial_i f(x)h^i = \partial_i f(x)dx^i h.$$

3. Координатное представление дифференциала отображения. Матрица Якоби. Итак, мы нашли формулу (7) для дифференциала вещественнозначной функции $f\colon E \to \mathbb{R}$. Но тогда, в силу установленной эквивалентности соотношений (1) и (2), уже для любого отображения $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ множества $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемого во внутренней точке $x \in E$ этого множества, можно выписать координатное представление дифференциала $df(x)$ в виде

$$df(x)h = \begin{pmatrix} df^1(x)h \\ \vdots \\ df^n(x)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i f^1(x)h^i \\ \vdots \\ \partial_i f^n(x)h^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^m \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Определение 3. Матрица $(\partial_i f^j(x))$ $(i=1, \ldots, m,\ j=1, \ldots, n)$ из частных производных координатных функций данного отображения в точке $x \in E$ называется *матрицей Якоби*[1] или *якобианом*[2] отображения в этой точке.

В случае, когда $n=1$, мы возвращаемся к формуле (7), а когда $n=1$ и $m=1$, мы приходим к дифференциалу вещественнозначной функции одного вещественного переменного.

Из эквивалентности соотношений (1) и (2) и единственности дифференциала (7) вещественнозначной функции следует

Утверждение 3. *Если отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ множества $E \subset \mathbb{R}^m$ дифференцируемо во внутренней точке $x \in E$ этого множества, то оно имеет в этой точке единственный дифференциал $df(x)$, причем координатное представление отображения $df(x)\colon T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^n_{f(x)}$ задается соотношением* (10).

4. Непрерывность, частные производные и дифференцируемость функции в точке. Мы закончим обсуждение понятия дифференцируемости функции в точке указанием на взаимоотношения между непрерывностью функции в точке, наличием у нее частных производных в точке и дифференцируемостью ее в этой точке.

В § 1 (соотношения (17) и (18)) мы установили, что если $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, то $Lh \to 0$ при $h \to 0$. Таким образом, из соотношения (1) можно заключить, что функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке, поскольку

$$f(x+h)-f(x)=L(x)h+o(h) \quad \text{при } h \to 0,\ x+h \in E.$$

Обратное, конечно, не верно потому, что, как нам известно, это не верно уже в одномерном случае.

Таким образом, взаимоотношение непрерывности и дифференцируемости функции в точке в многомерном случае такое же, как и в одномерном.

Совсем иначе обстоит дело во взаимоотношениях частных производных и дифференциала. В одномерном случае, т. е. в случае вещественнозначной функции одного вещественного переменного, наличие дифференциала и наличие производной у функции в точке были условиями равносильными. Для функций многих переменных мы показали (утверждение 2), что дифференцируемость функции во внутренней точке области определения обеспечивает существование у нее частных производных по каждой переменной в этой точке. Однако обратное утверждение уже не имеет места.

Пример 5. Функция

$$f(x^1, x^2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x^1x^2 = 0, \\ 1, & \text{если } x^1x^2 \neq 0, \end{cases}$$

---

[1] К. Г. Я. Якоби (1804—1851) — известный немецкий математик.

[2] Якобианом чаще называют определитель этой матрицы (когда она квадратная).

равна нулю на осях координат и потому имеет в точке $(0,0)$ обе частные производные:

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{h^1\to 0} \frac{f(h^1,0)-f(0,0)}{h^1} = \lim_{h^1\to 0} \frac{0-0}{h^1} = 0,$$

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{h^2\to 0} \frac{f(0,h^2)-f(0,0)}{h^2} = \lim_{h^2\to 0} \frac{0-0}{h^2} = 0.$$

Вместе с тем эта функция не дифференцируема в точке $(0,0)$, поскольку она, очевидно, разрывна в этой точке.

Приведенная в примере 5 функция не имеет одной из частных производных в точках осей координат, отличных от точки $(0,0)$. Однако функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

(которая нам встречалась в примере 2 из § 2 гл. VII), уже во всех точках плоскости (x,y) имеет частные производные, однако она тоже разрывна в начале координат и потому не дифференцируема в точке $(0,0)$.

Таким образом, возможность написать правую часть равенств (7), (8) еще не гарантирует того, что это будет дифференциал нашей функции, поскольку функция может оказаться не дифференцируемой.

Это обстоятельство могло бы стать серьезной помехой всему дифференциальному исчислению функций многих переменных, если бы не выяснилось (это будет доказано позже), что непрерывности частных производных в точке достаточно для дифференцируемости функции в этой точке.

§ 3. Основные законы дифференцирования

1. Линейность операции дифференцирования

Теорема 1. *Если отображения $f_1\colon E\to\mathbb{R}^n$, $f_2\colon E\to\mathbb{R}^n$, определенные на множестве $E\subset\mathbb{R}^m$, дифференцируемы в точке $x\in E$, то их линейная комбинация $(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)\colon E\to\mathbb{R}^n$ также является дифференцируемым в этой точке отображением, причем имеет место равенство*

$$(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)'(x) = (\lambda_1 f_1'+\lambda_2 f_2')(x). \tag{1}$$

Равенство (1) показывает, что операция дифференцирования, т. е. сопоставление отображению его дифференциала в точке, является линейной операцией на векторном пространстве отображений $f\colon E\to\mathbb{R}^n$, дифференцируемых в фиксированной точке множества E. Слева в (1) стоит, по определению, линейное отображение $(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)'(x)$, а справа стоит линейная комбинация $(\lambda_1 f_1'+\lambda_2 f_2')(x)$ линейных отображений $f_1'(x)\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $f_2'(x)\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, которая, как нам известно из § 1, также является линейным отображением. Теорема 1 утверждает, что эти отображения совпадают.

◄ $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x+h) - (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) =$

$$= (\lambda_1 f_1(x+h) + \lambda_2 f_2(x+h)) - (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) =$$
$$= \lambda_1 (f_1(x+h) - f_1(x)) + \lambda_2 (f_2(x+h) - f_2(x)) =$$
$$= \lambda_1 (f_1'(x)h + o(h)) + \lambda_2 (f_2'(x)h + o(h)) = (\lambda_1 f_1'(x) + \lambda_2 f_2'(x))h + o(h).$$ ►

Если рассматриваемые функции вещественнозначны, то над ними выполнимы также операции умножения и (при необращении знаменателя в нуль) деления. Имеет место

Теорема 2. *Если функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$, определенные на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в точке $x \in E$, то*

a) *их произведение дифференцируемо в x, причем*

$$(f \cdot g)'(x) = g(x) f'(x) + f(x) g'(x); \tag{2}$$

b) *их отношение дифференцируемо в x, если $g(x) \neq 0$, причем*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{1}{g^2(x)} \bigl(g(x) f'(x) - f(x) g'(x)\bigr). \tag{3}$$

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством соответствующих пунктов теоремы 1 из § 2 гл. V, поэтому мы на нем не останавливаемся.

Соотношения (1), (2), (3) можно переписать также и в иных обозначениях дифференциала. А именно:

$$d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = (\lambda_1 df_1 + \lambda_2\, df_2)(x),$$
$$d(f \cdot g)(x) = g(x)\, df(x) + f(x)\, dg(x),$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{g^2(x)}\bigl(g(x)\, df(x) - f(x)\, dg(x)\bigr).$$

Посмотрим, что означают эти равенства в координатном представлении отображений. Нам известно, что если отображение $\varphi\colon E \to \mathbb{R}^n$, дифференцируемое во внутренней точке x множества $E \subset \mathbb{R}^m$, записать в координатном виде

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^1(x^1, \ldots, x^m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^n(x^1, \ldots, x^m) \end{pmatrix},$$

то его дифференциалу $d\varphi(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ в этой точке будет соответствовать матрица Якоби

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi^1 & \ldots & \partial_m \varphi^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_1 \varphi^n & \ldots & \partial_m \varphi^n \end{pmatrix}(x) = (\partial_i \varphi^j)(x).$$

При фиксированных базисах в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответствие между линейными отображениями $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $m \times n$-матрицами — взаимно однозначное, поэтому линейное отображение L можно отождествить с задающей его матрицей.

Для обозначения матрицы Якоби мы все же, как правило, будем использовать символ $f'(x)$, а не символ $df(x)$, ибо это больше соответствует тому

традиционному разделению понятий производной и дифференциала, которое проводится в одномерном случае.

Таким образом, в силу единственности дифференциала, во внутренней точке x множества E получаем следующие координатные формы записи соотношений (1), (2), (3), означающие равенства соответствующих матриц Якоби:

$$(\partial_i(\lambda_1 f_1^j + \lambda_2 f_2^j))(x) = (\lambda_1 \partial_i f_1^j + \lambda_2 \partial_i f_2^j)(x) \quad (i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n), \quad (1')$$

$$(\partial_i(f \cdot g))(x) = g(x)\partial_i f(x) + f(x)\partial_i g(x) \quad (i = 1, \ldots, m), \quad (2')$$

$$\left(\partial_i\left(\frac{f}{g}\right)\right)(x) = \frac{1}{g^2(x)}(g(x)\partial_i f(x) - f(x)\partial_i g(x)) \quad (i = 1, \ldots, m). \quad (3')$$

Из поэлементного равенства указанных матриц, например, следует, что частную производную по переменной x^i от произведения вещественнозначных функций $f(x^1, \ldots, x^m)$ и $g(x^1, \ldots, x^m)$ надо брать так:

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^m) = \\ = g(x^1, \ldots, x^m)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^m) + f(x^1, \ldots, x^m)\frac{\partial g}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^m).$$

Отметим, что как это равенство, так и матричные равенства $(1')$, $(2')$, $(3')$ являются очевидными следствиями определения частной производной и обычных правил дифференцирования вещественнозначных функций одного вещественного переменного. Однако нам известно, что наличия частных производных еще может оказаться недостаточно для дифференцируемости функции многих переменных. Поэтому наряду с важными и вполне очевидными равенствами $(1')$, $(2')$, $(3')$ особую роль в теоремах 1 и 2 приобретают утверждения о существовании дифференциала соответствующего отображения.

Заметим, наконец, что по индукции из равенства (2) можно получить соотношение

$$d(f_1 \ldots f_k)(x) = (f_2 \ldots f_k)(x)\, df_1(x) + \ldots + (f_1 \ldots f_{k-1})(x)\, df_k(x)$$

для дифференциала произведения $(f_1 \ldots f_k)$ дифференцируемых вещественнозначных функций.

2. Дифференцирование композиции отображений

a. Основная теорема

Теорема 3. *Если отображение $f\colon X \to Y$ множества $X \subset \mathbb{R}^m$ в множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в точке $x \in X$, а отображение $g\colon Y \to \mathbb{R}^k$ дифференцируемо в точке $y = f(x) \in Y$, то композиция $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^k$ этих отображений дифференцируема в точке x, причем дифференциал $d(g \circ f)\colon T\mathbb{R}^m_x \to \to T\mathbb{R}^k_{g(f(x))}$ композиции равен композиции $dg(y) \circ df(x)$ дифференциалов*

$$df(x)\colon T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^n_{f(x)=y}, \quad dg(y)\colon T\mathbb{R}^n_y \to T\mathbb{R}^k_{g(y)}.$$

Доказательство этой теоремы почти полностью повторяет доказательство теоремы 2 из § 2 гл. V. Чтобы обратить внимание на одну новую, появляющуюся теперь деталь, мы все же проведем еще раз это доказательство, не вдаваясь, однако, в уже разобранные технические подробности.

◄ Используя дифференцируемость отображений f и g в точках x и $y=f(x)$, а также линейность дифференциала $g'(x)$, можно написать, что

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x) &= g(f(x+h))-g(f(x)) = \\ &= g'(f(x))(f(x+h)-f(x))+o(f(x+h)-f(x)) = \\ &= g'(y)(f'(x)h+o(h))+o(f(x+h)-f(x)) = \\ &= g'(y)(f'(x)h)+g'(y)(o(h))+o(f(x+h)-f(x)) = \\ &= (g'(y)\circ f'(x))h+\alpha(x;h),\end{aligned}$$

где $g'(y)\circ f'(x)$ есть линейное отображение (как композиция линейных отображений), а

$$\alpha(x;h)=g'(y)(o(h))+o(f(x+h)-f(x)).$$

Но, как показывают соотношения (17), (18) из § 1,

$$g'(y)(o(h))=o(h) \quad \text{при } h\to 0,$$
$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+o(h)=O(h)+o(h)=O(h) \quad \text{при } h\to 0$$

и

$$o(f(x+h)-f(x))=o(O(h))=o(h) \quad \text{при } h\to 0.$$

Следовательно,

$$\alpha(x;h)=o(h)+o(h)=o(h) \quad \text{при } h\to 0,$$

и теорема доказана. ►

Будучи переписана в координатной форме, теорема 3 означает, что если x — внутренняя точка множества X и

$$f'(x)=\begin{pmatrix}\partial_1 f^1(x) & \dots & \partial_m f^1(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ \partial_1 f^n(x) & \dots & \partial_m f^n(x)\end{pmatrix}=(\partial_i f^j)(x),$$

а $y=f(x)$ — внутренняя точка множества Y и

$$g'(y)=\begin{pmatrix}\partial_1 g^1(y) & \dots & \partial_n g^1(y)\\ \dots & \dots & \dots\\ \partial_1 g^k(y) & \dots & \partial_n g^k(y)\end{pmatrix}=(\partial_j g^l)(y),$$

то

$$(g\circ f)'(x)=\begin{pmatrix}\partial_1(g^1\circ f)(x) & \dots & \partial_m(g^1\circ f)(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ \partial_1(g^k\circ f)(x) & \dots & \partial_m(g^k\circ f)(x)\end{pmatrix}=(\partial_i(g^l\circ f))(x)=$$
$$=\begin{pmatrix}\partial_1 g^1(y) & \dots & \partial_n g^1(y)\\ \dots & \dots & \dots\\ \partial_1 g^k(y) & \dots & \partial_n g^k(y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_1 f^1(x) & \dots & \partial_m f^1(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ \partial_1 f^n(x) & \dots & \partial_m f^n(x)\end{pmatrix}=(\partial_j g^l(y)\cdot\partial_i f^j(x)).$$

В равенстве

$$(\partial_i(g^l \circ f))(x) = (\partial_j g^l(f(x)) \cdot \partial_i f^j(x)) \tag{4}$$

справа имеется в виду суммирование по индексу j в пределах его изменения, т. е. от 1 до n.

В отличие от равенств (1′), (2′), (3′), соотношение (4) нетривиально даже в смысле поэлементного равенства участвующих в нем матриц.

Рассмотрим некоторые важные частные случаи доказанной теоремы.

b. Дифференциал и частные производные сложной вещественнозначной функции. Пусть $z = g(y^1, \ldots, y^n)$ — вещественнозначная функция вещественных переменных $y^1, \ldots, y^n$, каждое из которых в свою очередь есть функция $y^j = f^j(x^1, \ldots, x^m)$ $(j = 1, \ldots, n)$ переменных $x^1, \ldots, x^m$. В предположении дифференцируемости функций g и f^j $(j = 1, \ldots, n)$ найдем частную производную $\dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial x^i}(x)$ композиции отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to \mathbb{R}$.

По формуле (4), в которой при наших условиях $l = 1$, находим

$$\partial_i(g \circ f)(x) = \partial_j g(f(x)) \cdot \partial_i f^j(x) \tag{5}$$

или, в более подробной записи,

$$\frac{\partial z}{\partial x^i}(x) = \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^m) = \frac{\partial g}{\partial y^1} \cdot \frac{\partial y^1}{\partial x^i} + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y^n} \cdot \frac{\partial y^n}{\partial x^i} =$$
$$= \partial_1 g(f(x)) \cdot \partial_i f^1(x) + \ldots + \partial_n g(f(x)) \cdot \partial_i f^n(x).$$

c. Производная по вектору и градиент функции в точке. Рассмотрим установившийся поток жидкости или газа в некоторой области G пространства $\mathbb{R}^3$. Термин «установившийся» означает, что скорость потока в каждой точке области G не меняется со временем, хотя в различных точках области G она, разумеется, может быть различной. Пусть, например, $f(x) = f(x^1, x^2, x^3)$ — давление в потоке в точке $x = (x^1, x^2, x^3) \in G$. Если мы будем перемещаться в потоке по закону $x = x(t)$, где t — время, то в момент t мы будем регистрировать давление $(f \circ x)(t) = f(x(t))$. Скорость изменения давления со временем вдоль нашей траектории, очевидно, есть производная $\dfrac{d(f \circ x)}{dt}(t)$ по времени от функции $(f \circ x)(t)$. Найдем ее в предположении, что $f(x^1, x^2, x^3)$ — дифференцируемая в области G функция. По закону дифференцирования композиции функций находим

$$\frac{d(f \circ x)}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x(t))\dot{x}^1(t) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(x(t))\dot{x}^2(t) + \frac{\partial f}{\partial x^3}(x(t))\dot{x}^3(t), \tag{6}$$

где $\dot{x}^i(t) = \dfrac{dx^i}{dt}(t)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Поскольку $(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)(t) = v(t)$ есть вектор скорости нашего перемещения в момент t, а $(\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)(x)$ есть координатная запись дифференциала $df(x)$ функции f в точке x, то равенство (6) можно переписать также в виде

$$\frac{d(f \circ x)}{dt}(t) = df(x(t))v(t), \tag{7}$$

т. е. искомая величина есть значение дифференциала $df(x(t))$ функции $f(x)$ в точке $x(t)$ на векторе $v(t)$ скорости нашего движения.

В частности, если при $t=0$ мы были в точке $x_0 = x(0)$, то

$$\frac{d(f \circ x)}{dt}(0) = df(x_0)v, \tag{8}$$

где $v = v(0)$ — вектор скорости в момент $t=0$.

Правая часть соотношения (8) зависит только от точки $x_0 \in G$ и вектора v скорости, которую мы имеем в этой точке, и не зависит от конкретного вида траектории $x = x(t)$, лишь бы было выполнено условие $\dot{x}(0) = v$. Это означает, что на любой траектории вида

$$x(t) = x_0 + vt + \alpha(t), \tag{9}$$

где $\alpha(t) = o(t)$ при $t \to 0$, значение левой части равенства (8) будет одинаково, поскольку оно вполне определяется заданием точки x_0 и вектора $v \in T\mathbb{R}^3_{x_0}$, приложенного к этой точке. В частности, если бы мы хотели непосредственно вычислить значение левой (а значит, и правой) части равенства (8), то можно было бы в качестве закона движения выбрать функцию

$$x(t) = x_0 + vt, \tag{10}$$

отвечающую равномерному движению со скоростью v, при котором в момент $t=0$ мы находимся в точке $x(0) = x_0$.

Дадим теперь следующее

Определение 1. Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$, а $v \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ — вектор, приложенный к точке x_0, то величина

$$\boxed{D_v f(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + vt) - f(x_0)}{t}} \tag{11}$$

(если указанный предел существует) называется *производной функции f в точке x_0 по вектору v*.

Из проведенных рассмотрений следует, что если функция f дифференцируема в точке x_0, то при любой функции $x(t)$ вида (9) и, в частности, вида (10) имеет место равенство

$$D_v f(x_0) = \frac{d(f \circ x)}{dt}(0) = df(x_0)v, \tag{12}$$

что в координатном представлении означает

$$D_v f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)v^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)v^m. \tag{13}$$

В частности, для базисных векторов $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ из этой формулы получаем

$$D_{e_i} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

На основании равенства (12) в силу линейности дифференциала $df(x_0)$ заключаем, что если f — дифференцируемая в точке x_0 функция, то для любых векторов $v_1, v_2 \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ функция имеет в точке x_0 производную по вектору $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ и при этом

$$D_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2} f(x_0) = \lambda_1 D_{v_1} f(x_0) + \lambda_2 D_{v_2} f(x_0). \tag{14}$$

Если пространство $\mathbb{R}^m$ рассматривать как евклидово пространство, т. е. как векторное пространство со скалярным произведением, то (см. § 1) любую линейную функцию $L(v)$ можно будет записать в виде скалярного произведения $\langle \xi, v \rangle$ фиксированного вектора $\xi = \xi(L)$ и переменного вектора v.

В частности, найдется вектор ξ такой, что

$$df(x_0)v = \langle \xi, v \rangle. \tag{15}$$

Определение 2. Вектор $\xi \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$, отвечающий в смысле равенства (15) дифференциалу $df(x_0)$ функции f в точке x_0, называется *градиентом* функции в этой точке и обозначается символом $\operatorname{grad} f(x_0)$.

Итак, по определению

$$\boxed{df(x_0)v = \langle \operatorname{grad} f(x_0), v \rangle.} \tag{16}$$

Если в $\mathbb{R}^m$ выбрана декартова система координат, то, сопоставляя соотношения (12), (13) и (16), заключаем, что в такой системе координат градиент имеет следующее координатное представление:

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}\right)(x_0). \tag{17}$$

Выясним теперь геометрический смысл вектора $\operatorname{grad} f(x_0)$.

Пусть $e \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ — единичный вектор. Тогда в силу (16)

$$D_e f(x_0) = |\operatorname{grad} f(x_0)| \cos \varphi, \tag{18}$$

где φ — угол между векторами e и $\operatorname{grad} f(x_0)$.

Таким образом, если $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$ и $e = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|^{-1} \operatorname{grad} f(x_0)$, то производная $D_e f(x_0)$ принимает наибольшее значение. То есть скорость роста функции f (выраженная в единицах величины f, отнесенных к единице длины в $\mathbb{R}^m$) при движении из точки x_0 максимальна и равна $\|\operatorname{grad} f(x_0)\|$, когда мы смещаемся именно в направлении вектора $\operatorname{grad} f(x_0)$. При смещении в противоположном направлении значения функции наиболее резко уменьшаются, а при смещении в направлении, перпендикулярном вектору $\operatorname{grad} f(x_0)$, скорость изменения значений функции равна нулю.

Производную по единичному вектору данного направления обычно называют *производной по данному направлению*.

Поскольку единичный вектор в евклидовом пространстве задается направляющими косинусами:

$$e = (\cos \alpha_1, \ldots, \cos \alpha_m),$$

где α_i — угол, который вектор e образует с базисным вектором e_i декартовой системы координат, то

$$D_e f(x_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0), e \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) \cos \alpha_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0) \cos \alpha_m.$$

Вектор grad $f(x_0)$ встречается очень часто и имеет многочисленные применения. Например, на отмеченном выше геометрическом свойстве градиента основаны так называемые *градиентные методы* численного (на ЭВМ) поиска экстремумов функций многих переменных. (См. в этой связи задачу 2 в конце параграфа.)

Многие важные векторные поля, как, например, ньютоновское поле сил тяготения или кулоновское поле заряда, являются градиентами некоторых скалярных функций — потенциалов этих полей (см. задачу 3).

Многие физические законы в самой своей формулировке используют вектор grad f. Например, в механике сплошной среды эквивалентом основного закона Ньютона $ma = F$ динамики точки является соотношение

$$\rho \boldsymbol{a} = -\operatorname{grad} p,$$

связывающее ускорение $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, t)$ в потоке свободной от внешних сил идеальной жидкости или газа в точке x в момент t с плотностью среды $\rho = \rho(x, t)$ и градиентом давления $p = p(x, t)$, отнесенными к этой же точке и к этому же моменту времени (см. задачу 4).

О векторе grad f мы еще будем говорить позже, при изучении векторного анализа и элементов теории поля.

3. Дифференцирование обратного отображения

Теорема 4. *Пусть* $f: U(x) \to V(y)$ — *отображение окрестности* $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ *точки* x *на окрестность* $V(y) \subset \mathbb{R}^m$ *точки* $y = f(x)$. *Пусть* f *непрерывно в точке* x *и имеет обратное отображение* $f^{-1}: V(y) \to U(x)$, *непрерывное в точке* y.

Если при этом отображение f *дифференцируемо в точке* x *и касательное к* f *в точке* x *отображение* $f'(x): T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^m_y$ *имеет обратное отображение* $[f'(x)]^{-1}: T\mathbb{R}^m_y \to T\mathbb{R}^m_x$, *то отображение* $f^{-1}: V(y) \to U(x)$ *дифференцируемо в точке* $y = f(x)$ *и справедливо равенство*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}.$$

Таким образом, взаимно обратные дифференцируемые отображения имеют в соответствующих точках взаимно обратные касательные отображения.

◄ Положим

$$f(x) = y, \quad f(x+h) = y+t, \quad t = f(x+h) - f(x);$$

тогда

$$f^{-1}(y) = x, \quad f^{-1}(y+t) = x+h, \quad h = f^{-1}(y+t) - f^{-1}(y).$$

Будем предполагать, что h столь мало, что $x+h\in U(x)$, а значит, $y+t\in \in V(y)$.

Из непрерывности f в x и f^{-1} в y следует, что

$$t=f(x+h)-f(x)\to 0 \quad \text{при } h\to 0 \tag{19}$$

и

$$h=f^{-1}(y+t)-f^{-1}(y)\to 0 \quad \text{при } t\to 0. \tag{20}$$

Из дифференцируемости f в точке x следует, что

$$t=f'(x)h+o(h) \quad \text{при } h\to 0, \tag{21}$$

т. е. можно утверждать даже, что $t=O(h)$ при $h\to 0$ (см. соотношения (17), (18) из § 1).

Покажем, что если $f'(x)$ — обратимое линейное отображение, то и $h= =O(t)$ при $t\to 0$.

В самом деле, из (3) последовательно получаем

$$\begin{aligned} &[f'(x)]^{-1}t=h+[f'(x)]^{-1}o(h) && \text{при } h\to 0,\\ &[f'(x)]^{-1}t=h+o(h) && \text{при } h\to 0,\\ &\|[f'(x)]^{-1}t\|\geqslant \|h\|-\|o(h)\| && \text{при } h\to 0,\\ &\|[f'(x)]^{-1}t\|\geqslant \frac{1}{2}\|h\| && \text{при } \|h\|<\delta, \end{aligned} \tag{22}$$

где число $\delta>0$ выбрано так, что $\|o(h)\|<\frac{1}{2}\|h\|$ при $\|h\|<\delta$. Тогда с учетом соотношения (2) находим

$$\|h\|\leqslant 2\|[f'(x)]^{-1}t\|=O(\|t\|) \quad \text{при } t\to 0,$$

что равносильно соотношению

$$h=O(t) \quad \text{при } t\to 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$o(h)=o(t) \quad \text{при } t\to 0.$$

Учитывая это, из (2) и (4) получаем

$$h=[f'(x)]^{-1}t+o(t) \quad \text{при } t\to 0$$

или

$$f^{-1}(y+t)-f^{-1}(y)=[f'(x)]^{-1}t+o(t) \quad \text{при } t\to 0. \ ►$$

Из алгебры известно, что если линейному преобразованию $L\colon \mathbb{R}^m\to \to\mathbb{R}^m$ отвечает матрица A, то обратному к L линейному преобразованию $L^{-1}\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ соответствует матрица A^{-1}, обратная к матрице A. Построение элементов обратной матрицы также известно из алгебры, следовательно, доказанная теорема дает прямой рецепт для построения отображения $(f^{-1})'(y)$.

Отметим, что при $m=1$, т. е. при $\mathbb{R}^m=\mathbb{R}$, якобиан отображения $f: U(x) \to \to V(y)$ в точке x сводится к одному числу $f'(x)$ — производной функции f в точке x, а линейное преобразование $f'(x): T\mathbb{R}_x \to T\mathbb{R}_y$ сводится к умножению на это число: $h \mapsto f'(x)h$. Это линейное преобразование обратимо тогда и только тогда, когда $f'(x) \neq 0$, причем матрица обратного преобразования $[f'(x)x]^{-1}: T\mathbb{R}_y \to T\mathbb{R}_x$ также состоит из одного числа, равного $[f'(x)]^{-1}$, т. е. обратного к $f'(x)$. Значит, теорема 4 содержит в себе также доказанное ранее правило отыскания производной обратной функции.

Задачи и упражнения

1. a) Два пути $t \mapsto x_1(t)$, $t \mapsto x_2(t)$ в $\mathbb{R}^m$ будем считать эквивалентными в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, если $x_1(0)=x_2(0)=x_0$ и $d(x_1(t), x_2(t))=o(t)$ при $t \to 0$.

Проверьте, что указанное отношение действительно является отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

b) Проверьте, что между векторами $\boldsymbol{v} \in T\mathbb{R}^m_{x_0}$ и классами эквивалентных в точке x_0 гладких путей имеется взаимно однозначное соответствие.

c) Отождествляя касательное пространство $T\mathbb{R}^m_{x_0}$ с множеством классов эквивалентных в точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$ гладких путей, введите операции сложения классов путей и умножения их на число.

d) Проверьте, зависят ли введенные вами операции от системы координат в $\mathbb{R}^m$.

2. a) Изобразите график функции $z=x^2+4y^2$, где (x, y, z) — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$.

b) Пусть $f: G \to \mathbb{R}$ — числовая функция, определенная в области $G \subset \mathbb{R}^m$. *Уровнем* (c-уровнем) функции называется множество $E \subset G$, на котором функция принимает одно значение ($f(E)=c$). Точнее, $E=f^{-1}(c)$. Изобразите в $\mathbb{R}^2$ уровни функции, указанной в a).

c) Найдите градиент функции $f(x, y)=x^2+4y^2$ и проверьте, что в любой точке (x, y) вектор $\operatorname{grad} f$ ортогонален линии уровня функции f, проходящей через эту точку.

d) Используя результаты задач a), b), c), проложите на поверхности $z=x^2+4y^2$ самый короткий, на ваш взгляд, маршрут спуска из точки $(2, 1, 8)$ поверхности в низшую ее точку $(0, 0, 0)$.

e) Какой алгоритм, пригодный для ЭВМ, вы могли бы предложить для отыскания минимума функции $f(x, y)=x^2+4y^2$?

3. Говорят, что в области G пространства $\mathbb{R}^m$ задано *векторное поле*, если каждой точке $x \in G$ сопоставлен некоторый вектор $\boldsymbol{v}(x) \in T\mathbb{R}^m_x$. Векторное поле $\boldsymbol{v}(x)$ в G называется *потенциальным*, если в области G есть числовая функция $U: G \to \mathbb{R}$ такая, что $\boldsymbol{v}(x)=\operatorname{grad} U(x)$. Функцию $U(x)$ называют *потенциалом* поля $\boldsymbol{v}(x)$. (В физике потенциалом обычно называют функцию $-U(x)$, а функцию $U(x)$ называют *силовой функцией*, если речь идет о поле сил.)

a) Изобразите на плоскости с декартовыми координатами (x, y) поле $\operatorname{grad} f(x, y)$ для каждой из функций $f_1(x, y)=x^2+y^2$; $f_2(x, y)=-(x^2+y^2)$; $f_3(x, y)=\operatorname{arctg}(x/y)$ в области $y>0$; $f_4(x, y)=xy$.

b) Согласно закону Ньютона частица массы m, находящаяся в точке $0 \in \mathbb{R}^3$, притягивает частицу массы 1, находящуюся в точке $x \in \mathbb{R}^3$ $(x \neq 0)$, с силой $\boldsymbol{F}=-m|\boldsymbol{r}|^{-3}\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ — вектор $\overrightarrow{0x}$ (размерную постоянную G мы опустили). Покажите, что векторное поле $\boldsymbol{F}(x)$ в $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ потенциально.

c) Проверьте, что массы m_i, $(i=1, \ldots, n)$, помещенные в точках (ξ_i, η_i, ζ_i) $(i=1, \ldots, n)$ соответственно, создают вне этих точек ньютоновское поле сил, потенциалом которого служит функция

$$U(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sqrt{(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2 + (z-\zeta_i)^2}}.$$

d) Укажите потенциал кулоновского электростатического поля напряженности, создаваемого точечными зарядами q_i $(i=1, \ldots, n)$, помещенными в точках (ξ_i, η_i, ζ_i) $(i=1, \ldots, n)$ соответственно.

4. Рассмотрим движение идеальной несжимаемой жидкости в пространстве, свободном от внешних (в том числе и гравитационных) сил.

Пусть $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z, t)$, $\rho = \rho(x, y, z, t)$, $p = p(x, y, z, t)$ суть соответственно скорость, ускорение, плотность и давление в точке (x, y, z) среды в момент времени t.

Идеальность жидкости означает, что давление в любой ее точке не зависит от направления.

a) Выделите из жидкости объем в виде небольшого параллелепипеда, одно из ребер которого параллельно вектору $\operatorname{grad} p(x, y, z, t)$ (где $\operatorname{grad} p$ берется по пространственным координатам). Оцените действующую на объем за счет перепада давления силу и дайте приближенную формулу для ускорения этого объема, считая жидкость несжимаемой.

b) Проверьте, согласуется ли полученный вами в a) результат с *уравнением Эйлера*

$$\rho \boldsymbol{a} = -\operatorname{grad} p.$$

c) Линия, в любой точке которой касательная имеет направление вектора скорости в этой точке, называется *линией тока*. Движение называется *установившимся*, если функции $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{a}$, ρ, p не зависят от t. Используя b), покажите, что вдоль линий тока в установившемся потоке несжимаемой жидкости величина $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2 + p/\rho$ постоянна (*закон Бернулли*[1]).

d) Как изменятся формулы в a) и b), если движение будет происходить в поле тяжести вблизи поверхности Земли? Покажите, что в этом случае

$$\rho \boldsymbol{a} = -\operatorname{grad}(gz + p)$$

и потому вдоль каждой линии тока установившегося движения несжимаемой жидкости на сей раз постоянна величина $\frac{1}{2}\|\boldsymbol{v}\|^2 + gz + p/\rho$, где g — ускорение силы тяжести, а z — высота точки линии тока, отсчитываемая от некоторого нулевого уровня.

e) Объясните на основании предыдущих результатов, почему несущее крыло имеет характерный выпуклый вверх профиль.

f) В цилиндрический стакан с круглым дном радиуса R налита до уровня h несжимаемая идеальная жидкость плотности ρ. После этого стакан стали вращать вокруг его оси с угловой скоростью ω. Используя несжимаемость жидкости, найдите уравнение $z = f(x, y)$ ее поверхности в установившемся режиме (см. также задачу 3 из гл. V, § 1).

[1] Д. Бернулли (1700—1782) — швейцарский ученый, один из наиболее выдающихся физиков и математиков своего времени.

g) По найденному в f) уравнению $z=f(x,y)$ поверхности напишите формулу $p=$ $=p(x,y,z)$ для давления в любой точке (x,y,z) объема, заполненного вращающейся жидкостью. Проверьте, выполнено ли для найденной вами формулы полученное в d) уравнение $\rho\boldsymbol{a}=-\operatorname{grad}(gz+p)$.

h) Не могли бы вы теперь объяснить, почему чаинки тонут (хотя и не слишком быстро!), а при вращении чая собираются не у стенок стакана, а в центре дна?

5. *Оценка погрешностей вычисления значений функции.*

a) Используя определение дифференцируемой функции и приближенное равенство $\Delta f(x;h)\approx df(x)h$, покажите, что относительная погрешность $\delta=\delta(f(x);h)$ в значении произведения $f(x)=x^1\dots x^m$ m отличных от нуля сомножителей, вызванная погрешностями в задании самих сомножителей, может быть найдена в виде $\delta\approx\sum\limits_{i=1}^{m}\delta_i$, где δ_i — относительная погрешность задания i-го сомножителя.

b) Используя то, что $d\ln f(x)=\dfrac{1}{f(x)}df(x)$, еще раз получите результат предыдущей задачи и покажите, что вообще относительную погрешность дроби

$$\frac{f_1\dots f_n}{g_1\dots g_k}(x_1,\dots,x_m)$$

можно найти как сумму относительных погрешностей значений функций $f_1,\dots,f_n$, $g_1,\dots,g_k$.

6. *Однородные функции и тождество Эйлера.* Функция $f\colon G\to\mathbb{R}$, определенная в некоторой области $G\subset\mathbb{R}^m$, называется *однородной* (*положительно однородной*) *степени* n, если для любых $x\in\mathbb{R}^m$ и $\lambda\in\mathbb{R}$ таких, что $x\in G$ и $\lambda x\in G$, имеет место равенство

$$f(\lambda x)=\lambda^n f(x)\quad (f(\lambda x)=|\lambda|^n f(x)).$$

Функция называется *локально однородной* степени n в области G, если она является однородной функцией указанной степени в некоторой окрестности любой точки области G.

a) Докажите, что в выпуклой области всякая локально однородная функция является однородной.

b) Пусть область G есть плоскость $\mathbb{R}^2$ без луча $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=2\wedge y\geqslant 0\}$. Проверьте, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases} y^4/x, & \text{если } x>2\wedge y>0,\\ y^3 & \text{в остальных точках области}\end{cases}$$

локально однородна в G, но не является однородной функцией в этой области.

c) Укажите степень однородности или положительной однородности следующих функций, рассматриваемых в их естественной области определения:

$$f_1(x^1,\dots,x^m)=x^1x^2+x^2x^3+\dots+x^{m-1}x^m;$$

$$f_2(x^1,x^2,x^3,x^4)=\frac{x^1x^2+x^3x^4}{x^1x^2x^3+x^2x^3x^4};$$

$$f_3(x^1,\dots,x^m)=|x^1\dots x^m|^l.$$

d) Продифференцировав равенство $f(tx)=t^n f(x)$ по t, покажите, что если дифференцируемая функция $f\colon G\to\mathbb{R}$ локально однородна степени n в области $G\subset\mathbb{R}^m$, то

она удовлетворяет в G следующему *тождеству Эйлера для однородных функций*:

$$x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, \ldots, x^m) + \ldots + x^m \frac{\partial f}{\partial x^m}(x^1, \ldots, x^m) \equiv nf(x^1, \ldots, x^m).$$

е) Покажите, что если для дифференцируемой в области G функции $f\colon G \to \mathbb{R}$ выполнено тождество Эйлера, то эта функция локально однородна степени n в области G.

Указание. Проверьте, что функция $\varphi(t) = t^{-n} f(tx)$ при любом $x \in G$ определена и постоянна в некоторой окрестности единицы.

7. *Однородные функции и метод размерности.*

1° *Размерность физической величины и особенности функциональных связей между физическими величинами.*

Физические законы устанавливают взаимосвязи физических величин, поэтому если для некоторых из этих величин принять какие-то единицы измерения, то единицы измерения связанных с ними других величин будут определенным образом выражаться через единицы измерения фиксированных величин. Так возникают основные и производные единицы той или иной системы единиц измерения.

В системе СИ (Système International) за основные механические единицы измерения приняты единицы длины — метр (м), массы — килограмм (кг) и времени — секунда (с).

Выражение производной единицы измерения через основные называется ее *размерностью*. Это определение ниже будет уточнено.

Размерность любой механической величины записывают символически в виде формулы, выражающей ее через предложенные Максвеллом[1] символы L, M, T размерностей указанных выше основных единиц. Например, размерности скорости, ускорения и силы имеют соответственно вид

$$[v] = LT^{-1}, \quad [a] = LT^{-2}, \quad [F] = MLT^{-2}.$$

Если физические законы не зависят от выбора единиц измерения, то отражением этой инвариантности должны быть определенные особенности функциональной зависимости

$$x_0 = f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

между числовыми характеристиками физических величин.

Рассмотрим, например, зависимость $c = f(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$ между длинами катетов и длиной гипотенузы прямоугольного треугольника. Изменение масштаба длин должно одинаково сказаться на всех длинах, поэтому для любых допустимых значений a и b должно быть выполнено соотношение $f(\alpha a, \alpha b) = \varphi(\alpha) f(a, b)$, причем в нашем случае $\varphi(\alpha) = \alpha$.

Основная (на первый взгляд очевидная) предпосылка теории размерности состоит в том, что *претендующая на физическую значимость зависимость* $(*)$ *должна быть такой, чтобы при изменении масштабов основных единиц измерения численные значения всех одноименных величин, участвующих в формуле, менялись в одно и то же число раз.*

---

[1] Дж. К. Максвелл (1831—1879) — выдающийся английский физик; создал математическую теорию электромагнитного поля, известен также исследованиями по кинетической теории газов, оптике и механике.

В частности, если x_1, x_2, x_3 — основные независимые физические величины и $(x_1, x_2, x_3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3)$ — зависимость от них некоторой четвертой физической величины, то, в силу сформулированного принципа, при любых допустимых значениях x_1, x_2, x_3 должно быть выполнено равенство

$$f(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3) = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) f(x_1, x_2, x_3), \qquad (**)$$

с некоторой конкретной функцией φ.

Функция φ в равенстве $(**)$ полностью характеризует зависимость численного значения рассматриваемой физической величины от изменения масштабов основных фиксированных физических величин. Таким образом, эту функцию и следует считать *размерностью* данной физической величины по отношению к фиксированным основным единицам измерения.

Уточним теперь вид функции размерности.

a) Пусть $x \mapsto f(x)$ — функция одного переменного, удовлетворяющая условию $f(\alpha x) = \varphi(\alpha) f(x)$, где f и φ — дифференцируемые функции.

Покажите, что $\varphi(\alpha) = \alpha^d$.

b) Покажите, что функция размерности φ в равенстве $(**)$ всегда имеет вид $\alpha_1^{d_1} \cdot \alpha_2^{d_2} \cdot \alpha_3^{d_3}$, где показатели степени d_1, d_2, d_3 суть некоторые действительные числа. Таким образом, если, например, фиксированы основные единицы L, M, T, то набор (d_1, d_2, d_3) показателей в степенном выражении $L^{d_1} M^{d_2} T^{d_3}$ также можно считать *размерностью* данной физической величины.

c) В b) было получено, что функция размерности всегда имеет вид степенной зависимости, т. е. является однородной функцией определенной степени по каждой из основных единиц измерения. Что означает, что степень однородности функции размерности некоторой физической величины по отношению к одной из основных единиц измерения равна нулю?

2° П-*теорема и метод размерности.*

Пусть $[x_i] = X_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — размерности физических величин, участвующих в законе $(*)$.

Предположим, что размерности величин $x_0, x_{k+1}, \ldots, x_n$ могут быть выражены через размерности величин $x_1, \ldots, x_k$, т. е.

$$[x_0] = X_0 = X_1^{p_0^1} \ldots X_k^{p_0^k},$$
$$[x_{k+i}] = X_{k+i} = X_1^{p_i^1} \ldots X_k^{p_i^k} \quad (i = 1, \ldots, n-k).$$

d) Покажите, что тогда наряду с $(*)$ должно быть справедливо соотношение

$$\alpha_1^{p_0^1} \ldots \alpha_k^{p_0^k} x_0 = f\big(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_k x_k, \alpha_1^{p_1^1} \ldots \alpha_k^{p_1^k} x_{k+1}, \ldots, \alpha_1^{p_{n-k}^1} \ldots \alpha_k^{p_{n-k}^k} x_n\big). \qquad (***)$$

e) Если $x_1, \ldots, x_k$ независимы, то в $(***)$ положим $\alpha_1 = x_1^{-1}, \ldots, \alpha_k = x_k^{-1}$. Проверьте, что при этом из $(***)$ получается равенство

$$\frac{x_0}{x_1^{p_0^1} \ldots x_k^{p_0^k}} = f\left(1, \ldots, 1, \frac{x_{k+1}}{x_1^{p_1^1} \ldots x_k^{p_1^k}}, \ldots, \frac{x_n}{x_1^{p_{n-k}^1} \ldots x_k^{p_{n-k}^k}}\right),$$

являющееся соотношением

$$\Pi = f(1, \ldots, 1, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}) \qquad (****)$$

между безразмерными величинами $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$.

Таким образом, получается следующая

П-ТЕОРЕМА ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ. *Если в соотношении* $(*)$ *величины* $x_1, \ldots, x_k$ *независимы, то это соотношение сводится к функции* $(****)$ *от* $n-k$ *безразмерных параметров.*

f) Проверьте, что если $k=n$, то на основании П-теоремы функция f из соотношения $(*)$ может быть найдена с точностью до числового множителя. Найдите таким путем выражение $c(\varphi_0)\sqrt{l/g}$ для периода колебаний маятника (т. е. подвешенной на нити длины l массы m, качающейся у поверхности Земли; φ_0 — начальный угол отклонения).

g) Найдите формулу $P=c\sqrt{mr/F}$ для периода обращения тела массы m, удерживаемого на круговой орбите центральной силой величины F.

h) Из закона Кеплера $(P_1/P_2)^2=(r_1/r_2)^3$, устанавливающего в применении к круговым орбитам связь между отношением периодов обращения планет (спутников) и отношением радиусов их орбит, найдите, вслед за Ньютоном, показатель степени α в законе $F=G\dfrac{m_1m_2}{r^\alpha}$ всемирного тяготения.

§ 4. Основные факты дифференциального исчисления вещественнозначных функций многих переменных

1. Теорема о среднем

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $f\colon G\to\mathbb{R}$ — *вещественнозначная функция, определенная в области* $G\subset\mathbb{R}^m$. *Пусть отрезок* $[x, x+h]$ *с концами* x, $x+h$ *содержится в* G. *Если при этих условиях функция* f *непрерывна в точках отрезка* $[x, x+h]$ *и дифференцируема в точках интервала* $]x, x+h[$, *то найдется такая точка* $\xi\in]x, x+h[$, *что имеет место равенство*

$$\boxed{f(x+h)-f(x)=f'(\xi)h.} \tag{1}$$

◄ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t)=f(x+th),$$

определенную на отрезке $0\leqslant t\leqslant 1$. Функция F удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа: она непрерывна на $[0,1]$, как композиция непрерывных отображений, и дифференцируема в интервале $]0,1[$, как композиция дифференцируемых отображений. Следовательно, найдется точка $\theta\in]0,1[$ такая, что

$$F(1)-F(0)=F'(\theta)\cdot 1.$$

Но $F(1)=f(x+h)$, $F(0)=f(x)$, $F'(\theta)=f'(x+\theta h)h$ и, значит, выделенное равенство совпадает с утверждением теоремы 1. ►

Приведем теперь координатную форму записи соотношения (1).

Если $x=(x^1,\ldots,x^m)$, $h=(h^1,\ldots,h^m)$ и $\xi=(x^1+\theta h^1,\ldots,x^m+\theta h^m)$, то равенство (1) означает, что

$$f(x+h)-f(x)=f(x^1+h^1,\ldots,x^m+h^m)-f(x^1,\ldots,x^m)=$$
$$=f'(\xi)h=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(\xi),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x^m}(\xi)\right)\begin{pmatrix}h^1\\ \vdots\\ h^m\end{pmatrix}=$$
$$=\partial_1 f(\xi)h^1+\ldots+\partial_m f(\xi)h^m=\sum_{i=1}^m \partial_i f(x^1+\theta h^1,\ldots,x^m+\theta h^m)h^i.$$

Используя соглашение о суммировании по повторяющемуся сверху и снизу индексу, окончательно можно записать

$$f(x^1+h^1,\ldots,x^m+h^m)-f(x^1,\ldots,x^m)=\partial_i f(x^1+\theta h^1,\ldots,x^m+\theta h^m)h^i, \quad (1')$$

где $0<\theta<1$, причем θ зависит и от x, и от h.

Замечание. Теорема 1 называется теоремой о среднем в связи с тем, что существует некоторая «средняя» точка $\xi\in\,]x,x+h[$, в которой выполняется равенство (1). Мы уже отмечали при обсуждении теоремы Лагранжа (см. гл. V, § 3, п. 1), что теорема о среднем специфична именно для вещественнозначных функций. Общая теорема о конечном приращении для отображений будет доказана в главе X (часть II).

Из теоремы 1 вытекает полезное

Следствие. *Если функция $f\colon G\to\mathbb{R}$ дифференцируема в области $G\subset\mathbb{R}^m$ и в любой точке $x\in G$ ее дифференциал равен нулю, то f постоянна в области G.*

◄ Равенство нулю линейного отображения равносильно обращению в нуль всех элементов отвечающей ему матрицы. В нашем случае

$$df(x)h=(\partial_1 f,\ldots,\partial_m f)(x)h,$$

поэтому $\partial_1 f(x)=\ldots=\partial_m f(x)=0$ в любой точке $x\in G$.

По определению, область есть открытое связное множество. Воспользуемся этим.

Покажем сначала, что если $x\in G$, то в шаре $B(x;r)\subset G$ функция f постоянна. Действительно, если $(x+h)\in B(x;r)$, то и $[x,x+h]\subset B(x;r)\subset G$. Применяя соотношение (1) или (1′), получаем

$$f(x+h)-f(x)=f'(\xi)h=0\cdot h=0,$$

т. е. $f(x+h)=f(x)$ и значения f в шаре $B(x;r)$ совпадают со значением f в центре этого шара.

Пусть теперь $x_0,x_1\in G$ — произвольные точки области G. В силу связности G найдется путь $t\mapsto x(t)\in G$ такой, что $x(0)=x_0$, $x(1)=x_1$. Мы предполагаем, что непрерывное отображение $t\mapsto x(t)$ определено на отрезке $0\leqslant t\leqslant 1$.

Пусть $B(x_0; r)$ — шар с центром в x_0, содержащийся в G. Поскольку $x(0)=x_0$ и отображение $t \mapsto x(t)$ непрерывно, найдется положительное число δ такое, что $x(t) \in B(x_0; r) \subset G$ при $0 \leqslant t \leqslant \delta$. Тогда по доказанному $(f \circ x)(t) \equiv f(x_0)$ на промежутке $[0, \delta]$.

Пусть $l = \sup \delta$, где верхняя грань берется по всем числам $\delta \in [0, 1]$ таким, что $(f \circ x)(t) \equiv f(x_0)$ на промежутке $[0, \delta]$. В силу непрерывности функции $f(x(t))$ имеем $f(x(l)) = f(x_0)$. Но тогда $l = 1$. Действительно, в противном случае можно было бы взять некоторый шар $B(x(l); r) \subset G$, в котором $f(x) = f(x(l)) = f(x_0)$, затем в силу непрерывности отображения $t \mapsto x(t)$ найти $\Delta > 0$ так, что $x(t) \in B(x(l); r)$ при $l \leqslant t \leqslant l + \Delta$. Тогда

$$(f \circ x)(t) = f(x(l)) = f(x_0) \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant l + \Delta \text{ и } l \neq \sup \delta.$$

Итак, показано, что $(f \circ x)(t) = f(x_0)$ при любом $t \in [0, 1]$. В частности, $(f \circ x)(1) = f(x_1) = f(x_0)$ и мы проверили, что в любых двух точках $x_0, x_1 \in G$ значения функции $f : G \to \mathbb{R}$ совпадают. ►

2. Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных

Теорема 2. *Пусть $f : U(x) \to \mathbb{R}$ — функция, определенная в окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ точки $x = (x^1, \ldots, x^m)$.*

Если функция f имеет в каждой точке окрестности $U(x)$ все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}$, то из их непрерывности в точке x следует дифференцируемость функции f в этой точке.

◄ Без ограничения общности будем считать, что $U(x)$ является шаром $B(x; r)$. Тогда вместе с точками $x = (x^1, \ldots, x^m)$, $x + h = (x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m)$ области $U(x)$ должны принадлежать также точки $(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^m + h^m), \ldots, (x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, x^m + h^m)$ и соединяющие их отрезки. Воспользуемся этим, применяя в следующей выкладке теорему Лагранжа для функций одной переменной:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) = \\ &= f(x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^m + h^m) + \\ &\quad + f(x^1, x^2 + h^2, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, x^2, x^3 + h^3, \ldots, x^m + h^m) + \ldots \\ &\quad \ldots + f(x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, x^m + h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) = \\ &= \partial_1 f(x^1 + \theta^1 h^1, x^2 + h^2, \ldots, x^m + h^m) h^1 + \\ &\quad + \partial_2 f(x^1, x^2 + \theta^2 h^2, x^3 + h^3, \ldots, x^m + h^m) h^2 + \ldots \\ &\quad \ldots + \partial_m f(x^1, x^2, \ldots, x^{m-1}, x^m + \theta^m h^m) h^m. \end{aligned}$$

Пока мы воспользовались лишь наличием у функции f в области $U(x)$ частных производных по каждой из переменных.

Теперь воспользуемся их непрерывностью в точке x. Продолжая предыдущую выкладку, получаем, что

$$f(x+h)-f(x)=\partial_1 f(x^1,\ldots,x^m)h^1+\alpha^1h^1+\partial_2 f(x^1,\ldots,x^m)h^2+\alpha^2h^2+\ldots$$
$$\ldots+\partial_m f(x^1,\ldots,x^m)h^m+\alpha^m h^m,$$

где величины $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ в силу непрерывности частных производных в точке x стремятся к нулю при $h\to 0$.

Но это означает, что

$$f(x+h)-f(x)=L(x)h+o(h) \quad \text{при } h\to 0,$$

где $L(x)h=\partial_1 f(x^1,\ldots,x^m)h^1+\ldots+\partial_m f(x^1,\ldots,x^m)h^m$. ►

Из теоремы 2 следует, что если частные производные функции $f\colon G\to\mathbb{R}$ непрерывны в области $G\subset\mathbb{R}^m$, то функция дифференцируема в любой точке этой области.

Условимся в дальнейшем через $C^{(1)}(G;\mathbb{R})$ или, проще, через $C^{(1)}(G)$ обозначать множество функций, имеющих в области G непрерывные частные производные.

3. Частные производные высшего порядка. Если функция $f\colon G\to\mathbb{R}$, определенная в некоторой области $G\subset\mathbb{R}^m$, имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ по одной из переменных $x^1,\ldots,x^m$, то эта частная производная вновь является некоторой функцией $\partial_i f\colon G\to\mathbb{R}$, которая в свою очередь может иметь частную производную $\partial_j(\partial_i f)(x)$ по некоторой переменной x^j.

Функция $\partial_j(\partial_i f)\colon G\to\mathbb{R}$ называется *второй производной от функции f по переменным x^i, x^j* и обозначается одним из символов

$$\partial_{ji}f(x), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}(x).$$

Порядок индексов указывает, в каком порядке производится дифференцирование по соответствующим переменным.

Мы определили частные производные второго порядка.

Если определена частная производная

$$\partial_{i_1\ldots i_k}f(x)=\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_k}}(x)$$

порядка k, то по индукции определяем частную производную порядка $k+1$ соотношением

$$\partial_{ii_1\ldots i_k}f(x):=\partial_i(\partial_{i_1\ldots i_k}f)(x).$$

Здесь возникает специфический для случая функций многих переменных вопрос о том, влияет ли порядок дифференцирований на вычисляемую частную производную.

Теорема 3. *Если функция* $f: G\to\mathbb{R}$ *имеет в области* G *частные производные*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}(x),$$

то в любой точке $x\in G$, *в которой обе эти производные непрерывны, их значения совпадают.*

◄ Пусть $x\in G$ — точка, в которой обе функции $\partial_{ij}f: G\to\mathbb{R}$, $\partial_{ji}f: G\to\mathbb{R}$ непрерывны. Дальнейшие рассмотрения будем проводить в некотором шаре $B(x;r)\subset G$, $r>0$, являющемся выпуклой окрестностью точки x. Мы хотим проверить, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x^1,\ldots,x^m)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}(x^1,\ldots,x^m).$$

Поскольку во всех дальнейших выкладках меняться будут только переменные x^i и x^j, то мы для сокращения записи предположим, что f есть функция двух переменных $f(x^1,x^2)$, и нам надо проверить, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^2}(x^1,x^2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^1}(x^1,x^2),$$

если в точке $(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2$ обе указанные функции непрерывны.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(h^1,h^2)=f(x^1+h^1,x^2+h^2)-f(x^1+h^1,x^2)-f(x^1,x^2+h^2)+f(x^1,x^2),$$

где смещение $h=(h^1,h^2)$ предполагается достаточно малым, а именно таким, что $x+h\in B(x;r)$.

Если $F(h^1,h^2)$ рассмотреть как разность

$$F(h^1,h^2)=\varphi(1)-\varphi(0),$$

где $\varphi(t)=f(x^1+th^1,x^2+h^2)-f(x^1+th^1,x^2)$, то по теореме Лагранжа найдем, что

$$F(h^1,h^2)=\varphi'(\theta_1)=\big(\partial_1 f(x^1+\theta_1h^1,x^2+h^2)-\partial_1 f(x^1+\theta_1h^1,x^2)\big)h^1.$$

Применяя к последней разности вновь теорему Лагранжа, найдем, что

$$F(h^1,h^2)=\partial_{21}f(x^1+\theta_1h^1,x^2+\theta_2h^2)h^2h^1. \tag{2}$$

Если теперь $F(h^1,h^2)$ представить в виде разности

$$F(h^1,h^2)=\widetilde{\varphi}(1)-\widetilde{\varphi}(0),$$

где $\widetilde{\varphi}(t)=f(x^1+h^1,x^2+th^2)-f(x^1,x^2+th^2)$, то аналогично найдем, что

$$F(h^1,h^2)=\partial_{12}f(x^1+\tilde{\theta}_1h^1,x^2+\tilde{\theta}_2h^2)h^1h^2. \tag{3}$$

Сравнивая равенства (2) и (3), заключаем, что

$$\partial_{21}f(x^1+\theta_1h^1,x^2+\theta_2h^2)=\partial_{12}f(x^1+\tilde{\theta}_1h^1,x^2+\tilde{\theta}_2h^2), \tag{4}$$

где $\theta_1, \theta_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \in]0, 1[$. Воспользовавшись непрерывностью рассматриваемых частных производных в точке (x^1, x^2) при $h \to 0$, из (4) получаем нужное равенство

$$\partial_{21} f(x^1, x^2) = \partial_{12} f(x^1, x^2). \ \blacktriangleright$$

Заметим, что без каких-либо дополнительных предположений, вообще говоря, нельзя утверждать, что справедливо равенство $\partial_{ij} f(x) = \partial_{ji} f(x)$, если обе указанные частные производные определены в точке x (см. задачу 2 в конце параграфа).

Договоримся в дальнейшем через $C^{(k)}(G; \mathbb{R})$ или $C^{(k)}(G)$ обозначать множество функций $f: G \to \mathbb{R}$, все частные производные которых до порядка k включительно определены и непрерывны в области $G \subset \mathbb{R}^m$.

В качестве следствия теоремы 3 получаем

Утверждение 1. *Если $f \in C^{(k)}(G; \mathbb{R})$, то значение $\partial_{i_1 \ldots i_k} f(x)$ частной производной не зависит от порядка $i_1, \ldots, i_k$ дифференцирования, т. е. остается тем же при любой перестановке индексов $i_1, \ldots, i_k$.*

$\blacktriangleleft$ В случае $k = 2$ это утверждение содержится в теореме 3.

Предположим, что утверждение справедливо до порядка n включительно. Покажем, что тогда оно справедливо и для порядка $n+1$.

Но $\partial_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}} f(x) = \partial_{i_1}(\partial_{i_2 \ldots i_{n+1}} f)(x)$. Индексы $i_2, \ldots, i_{n+1}$ по предположению индукции можно переставлять, не меняя функции $\partial_{i_2 \ldots i_{n+1}} f(x)$, а следовательно, и функции $\partial_{i_1 \ldots i_{n+1}} f(x)$. Поэтому достаточно проверить, что можно переставлять также, например, индексы i_1 и i_2, не меняя значения производной $\partial_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}} f(x)$.

Поскольку

$$\partial_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}} f(x) = \partial_{i_1 i_2}(\partial_{i_3 \ldots i_{n+1}} f)(x),$$

то возможность этой перестановки непосредственно вытекает из теоремы 3. В силу принципа индукции утверждение 1 доказано. $\blacktriangleright$

Пример 1. Пусть $f(x) = f(x^1, x^2)$ — функция класса $C^{(k)}(G; \mathbb{R})$.

Пусть $h = (h^1, h^2)$ таково, что отрезок $[x, x+h]$ содержится в области G. Покажем, что функция

$$\varphi(t) = f(x + th),$$

определенная на отрезке $[0, 1]$, принадлежит классу $C^{(k)}[0, 1]$, и найдем ее производную по t порядка k.

Имеем

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \partial_1 f(x^1 + th^1, x^2 + th^2)h^1 + \partial_2 f(x^1 + th^1, x^2 + th^2)h^2, \\
\varphi''(t) &= \partial_{11} f(x + th)h^1 h^1 + \partial_{21} f(x + th)h^2 h^1 + \\
&\qquad + \partial_{12} f(x + th)h^1 h^2 + \partial_{22} f(x + th)h^2 h^2 = \\
&= \partial_{11} f(x + th)(h^1)^2 + 2\partial_{12} f(x + th)h^1 h^2 + \partial_{22} f(x + th)(h^2)^2.
\end{aligned}$$

Эти соотношения можно записать в форме действия на функцию оператора $(h^1\partial_1 + h^2\partial_2)$:

$$\varphi'(t) = (h^1\partial_1 + h^2\partial_2)f(x+th) = h^i\partial_i f(x+th),$$
$$\varphi''(t) = (h^1\partial_1 + h^2\partial_2)^2 f(x+th) = h^{i_1}h^{i_2}\partial_{i_1 i_2} f(x+th).$$

По индукции получаем

$$\varphi^{(k)}(t) = (h^1\partial_1 + h^2\partial_2)^k f(x+th) = h^{i_1}\dots h^{i_k}\partial_{i_1\dots i_k} f(x+th)$$

(имеется в виду суммирование по всевозможным наборам $i_1, \dots, i_k$ из k индексов, каждый из которых принимает значения 1 или 2).

Пример 2. Если $f(x) = f(x^1, \dots, x^m)$ и $f \in C^{(k)}(G; \mathbb{R})$, то, в предположении, что $[x, x+h] \subset G$, для функции $\varphi(t) = f(x+th)$, определенной на отрезке $[0, 1]$, получаем

$$\varphi^{(k)}(t) = h^{i_1}\dots h^{i_k}\partial_{i_1\dots i_k} f(x+th), \tag{5}$$

где справа имеется в виду суммирование по всевозможным наборам индексов $i_1, \dots, i_k$, каждый из которых может принимать любое значение от 1 до m включительно.

Формулу (5) можно записать также в виде

$$\varphi^{(k)}(t) = (h^1\partial_1 + \dots + h^m\partial_m)^k f(x+th). \tag{6}$$

4. Формула Тейлора

Теорема 4. *Если функция $f: U(x) \to \mathbb{R}$ определена и принадлежит классу $C^{(n)}(U(x); \mathbb{R})$ в окрестности $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ точки $x \in \mathbb{R}^m$, а отрезок $[x, x+h]$ полностью содержится в $U(x)$, то имеет место равенство*

$$f(x^1+h^1, \dots, x^m+h^m) - f(x^1, \dots, x^m) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}(h^1\partial_1 + \dots + h^m\partial_m)^k f(x) + r_{n-1}(x; h), \tag{7}$$

где

$$r_{n-1}(x; h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}(h^1\partial_1 + \dots + h^m\partial_m)^n f(x+th)\, dt. \tag{8}$$

Равенство (7) совместно с соотношением (8) называется *формулой Тейлора с интегральной формой остаточного члена.*

◄ Формула Тейлора (7) немедленно следует из соответствующей формулы Тейлора для функции одной переменной. В самом деле, рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x+th),$$

которая в силу условий теоремы 4 определена на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ и (как мы проверили выше) принадлежит классу $C^{(n)}[0, 1]$.

Тогда при $\tau \in [0, 1]$ в силу формулы Тейлора для функций одной переменной можно записать, что

$$\varphi(\tau) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0)\tau + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\tau^{n-1} + \\ + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(t\tau)\tau^n\,dt.$$

Полагая здесь $\tau = 1$, получаем

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n)}(t)\,dt. \qquad (9)$$

Подставляя в полученное равенство, в соответствии с формулой (6), значения

$$\varphi^{(k)}(0) = (h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m)^k f(x) \quad (k = 0, \ldots, n-1),$$
$$\varphi^{(n)}(t) = (h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m)^n f(x + th),$$

получаем то, что и утверждает теорема 4. ►

Замечание. Если вместо интегральной формы остаточного члена в соотношении (9) написать остаточный член в форме Лагранжа, то из равенства

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta),$$

где $0 < \theta < 1$, получается формула Тейлора (7) с остаточным членом

$$r_{n-1}(x; h) = \frac{1}{n!}(h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m)^n f(x + \theta h). \qquad (10)$$

Эту форму остаточного члена, так же как и в случае функций одной переменной, называют *формой Лагранжа остаточного члена формулы Тейлора*.

Коль скоро $f \in C^{(n)}(U(x); \mathbb{R})$, то из (10) следует, что

$$r_{n-1}(x; h) = \frac{1}{n!}(h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m)^n f(x) + o(\|h\|^n) \quad \text{при } h \to 0,$$

поэтому имеет место равенство

$$f(x^1 + h^1, \ldots, x^m + h^m) - f(x^1, \ldots, x^m) = \\ = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(h^1\partial_1 + \ldots + h^m\partial_m)^k f(x) + o(\|h\|^n) \quad \text{при } h \to 0, \quad (11)$$

называемое *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*.

5. Экстремумы функций многих переменных. Одним из важнейших применений дифференциального исчисления является его использование для отыскания и исследования экстремумов функций.

Определение 1. Говорят, что функция $f: E \to \mathbb{R}$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, имеет *локальный максимум* (*локальный минимум*) во внутренней точке x_0 множества E, если существует окрестность $U(x_0) \subset E$ точки x_0 такая, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно, $f(x) \geqslant f(x_0)$) при $x \in U(x_0)$.

Если при $x \in U(x_0) \setminus x_0$ имеет место строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ (или, соответственно, $f(x) > f(x_0)$), то говорят, что функция имеет в точке x_0 *строгий локальный максимум* (*строгий локальный минимум*).

Определение 2. Локальные минимумы и локальные максимумы функции называют ее *локальными экстремумами*.

Теорема 5. *Пусть функция $f: U(x_0) \to \mathbb{R}$, определенная в окрестности $U(x_0) \subset \mathbb{R}^m$ точки $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m)$, имеет в точке x_0 частные производные по каждой из переменных $x^1, \ldots, x^m$.*

Тогда для того, чтобы функция имела в x_0 локальный экстремум, необходимо, чтобы в этой точке были выполнены равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0) = 0. \tag{12}$$

◄ Рассмотрим функцию $\varphi(x^1) = f(x^1, x_0^2, \ldots, x_0^m)$ одной переменной, определенную, в силу условий теоремы, в некоторой окрестности точки x_0^1 вещественной оси. В точке x_0^1 функция $\varphi(x^1)$ имеет локальный экстремум, и поскольку

$$\varphi'(x_0^1) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^m),$$

то $\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) = 0$.

Аналогично доказываются и остальные равенства системы (12). ►

Обратим внимание на то, что равенства (12) дают лишь необходимые, но не достаточные условия экстремума функции многих переменных. Примером, подтверждающим это, может стать любой пример, построенный по этому же поводу для функции одной переменной. Так, если раньше мы говорили о функции $x \mapsto x^3$, имеющей в нуле нулевую производную, но не имеющей там экстремума, то теперь можно рассмотреть функцию

$$f(x^1, \ldots, x^m) = (x^1)^3,$$

все частные производные которой в точке $x_0 = (0, \ldots, 0)$ равны нулю, но экстремума в этой точке функция, очевидно, не имеет.

Теорема 5 показывает, что если функция $f: G \to \mathbb{R}$ определена на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^m$, то ее локальные экстремумы находятся либо среди точек, в которых f не дифференцируема, либо в тех точках, в которых дифференциал $df(x_0)$ или, что то же самое, касательное отображение $f'(x_0)$ обращается в нуль.

Нам известно, что если отображение $f\colon U(x_0)\to\mathbb{R}^n$, определенное в окрестности $U(x_0)\subset\mathbb{R}^m$ точки $x_0\in\mathbb{R}^m$, дифференцируемо в x_0, то матрица касательного отображения $f'(x_0)\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}\partial_1 f^1(x_0) & \dots & \partial_m f^1(x_0)\\ \dots & \dots & \dots\\ \partial_1 f^n(x_0) & \dots & \partial_m f^n(x_0)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Определение 3. Точка x_0 называется *критической точкой отображения* $f\colon U(x_0)\to\mathbb{R}^n$, если ранг матрицы Якоби (13) отображения в этой точке меньше, чем $\min\{m,n\}$, т. е. меньше, чем максимально возможный.

В частности, при $n=1$ точка x_0 критическая, если выполнены условия (12), т. е. все частные производные функции $f\colon U(x_0)\to\mathbb{R}$ обращаются в нуль.

Критические точки вещественнозначных функций называют также *стационарными* точками таких функций.

После того как в результате решения системы уравнений (12) найдены критические точки функции, их дальнейший анализ в отношении того, являются они точками экстремума или нет, часто удается провести, используя формулу Тейлора и доставляемые ею следующие достаточные условия наличия или отсутствия экстремума.

Теорема 6. *Пусть $f\colon U(x_0)\to\mathbb{R}$ — функция класса $C^{(2)}(U(x_0);\mathbb{R})$, определенная в окрестности $U(x_0)\subset\mathbb{R}^m$ точки $x_0=(x_0^1,\dots,x_0^m)\in\mathbb{R}^m$, и пусть x_0 — критическая точка этой функции f.*

Если в тейлоровском разложении

$$f(x_0^1+h^1,\dots,x_0^m+h^m)=f(x_0^1,\dots,x_0^m)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x_0)h^ih^j+o(\|h\|^2) \tag{14}$$

функции в точке x_0 квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x_0)h^ih^j\equiv\partial_{ij}f(x_0)h^ih^j. \tag{15}$$

a) *знакоопределена, то в точке x_0 функция имеет локальный экстремум, который является строгим локальным минимумом, если квадратичная форма* (15) *положительно определена, и строгим локальным максимумом, если она отрицательно определена*;

b) *может принимать значения разных знаков, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.*

◄ Пусть $h\neq 0$ и $x_0+h\in U(x_0)$. Представим соотношение (14) в виде

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{1}{2!}\|h\|^2\left[\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x_0)\frac{h^i}{\|h\|}\frac{h^j}{\|h\|}+o(1)\right], \tag{16}$$

где $o(1)$ есть величина, бесконечно малая при $h\to 0$.

Из (16) видно, что знак разности $f(x_0+h)-f(x_0)$ полностью определяется знаком величины, стоящей в квадратных скобках. Этой величиной мы теперь и займемся.

Вектор $e=(h^1/\|h\|, \ldots, h^m/\|h\|)$, очевидно, имеет единичную норму. Квадратичная форма (15) непрерывна как функция h в $\mathbb{R}^m$, поэтому ее ограничение на единичную сферу $S(0; 1)=\{x\in\mathbb{R}^m \mid \|x\|=1\}$ также непрерывно на $S(0; 1)$. Но сфера S есть замкнутое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^m$, т. е. компакт. Следовательно, форма (15) имеет на S как точку минимума, так и точку максимума, в которых она принимает соответственно значения m и M.

Если форма (15) положительно определена, то $0<m\leqslant M$ и потому найдется число $\delta>0$ такое, что при $\|h\|<\delta$ будет $|o(1)|<m$. Тогда при $\|h\|<\delta$ квадратная скобка в правой части равенства (16) окажется положительной и, следовательно, $f(x_0+h)-f(x_0)>0$ при $0<\|h\|<\delta$. Таким образом, в этом случае точка x_0 оказывается точкой строгого локального минимума рассматриваемой функции.

Аналогично проверяется, что в случае отрицательной определенности формы (15) функция имеет в x_0 строгий локальный максимум.

Тем самым пункт a) теоремы 6 исчерпан.

Докажем утверждение b).

Пусть e_m и e_M — те точки единичной сферы, в которых форма (15) принимает соответственно значения m, M, и пусть $m<0<M$.

Полагая $h=te_m$, где t — достаточно малое положительное число (настолько малое, что $x_0+te_m\in U(x_0)$), из (16) находим

$$f(x_0+te_m)-f(x_0)=\frac{1}{2!}t^2(m+o(1)),$$

где $o(1)\to 0$ при $t\to 0$. Начиная с некоторого момента (т. е. при всех достаточно малых значениях t), величина $m+o(1)$ в правой части этого равенства будет иметь знак m, т. е. будет отрицательна. Следовательно, отрицательной будет и левая часть.

Аналогично, полагая $h=te_M$, получим

$$f(x_0+te_M)-f(x_0)=\frac{1}{2!}t^2(M+o(1)),$$

и, следовательно, при всех достаточно малых t разность $f(x_0+te_M)-f(x_0)$ положительна.

Таким образом, если квадратичная форма (15) на единичной сфере или, что, очевидно, равносильно, в $\mathbb{R}^m$ принимает значения разных знаков, то в любой окрестности точки x_0 найдутся как точки, в которых значение функции больше $f(x_0)$, так и точки, в которых оно меньше $f(x_0)$. Следовательно, в этом случае x_0 не является точкой локального экстремума рассматриваемой функции. ►

Сделаем теперь несколько замечаний в связи с доказанной теоремой.

Замечание 1. Теорема 6 ничего не говорит о случае, когда форма (15) полуопределена, т. е. неположительна или неотрицательна. Оказывается, в этом случае точка x_0 может быть точкой экстремума, а может и не быть таковой. Это видно, в частности, из следующего примера.

Пример 3. Найдем экстремумы определенной в $\mathbb{R}^2$ функции $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2$.

В соответствии с необходимыми условиями (12) напишем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4x = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 = 0, \end{cases}$$

из которой находим три критические точки: $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$.

Поскольку

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2,$$

то квадратичная форма (15) в указанных трех критических точках имеет соответственно вид

$$8(h^1)^2, \quad -4(h^1)^2, \quad 8(h^1)^2,$$

т. е. во всех случаях она полуопределена (положительно или отрицательно). Теорема 6 тут не применима, но поскольку $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^4 - 1$, то очевидно, что в точках $(-1, 0)$, $(1, 0)$ функция $f(x, y)$ имеет строгий минимум -1 (и даже нелокальный), а в точке $(0, 0)$ у нее нет экстремума, поскольку при $x = 0$ и $y \neq 0$ $f(0, y) = y^4 > 0$, а при $y = 0$ и достаточно малых $x \neq 0$ $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 < 0$.

Замечание 2. После того как квадратичная форма (15) получена, исследование ее определенности может быть проведено с помощью известного из курса алгебры критерия Сильвестра[1]. Напомним, что в силу критерия Сильвестра квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} x^i x^j$ с симметрической матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

положительно определена тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры этой матрицы; форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} < 0$ и при переходе от любого главного минора матрицы к главному минору следующего порядка знак значения минора меняется.

[1] Дж. Дж. Сильвестр (1814—1897) — английский математик; наиболее известные его работы относятся к алгебре.

Пример 4. Найдем экстремумы функции

$$f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2),$$

определенной в плоскости $\mathbb{R}^2$ всюду, кроме начала координат.

Решая систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \ln(x^2 + y^2) + \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0, \end{cases}$$

находим все критические точки функции

$$(0, \pm 1); \quad (\pm 1, 0); \quad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right); \quad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right).$$

Поскольку функция нечетна относительно каждого из двух своих аргументов в отдельности, то точки $(0, \pm 1)$ и $(\pm 1, 0)$, очевидно, не являются точками экстремума нашей функции.

Видно также, что данная функция не меняет своего значения при одновременном изменении знака обеих переменных x и y. Таким образом, если мы исследуем только одну из оставшихся критических точек, например точку $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, то мы сможем сделать заключение и о характере остальных.

Поскольку

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{6xy}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2 - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{6xy}{x^2 + y^2} - \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

то в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ квадратичная форма $\partial_{ij} f(x_0) h^i h^j$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

т. е. она положительно определена, и, следовательно, в этой точке функция имеет локальный минимум

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

В силу сделанных выше наблюдений относительно особенностей рассматриваемой функции можно сразу же заключить, что

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

— также локальный минимум, а

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \frac{1}{2e}$$

— локальные максимумы функции. Впрочем, это можно проверить и непосредственно, убедившись в определенности соответствующей квадратичной формы. Например, в точке $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ матрица квадратичной формы (15) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

откуда видно, что форма отрицательно определена.

Замечание 3. Следует обратить внимание на то, что мы указали необходимые (теорема 5) и достаточные (теорема 6) условия экстремума функции лишь во внутренней точке области определения. Таким образом, при отыскании абсолютного максимума или минимума функции необходимо наряду с внутренними критическими точками функции исследовать также точки границы области определения, поскольку максимальное или минимальное значение функция может принять в одной из таких граничных точек.

Подробнее общие принципы исследования невнутренних экстремумов будут разбираться позже (см. раздел, посвященный условному экстремуму). Полезно иметь в виду, что при отыскании минимумов и максимумов часто наряду с формальной техникой, а иногда и вместо нее, можно использовать некоторые простые соображения, связанные с природой задачи. Например, если рассматриваемая в $\mathbb{R}^m$ дифференцируемая функция по смыслу задачи должна иметь минимум и вместе с тем она не ограничена сверху, то, при условии, что функция имеет единственную критическую точку, можно без дальнейшего исследования утверждать, что в этой точке она и принимает свое минимальное значение.

Пример 5. *Задача Гюйгенса.* На основе законов сохранения энергии и импульса замкнутой механической системы несложным расчетом можно показать, что при соударении двух абсолютно упругих шаров, имеющих массы m_1 и m_2 и начальные скорости v_1 и v_2, их скорости после центрального удара (когда скорости направлены по линии центров) определяются соотношениями

$$\tilde{v}_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

В частности, если шар массы M, движущийся со скоростью V, ударяется о неподвижный шар массы m, то приобретаемая последним скорость v может быть найдена по формуле

$$v = \frac{2M}{m + M}V, \tag{17}$$

из которой видно, что если $0 \leqslant m \leqslant M$, то $V \leqslant v \leqslant 2V$.

Каким же образом телу малой массы можно передать значительную часть кинетической энергии большой массы? Для этого, например, между шарами малой и большой масс можно вставить шары с промежуточными массами $m < m_1 < m_2 < \ldots < m_n < M$. Вычислим (вслед за Гюйгенсом), как надо выбрать массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$, чтобы в результате последовательных центральных соударений тело m приобрело наибольшую скорость.

В соответствии с формулой (17) получаем следующее выражение для искомой скорости как функции от переменных $m_1, m_2, \ldots, m_n$:

$$v = \frac{m_1}{m+m_1} \cdot \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot \ldots \cdot \frac{m_n}{m_{n-1}+m_n} \cdot \frac{M}{m_n+M} \cdot 2^{n+1}V. \qquad (18)$$

Таким образом, задача Гюйгенса сводится к отысканию максимума функции

$$f(m_1, \ldots, m_n) = \frac{m_1}{m+m_1} \cdot \ldots \cdot \frac{m_n}{m_{n-1}+m_n} \cdot \frac{M}{m_n+M}.$$

Система уравнений (12), представляющих необходимые условия внутреннего экстремума, в данном случае сводится к системе

$$\begin{cases} m \cdot m_2 - m_1^2 = 0, \\ m_1 \cdot m_3 - m_2^2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{n-1} \cdot M - m_n^2 = 0, \end{cases}$$

из которой следует, что числа $m, m_1, \ldots, m_n, M$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q, равным $\sqrt[n+1]{M/m}$.

Получаемое при таком наборе масс значение скорости (18) определяется равенством

$$v = \left(\frac{2q}{1+q}\right)^{n+1} V, \qquad (19)$$

которое при $n = 0$ совпадает с равенством (17).

Из физических соображений ясно, что формула (19) указывает максимальное значение функции (18), однако это можно проверить и формально (не привлекая громоздких вторых производных; см. задачу 9 в конце параграфа).

Заметим, что из формулы (19) видно, что если $m \to 0$, то $v \to 2^{n+1}V$. Таким образом, промежуточные массы действительно заметно увеличивают передаваемую малой массе m часть кинетической энергии массы M.

6. Некоторые геометрические образы, связанные с функциями многих переменных

а. График функции и криволинейные координаты. Пусть x, y, z — декартовы координаты точки пространства $\mathbb{R}^3$, и пусть $z = f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в некоторой области G плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных (x, y).

В силу общего определения графика функции, график функции $f\colon G\to\mathbb{R}$ в нашем случае есть множество $S=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x, y)\in G,\ z=f(x, y)\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Очевидно, что отображение $G\xrightarrow{F}S$, определяемое соотношением $(x, y)\mapsto (x, y, f(x, y))$, есть непрерывное взаимно однозначное отображение G на S, в силу которого любую точку множества S можно задать, указывая соответствующую ей точку области G или, что то же самое, задавая координаты (x, y) этой точки G.

Таким образом, пары чисел $(x, y)\in G$ можно рассматривать как некоторые координаты точек множества S — графика функции $z=f(x, y)$. Поскольку точки S задаются парами чисел, то S будем условно называть *двумерной поверхностью* в $\mathbb{R}^3$ (общее определение поверхности будет дано позже).

Если задать путь $\Gamma\colon I\to G$ в G, то автоматически возникает путь $F\circ\Gamma\colon I\to S$ на поверхности S. Если $x=x(t)$, $y=y(t)$ — параметрическое задание пути Γ, то путь $F\circ\Gamma$ на S задается тремя функциями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=f(x(t), y(t))$. В частности, если положить $x=x_0+t$, $y=y_0$, то мы получим кривую $x=x_0+t$, $y=y_0$, $z=f(x_0+t, y_0)$ на поверхности S, вдоль которой координата $y=y_0$ точек S не меняется. Аналогично можно указать кривую $x=x_0$, $y=y_0+t$, $z=f(x_0, y_0+t)$ на S, вдоль которой не меняется первая координата x_0 точек S. Эти линии на S по аналогии с плоским случаем естественно называть координатными линиями на поверхности S. Однако, в отличие от координатных линий в $G\subset\mathbb{R}^2$, являющихся кусками прямых, координатные линии на S, вообще говоря, являются кривыми в $\mathbb{R}^3$. По этой причине введенные координаты (x, y) точек поверхности S часто называют *криволинейными координатами* на S.

Итак, график непрерывной функции $z=f(x, y)$, определенной в области $G\subset\mathbb{R}^2$, есть двумерная поверхность S в $\mathbb{R}^3$, точки которой можно задавать криволинейными координатами $(x, y)\in G$.

Мы пока не останавливаемся на общем определении поверхности, поскольку сейчас нас интересует только частный случай поверхности — график функции, однако мы предполагаем, что из курса аналитической геометрии читателю хорошо знакомы некоторые важные конкретные поверхности в $\mathbb{R}^3$ (плоскость, эллипсоид, параболоиды, гиперболоиды).

b. Касательная плоскость к графику функции. Если функция $z=f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)\in G$, то это означает, что

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+o\Big(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\Big)$$
$$\text{при } (x, y)\to(x_0, y_0), \tag{20}$$

где A и B — некоторые постоянные.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ плоскость

$$z=z_0+A(x-x_0)+B(y-y_0), \tag{21}$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$. Сравнивая равенства (20) и (21), видим, что график нашей функции в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) хорошо аппроксимируется плоскостью (21). Точнее, точка $(x, y, f(x, y))$ графика функции уклоняется от точки $(x, y, z(x, y))$ плоскости (21) на величину, бесконечно малую в сравнении с величиной $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ смещения ее криволинейных координат (x, y) от координат (x_0, y_0) точки (x_0, y_0, z_0).

В силу единственности дифференциала функции, плоскость (21), обладающая указанным свойством, единственна и имеет вид

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0). \tag{22}$$

Она называется *касательной плоскостью к графику функции* $z = f(x, y)$ *в точке* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Итак, дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и наличие у графика этой функции касательной плоскости в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ суть равносильные условия.

c. Нормальный вектор. Записывая уравнение (22) касательной плоскости в каноническом виде

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0,$$

заключаем, что вектор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) \tag{23}$$

является *нормальным вектором касательной плоскости*. Его направление считается направлением, нормальным или ортогональным к поверхности S (графику функции) в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

В частности, если (x_0, y_0) — критическая точка функции $f(x, y)$, то в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ графика нормальный вектор имеет вид $(0, 0, -1)$ и, следовательно, касательная плоскость к графику функции в такой точке горизонтальна (параллельна плоскости (x, y)).

Следующие три рисунка иллюстрируют сказанное.

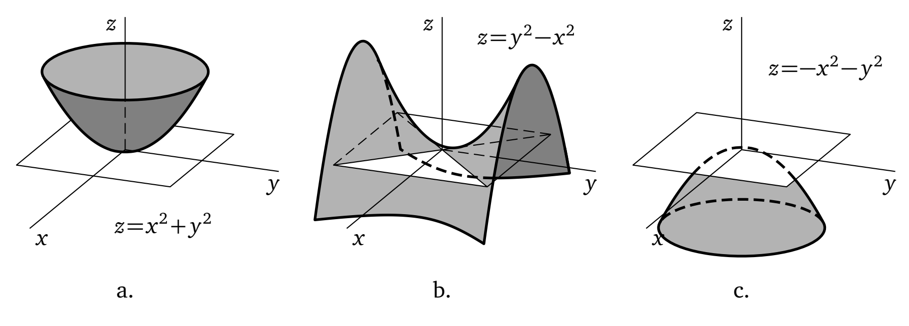


Рис. 53

На рис. 53, a, c изображено расположение графика функции по отношению к касательной плоскости в окрестности точки локального экстремума (соответственно, минимума и максимума), а на рис. 53, b — в окрестности так называемой седловой критической точки.

d. Касательная плоскость и касательный вектор. Мы знаем, что если путь $\Gamma\colon I\to\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$ задается дифференцируемыми функциями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, то вектор $(\dot x(0), \dot y(0), \dot z(0))$ есть вектор скорости в момент $t=0$. Это направляющий вектор касательной в точке $x_0=x(0)$, $y_0=y(0)$, $z_0=z(0)$ к кривой в $\mathbb{R}^3$, являющейся носителем пути Γ.

Рассмотрим теперь путь $\Gamma\colon I\to S$ на графике функции $z=f(x, y)$, задаваемый в виде $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=f(x(t), y(t))$. В этом конкретном случае находим, что

$$(\dot x(0), \dot y(0), \dot z(0)) = \left(\dot x(0), \dot y(0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\dot x(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\dot y(0)\right),$$

откуда видно, что найденный вектор ортогонален вектору (23), нормальному к графику S функции в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Таким образом, мы показали, что если вектор (ξ, η, ζ) касателен в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ к некоторой кривой на поверхности S, то он ортогонален вектору (23) и (в этом смысле) лежит в плоскости (22), касательной к поверхности S в указанной точке. Точнее можно было бы сказать, что вся прямая $x=x_0+\xi t$, $y=y_0+\eta t$, $z=f(x_0, y_0)+\zeta t$ лежит в касательной плоскости (22).

Покажем теперь, что верно и обратное утверждение, т. е. если прямая $x = x_0+\xi t$, $y=y_0+\eta t$, $z=f(x_0, y_0)+\zeta t$ или, что то же самое, вектор (ξ, η, ζ) лежит в плоскости (22), касательной к графику S функции $z=f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, то на S есть путь, для которого вектор (ξ, η, ζ) является вектором скорости в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

В качестве такового можно взять, например, путь

$$x=x_0+\xi t, \quad y=y_0+\eta t, \quad z=f(x_0+\xi t, y_0+\eta t).$$

В самом деле, для него

$$\dot x(0)=\xi, \quad \dot y(0)=\eta, \quad \dot z(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta.$$

Ввиду того, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\dot x(0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\dot y(0)-\dot z(0)=0$$

и по условию также

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta-\zeta=0,$$

заключаем, что

$$(\dot x(0), \dot y(0), \dot z(0))=(\xi, \eta, \zeta).$$

Итак, касательная плоскость к поверхности S в точке (x_0, y_0, z_0) образована векторами, касательными в точке (x_0, y_0, z_0) к кривым, проходящим на поверхности S через указанную точку (рис. 54).

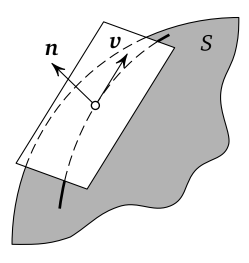


Рис. 54

Это уже более геометричное описание касательной плоскости. Во всяком случае, из него видно, что если инвариантно (относительно выбора системы координат) определена касательная к кривой, то касательная плоскость также определена инвариантно.

Для наглядности мы рассматривали функции двух переменных, однако все сказанное, очевидно, переносится и на общий случай функции

$$y = f(x^1, \ldots, x^m) \tag{24}$$

m переменных, где $m \in \mathbb{N}$.

Плоскость, касательная к графику такой функции в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^m, f(x_0^1, \ldots, x_0^m))$, запишется в виде

$$y = f(x_0^1, \ldots, x_0^m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \ldots, x_0^m)(x^i - x_0^i); \tag{25}$$

вектор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0), -1\right)$$

есть нормальный вектор плоскости (25). Сама эта плоскость, как и график функции (24), имеет размерность m, т. е. любая точка задается теперь набором $(x^1, \ldots, x^m)$ из m координат.

Таким образом, уравнение (25) задает гиперплоскость в $\mathbb{R}^{m+1}$.

Дословно повторяя проведенные выше рассуждения, можно проверить, что касательная плоскость (25) состоит из векторов, касательных в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^m, f(x_0^1, \ldots, x_0^m))$ к кривым, проходящим через эту точку и лежащим на m-мерной поверхности S — графике функции (24).

Задачи и упражнения

1. Пусть $z = f(x, y)$ — функция класса $C^{(1)}(G; \mathbb{R})$.

a) Если $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \equiv 0$ в G, то можно ли утверждать, что функция f не зависит от y в области G?

b) При каком условии на область G ответ на предыдущий вопрос положителен?

2. a) Проверьте, что для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0).$$

b) Докажите, что если функция $f(x, y)$ имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой окрестности U точки (x_0, y_0) и если смешанная производная $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ (или $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$) существует в U и непрерывна в (x_0, y_0), то смешанная производная $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ (соответственно, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$) также существует в этой точке и имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0, y_0).$$

3. Пусть $x^1, \ldots, x^m$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^m$. Дифференциальный оператор

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x^{i\,2}},$$

действующий на функции $f \in C^{(2)}(G; \mathbb{R})$ по правилу

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i\,2}}(x^1, \ldots, x^m),$$

называется *оператором Лапласа*.

Уравнение $\Delta f = 0$ относительно функции f в области $G \subset \mathbb{R}^m$ называется *уравнением Лапласа*, а его решения — *гармоническими функциями в области* G.

a) Покажите, что если $x = (x^1, \ldots, x^m)$ и

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x^i)^2},$$

то при $m > 2$ функция

$$f(x) = \|x\|^{-\frac{2-m}{2}}$$

является гармонической в области $\mathbb{R}^m \setminus 0$, где $0 = (0, \ldots, 0)$.

b) Проверьте, что функция

$$f(x^1, \ldots, x^m, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^m} \cdot \exp\Bigl(-\frac{\|x\|^2}{4a^2 t}\Bigr),$$

определенная при $t > 0$ и $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \Delta f,$$

т. е. что $\frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i\,2}}$ в любой точке области определения функции.

4. *Формула Тейлора в мультииндексных обозначениях.*

Символ $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, состоящий из неотрицательных целых чисел α_i, $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$, называется *мультииндексом* α.

Условились в следующих обозначениях:

$$|\alpha| := |\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m|, \quad \alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_m!;$$

наконец, если $a = (a_1, \ldots, a_m)$, то

$$a^\alpha := a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m}.$$

a) Проверьте, что если $k \in \mathbb{N}$, то

$$(a_1 + \ldots + a_m)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_m!} a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m}, \quad \text{или} \quad (a_1 + \ldots + a_m)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} a^\alpha,$$

где суммирование ведется по всем наборам $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ неотрицательных целых чисел, таким, что $\sum\limits_{i=1}^{m} |\alpha_i| = k$.

b) Пусть

$$D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \ldots (\partial x^m)^{\alpha_m}}(x).$$

Покажите, что если $f \in C^{(k)}(G; \mathbb{R})$, то в любой точке $x \in G$ имеет место равенство

$$\sum_{i_1 + \ldots + i_m = k} \partial_{i_1 \ldots i_k} f(x) h^{i_1} \ldots h^{i_k} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(x) h^\alpha, \quad \text{где } h = (h^1, \ldots, h^m).$$

c) Проверьте, что в мультииндексных обозначениях формулу Тейлора, например, с остаточным членом в форме Лагранжа можно записать в виде

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x) h^\alpha + \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x + \theta h) h^\alpha.$$

d) Запишите в мультииндексных обозначениях формулу Тейлора с интегральным остаточным членом (теорема 4).

5. a) Пусть $I^m = \{x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid |x^i| \leqslant c^i,\ i = 1, \ldots, m\}$ — m-мерный промежуток, а I — отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Покажите, что если функция $f(x, y) = f(x^1, \ldots, x^m, y)$ определена и непрерывна на множестве $I^m \times I$, то для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что если $x \in I^m$, $y_1, y_2 \in I$ и $|y_1 - y_2| < \delta$, то $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon$.

b) Покажите, что функция

$$F(x) = \int_a^b f(x, y)\, dy$$

определена и непрерывна на промежутке I^m.

c) Покажите, что если $f \in C(I^m; \mathbb{R})$, то функция

$$\mathscr{F}(x, t) = f(tx)$$

определена и непрерывна на $I^m \times I^1$, где $I^1 = \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \leqslant 1\}$.

d) Докажите следующую *лемму Адамара*.

Если $f \in C^{(1)}(I^m; \mathbb{R})$ и $f(0) = 0$, то существуют функции $g_1, \ldots, g_m \in C(I^m; \mathbb{R})$ такие, что

$$f(x^1, \ldots, x^m) = \sum_{i=1}^{m} x^i g_i(x^1, \ldots, x^m)$$

в I^m, причем

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0), \quad i = 1, \ldots, m.$$

6. Докажите следующее *обобщение теоремы Ролля для функций многих переменных.*

Если функция f непрерывна в замкнутом шаре $\overline{B}(0; r)$, равна нулю на его границе и дифференцируема во внутренних точках шара $B(0; r)$, то по крайней мере одна из внутренних точек этого шара является критической точкой функции.

7. Проверьте, что функция

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$$

не имеет экстремума в начале координат, хотя ее ограничение на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет строгий локальный минимум в этой точке.

8. *Метод наименьших квадратов.*

Это один из наиболее распространенных методов обработки результатов наблюдений. Он состоит в следующем. Пусть известно, что физические величины x и y связаны линейным соотношением

$$y = ax + b, \tag{26}$$

или пусть на основе экспериментальных данных строится эмпирическая формула указанного вида.

Допустим, было сделано n наблюдений, в каждом из которых одновременно измерялись значения x и y, и в результате были получены пары значений $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n$. Поскольку измерения имеют погрешности, то, даже если между величинами x и y имеется точная связь (26), равенства

$$y_k = ax_k + b$$

могут не выполняться для некоторых значений $k \in \{1, \ldots, n\}$, каковы бы ни были коэффициенты a и b.

Задача состоит в том, чтобы по указанным результатам наблюдений определить разумным образом неизвестные коэффициенты a и b.

Гаусс, исходя из анализа распределения вероятности величины ошибки наблюдения, установил, что наиболее вероятные значения коэффициентов a и b при данной совокупности результатов наблюдений следует искать, исходя из следующего *принципа наименьших квадратов*:

если $\delta_k = (ax_k + b) - y_k$ — невязка k-го наблюдения, то a и b надо выбирать так, чтобы величина

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \delta_k^2,$$

т. е. сумма квадратов невязок, была минимальной.

а) Покажите, что принцип наименьших квадратов в случае соотношения (26) приводит к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} [x_k, x_k]a + [x_k, 1]b = [x_k, y_k], \\ [1, x_k]a + [1, 1]b = [1, y_k] \end{cases}$$

для определения коэффициентов a и b; здесь, следуя Гауссу, положено $[x_k, x_k] := x_1x_1 + \ldots + x_nx_n$; $[x_k, 1] := x_1 \cdot 1 + \ldots + x_n \cdot 1$; $[x_k, y_k] := x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ и т. д.

b) Напишите систему уравнений для чисел $a_1, \ldots, a_m, b$, к которой приводит принцип наименьших квадратов в том случае, когда вместо равенства (26) имеется соотношение

$$y = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i + b$$

(или, короче, $y = a_i x^i + b$) между величинами $x^1, \ldots, x^m, y$.

c) Как, используя метод наименьших квадратов, искать эмпирические формулы вида $y = cx_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, связывающие физические величины $x_1, \ldots, x_m$ с величиной y?

d) (М. Джермен.) У нескольких десятков особей кольчатого червя *Neries di versicolor* была измерена частота R сокращений сердца при различных температурах T. Частота выражалась в процентах относительно частоты сокращений при 15 °C. Полученные данные приведены в следующей таблице:

Температура, °C	Частота, %	Температура, °C	Частота, %
0	39	20	136
5	54	25	182
10	74	30	254
15	100		

Зависимость R от T похожа на экспоненциальную. Считая $R = Ae^{bT}$, найдите значения констант A и b, которые бы наилучшим образом соответствовали результатам эксперимента.

9. a) Покажите, что в рассмотренной в примере 5 задаче Гюйгенса функция (18) стремится к нулю, если хотя бы одна из переменных $m_1, \ldots, m_n$ стремится к бесконечности.

b) Покажите, что функция (18) имеет в $\mathbb{R}^n$ точку максимума и потому единственная критическая точка этой функции в $\mathbb{R}^n$ должна быть ее точкой максимума.

c) Покажите, что величина v, определяемая формулой (19), монотонно возрастает с ростом n, и найдите ее предел при $n \to \infty$.

10. a) Во время так называемого круглого наружного шлифования инструмент — быстро вращающийся шлифовальный круг (с шероховатой периферией), играющий роль напильника, — приводится в соприкосновение с медленно (в сравнении с ним) поворачивающейся поверхностью круглой детали (рис. 55).

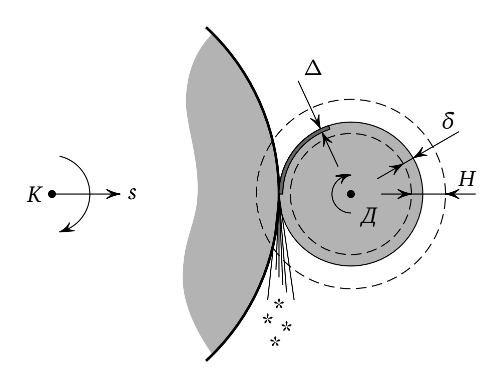


Рис. 55

Круг K постепенно подается на деталь $Д$ и в результате происходит съем заданного слоя H металла, доведение детали до нужного размера и образование гладкой рабочей поверхности изделия. Эта поверхность в будущем механизме обычно является трущейся, и, чтобы увеличить срок ее службы, металл детали проходит предварительную закалку, повышающую твердость стали. Однако из-за высокой температуры в зоне контакта шлифовального круга с деталью могут произойти (и часто происходят) структурные изменения в некотором слое Δ металла и падение в этом слое твердости стали. Величина Δ монотонно зависит от скорости s подачи круга на деталь, т. е. $\Delta=\varphi(s)$. Известно, что существует некоторая критическая скорость $s_0>0$, при которой еще $\Delta=0$, а при $s>s_0$ уже $\Delta>0$. Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение обратную к указанной зависимость

$$s=\psi(\Delta),$$

определенную при $\Delta>0$.

Здесь ψ — известная из эксперимента монотонно возрастающая функция, определенная при $\Delta\geqslant 0$, причем $\psi(0)=s_0>0$.

Режим шлифования должен быть таким, чтобы на окончательно получаемой поверхности изделия не было структурных изменений металла.

Оптимальным по быстродействию при указанных условиях, очевидно, будет такой режим изменения скорости s подачи шлифовального круга, когда

$$s=\psi(\delta),$$

где $\delta=\delta(t)$ — величина еще не снятого к моменту t слоя металла или, что то же самое, расстояние от периферии круга в момент t до окончательной поверхности будущего изделия. Объясните это.

b) Найдите время, необходимое для снятия слоя H в оптимальном режиме изменения скорости s подачи круга.

c) Найдите зависимость $s=s(t)$ скорости подачи круга от времени в оптимальном режиме при условии, что функция $\Delta\overset{\psi}{\longmapsto}s$ линейна: $s=s_0+\lambda\Delta$.

В силу конструктивных особенностей некоторых видов шлифовальных станков изменение скорости s может происходить только дискретно. Тут и возникает задача оптимизации производительности процесса при дополнительном условии, что допускается только фиксированное число n переключений скорости s. Ответы на следующие вопросы дают представление о характере оптимального режима.

d) Какова геометрическая интерпретация найденного вами в b) времени $t(H)=\int\limits_0^H\frac{d\delta}{\psi(\delta)}$ шлифования в оптимальном непрерывном режиме изменения скорости s?

e) Какова геометрическая интерпретация потери во времени при переходе от оптимального непрерывного режима изменения s к оптимальному по быстродействию ступенчатому режиму изменения s?

f) Покажите, что точки $0=s_{n+1}<x_n<\ldots<x_1<x_0=H$ промежутка $[0,H]$, в которых следует производить переключение скорости, должны удовлетворять условиям

$$\frac{1}{\psi(x_{i+1})}-\frac{1}{\psi(x_i)}=-\Big(\frac{1}{\psi}\Big)'(x_i)(x_i-x_{i-1})\qquad(i=1,\ldots,n)$$

и, следовательно, на участке от x_i до x_{i+1} скорость подачи круга имеет вид $s=\psi(x_{i+1})$ $(i=0,\ldots,n)$.

g) Покажите, что в линейном случае, когда $\psi(\Delta) = s_0 + \lambda\Delta$, точки x_i (из задачи f)) на промежутке $[0, H]$ располагаются так, что числа

$$\frac{s_0}{\lambda} < \frac{s_0}{\lambda} + x_n < \ldots < \frac{s_0}{\lambda} + x_1 < \frac{s_0}{\lambda} + H$$

образуют геометрическую прогрессию.

11. a) Проверьте, что касательная к кривой $\Gamma\colon I \to \mathbb{R}^m$ определена инвариантно относительно выбора системы координат в $\mathbb{R}^m$.

b) Проверьте, что касательная плоскость к графику S функции $y = f(x^1, \ldots, x^m)$ определена инвариантно относительно выбора системы координат в $\mathbb{R}^m$.

c) Пусть множество $S \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$ является графиком функции $y = f(x^1, \ldots, x^m)$ в координатах $(x^1, \ldots, x^m, y)$ в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$ и графиком функции $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m)$ в координатах $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^m, \tilde{y})$ в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$. Проверьте, что касательная к S плоскость инвариантна относительно линейного преобразования координат в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^1$.

d) Проверьте, что оператор Лапласа $\Delta f = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^{i\,2}}(x)$ определен инвариантно относительно ортогональных преобразований координат в $\mathbb{R}^m$.

§ 5. Теорема о неявной функции

1. Постановка вопроса и наводящие соображения. В этом параграфе будет доказана важная как сама по себе, так и благодаря ее многочисленным следствиям теорема о неявной функции.

Поясним сначала, в чем состоит вопрос. Пусть, например, мы имеем соотношение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

между координатами x, y точек плоскости $\mathbb{R}^2$. Совокупность точек плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих этому соотношению, есть единичная окружность (рис. 56).

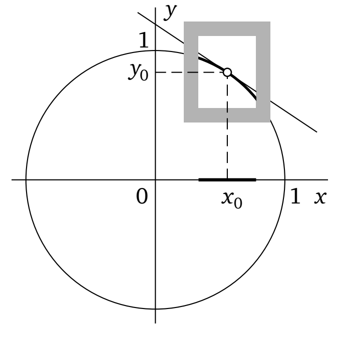


Рис. 56

Наличие связи (1) показывает, что, фиксировав одну из координат, например x, мы не вправе брать вторую координату произвольно. Таким образом, соотношение (1) предопределяет зависимость y от x. Нас интересует вопрос об условиях, при которых неявная связь (1) может быть разрешена в виде явной функциональной зависимости $y = y(x)$.

Решая уравнение (1) относительно y, найдем, что

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \tag{2}$$

т. е. каждому значению x такому, что $|x| < 1$, на самом деле отвечают два допустимых значения y. При формировании функциональной зависимости $y = y(x)$, удовлетворяющей соотношению (1), нельзя без привлечения до-

полнительных требований отдать предпочтение какому-нибудь одному из значений (2). Например, функция $y(x)$, которая в рациональных точках отрезка $[-1, 1]$ принимает значение $+\sqrt{1-x^2}$, а в иррациональных — значение $-\sqrt{1-x^2}$, очевидно, удовлетворяет соотношению (1).

Ясно, что вариацией этого примера можно предъявить бесконечно много функциональных зависимостей, удовлетворяющих соотношению (1).

Вопрос о том, является ли множество, задаваемое в $\mathbb{R}^2$ соотношением (1), графиком некоторой функциональной зависимости $y = y(x)$, очевидно, решается отрицательно, ибо с геометрической точки зрения он равносилен вопросу о возможности взаимно однозначного прямого проектирования окружности на некоторую прямую.

Но наблюдение (см. рис. 56) подсказывает, что все-таки в окрестности отдельной точки (x_0, y_0) дуга окружности взаимно однозначно проектируется на ось x и ее единственным образом можно представить в виде $y = y(x)$, где $x \mapsto y(x)$ — непрерывная функция, определенная в окрестности точки x_0 и принимающая в x_0 значение y_0. В этом отношении плохими являются только точки $(-1, 0)$, $(1, 0)$, ибо никакая содержащая их внутри себя дуга окружности не проектируется взаимно однозначно на ось x. Зато окрестности этих точек на окружности хорошо расположены относительно оси y и могут быть представлены в виде графика функции $x = x(y)$, непрерывной в окрестности точки 0 и принимающей в этой точке значение -1 или 1 в соответствии с тем, идет ли речь о дуге, содержащей точку $(-1, 0)$ или $(1, 0)$.

Как же аналитически узнавать, когда наше геометрическое место точек, определяемое соотношением типа (1), в окрестности некоторой точки (x_0, y_0), принадлежащей ему, может быть представлено в виде явной зависимости $y = y(x)$ или $x = x(y)$?

Будем рассуждать следующим, уже привычным способом. У нас есть функция $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Локальное поведение функции в окрестности точки (x_0, y_0) хорошо описывается ее дифференциалом

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

поскольку

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ + o(|x - x_0| + |y - y_0|)$$

при $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Если $F(x_0, y_0) = 0$ и нас интересует поведение линии уровня

$$F(x, y) = 0$$

нашей функции в окрестности точки (x_0, y_0), то о нем можно судить по расположению прямой (касательной)

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{3}$$

Если эта прямая расположена так, что ее уравнение можно разрешить относительно y, то, коль скоро в окрестности точки (x_0, y_0) линия $F(x, y) = 0$ мало уклоняется от этой прямой, можно надеяться, что ее в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) тоже можно будет записать в виде $y = y(x)$.

То же самое, конечно, можно сказать о локальной разрешимости уравнения $F(x, y) = 0$ относительно x.

Записав уравнение (3) для рассматриваемого конкретного соотношения (1), получим следующее уравнение касательной:

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0.$$

Это уравнение разрешимо относительно y всегда, когда $y_0 \neq 0$, т. е. во всех точках (x_0, y_0) окружности (1), кроме точек $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Оно разрешимо относительно x во всех точках окружности, кроме точек $(0, -1)$ и $(0, 1)$.

2. Простейший вариант теоремы о неявной функции. В этом параграфе теорема о неявной функции будет получена очень наглядным, но не очень эффективным методом, приспособленным только к случаю вещественнозначных функций вещественных переменных. С другим, во многих отношениях более предпочтительным способом получения этой теоремы, как и с более детальным анализом ее структуры, читатель сможет познакомится в главе X (часть II), а также в задаче 4, помещенной в конце параграфа.

Следующее утверждение является простейшим вариантом теоремы о неявной функции.

Утверждение 1. *Если функция $F\colon U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$, определенная в окрестности $U(x_0, y_0)$ точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, такова, что*

1° $F \in C^{(p)}(U; \mathbb{R})$, *где* $p \geqslant 1$,
2° $F(x_0, y_0) = 0$,
3° $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

то существуют двумерный промежуток $I = I_x \times I_y$, где

$$I_x = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \alpha\}, \quad I_y = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \beta\},$$

являющийся содержащейся в $U(x_0, y_0)$ окрестностью точки (x_0, y_0), и такая функция $f \in C^{(p)}(I_x; I_y)$, что для любой точки $(x, y) \in I_x \times I_y$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x), \tag{4}$$

причем производная функции $y = f(x)$ в точках $x \in I_x$ может быть вычислена по формуле

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1}[F'_x(x, f(x))]. \tag{5}$$

Прежде чем приступить к доказательству, дадим несколько возможных переформулировок заключительного соотношения (4), которые должны заодно прояснить смысл самого этого соотношения.

Утверждение 1 говорит о том, что при условиях 1°, 2°, 3° порция множества, определяемого соотношением $F(x, y) = 0$, попавшая в окрестность $I = I_x \times I_y$ точки (x_0, y_0), является графиком некоторой функции $f : I_x \to I_y$ класса $C^{(p)}(I_x; I_y)$.

Иначе можно сказать, что в пределах окрестности I точки (x_0, y_0) уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно разрешимо относительно y, а функция $y = f(x)$ является этим решением, т. е. $F(x, f(x)) \equiv 0$ на I_x.

Отсюда в свою очередь следует, что если $y = \tilde{f}(x)$ — функция, определенная на I_x, про которую известно, что она удовлетворяет соотношению $F(x, \tilde{f}(x)) \equiv 0$ на I_x и что $\tilde{f}(x_0) = y_0$, то при условии непрерывности этой функции в точке $x_0 \in I_x$ можно утверждать, что найдется окрестность $\Delta \subset I_x$ точки x_0 такая, что $\tilde{f}(\Delta) \subset I_y$ и тогда $\tilde{f}(x) \equiv f(x)$ при $x \in \Delta$.

Без предположения непрерывности функции $\tilde{f}$ в точке x_0 и условия $\tilde{f}(x_0) = y_0$ последнее заключение могло бы оказаться неправильным, что видно на уже разобранном выше примере с окружностью.

Теперь докажем утверждение 1.

◄ Пусть для определенности $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Поскольку $F \in C^{(1)}(U; \mathbb{R})$, то $F'_y(x, y) > 0$ также в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Чтобы не вводить новых обозначений, без ограничения общности можно считать, что $F'_y(x, y) > 0$ в любой точке исходной окрестности $U(x_0, y_0)$.

Более того, уменьшая, если нужно, окрестность $U(x_0, y_0)$, можно считать ее кругом некоторого радиуса $r = 2\beta > 0$ с центром в точке (x_0, y_0).

Поскольку $F'_y(x, y) > 0$ в U, то функция $F(x_0, y)$ от y определена и монотонно возрастает на отрезке $y_0 - \beta \leqslant y \leqslant y_0 + \beta$, следовательно,

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0 + \beta).$$

В силу непрерывности функции F в U, найдется положительное число $\alpha < \beta$ такое, что при $|x - x_0| \leqslant \alpha$ будут выполнены соотношения

$$F(x, y_0 - \beta) < 0 < F(x, y_0 + \beta).$$

Покажем теперь, что прямоугольник $I = I_x \times I_y$, где

$$I_x = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \alpha\}, \quad I_y = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \beta\},$$

является искомым двумерным промежутком, в котором выполняется соотношение (4).

При каждом $x \in I_x$ фиксируем вертикальный отрезок с концами $(x, y_0 - \beta)$, $(x, y_0 + \beta)$. Рассматривая на нем $F(x, y)$ как функцию от y, мы получаем строго возрастающую непрерывную функцию, принимающую значения разных знаков на концах отрезка. Следовательно, при $x \in I_x$ найдется единственная точка $y(x) \in I_y$ такая, что $F(x, y(x)) = 0$. Полагая $y(x) = f(x)$, мы приходим к соотношению (4).

Теперь установим, что $f \in C^{(p)}(I_x; I_y)$.

Покажем сначала, что функция f непрерывна в точке x_0 и что $f(x_0)=y_0$. Последнее равенство, очевидно, вытекает из того, что при $x=x_0$ имеется единственная точка $y(x_0)\in I_y$ такая, что $F(x_0, y(x_0))=0$. Вместе с тем по условию $F(x_0, y_0)=0$, поэтому $f(x_0)=y_0$.

Фиксировав число ε, $0<\varepsilon<\beta$, мы можем повторить доказательство существования функции $f(x)$ и найти число δ, $0<\delta<\alpha$, так, что в двумерном промежутке $\tilde{I}=\tilde{I}_x\times\tilde{I}_y$, где

$$\tilde{I}_x=\{x\in\mathbb{R}\mid |x-x_0|<\delta\},\quad \tilde{I}_y=\{y\in\mathbb{R}\mid |y-y_0|<\varepsilon\},$$

будет выполнено соотношение

$$(F(x, y)=0 \text{ в } \tilde{I}) \iff (y=\tilde{f}(x),\ x\in\tilde{I}_x) \tag{6}$$

с некоторой вновь найденной функцией $\tilde{f}\colon \tilde{I}_x\to\tilde{I}_y$.

Но $\tilde{I}_x\subset I_x$, $\tilde{I}_y\subset I_y$ и $\tilde{I}\subset I$, поэтому из (4) и (6) следует, что $\tilde{f}(x)\equiv f(x)$ при $x\in\tilde{I}_x\subset I_x$. Тем самым проверено, что $|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-y_0|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta$.

Мы установили непрерывность функции f в точке x_0. Но любая точка $(x, y)\in I$, в которой $F(x, y)=0$, также может быть принята в качестве исходной точки построения, ибо в ней выполнены условия 2°, 3°. Выполнив это построение в пределах промежутка I, мы бы в силу (4) вновь пришли к соответствующей части функции f, рассматриваемой в окрестности точки x. Значит, функция f непрерывна в точке x. Таким образом, установлено, что $f\in C(I_x; I_y)$.

Покажем теперь, что $f\in C^{(1)}(I_x; I_y)$, и установим формулу (5).

Пусть число Δx таково, что $x+\Delta x\in I_x$. Пусть $y=f(x)$ и $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$. Применяя в пределах промежутка I к функции $F(x, y)$ теорему о среднем, находим, что

$$\begin{aligned}0&=F(x+\Delta x, f(x+\Delta x))-F(x, f(x))=\\&=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=\\&=F'_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta x+F'_y(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta y \qquad (0<\theta<1),\end{aligned}$$

откуда, учитывая, что $F'_y(x, y)\neq 0$ в I, получаем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F'_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}{F'_y(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}. \tag{7}$$

Поскольку $f\in C(I_x; I_y)$, то при $\Delta x\to 0$ также $\Delta y\to 0$ и, учитывая, что $F\in C^{(1)}(U;\mathbb{R})$, из (7) в пределе при $\Delta x\to 0$ получаем

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

где $y=f(x)$. Тем самым формула (5) установлена.

В силу теоремы о непрерывности композиции функций, из формулы (5) вытекает, что $f\in C^{(1)}(I_x; I_y)$.

Если $F\in C^{(2)}(U;\mathbb{R})$, то правая часть формулы (5) допускает дифференцирование по x и мы находим, что

$$f''(x)=-\frac{[F''_{xx}+F''_{xy}\cdot f'(x)]F'_y-F'_x[F''_{xy}+F''_{yy}\cdot f'(x)]}{(F'_y)^2},\tag{5'}$$

где F'_x, F'_y, F''_{xx}, F''_{xy}, F''_{yy} вычисляются в точке $(x, f(x))$.

Таким образом, $f\in C^{(2)}(I_x;I_y)$, если $F\in C^{(2)}(U;\mathbb{R})$. Поскольку порядок производных от f, входящих в правую часть соотношений (5), (5′) и т. д., на единицу ниже, чем порядок производной от f, стоящей в левой части равенства, то по индукции получаем, что $f\in C^{(p)}(I_x;I_y)$, если $F\in C^{(p)}(U;\mathbb{R})$. ►

Пример 1. Вернемся к рассмотренному выше соотношению (1), задающему окружность в $\mathbb{R}^2$, и проверим на этом примере утверждение 1.

В данном случае

$$F(x, y)=x^2+y^2-1$$

и очевидно, что $F\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Далее,

$$F'_x(x, y)=2x,\quad F'_y(x, y)=2y,$$

поэтому $F'_y(x, y)\neq 0$, если $y\neq 0$. Таким образом, в силу утверждения 1, для любой точки (x_0, y_0) данной окружности, отличной от точек $(-1, 0)$, $(1, 0)$, найдется такая окрестность, что попадающая в нее дуга окружности может быть записана в виде $y=f(x)$. Непосредственное вычисление подтверждает это, причем $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ или $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$.

Далее, в силу утверждения 1,

$$f'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}=-\frac{x_0}{y_0}.\tag{8}$$

Непосредственное вычисление дает

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{если } f(x)=\sqrt{1-x^2},\\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{если } f(x)=-\sqrt{1-x^2},\end{cases}$$

что можно записать одним выражением

$$f'(x)=-\frac{x}{f(x)}=-\frac{x}{y},$$

вычисление по которому приводит к тому же результату

$$f'(x_0)=-\frac{x_0}{y_0},$$

что и вычисление по формуле (8), полученной из утверждения 1.

Важно заметить, что формула (5) или (8) позволяет вычислять $f'(x)$, даже не располагая явным выражением зависимости $y=f(x)$, если нам только известно, что $f(x_0)=y_0$. Задание же условия $y_0=f(x_0)$ необходимо для выделения той порции линии уровня $F(x, y)=0$, которую мы намереваемся представить в виде $y=f(x)$.

На примере окружности видно, что задание только координаты x_0 еще не определяет дугу окружности и, только фиксировав y_0, мы выделяем одну из двух возможных в данном случае дуг.

3. Переход к случаю зависимости $F(x^1, \ldots, x^m, y) = 0$. Простым обобщением утверждения 1 на случай зависимости $F(x^1, \ldots, x^m, y) = 0$ является следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если функция $F: U \to \mathbb{R}$, определенная в окрестности $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$ точки $(x_0, y_0) = (x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$, такова, что*

1° $F \in C^{(p)}(U; \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$,
2° $F(x_0, y_0) = F(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0) = 0$,
3° $F'_y(x_0, y_0) = F'_y(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0) \neq 0$,

то существуют $(m+1)$-мерный промежуток $I = I_x^m \times I_y^1$, где

$$I_x^m = \{x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m \mid |x^i - x_0^i| < \alpha^i,\ i = 1, \ldots, m\},$$
$$I_y^1 = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - y_0| < \beta\},$$

являющийся лежащей в U окрестностью точки (x_0, y_0), и такая функция $f \in C^{(p)}(I_x^m; I_y^1)$, что для любой точки $(x, y) \in I_x^m \times I_y^1$

$$F(x^1, \ldots, x^m, y) = 0 \iff y = f(x^1, \ldots, x^m), \tag{9}$$

причем частные производные функции $y = f(x^1, \ldots, x^m)$ в точках I_x могут быть вычислены по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1}[F'_{x^i}(x, f(x))]. \tag{10}$$

◄ Доказательство существования промежутка $I^{m+1} = I_x^m \times I_y^1$, функции $y = f(x) = f(x^1, \ldots, x^m)$ и ее непрерывности в I_x^m дословно повторяет соответствующие части доказательства утверждения 1, с единственным изменением, которое сводится к тому, что теперь под символом x надо понимать набор $(x^1, \ldots, x^m)$, а под символом α — набор $(\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$.

Если теперь в функциях $F(x^1, \ldots, x^m, y)$ и $f(x^1, \ldots, x^m)$ фиксировать все переменные, кроме x^i и y, то мы окажемся в условиях утверждения 1, где на сей раз роль x выполняет переменная x^i. Отсюда следует справедливость формулы (10). Из этой формулы видно, что $\frac{\partial f}{\partial x^i} \in C(I_x^m; I_y^1)$ $(i = 1, \ldots, m)$, т. е. $f \in C^{(1)}(I_x^m; I_y^1)$. Рассуждая, как и при доказательстве утверждения 1, по индукции устанавливаем, что $f \in C^{(p)}(I_x^m; I_y^1)$, коль скоро $F \in C^{(p)}(U; \mathbb{R})$. ►

Пример 2. Предположим, что функция $F: G \to \mathbb{R}$ определена в области $G \subset \mathbb{R}^m$ и принадлежит классу $C^{(1)}(G; \mathbb{R})$; $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m) \in G$ и $F(x_0) = F(x_0^1, \ldots, x_0^m) = 0$. Если x_0 не является критической точкой функции F, то хотя бы одна из частных производных функции F в точке x_0 отлична от нуля. Пусть, например, $\frac{\partial F}{\partial x^m}(x_0) \neq 0$.

Тогда, в силу утверждения 2, в некоторой окрестности точки x_0 подмножество $\mathbb{R}^m$, задаваемое уравнением $F(x^1, \ldots, x^m) = 0$, может быть задано как график некоторой функции $x^m = f(x^1, \ldots, x^{m-1})$, определенной в окрестности точки $(x_0^1, \ldots, x_0^{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, непрерывно дифференцируемой в этой окрестности и такой, что $f(x_0^1, \ldots, x_0^{m-1}) = x_0^m$.

Таким образом, в окрестности некритической точки x_0 функции F уравнение

$$F(x^1, \ldots, x^m) = 0$$

задает $(m-1)$-мерную поверхность.

В частности, в случае $\mathbb{R}^3$ уравнение

$$F(x, y, z) = 0$$

в окрестности некритической точки (x_0, y_0, z_0), удовлетворяющей ему, задает двумерную поверхность, которая при выполнении условия $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ локально может быть записана в виде

$$z = f(x, y).$$

Как мы знаем, уравнение плоскости, касательной к графику этой функции в точке (x_0, y_0, z_0), имеет вид

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Но по формуле (10)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

поэтому уравнение касательной плоскости можно переписать в виде

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

симметричном относительно переменных x, y, z.

Аналогично и в общем случае получаем уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} F'_{x^i}(x_0)(x^i - x_0^i) = 0$$

гиперплоскости в $\mathbb{R}^m$, касательной в точке $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m)$ к поверхности, задаваемой уравнением $F(x^1, \ldots, x^m) = 0$ (разумеется, при условии, что $F(x_0) = 0$ и что x_0 — некритическая точка F).

Из полученных уравнений видно, что при наличии евклидовой структуры в $\mathbb{R}^m$ можно утверждать, что вектор

$$\operatorname{grad} F(x_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x^m}\right)(x_0)$$

ортогонален поверхности r-уровня $F(x) = r$ функции F в соответствующей точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Например, для функции

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$

определенной в $\mathbb{R}^3$, r-уровнем являются: пустое множество при $r < 0$; точка при $r = 0$; эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r$$

при $r > 0$. Если (x_0, y_0, z_0) — точка на этом эллипсоиде, то по доказанному вектор

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right)$$

ортогонален этому эллипсоиду в точке (x_0, y_0, z_0), а касательная к нему в этой точке плоскость имеет уравнение

$$\frac{x_0(x-x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y-y_0)}{b^2} + \frac{z_0(z-z_0)}{c^2} = 0,$$

которое с учетом того, что точка (x_0, y_0, z_0) лежит на эллипсоиде, можно переписать в виде

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = r.$$

4. Теорема о неявной функции. Теперь перейдем к общему случаю системы уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

которую мы будем решать относительно $y^1, \dots, y^n$, т. е. искать локально эквивалентную системе (11) систему функциональных связей

$$\begin{cases} y^1 = f^1(x^1, \dots, x^m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^n = f^n(x^1, \dots, x^m). \end{cases} \tag{12}$$

Для краткости, удобства письма и ясности формулировок условимся, что $x = (x^1, \dots, x^m)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$; левую часть системы (11) будем записывать как $F(x, y)$, систему (11) как $F(x, y) = 0$, а отображение (12) как $y = f(x)$.

Если

$$x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m), \quad y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^n),$$
$$\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m), \quad \beta = (\beta^1, \dots, \beta^n),$$

то запись $|x - x_0| < \alpha$ или $|y - y_0| < \beta$ будет означать, что $|x^i - x_0^i| < \alpha^i$ $(i = 1, \dots, m)$ и, соответственно, $|y^j - y_0^j| < \beta^j$ $(j = 1, \dots, n)$.

Далее положим

$$f'(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}(x), \tag{13}$$

$$F'_x(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}(x,y), \tag{14}$$

$$F'_y(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}(x,y). \tag{15}$$

Заметим, что матрица $F'_y(x,y)$ квадратная и, следовательно, она обратима тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. В случае $n=1$ она сводится к единственному элементу и в этом случае обратимость матрицы $F'_y(x,y)$ равносильна тому, что этот единственный ее элемент отличен от нуля. Матрицу, обратную к $F'_y(x,y)$, будем, как обычно, обозначать символом $[F'_y(x,y)]^{-1}$.

Теперь сформулируем основной результат параграфа.

Теорема (о неявной функции). *Если отображение $F: U\to\mathbb{R}^n$, определенное в окрестности U точки $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^{m+n}$, таково, что*

1° $F\in C^{(p)}(U;\mathbb{R}^n)$, $p\geqslant 1$,
2° $F(x_0,y_0)=0$,
3° $F'_y(x_0,y_0)$ — обратимая матрица,

то существуют $(m+n)$-мерный промежуток $I=I^m_x\times I^n_y\subset U$, где

$$I^m_x=\{x\in\mathbb{R}^m \mid |x-x_0|<\alpha\},\quad I^n_y=\{y\in\mathbb{R}^n \mid |y-y_0|<\beta\},$$

и такое отображение $f\in C^{(p)}(I^m_x;I^n_y)$, что для любой точки $(x,y)\in I^m_x\times I^n_y$

$$F(x,y)=0 \iff y=f(x), \tag{16}$$

причем

$$f'(x)=-[F'_y(x,f(x))]^{-1}[F'_x(x,f(x))]. \tag{17}$$

◄ Доказательство теоремы будет опираться на утверждение 2 и простейшие свойства определителей. Разобьем его на отдельные этапы. Будем рассуждать методом индукции.

При $n=1$ теорема совпадает с утверждением 2 и потому верна.

Пусть теорема справедлива для размерности $n-1$. Покажем, что она тогда справедлива и для размерности n.

a) В силу условия 3°, определитель матрицы (15) отличен от нуля в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+n}$, а значит, и в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Следовательно, по крайней мере один элемент последней строки этой матрицы отличен от нуля. С точностью до перемены обозначений можно считать, что таким является элемент $\frac{\partial F^n}{\partial y^n}$.

b) Применяя тогда к соотношению

$$F^n(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n) = 0$$

утверждение 2, найдем промежуток $\tilde{I}^{m+n} = (\tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}) \times I_y^1 \subset U$ и такую функцию $\tilde{f} \in C^{(p)}(\tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}; I_y^1)$, что

$$\begin{gathered}(F^n(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n) = 0 \text{ в } \tilde{I}^{m+n}) \iff \\ \iff (y^n = \tilde{f}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1}),\ (x^1, \ldots, x^m) \in \tilde{I}_x^m, \\ (y^1, \ldots, y^{n-1}) \in \tilde{I}_y^{n-1}). \end{gathered} \tag{18}$$

c) Подставляя найденное выражение $y^n = \tilde{f}(x, y^1, \ldots, y^{n-1})$ переменной y^n в первые $n-1$ уравнений системы (11), получим $n-1$ соотношений

$$\begin{cases} \Phi^1(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1}) := \\ \quad = F^1(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1}, \tilde{f}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1})) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi^{n-1}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1}) := \\ \quad = F^{n-1}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1}, \tilde{f}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1})) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Видно, что $\Phi^i \in C^{(p)}(\tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}; \mathbb{R})$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, причем

$$\Phi^i(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1),$$

ибо $\tilde{f}(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1}) = y_0^n$ и $F^i(x_0, y_0) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

В силу определения функций Φ^k $(k = 1, \ldots, n-1)$,

$$\frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i} = \frac{\partial F^k}{\partial y^i} + \frac{\partial F^k}{\partial y^n} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} \quad (i, k = 1, \ldots, n-1). \tag{20}$$

Положив еще

$$\begin{aligned}\Phi^n(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1}) &:= \\ &= F^n(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1}, \tilde{f}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1})),\end{aligned}$$

в силу (18) получаем, что в области своего определения $\Phi^n \equiv 0$, поэтому

$$\frac{\partial \Phi^n}{\partial y^i} = \frac{\partial F^n}{\partial y^i} + \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i} \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{21}$$

Учитывая соотношения (20), (21) и свойства определителей, можно заметить, что определитель матрицы (15) равен определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1}+\frac{\partial F^1}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial \tilde f}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y^{n-1}}+\frac{\partial F^1}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial \tilde f}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1}+\frac{\partial F^n}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial \tilde f}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^n}{\partial y^{n-1}}+\frac{\partial F^n}{\partial y^n}\cdot\frac{\partial \tilde f}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^{n-1}} & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial y^n} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}.$$

По предположению, $\frac{\partial F^n}{\partial y^n}\neq 0$, а определитель матрицы (15) по условию отличен от нуля. Следовательно, в некоторой окрестности точки $(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^{n-1})$ отличен от нуля и определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial y^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \end{pmatrix}(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1}).$$

Тогда по предположению индукции найдутся промежуток $I^{m+n-1}=I_x^m\times I_y^{n-1}\subset \tilde I_x^m\times\tilde I_y^{n-1}$ — окрестность точки $(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^{n-1})$ в $\mathbb{R}^{m+n-1}$ — и такое отображение $f\in C^{(p)}(I_x^m; I_y^{n-1})$, что в пределах промежутка $I^{m+n-1}=I_x^m\times I_y^{n-1}$ система (19) равносильна соотношениям

$$\begin{cases} y^1=f^1(x^1, \dots, x^m), \\ \dots\dots\dots \\ y^{n-1}=f^{n-1}(x^1, \dots, x^m), \end{cases} \qquad x\in I_x^m. \tag{22}$$

d) Так как $I_y^{n-1}\subset\tilde I_y^{n-1}$, а $I_x^m\subset\tilde I_x^m$, то, подставляя $f^1, \dots, f^{n-1}$ из (22) вместо соответствующих переменных в функцию

$$y^n=\tilde f(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^{n-1})$$

из соотношения (18), получаем зависимость

$$y^n=f^n(x^1, \dots, x^m) \tag{23}$$

переменной y^n от $(x^1, \dots, x^m)$.

e) Покажем теперь, что система равенств

$$\begin{cases} y^1=f^1(x^1, \dots, x^m), \\ \dots\dots\dots \\ y^n=f^n(x^1, \dots, x^m), \end{cases} \qquad x\in I_x^m, \tag{24}$$

задающая отображение $f \in C^{(p)}(I_x^m; I_y^n)$, где $I_y^n = I_y^{n-1} \times I_y^1$, равносильна в пределах окрестности $I^{m+n} = I_x^m \times I_y^n$ системе уравнений (11).

В самом деле, сначала мы в пределах $\tilde{I}^{m+n} = (\tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}) \times I_y^1$ заменили последнее уравнение исходной системы (11) эквивалентным ему, в силу (18), равенством $y^n = \tilde{f}(x, y^1, \ldots, y^{n-1})$. От так полученной второй системы мы перешли к равносильной ей третьей системе, заменив в первых $n-1$ уравнениях переменную y^n на $\tilde{f}(x, y^1, \ldots, y^{n-1})$. Первые $n-1$ уравнений (19) третьей системы мы в пределах $I_x^m \times I_y^{n-1} \subset \tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}$ заменили равносильными им соотношениями (22). Тем самым получили четвертую систему, после чего перешли к равносильной ей в пределах $I_x^m \times I_y^{n-1} \times I_y^1 = I^{m+n}$ окончательной системе (24), заменив в последнем уравнении $y^n = \tilde{f}(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^{n-1})$ четвертой системы переменные $y^1, \ldots, y^{n-1}$ их выражениями (22) и получив в качестве последнего уравнения соотношение (23).

f) Для завершения доказательства теоремы остается проверить формулу (17).

Поскольку в окрестности $I_x^m \times I_y^n$ точки (x_0, y_0) системы (11) и (12) равносильны, то

$$F(x, f(x)) \equiv 0, \quad \text{если } x \in I_x^m.$$

В координатах это означает, что в области I_x^m

$$F^k(x^1, \ldots, x^m, f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^m)) \equiv 0 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{25}$$

Поскольку $f \in C^{(p)}(I_x^m; I_y^n)$ и $F \in C^{(p)}(U; \mathbb{R}^n)$, где $p \geqslant 1$, то $F(\cdot, f(\cdot)) \in$ $\in C^{(p)}(I_x^m; \mathbb{R}^n)$ и, дифференцируя тождества (25), получаем

$$\frac{\partial F^k}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F^k}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial f^j}{\partial x^i} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m). \tag{26}$$

Соотношения (26), очевидно, равносильны одному матричному равенству

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot f'(x) = 0,$$

в котором $y = f(x)$.

Учитывая обратимость матрицы $F'_y(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0), из этого равенства получаем, что

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1}[F'_x(x, f(x))],$$

и теорема полностью доказана. ►

Задачи и упражнения

1. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y соотношением $F(x, y) = 0$, где $F \in$ $\in C^{(2)}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, задана кривая. Пусть (x_0, y_0) — некритическая точка функции $F(x, y)$, лежащая на кривой.

a) Напишите уравнение касательной к этой кривой в точке (x_0, y_0).

b) Покажите, что если (x_0, y_0) — точка перегиба кривой, то в этой точке выполняется равенство

$$(F''_{xx}{F'_y}^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}{F'_x}^2)(x_0, y_0) = 0.$$

c) Найдите формулу для кривизны кривой в точке (x_0, y_0).

2. *Преобразование Лежандра для m переменных.*

Преобразование Лежандра от переменных $x^1, \ldots, x^m$ и функции $f(x^1, \ldots, x^m)$ есть переход к новым переменным $\xi_1, \ldots, \xi_m$ и функции $f^*(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, задаваемый соотношениями

$$\begin{cases} \xi_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^m) \qquad (i = 1, \ldots, m), \\ f^*(\xi_1, \ldots, \xi_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i x^i - f(x^1, \ldots, x^m). \end{cases} \tag{27}$$

a) Дайте геометрическую интерпретацию преобразования (27) Лежандра как перехода от координат $(x^1, \ldots, x^m, f(x^1, \ldots, x^m))$ точки на графике функции $f(x)$ к параметрам $(\xi_1, \ldots, \xi_m, f^*(\xi_1, \ldots, \xi_m))$, задающим уравнение плоскости, касательной к графику в этой точке.

b) Покажите, что преобразование Лежандра локально заведомо возможно, если $f \in C^{(2)}$ и $\det\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) \neq 0$.

c) Используя для функции $f(x) = f(x^1, \ldots, x^m)$ то же определение выпуклости, что и в одномерном случае (подразумевая теперь под x вектор $(x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$), покажите, что преобразованием Лежандра выпуклой функции является выпуклая функция.

d) Покажите, что

$$df^* = \sum_{i=1}^{m} x^i\, d\xi_i + \sum_{i=1}^{m} \xi_i\, dx^i - df = \sum_{i=1}^{m} x^i\, d\xi_i,$$

и выведите отсюда инволютивность преобразования Лежандра, т. е. проверьте, что

$$(f^*)^*(x) = f(x).$$

e) Учитывая d), запишите преобразование (27) в симметричном относительно переменных виде

$$\begin{cases} f^*(\xi_1, \ldots, \xi_m) + f(x^1, \ldots, x^m) = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i x^i, \\ \xi_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, \ldots, x^m), \quad x^i = \dfrac{\partial f^*}{\partial \xi_i}(\xi_1, \ldots, \xi_m) \end{cases} \tag{28}$$

или, короче, в виде

$$f^*(\xi) + f(x) = \xi x, \quad \xi = \nabla f(x),\ x = \nabla f^*(\xi),$$

где

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}\right)(x), \quad \nabla f^*(\xi) = \left(\frac{\partial f^*}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial f^*}{\partial \xi_m}\right)(\xi),$$

$$\xi x = \xi_i x^i = \sum_{i=1}^{m} \xi_i x^i.$$

f) Матрицу, составленную из частных производных второго порядка функции (а иногда и определитель этой матрицы), называют *гессианом* функции в данной точке.

Пусть d_{ij} и d^*_{ij} — алгебраические дополнения элементов $\frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}$, $\frac{\partial f^*}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$ гессианов

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^m \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^m \partial x^m} \end{pmatrix}(x), \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f^*}{\partial \xi_1 \partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f^*}{\partial \xi_1 \partial \xi_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f^*}{\partial \xi_m \partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f^*}{\partial \xi_m \partial \xi_m} \end{pmatrix}(\xi)$$

функций $f(x)$ и $f^*(\xi)$, а d и d^* — определители этих матриц. Считая, что $d \neq 0$, покажите, что $d \cdot d^* = 1$ и что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) = \frac{d^*_{ij}}{d^*}(\xi), \qquad \frac{\partial^2 f^*}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi) = \frac{d_{ij}}{d}(x).$$

g) Мыльная пленка, натянутая на проволочный контур, образует так называемую *минимальную поверхность*, имеющую наименьшую площадь среди всех поверхностей, натянутых на этот контур.

Если локально задать эту поверхность как график функции $z = f(x, y)$, то, оказывается, функция f должна удовлетворять следующему уравнению минимальных поверхностей:

$$(1 + f_y'^2) f''_{xx} - 2 f'_x f'_y f''_{xy} + (1 + f_x'^2) f''_{yy} = 0.$$

Покажите, что после преобразования Лежандра это уравнение приводится к виду

$$(1 + \eta^2) f^{*\prime\prime}_{\eta\eta} + 2\xi\eta f^{*\prime\prime}_{\xi\eta} + (1 + \xi^2) f^{*\prime\prime}_{\xi\xi} = 0.$$

3. *Канонические переменные и система уравнений Гамильтона*[1].

a) В вариационном исчислении и фундаментальных принципах классической механики важную роль играет следующая система уравнений Эйлера—Лагранжа:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\right)(t, x, v) = 0, \\ v = \dot{x}(t), \end{cases} \tag{29}$$

где $L(t, x, v)$ — заданная функция переменных t, x, v, среди которых t обычно является временем, x — координатой, а v — скоростью.

Систему (29) составляют два соотношения на три переменные. Из системы (29) обычно желают найти зависимости $x = x(t)$ и $v = v(t)$, что по существу сводится к отысканию зависимости $x = x(t)$, ибо $v = \frac{dx}{dt}$.

Запишите подробно первое уравнение системы (29), раскрыв производную $\frac{d}{dt}$ с учетом того, что $x = x(t)$ и $v = v(t)$.

---

[1] У. Р. Гамильтон (1805—1865) — знаменитый ирландский математик и механик. Сформулировал вариационный принцип (принцип Гамильтона), построил феноменологическую теорию оптических явлений; создатель теории кватернионов и родоначальник векторного анализа (кстати, ему принадлежит сам термин «вектор»).

b) Покажите, что если от переменных t, x, v, L перейти к так называемым *каноническим переменным* t, x, p, H, сделав преобразование Лежандра (см. задачу 2)

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial L}{\partial v}, \\ H = pv - L \end{cases}$$

по переменным v, L, заменяя их на переменные p, H, то система Эйлера—Лагранжа (29) приобретает симметричный вид

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{30}$$

в котором она называется *системой уравнений Гамильтона*.

c) В многомерном случае, когда $L = L(t, x^1, \dots, x^m, v^1, \dots, v^m)$, система уравнений Эйлера—Лагранжа имеет вид

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial L}{\partial x^i} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial v^i}\right)(t, x, v) = 0, \\ v^i = \dot{x}^i(t) \quad (i = 1, \dots, m), \end{cases} \tag{31}$$

где для краткости положено $x = (x^1, \dots, x^m)$, $v = (v^1, \dots, v^m)$.

Сделав преобразование Лежандра по переменным $v^1, \dots, v^m, L$, перейдите от переменных $t, x^1, \dots, x^m, v^1, \dots, v^m, L$ к каноническим переменным $t, x^1, \dots, x^m, p_1, \dots, p_m$, H и покажите, что в них система (31) перейдет в следующую систему уравнений Гамильтона:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad \dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, \dots, m). \tag{32}$$

4. *Теорема о неявной функции.*

Решение этой задачи дает другое, быть может, менее наглядное и эффективное, но более короткое в сравнении с изложенным выше доказательство основной теоремы настоящего параграфа.

a) Пусть выполнены условия теоремы о неявной функции, и пусть

$$F^i_y(x, y) = \left(\frac{\partial F^i}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial F^i}{\partial y^n}\right)(x, y)$$

— i-я строка матрицы $F'_y(x, y)$.

Покажите, что определитель матрицы, составленной из векторов $F^i_y(x_i, y_i)$, отличен от нуля, если все точки (x_i, y_i) $(i = 1, \dots, n)$ лежат в некоторой достаточно малой окрестности $U = I^m_x \times I^n_y$ точки (x_0, y_0).

b) Покажите, что если при $x \in I^m_x$ найдутся точки $y_1, y_2 \in I^n_y$ такие, что $F(x, y_1) = 0$ и $F(x, y_2) = 0$, то для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ найдется такая точка (x, y_i), лежащая на отрезке с концами (x, y_1), (x, y_2), что

$$F^i_y(x, y_i)(y_2 - y_1) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Покажите, что отсюда следует, что $y_1 = y_2$, т. е. если неявная функция $f: I^m_x \to I^n_y$ существует, то она единственна.

c) Покажите, что если шар $B(y_0; r)$ лежит в I^n_y, то $F(x_0, y) \neq 0$ при $\|y - y_0\|_{\mathbb{R}^n} = r > 0$.

d) Функция $\|F(x_0, y)\|^2_{\mathbb{R}^n}$ непрерывна и имеет положительный минимум μ на сфере $\|y - y_0\|_{\mathbb{R}^n} = r$.

e) Существует $\delta > 0$ такое, что при $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^m} < \delta$

$$\|F(x, y)\|^2_{\mathbb{R}^n} \geqslant \frac{1}{2}\mu, \quad \text{если } \|y - y_0\|_{\mathbb{R}^n} = r,$$

$$\|F(x, y)\|^2_{\mathbb{R}^n} < \frac{1}{2}\mu, \quad \text{если } y = y_0.$$

f) При любом фиксированном x таком, что $\|x - x_0\| < \delta$, функция $\|F(x, y)\|^2_{\mathbb{R}^n}$ достигает минимума в некоторой внутренней точке $y = f(x)$ шара $\|y - y_0\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant r$, и поскольку матрица $F'_y(x, f(x))$ обратима, то $F(x, f(x)) = 0$. Этим устанавливается существование неявной функции $f\colon B(x_0; \delta) \to B(y_0; r)$.

g) Если $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, то

$$\Delta y = -[\widetilde{F}'_y]^{-1} \cdot [\widetilde{F}'_x]\Delta x,$$

где $\widetilde{F}'_y$ — матрица, строками которой являются векторы $F^i_y(x_i, y_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, где (x_i, y_i) — точка на отрезке с концами (x, y), $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Аналогичный смысл имеет символ $\widetilde{F}'_x$.

Покажите, что из этого соотношения следует непрерывность функции $y = f(x)$.

h) Покажите, что

$$f'(x) = -[\widetilde{F}'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [\widetilde{F}'_x(x, f(x))].$$

5. «Если $f(x, y, z) = 0$, то $\dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial z} = -1$».

a) Придайте точный смысл этому высказыванию.

b) Проверьте его справедливость на примере формулы Клапейрона

$$\frac{P \cdot V}{T} = \text{const}$$

и в общем случае функции трех переменных.

c) Запишите аналогичное высказывание для соотношения $f(x^1, \ldots, x^m) = 0$ между m переменными. Проверьте его справедливость.

6. Покажите, что корни уравнения

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

гладко зависят от его коэффициентов, во всяком случае, пока все корни различны.

§ 6. Некоторые следствия теоремы о неявной функции

1. Теорема об обратной функции

Определение 1. Отображение $f\colon U \to V$, где U и V — открытые подмножества в $\mathbb{R}^m$, называется $C^{(p)}$-*диффеоморфизмом* или *диффеоморфизмом гладкости* p $(p = 0, 1, \ldots)$, если

1) $f \in C^{(p)}(U; V)$;
2) f — биекция;
3) $f^{-1} \in C^{(p)}(V; U)$.

$C^{(0)}$-диффеоморфизмы называют *гомеоморфизмами*.

Здесь мы, как правило, будем рассматривать только гладкий случай, т. е. случай $p \in \mathbb{N}$ или $p = \infty$.

Следующая часто используемая теорема в идейном плане утверждает, что если дифференциал отображения обратим в точке, то само отображение обратимо в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 1 (теорема об обратной функции). *Если отображение $f: G \to \to \mathbb{R}^m$ области $G \subset \mathbb{R}^m$ таково, что*

1° $f \in C^{(p)}(G; \mathbb{R}^m)$, $p \geqslant 1$,
2° $y_0 = f(x_0)$ *при* $x_0 \in G$,
3° $f'(x_0)$ *обратимо,*

то существуют окрестность $U(x_0) \subset G$ точки x_0 и окрестность $V(y_0)$ точки y_0 такие, что $f: U(x_0) \to V(y_0)$ есть $C^{(p)}$-диффеоморфизм. При этом если $x \in U(x_0)$ и $y = f(x) \in V(y_0)$, то

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}.$$

◄ Соотношение $y = f(x)$ перепишем в виде

$$F(x, y) = f(x) - y = 0. \tag{1}$$

Функция $F(x, y) = f(x) - y$ определена при $x \in G$ и $y \in \mathbb{R}^m$, т. е. определена в окрестности $G \times \mathbb{R}^m$ точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.

Мы хотим разрешить уравнение (1) относительно x в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). В силу условий 1°, 2°, 3° теоремы отображение $F(x, y)$ таково, что

$$F \in C^{(p)}(G \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m), \quad p \geqslant 1,$$
$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0) \text{ обратимо.}$$

По теореме о неявной функции найдутся окрестность $I_x \times I_y$ точки (x_0, y_0) и отображение $g \in C^{(p)}(I_y; I_x)$ такие, что для любой точки $(x, y) \in I_x \times I_y$

$$f(x) - y = 0 \iff x = g(y) \tag{2}$$

и

$$g'(y) = -[F'_x(x, y)]^{-1}[F'_y(x, y)].$$

В нашем случае

$$F'_x(x, y) = f'(x), \quad F'_y(x, y) = -E,$$

где E — единичная матрица; поэтому

$$g'(y) = (f'(x))^{-1}. \tag{3}$$

Если положить $V = I_y$ и $U = g(V)$, то соотношение (2) показывает, что отображения $f: U \to V$ и $g: V \to U$ взаимно обратны, т. е. $g = f^{-1}$ на V.

Поскольку $V = I_y$, то V — окрестность точки y_0. Это означает, что при условиях 1°, 2°, 3° образ $y_0 = f(x_0)$ точки $x_0 \in G$, внутренней для G, является точкой, внутренней для образа $f(G)$ множества G. В силу формулы (3) матрица $g'(y_0)$ обратима. Значит, отображение $g: V \to U$ обладает свойствами

1°, 2°, 3° относительно области V и точки $y_0 \in V$. Тогда по уже доказанному $x_0 = g(y_0)$ — внутренняя точка множества $U = g(V)$.

Поскольку условия 1°, 2°, 3° в силу формулы (3), очевидно, выполнены в любой точке $y \in V$, то любая точка $x = g(y)$ является внутренней точкой множества U. Таким образом, U — открытая (и, очевидно, даже связная) окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^m$.

Теперь проверено, что отображение $f: U \to V$ удовлетворяет всем условиям определения 1 и утверждению теоремы 1. ►

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих теорему 1. Очень часто теорема об обратной функции используется при переходе от одной системы координат к другой системе координат. Простейший вариант такого преобразования координат рассматривался в аналитической геометрии и линейной алгебре и имел вид

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_m^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & \ldots & a_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}$$

или, в компактной записи, $y^j = a_i^j x^i$. Это линейное преобразование $A: \mathbb{R}_x^m \to \mathbb{R}_y^m$ имеет обратное $A^{-1}: \mathbb{R}_y^m \to \mathbb{R}_x^m$, определенное во всем пространстве $\mathbb{R}_y^m$, тогда и только тогда, когда матрица (a_i^j) обратима, т. е. при условии, что $\det(a_i^j) \neq 0$.

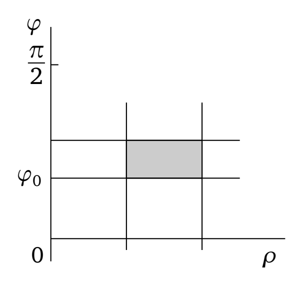
Теорема об обратной функции является локальным вариантом этого утверждения, опирающимся на то обстоятельство, что гладкое отображение в малой окрестности точки ведет себя примерно так же, как его дифференциал в этой точке.

Пример 1. *Полярные координаты*. Отображение $f: \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}^2$ полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \geqslant 0\}$ на плоскость $\mathbb{R}^2$, задаваемое формулами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \tag{4}$$

проиллюстрировано на рис. 57.

Якобиан этого отображения, как нетрудно подсчитать, равен ρ, т. е. отличен от нуля в окрестности любой точки (ρ, φ), где $\rho > 0$. Таким образом,



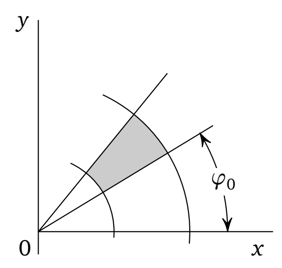


Рис. 57

формулы (4) локально обратимы и, значит, локально числа ρ, φ могут быть приняты в качестве новых координат точки, которую раньше задавали декартовы координаты x, y.

Координаты (ρ, φ) являются хорошо известной системой криволинейных координат на плоскости — это полярные координаты. Их геометрический смысл виден из рис. 57. Отметим, что в силу периодичности функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ отображение (4) при $\rho > 0$ только локально диффеоморфно, а во всей этой области оно не является биективным. Именно поэтому переход от декартовых координат к полярным всегда сопровождается выбором ветви (т. е. указанием диапазона изменения) аргумента φ.

Полярные координаты (ρ, ψ, φ) в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ называют *сферическими* координатами. Они связаны с декартовыми координатами формулами

$$z = \rho\cos\psi, \quad y = \rho\sin\psi\sin\varphi, \quad x = \rho\sin\psi\cos\varphi. \tag{5}$$

Геометрический смысл параметров ρ, ψ, φ показан на рис. 58.

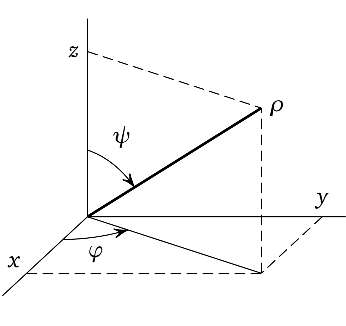


Рис. 58

Якобиан отображения (5) равен $\rho^2\sin\psi$ и в силу теоремы 1 преобразование (5) обратимо в окрестности любой точки (ρ, ψ, φ), в которой $\rho > 0$ и $\sin\psi \neq 0$.

Множествам, где $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ или $\psi = \text{const}$, в пространстве (x, y, z), очевидно, отвечают соответственно сферическая поверхность (на сфере радиуса ρ), полуплоскость, проходящая через ось z, и поверхность конуса с осью z.

Таким образом, при переходе от координат (x, y, z) к координатам (ρ, ψ, φ), например, сферическая поверхность и поверхность конуса локально распрямляются: им соответствуют куски плоскостей $\rho = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ соответственно. Аналогичное явление мы наблюдали и в двумерном случае, когда дуге окружности на плоскости (x, y) отвечал отрезок прямой на плоскости с координатами (ρ, φ) (см. рис. 57). Обратите внимание на то, что это именно локальное выпрямление.

В m-мерном случае полярные координаты вводятся соотношениями

$$\begin{aligned}
x^1 &= \rho\cos\varphi_1,\\
x^2 &= \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x^{m-1} &= \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1},\\
x^m &= \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1}.
\end{aligned} \tag{5'}$$

Якобиан этого преобразования равен

$$\rho^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-2} \tag{6}$$

и в силу теоремы 1 оно тоже локально обратимо всюду, где этот якобиан отличен от нуля.

Пример 2. *Общая идея локального выпрямления кривых*. Новые координаты обычно вводят с целью упростить аналитическую запись объектов, участвующих в задаче, и сделать их более обозримыми в этой новой записи.

Пусть, например, на плоскости $\mathbb{R}^2$ некоторая кривая задана уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

Пусть F — гладкая функция, а точка (x_0, y_0) такова, что она лежит на кривой, т. е. $F(x_0, y_0) = 0$, и не является критической точкой функции F, например, пусть $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Попробуем подобрать координаты ξ, η так, чтобы в них дуге нашей кривой, содержащей (x_0, y_0), отвечал отрезок одной из координатных линий, например линии $\eta = 0$.

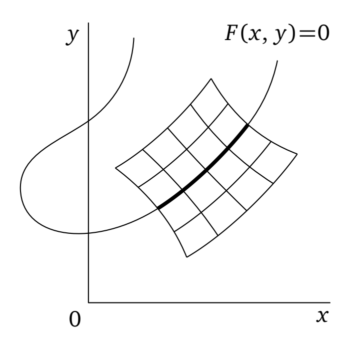
Положим

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = F(x, y).$$

Матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F'_x & F'_y \end{pmatrix}(x, y)$$

этого преобразования имеет своим детерминантом величину $F'_y(x, y)$, которая по предположению отлична от нуля в точке (x_0, y_0). Тогда по теореме 1 это отображение является диффеоморфизмом окрестности точки (x_0, y_0) на окрестность точки $(\xi, \eta) = (0, 0)$. Значит, в пределах указанной окрестности чи́сла ξ, η можно принять за новые координаты точек, лежащих в окрестности точки (x_0, y_0). В новых координатах наша кривая, очевидно, имеет уравнение $\eta = 0$, и в этом смысле мы действительно добились ее локального выпрямления (рис. 59).



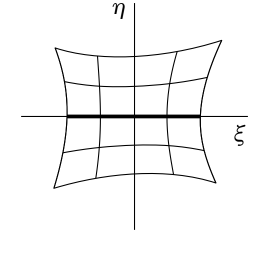


Рис. 59

2. Локальное приведение гладкого отображения к каноническому виду. Мы рассмотрим здесь только один вопрос этого типа, а именно укажем канонический вид, к которому удачным выбором координат можно локально привести любое гладкое отображение, имеющее постоянный ранг.

Напомним, что рангом гладкого отображения $f: U \to \mathbb{R}^n$ области $U \subset \mathbb{R}^m$ в точке $x \in U$ называется ранг касательного к нему в этой точке линейного отображения, т. е. ранг матрицы $f'(x)$. Ранг отображения f в точке x обозначают обычно символом $\operatorname{rang} f(x)$.

Теорема 2 (теорема о ранге). *Пусть $f: U \to \mathbb{R}^n$ — отображение, определенное в окрестности $U \subset \mathbb{R}^m$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Если $f \in C^{(p)}(U; \mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$, и в любой точке $x \in U$ отображение f имеет один и тот же ранг k, то существуют окрестности $O(x_0)$, $O(y_0)$ точек x_0, $y_0 = f(x_0)$ и такие их диффеоморфизмы $u = \varphi(x)$, $v = \psi(y)$ класса $C^{(p)}$, что в окрестности $O(u_0) = \varphi(O(x_0))$ точки $u_0 = \varphi(x_0)$ отображение $v = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u)$ имеет следующее координатное представление*:

$$(u^1, \ldots, u^k, \ldots, u^m) = u \mapsto v = (v^1, \ldots, v^n) = (u^1, \ldots, u^k, 0, \ldots, 0). \tag{7}$$

Иными словами, теорема утверждает (рис. 60), что вместо координат $(x^1, \ldots, x^m)$ можно выбрать координаты $(u^1, \ldots, u^m)$, а вместо координат $(y^1, \ldots, y^n)$ — координаты $(v^1, \ldots, v^n)$ так, что локально наше отображение в этих новых координатах будет иметь вид (7), т. е. канонический вид линейного отображения ранга k.

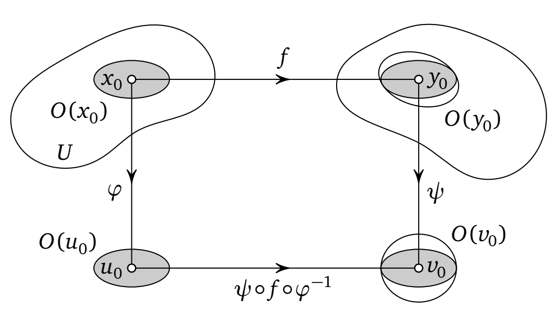


Рис. 60

◄ Запишем координатное представление

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1(x^1, \ldots, x^m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^k &= f^k(x^1, \ldots, x^m), \\ y^{k+1} &= f^{k+1}(x^1, \ldots, x^m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n &= f^n(x^1, \ldots, x^m) \end{aligned} \tag{8}$$

нашего отображения $f: U \to \mathbb{R}^n_y$, определенного в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^m_x$.

Чтобы не менять нумерацию координат и окрестность U, будем считать, что в любой точке $x \in U$ главный минор порядка k, стоящий в левом верхнем углу якобиевой матрицы отображения f, отличен от нуля.

Рассмотрим отображение, определяемое в окрестности U точки x_0 равенствами

$$\begin{aligned} u^1 &= \varphi^1(x^1, \ldots, x^m) = f^1(x^1, \ldots, x^m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^k &= \varphi^k(x^1, \ldots, x^m) = f^k(x^1, \ldots, x^m), \\ u^{k+1} &= \varphi^{k+1}(x^1, \ldots, x^m) = x^{k+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^m &= \varphi^m(x^1, \ldots, x^m) = x^m. \end{aligned} \tag{9}$$

Его матрица Якоби имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^k} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^k} & \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^m} \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array}\right),$$

и в силу сделанного предположения ее определитель отличен от нуля в U.

По теореме об обратной функции, отображение $u = \varphi(x)$ является диффеоморфизмом гладкости p некоторой окрестности $\widetilde{O}(x_0) \subset U$ точки x_0 на окрестность $\widetilde{O}(u_0) = \varphi(\widetilde{O}(x_0))$ точки $u_0 = \varphi(x_0)$.

Сравнивая соотношения (8) и (9), видим, что композиция $g = f \circ \varphi^{-1}$: $\widetilde{O}(u_0) \to \mathbb{R}^n_y$ имеет следующее координатное представление:

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1 \circ \varphi^{-1}(u^1, \ldots, u^m) = u^1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^k &= f^k \circ \varphi^{-1}(u^1, \ldots, u^m) = u^k, \\ y^{k+1} &= f^{k+1} \circ \varphi^{-1}(u^1, \ldots, u^m) = g^{k+1}(u^1, \ldots, u^m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^n &= f^n \circ \varphi^{-1}(u^1, \ldots, u^m) = g^n(u^1, \ldots, u^m). \end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку отображение $\varphi^{-1}\colon \widetilde{O}(u_0) \to \widetilde{O}(x_0)$ в любой точке $u \in \widetilde{O}(u_0)$ имеет максимальный ранг m, а отображение $f\colon \widetilde{O}(x_0) \to \mathbb{R}^n_y$ в любой точке

$x \in \widetilde{O}(x_0)$ имеет ранг k, то, как известно из линейной алгебры, матрица $g'(u) = f'(\varphi^{-1}(u)) \times (\varphi^{-1})'(u)$ имеет ранг k в любой точке $u \in \widetilde{O}(u_0)$.

Прямой подсчет матрицы Якоби отображения (10) дает

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline \frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^k} & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial u^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial u^k} & \frac{\partial g^n}{\partial u^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g^n}{\partial u^m} \end{array}\right).$$

Значит, в любой точке $u \in \widetilde{O}(u_0)$ получаем $\frac{\partial g^j}{\partial u^i}(u) = 0$ при $i = k+1, \ldots, m$; $j = k+1, \ldots, n$. Считая окрестность $\widetilde{O}(u_0)$ выпуклой (чего можно добиться, уменьшив $\widetilde{O}(u_0)$, например, до шара с центром u_0), отсюда можно заключить, что функции g^j при $j = k+1, \ldots, n$ на самом деле не зависят от переменных $u^{k+1}, \ldots, u^m$.

После этого решающего наблюдения отображение (10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} y^1 &= u^1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y^k &= u^k, \\ y^{k+1} &= g^{k+1}(u^1, \ldots, u^k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^n &= g^n(u^1, \ldots, u^k). \end{aligned} \tag{11}$$

Теперь уже можно указать отображение ψ. Положим

$$\begin{aligned} v^1 &= y^1 =: \psi^1(y), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v^k &= y^k =: \psi^k(y), \\ v^{k+1} &= y^{k+1} - g^{k+1}(y^1, \ldots, y^k) =: \psi^{k+1}(y), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v^n &= y^n - g^n(y^1, \ldots, y^k) =: \psi^n(y). \end{aligned} \tag{12}$$

Из построения функций g^j $(j = k+1, \ldots, n)$ видно, что отображение ψ определено в некоторой окрестности точки y_0 и принадлежит классу $C^{(p)}$ в этой окрестности.

Матрица Якоби отображения (12) имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline -\dfrac{\partial g^{k+1}}{\partial y^1} & \dots & -\dfrac{\partial g^{k+1}}{\partial y^k} & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & \\ -\dfrac{\partial g^n}{\partial y^1} & \dots & -\dfrac{\partial g^n}{\partial y^k} & 0 & & 1 \end{array}\right).$$

Ее определитель равен 1, и, значит, по теореме 1 отображение ψ является диффеоморфизмом гладкости p некоторой окрестности $\widetilde{O}(y_0)$ точки $y_0 \in \mathbb{R}^n_y$ на окрестность $\widetilde{O}(v_0) = \psi(\widetilde{O}(y_0))$ точки $v_0 \in \mathbb{R}^n_v$.

Сравнивая соотношения (11) и (12), видим, что в достаточно малой окрестности $O(u_0) \subset \widetilde{O}(u_0)$ точки u_0 такой, что $g(O(u_0)) \subset \widetilde{O}(y_0)$, отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon O(u_0) \to \mathbb{R}^n_v$ является отображением гладкости p этой окрестности $O(u_0)$ на некоторую окрестность $O(v_0) \subset \widetilde{O}(v_0)$ точки $v_0 \in \mathbb{R}^n_v$ и при этом имеет канонический вид

$$\begin{aligned} v^1 &= u^1, \\ &\dots\dots \\ v^k &= u^k, \\ v^{k+1} &= 0, \\ &\dots\dots \\ v^n &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Полагая $\varphi^{-1}(O(u_0)) = O(x_0)$, $\psi^{-1}(O(v_0)) = O(y_0)$, получаем указанные в теореме окрестности точек x_0, y_0, чем и завершается доказательство. ►

Теорема 2, как и теорема 1, очевидно, является локальным вариантом соответствующей теоремы линейной алгебры.

В связи с проведенным доказательством теоремы 2 сделаем следующие полезные для дальнейшего замечания.

Замечание 1. Если в любой точке исходной окрестности $U \subset \mathbb{R}^m$ ранг отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ равен n, то точка $y_0 = f(x_0)$, где $x_0 \in U$, является внутренней точкой множества $f(U)$, т. е. содержится в $f(U)$ вместе с некоторой своей окрестностью.

◄ Действительно, по доказанному отображение $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon O(u_0) \to O(v_0)$ в этом случае имеет вид

$$(u^1, \dots, u^n, \dots, u^m) = u \mapsto v = (v^1, \dots, v^n) = (u^1, \dots, u^n),$$

поэтому образ окрестности точки $u_0 = \varphi(x_0)$ содержит некоторую окрестность точки $v_0 = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u_0)$.

Но отображения $\varphi: O(x_0) \to O(u_0)$, $\psi: O(y_0) \to O(v_0)$ — диффеоморфизмы, поэтому они переводят внутренние точки во внутренние. Записав исходное отображение f в виде $f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$, заключаем, что точка $y_0 = f(x_0)$ является внутренней точкой образа окрестности точки x_0. ►

Замечание 2. Если ранг отображения $f: U \to \mathbb{R}^n$ в любой точке окрестности U равен k и $k < n$, то, в силу равенств (8), (12) и (13), в некоторой окрестности точки $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ имеют место $n - k$ соотношений

$$f^i(x^1, \ldots, x^m) = g^i(f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^k(x^1, \ldots, x^m)) \quad (i = k+1, \ldots, n). \quad (14)$$

Указанные соотношения выписаны в принятом нами предположении о том, что главный минор порядка k матрицы $f'(x_0)$ отличен от нуля, т. е. что ранг k реализуется уже на наборе функций $f^1, \ldots, f^k$. В противном случае можно изменить нумерацию функций $f^1, \ldots, f^n$ и снова иметь указанную ситуацию.

3. Зависимость функций

Определение 2. Говорят, что система непрерывных функций $f^i(x) = f^i(x^1, \ldots, x^m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ является *функционально независимой* в окрестности точки $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m)$, если для любой непрерывной функции $F(y) = F(y^1, \ldots, y^n)$, определенной в окрестности точки

$$y_0 = (y_0^1, \ldots, y_0^n) = (f^1(x_0), \ldots, f^n(x_0)) = f(x_0),$$

соотношение

$$F(f^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^m)) \equiv 0$$

в окрестности точки x_0 возможно только в случае, когда $F(y^1, \ldots, y^n) \equiv 0$ в окрестности точки y_0.

Линейная независимость, рассматривавшаяся в алгебре, есть независимость по отношению к линейным соотношениям

$$F(y^1, \ldots, y^n) = \lambda_1 y^1 + \ldots + \lambda_n y^n.$$

Если система не является функционально независимой, то ее называют *функционально зависимой*.

В случае линейной зависимости векторов один из них, очевидно, является линейной комбинацией остальных. Аналогичная ситуация имеет место и в отношении функционально зависимой системы гладких функций.

Утверждение 1. *Если система $f^i(x^1, \ldots, x^m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ гладких функций, определенных в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$, такова, что ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}(x)$$

в любой точке $x \in U$ один и тот же и равен k, то

а) *при $k = n$ система функционально независима в окрестности x_0;*

b) *при $k<n$ найдутся окрестность точки x_0 и такие k функций системы, пусть $f^1, \dots, f^k$, что остальные $n-k$ функций системы в этой окрестности представляются в виде*

$$f^i(x^1, \dots, x^m) = g^i(f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^k(x^1, \dots, x^m)),$$

где $g^i(y^1, \dots, y^k)$ — гладкие функции, определенные в окрестности точки $y_0 = (f^1(x_0), \dots, f^n(x_0))$ и зависящие только от k координат текущей точки $y=(y^1, \dots, y^n)$.

◄ В самом деле, если $k=n$, то в силу замечания 1 к теореме о ранге при отображении

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1(x^1, \dots, x^m), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y^n &= f^n(x^1, \dots, x^m) \end{aligned} \tag{15}$$

образ окрестности рассматриваемой точки x_0 содержит целую окрестность точки $y_0 = f(x_0)$. Но тогда соотношение

$$F(f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^n(x^1, \dots, x^m)) \equiv 0$$

в окрестности x_0 возможно только при условии, что

$$F(y^1, \dots, y^n) \equiv 0$$

в окрестности точки y_0. Этим утверждение a) доказано.

Если же $k<n$ и ранг k отображения (15) реализуется уже на функциях $f^1, \dots, f^k$, то в силу замечания 2 к теореме о ранге найдется такая окрестность точки $y_0 = f(x_0)$ и $n-k$ определенных в ней функций $g^i(y) = g^i(y^1, \dots, y^k)$ $(i=k+1, \dots, n)$ того же порядка гладкости, как и функции системы, что в некоторой окрестности точки x_0 будут выполнены соотношения (14). Этим доказано утверждение b). ►

Мы показали, что если $k<n$, то найдутся $n-k$ специальных функций $F^i(y) = y^i - g^i(y^1, \dots, y^k)$ $(i=k+1, \dots, n)$, устанавливающих соотношения

$$F^i(f^1(x), \dots, f^k(x), f^i(x)) \equiv 0 \quad (i=k+1, \dots, n)$$

между функциями системы $f^1, \dots, f^k, \dots, f^n$ в окрестности точки x_0.

4. Локальное разложение диффеоморфизма в композицию простейших. Здесь мы покажем, как, используя теорему об обратной функции, можно локально представить диффеоморфное отображение в виде композиции таких диффеоморфизмов, каждый из которых меняет только одну из координат.

Определение 3. Диффеоморфизм $g\colon U \to \mathbb{R}^m$ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^m$ будем называть *простейшим*, если его координатное представление имеет вид

$$\begin{cases} y^i = x^i, \quad i \in \{1, \dots, m\},\ i \neq j, \\ y^j = g^j(x^1, \dots, x^m), \end{cases}$$

т. е. при диффеоморфизме $g\colon U \to \mathbb{R}^m$ меняется только одна из координат отображаемой точки.

Утверждение 2. *Если $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ — диффеоморфизм открытого множества $G \subset \mathbb{R}^m$, то для любой точки $x_0 \in G$ найдется такая ее окрестность, в которой справедливо представление $f = g_1 \circ \ldots \circ g_n$, где $g_1, \ldots, g_n$ — простейшие диффеоморфизмы.*

◄ Проверим это по индукции.

Если исходное отображение f само является простейшим, то для него утверждение тривиально справедливо.

Предположим, что утверждение справедливо для диффеоморфизмов, меняющих не более чем $(k-1)$ координату, где $k-1<n$.

Рассмотрим теперь диффеоморфизм $f\colon G \to \mathbb{R}^m$, меняющий k координат:

$$\begin{aligned}
&y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^k = f^k(x^1, \ldots, x^m),\\
&y^{k+1} = x^{k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^m = x^m.
\end{aligned} \tag{16}$$

Мы приняли, что меняются именно первые k координат, чего можно достичь линейными преобразованиями. Значит, это не умаляет общности рассуждений.

Поскольку f — диффеоморфизм, то его матрица Якоби $f'(x)$ в любой точке $x \in G$ невырожденная, ибо

$$(f^{-1})'(f(x)) = [f'(x)]^{-1}.$$

Фиксируем $x_0 \in G$ и вычислим определитель матрицы $f'(x_0)$:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^k} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^k} & \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^m}\\
\hline
 & & & 1 & & 0\\
 & 0 & & & \ddots & \\
 & & & 0 & & 1
\end{array}\right|(x_0) = \left|\begin{array}{ccc}
\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^k}\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^k}
\end{array}\right|(x_0) \neq 0.$$

Таким образом, один из миноров порядка $k-1$ последнего определителя должен быть отличен от нуля. Опять для упрощения записи будем считать, что таким является главный минор порядка $k-1$. Рассмотрим тогда вспомо-

гательное отображение $g\colon G\to\mathbb{R}^m$, определяемое равенствами

$$\begin{aligned}
&u^1 = f^1(x^1, \dots, x^m),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&u^{k-1} = f^{k-1}(x^1, \dots, x^m),\\
&u^k = x^k,\\
&\dots\dots\\
&u^m = x^m.
\end{aligned} \tag{17}$$

Поскольку якобиан

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{k-1}} & \frac{\partial f^1}{\partial x^k} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^{k-1}} & \frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^k} & \dots & \frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^m}\\
\hline
 & & & 1 & & 0\\
 & 0 & & & \ddots & \\
 & & & 0 & & 1
\end{array}\right|(x_0) = \left|\begin{array}{ccc}
\frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{k-1}}\\
\dots & \dots & \dots\\
\frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^{k-1}}{\partial x^{k-1}}
\end{array}\right|(x_0) \neq 0$$

отображения $g\colon G\to\mathbb{R}^m$ в точке $x_0\in G$ отличен от нуля, отображение g является диффеоморфизмом в некоторой окрестности точки x_0.

Тогда в некоторой окрестности точки $u_0=g(x_0)$ определено обратное к g отображение $x=g^{-1}(u)$, которое позволяет ввести в окрестности x_0 новые координаты $(u^1, \dots, u^m)$.

Пусть $h=f\circ g^{-1}$. Иными словами, отображение $y=h(u)$ есть наше отображение (16) $y=f(x)$, записанное в координатах u. Отображение h, как композиция диффеоморфизмов, является диффеоморфизмом некоторой окрестности точки u_0. Его координатная запись, очевидно, имеет вид

$$\begin{aligned}
&y^1 = f^1\circ g^{-1}(u) = u^1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y^{k-1} = f^{k-1}\circ g^{-1}(u) = u^{k-1},\\
&y^k = f^k\circ g^{-1}(u),\\
&y^{k+1} = u^{k+1},\\
&\dots\dots\dots\\
&y^m = u^m,
\end{aligned}$$

т. е. h — простейший диффеоморфизм.

Но $f=h\circ g$, а по предположению индукции отображение g, определенное формулами (17), раскладывается в композицию простейших диффеоморфизмов. Таким образом, диффеоморфизм f, меняющий k координат, в некоторой окрестности точки x_0 тоже раскладывается в композицию простейших диффеоморфизмов, что и завершает индукцию. ►

5. Лемма Морса. К рассматриваемому кругу идей принадлежит также красивая сама по себе и важная в приложениях лемма Морса[1] о локальном приведении гладкой вещественнозначной функции к каноническому виду в окрестности невырожденной критической точки.

Определение 4. Пусть x_0 — критическая точка функции $f \in C^{(2)}(U; \mathbb{R})$, определенной в окрестности U этой точки.

Критическая точка x_0 называется *невырожденной критической точкой функции* f, если гессиан функции в этой точке (т. е. матрица $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)$, составленная из частных производных второго порядка) имеет отличный от нуля определитель.

Если x_0 — критическая точка функции, т. е. $f'(x_0) = 0$, то по формуле Тейлора

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + o(\|x - x_0\|^2). \tag{18}$$

Лемма Морса утверждает, что локально можно сделать такую замену $x = g(y)$ координат, что в координатах y функция f будет иметь вид

$$(f \circ g)(y) - f(x_0) = -(y^1)^2 - \ldots - (y^k)^2 + (y^{k+1})^2 + \ldots + (y^m)^2.$$

Если бы в правой части равенства (18) отсутствовал остаточный член $o(\|x - x_0\|^2)$, т. е. разность $f(x) - f(x_0)$ была бы просто квадратичной формой, то, как известно из алгебры, линейным преобразованием ее можно было бы привести к указанному каноническому виду. Таким образом, утверждение, которое мы собираемся доказать, есть локальный вариант теоремы о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Доказательство его будет использовать идею доказательства этой алгебраической теоремы. Мы будем опираться также на теорему об обратной функции и следующее предложение.

Лемма (Адамар). *Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}$ — функция класса $C^{(p)}(U; \mathbb{R})$, $p \geqslant 1$, определенная в выпуклой окрестности U точки $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$ и такая, что $f(0) = 0$. Тогда существуют функции $g_i \in C^{(p-1)}(U; \mathbb{R})$ $(i = 1, \ldots, m)$ такие, что в U имеет место равенство*

$$f(x^1, \ldots, x^m) = \sum_{i=1}^{m} x^i g_i(x^1, \ldots, x^m), \tag{19}$$

причем $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$.

◄ Равенство (19) — это, в сущности, иная полезная запись уже известной нам формулы Тейлора с интегральным видом остаточного члена. Оно выте-

[1] Х. К. М. Морс (1892—1977) — американский математик; основные труды посвящены применению топологических методов к различным разделам анализа.

кает из равенств

$$f(x^1, \ldots, x^m) = \int_0^1 \frac{df(tx^1, \ldots, tx^m)}{dt}\, dt = \sum_{i=1}^m x^i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \ldots, tx^m)\, dt,$$

если положить

$$g_i(x^1, \ldots, x^m) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \ldots, tx^m)\, dt \quad (i = 1, \ldots, m).$$

То, что $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)$ $(i = 1, \ldots, m)$, очевидно, а то, что $g_i \in C^{(p-1)}(U; \mathbb{R})$, тоже нетрудно проверить. Но мы не будем сейчас заниматься этой проверкой, поскольку в свое время будет доказано общее правило дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, из которого нужное нам свойство функций g_i будет непосредственно вытекать.

Таким образом, с точностью до указанной проверки, формула Адамара (19) установлена. ►

Лемма (Морс). *Если $f\colon G \to \mathbb{R}$ — функция класса $C^{(3)}(G; \mathbb{R})$, определенная на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^m$, а $x_0 \in G$ — невырожденная критическая точка этой функции, то найдется такой диффеоморфизм $g\colon V \to U$ некоторой окрестности начала координат 0 пространства $\mathbb{R}^m$ на окрестность U точки x_0, что для всех точек $y \in V$*

$$(f \circ g)(y) = f(x_0) - [(y^1)^2 + \ldots + (y^k)^2] + [(y^{k+1})^2 + \ldots + (y^m)^2].$$

◄ Линейными заменами вопрос сводится к случаю, когда $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$, что мы в дальнейшем и будем считать выполненным.

Поскольку $x_0 = 0$ — критическая точка функции f, то в формуле (19) $g_i(0) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда по той же лемме Адамара

$$g_i(x^1, \ldots, x^m) = \sum_{j=1}^m x^j h_{ij}(x^1, \ldots, x^m),$$

где h_{ij} — гладкие функции в окрестности точки 0, и, следовательно,

$$f(x^1, \ldots, x^m) = \sum_{i,j=1}^m x^i x^j h_{ij}(x^1, \ldots, x^m). \tag{20}$$

Подставляя здесь, если нужно, вместо h_{ij} функции $\tilde{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, можем считать, что $h_{ij} = h_{ji}$. Заметим также, что, в силу единственности тейлоровского разложения, из непрерывности функций h_{ij} следует, что $h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)$ и, значит, матрица $(h_{ij}(0))$ невырожденная.

Теперь функция f записана подобно квадратичной форме и мы хотим, так сказать, привести ее к диагональному виду.

Как и в классическом случае, будем действовать по индукции.

Предположим, что существуют координаты $u^1, \ldots, u^m$ в окрестности U_1 точки $0 \in \mathbb{R}^m$, т. е. диффеоморфизм $x = \varphi(u)$ такой, что в координатах $u^1, \ldots, u^m$

$$(f \circ \varphi)(u) = \pm(u^1)^2 \pm \ldots \pm (u^{r-1})^2 + \sum_{i,j=r}^{m} u^i u^j H_{ij}(u^1, \ldots, u^m), \tag{21}$$

где $r \geqslant 1$, а $H_{ij} = H_{ji}$.

Заметим, что при $r = 1$ соотношение (21) имеет место, что видно из формулы (20), где $H_{ij} = h_{ij}$.

По условию леммы, квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{m} x^i x^j h_{ij}(0)$ невырожденная, т. е. $\det(h_{ij}(0)) \neq 0$. Замена переменных $x = \varphi(u)$ осуществляется диффеоморфизмом, поэтому $\det \varphi'(0) \neq 0$. Но тогда и матрица формы

$$\pm(u^1)^2 \pm \ldots \pm (u^{r-1})^2 + \sum_{i,j=r}^{m} u^i u^j H_{ij}(0),$$

получаемая из матрицы $(h_{ij}(0))$ домножением справа на матрицу $\varphi'(0)$ и слева на транспонированную по отношению к $\varphi'(0)$ матрицу, тоже невырожденная. Следовательно, по крайней мере одно из чисел $H_{ij}(0)$ $(i, j = r, \ldots, m)$ отлично от нуля. Линейной заменой переменных форму $\sum\limits_{i,j=r}^{m} u^i u^j H_{ij}(0)$ можно привести к диагональному виду, поэтому можно считать, что в равенстве (21) $H_{rr}(0) \neq 0$. Ввиду непрерывности функций $H_{ij}(u)$ неравенство $H_{rr}(u) \neq 0$ будет выполнено также в некоторой окрестности точки $u = 0$.

Положим $\psi(u^1, \ldots, u^m) = \sqrt{|H_{rr}(u)|}$. Тогда функция ψ принадлежит классу $C^{(1)}(U_2; \mathbb{R})$ в некоторой окрестности $U_2 \subset U_1$ точки $u = 0$. Сделаем теперь переход к координатам $(v^1, \ldots, v^m)$ по формулам

$$\begin{aligned} &v^i = u^i, \quad i \neq r, \\ &v^r = \psi(u^1, \ldots, u^m)\left(u^r + \sum_{i>r} \frac{u^i H_{ir}(u^1, \ldots, u^m)}{H_{rr}(u^1, \ldots, u^m)}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Якобиан преобразования (22) в точке $u = 0$, очевидно, равен $\psi(0)$, т. е. отличен от нуля. Тогда в силу теоремы об обратной функции можно утверждать, что в некоторой окрестности $U_3 \subset U_2$ точки $u = 0$ отображение $v = \psi(u)$, заданное соотношениями (22), является диффеоморфизмом класса $C^{(1)}(U_3; \mathbb{R}^m)$ и потому переменные $(v^1, \ldots, v^m)$ действительно могут служить координатами точек U_3.

Выделим в правой части равенства (21) все члены

$$u^r u^r H_{rr}(u^1, \ldots, u^m) + 2 \sum_{j=r+1}^{m} u^r u^j H_{rj}(u^1, \ldots, u^m), \tag{23}$$

содержащие u^r. В записи (23) суммы этих членов мы использовали то, что $H_{ij} = H_{ji}$.

Сравнивая (22) и (23), видим, что выражение (23) можно переписать в виде

$$\pm v^r v^r - \frac{1}{H_{rr}}\left(\sum_{i>r} u^i H_{ir}(u^1, \ldots, u^m)\right)^2. \tag{24}$$

Знак $\pm$ перед $v^r v^r$ появляется в связи с тем, что $H_{rr} = \pm(\psi)^2$, причем берется знак плюс, если $H_{rr} > 0$, и знак минус, если $H_{rr} < 0$.

Таким образом, после замены $v = \psi(u)$ выражение (21) преобразуется в равенство

$$(f \circ \varphi \circ \psi^{-1})(v) = t\sum_{i=1}^{r}[\pm(v^i)^2] + \sum_{i,j>r} v^i v^j \widetilde{H}_{ij}(v^1, \ldots, v^m),$$

где $\widetilde{H}_{ij}$ — некоторые новые гладкие функции, симметричные по индексам i, j. Отображение $\varphi \circ \psi^{-1}$ является диффеоморфизмом. Таким образом, завершен индуктивный переход от $r-1$ к r и лемма Морса доказана. ►

Задачи и упражнения

1. Вычислите якобиан перехода (6) от полярных координат к декартовым координатам в $\mathbb{R}^m$.

2. a) Пусть x_0 — некритическая точка гладкой функции $F: U \to \mathbb{R}$, определенной в окрестности U точки $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m) \in \mathbb{R}^m$. Покажите, что в некоторой окрестности $\widetilde{U} \subset U$ точки x_0 можно так ввести криволинейные координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$, что множество точек, выделяемое условием $F(x) = F(x_0)$, в этих новых координатах будет задаваться уравнением $\xi^m = 0$.

b) Пусть $\varphi, \psi \in C^{(k)}(D; \mathbb{R})$ и пусть в области D $(\varphi(x) = 0) \Rightarrow (\psi(x) = 0)$. Покажите, что если $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$, то в D справедливо разложение $\psi = \theta \cdot \varphi$, где $\theta \in C^{(k-1)}(D; \mathbb{R})$.

3. Пусть $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — гладкое отображение, удовлетворяющее системе уравнений Коши—Римана

$$\frac{\partial f^1}{\partial x^1} = \frac{\partial f^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f^1}{\partial x^2} = -\frac{\partial f^2}{\partial x^1}.$$

a) Покажите, что якобиан такого отображения равен нулю в некоторой точке тогда и только тогда, когда матрица $f'(x)$ в этой точке нулевая.

b) Покажите, что если $f'(x) \neq 0$, то в окрестности точки x определено обратное к f отображение f^{-1}, которое также удовлетворяет системе уравнений Коши—Римана.

4. *Зависимость функций* (прямое доказательство).

a) Покажите, что функции $\pi^i(x) = x^i$ $(i = 1, \ldots, m)$ как функции точки $x = (x^1, \ldots$ $\ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ образуют независимую систему функций в окрестности любой точки пространства $\mathbb{R}^m$.

b) Покажите, что, какова бы ни была функция $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, система $\pi^1, \ldots, \pi^m, f$ функционально зависима.

c) Если система гладких функций $f^1, \ldots, f^k$, $k < m$, такова, что ранг отображения $f = (f^1, \ldots, f^k)$ в точке $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^m) \in \mathbb{R}^m$ равен k, то в некоторой окрестности этой точки ее можно дополнить до независимой системы $f^1, \ldots, f^m$, состоящей из m гладких функций.

d) Если система

$$\xi^i = f^i(x^1, \ldots, x^m) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

гладких функций такова, что осуществляемое ею отображение $f=(f^1, \dots, f^m)$ имеет в точке $x_0=(x_0^1, \dots, x_0^m)$ ранг m, то переменные $(\xi^1, \dots, \xi^m)$ могут служить криволинейными координатами в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и любая функция $\varphi : U(x_0) \to \mathbb{R}$ может быть записана в виде $\varphi(x)=F(f^1(x), \dots, f^m(x))$, где $F=\varphi \circ f^{-1}$.

e) Ранг отображения, осуществляемого системой гладких функций, называют также *рангом* этой системы. Покажите, что если ранг системы гладких функций $f^i(x^1, \dots, x^m)$ $(i=1, \dots, k)$ равен k и ранг системы $f^1, \dots, f^m, \varphi$ тоже равен k в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, то в окрестности этой точки $\varphi(x)=F(f^1(x), \dots, f^k(x))$.

Указание. Используйте c), d) и покажите, что

$$F(f^1, \dots, f^m)=F(f^1, \dots, f^k).$$

5. Покажите, что ранг гладкого отображения $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ является функцией, полунепрерывной снизу, т. е. $\operatorname{rang} f(x) \geqslant \operatorname{rang} f(x_0)$ в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

6. a) Дайте прямое доказательство леммы Морса для функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Выясните, применима ли лемма Морса в начале координат к функциям

$$f(x)=x^3; \quad f(x)=x \sin \frac{1}{x}; \quad f(x)=e^{-1/x^2} \sin^2 \frac{1}{x};$$
$$f(x, y)=x^3-3xy^2; \quad f(x, y)=x^2.$$

c) Покажите, что невырожденные критические точки функции $f \in \in C^{(3)}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ являются изолированными: каждая из них имеет такую окрестность, в которой нет других критических точек функции f, кроме самой этой точки.

d) Покажите, что число k отрицательных квадратов в каноническом представлении функции в окрестности невырожденной критической точки не зависит от способа приведения, т. е. от системы координат, в которой функция имеет канонический вид. Это число называется *индексом критической точки*.

§ 7. Поверхность в $\mathbb{R}^n$ и теория условного экстремума

Для неформального понимания важной в приложениях теории условного экстремума весьма полезно иметь некоторые начальные сведения о поверхностях (многообразиях) в пространстве $\mathbb{R}^n$.

1. Поверхность размерности k в $\mathbb{R}^n$. Обобщая понятие закона движения $x=x(t)$ материальной точки, мы в свое время ввели понятие пути в $\mathbb{R}^n$ как непрерывного отображения $\Gamma : I \to \mathbb{R}^n$ промежутка $I \subset \mathbb{R}$. Степень гладкости пути определялась как степень гладкости этого отображения. Носитель $\Gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ пути мог быть довольно причудливым множеством в $\mathbb{R}^n$, которое иногда только с очень большой натяжкой можно было бы назвать линией. Например, носитель пути мог оказаться просто точкой.

Аналогично, непрерывное или гладкое отображение $f : I^k \to \mathbb{R}^n$ k-мерного промежутка $I^k \subset \mathbb{R}^k$, называемое *k-путем в $\mathbb{R}^n$*, может иметь в качестве образа $f(I^k)$ совсем не то, что хотелось бы назвать k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$. Например, это снова может быть точка.

Чтобы гладкое отображение $f: G \to \mathbb{R}^n$ области $G \subset \mathbb{R}^k$ определяло в $\mathbb{R}^n$ k-мерную геометрическую фигуру, точки которой описываются k независимыми параметрами $(t^1, \dots, t^k) \in G$, достаточно, как мы знаем из предыдущего параграфа, потребовать, чтобы в каждой точке $t \in G$ ранг отображения $f: G \to \mathbb{R}^n$ был равен k (разумеется, $k \leqslant n$). В этом случае отображение $f: G \to f(G)$ локально (т. е. в окрестности любой точки $t \in G$) является взаимно однозначным.

Действительно, пусть $\operatorname{rang} f(t_0) = k$ и он реализуется, например, на первых k из n функций

$$\begin{cases} x^1 = f^1(t^1, \dots, t^k), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n = f^n(t^1, \dots, t^k), \end{cases} \tag{1}$$

задающих координатную запись отображения $f: G \to \mathbb{R}^n$.

Тогда по теореме об обратной функции переменные $t^1, \dots, t^k$ в некоторой окрестности $U(t_0)$ точки t_0 можно выразить через переменные $x^1, \dots, x^k$. Значит, множество $f(U(t_0))$ может быть записано в виде

$$x^{k+1} = \varphi^{k+1}(x^1, \dots, x^k), \quad \dots, \quad x^n = \varphi^n(x^1, \dots, x^k)$$

(т. е. оно взаимно однозначно проектируется на координатную плоскость $x^1, \dots, x^k$), и потому отображение $f: U(t_0) \to f(U(t_0))$ действительно взаимно однозначное.

Однако уже на примере одномерного гладкого пути (рис. 61) ясно, что подобная локальная взаимная однозначность отображения $f: G \to \mathbb{R}^n$ из области G параметров в пространство $\mathbb{R}^n$ вовсе не обязана быть взаимной однозначностью в целом. Траектория может иметь многократные самопересечения, поэтому если мы желаем определить гладкую k-мерную поверхность в $\mathbb{R}^n$ и видеть ее как множество, которое около каждой своей точки устроено как несколько деформированный кусок k-мерной плоскости (k-мерного подпространства пространства $\mathbb{R}^n$), то нам не достаточно регулярно отображать канонический кусок $G \subset \mathbb{R}^k$ k-мерной поверхности в пространство $\mathbb{R}^n$, но необходимо также следить за тем, как он в целом оказывается вложенным в это пространство.

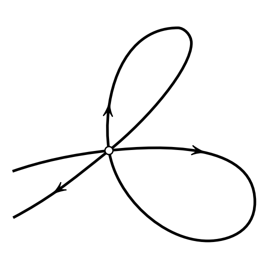


Рис. 61

Определение 1. Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *k-мерной гладкой поверхностью* в пространстве $\mathbb{R}^n$ (или *k-мерным подмногообразием* $\mathbb{R}^n$), если для любой точки $x_0 \in S$ найдутся окрестность $U(x_0)$ в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\varphi: U(x_0) \to I^n$ этой окрестности на стандартный n-мерный промежуток $I^n = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t^i| < 1, i = 1, \dots, n\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, при котором образ множества $S \cap U(x_0)$ совпадает с лежащей в I частью k-мерной плоскости пространства $\mathbb{R}^n$, задаваемой соотношениями $t^{k+1} = 0, \dots, t^n = 0$ (рис. 62).

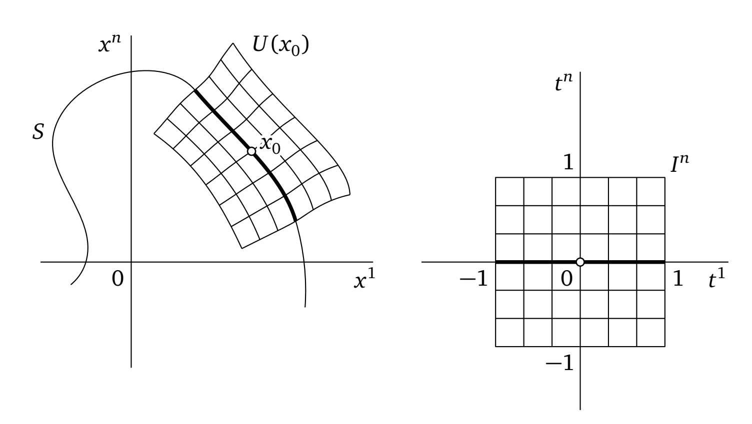


Рис. 62

Степень гладкости поверхности S будем измерять степенью гладкости диффеоморфизма φ.

Если смотреть на переменные $t^1, \ldots, t^n$ как на новые координаты в окрестности $U(x_0)$, то определение 1 в сокращенном варианте можно переформулировать следующим образом: множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется k-мерной поверхностью (k-мерным подмногообразием) в $\mathbb{R}^n$, если для любой точки $x_0 \in S$ можно указать окрестность $U(x_0)$ и такие координаты $t^1, \ldots, t^n$ в ней, что множество $S \cap U(x_0)$ в этих координатах задается соотношениями

$$t^{k+1} = \ldots = t^n = 0.$$

Роль стандартного промежутка в определении 1 чисто условная и примерно такая же, как роль стандартного размера или формы страницы в географическом атласе. Каноническое расположение промежутка в системе координат $t^1, \ldots, t^n$ также относится к области стандартизации и не более того, поскольку любой куб в $\mathbb{R}^n$ дополнительным линейным диффеоморфизмом всегда можно преобразовать в стандартный n-мерный промежуток.

Этим замечанием мы часто будем пользоваться, сокращая проверку того, что некоторое множество $S \subset \mathbb{R}^n$ является поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Само пространство $\mathbb{R}^n$ является n-мерной поверхностью класса $C^{(\infty)}$. В качестве отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to I^n$ здесь можно взять, например, отображение

$$\xi^i = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x^i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Пример 2. Построенное в примере 1 отображение заодно устанавливает, что подпространство векторного пространства $\mathbb{R}^n$, задаваемое условиями $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$, является k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$ (или k-мерным подмногообразием $\mathbb{R}^n$).

Пример 3. Множество в $\mathbb{R}^n$, задаваемое системой соотношений

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \ldots + a_k^1 x^k + a_{k+1}^1 x^{k+1} + \ldots + a_n^1 x^n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-k} x^1 + \ldots + a_k^{n-k} x^k + a_{k+1}^{n-k} x^{k+1} + \ldots + a_n^{n-k} x^n = 0 \end{cases}$$

при условии, что ранг этой системы равен $n-k$, является k-мерным подмногообразием $\mathbb{R}^n$.

Действительно, пусть, например, определитель

$$\begin{vmatrix} a_{k+1}^1 & \ldots & a_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k+1}^{n-k} & \ldots & a_n^{n-k} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Тогда линейное преобразование

$$\begin{aligned} &t^1 = x^1, \\ &\ldots\ldots \\ &t^k = x^k, \\ &t^{k+1} = a_1^1 x^1 + \ldots + a_n^1 x^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &t^n = a_1^{n-k} x^1 + \ldots + a_n^{n-k} x^n, \end{aligned}$$

очевидно, является невырожденным. В координатах $t^1, \ldots, t^n$ наше множество задается условиями $t^{k+1} = \ldots = t^n = 0$, уже рассмотренными в примере 2.

Пример 4. График определенной в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ гладкой функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$ является гладкой $(n-1)$-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Действительно, полагая

$$\begin{cases} t^i = x^i \quad (i = 1, \ldots, n-1), \\ t^n = x^n - f(x^1, \ldots, x^{n-1}), \end{cases}$$

мы получаем систему координат, в которой график нашей функции имеет уравнение $t^n = 0$.

Пример 5. Окружность $x^2 + y^2 = 1$ в $\mathbb{R}^2$ является одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$, что устанавливается разобранным в предыдущем параграфе локально обратимым переходом к полярным координатам (ρ, φ), в которых окружность имеет уравнение $\rho = 1$.

Пример 6. Этот пример является обобщением примера 3 и вместе с тем, как видно из определения 1, дает общую форму координатной записи подмногообразий пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $F^i(x^1, \ldots, x^n)$ $(i = 1, \ldots, n-k)$ — система гладких функций ранга $n-k$. Покажем, что соотношения

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

задают в $\mathbb{R}^n$ подмногообразие S размерности k.

Пусть в точке $x_0 \in S$ выполнено условие

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^{k+1}} & \ldots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F^{n-k}}{\partial x^{k+1}} & \ldots & \frac{\partial F^{n-k}}{\partial x^n} \end{vmatrix} (x_0) \neq 0. \tag{3}$$

Тогда преобразование

$$\begin{cases} t^i = x^i \quad (i = 1, \ldots, k), \\ t^i = F^{i-k}(x^1, \ldots, x^n) \quad (i = k+1, \ldots, n) \end{cases}$$

в силу теоремы об обратной функции является диффеоморфизмом некоторой окрестности рассматриваемой точки.

В новых координатах $t^1, \ldots, t^n$ исходная система будет иметь вид $t^{k+1} = \ldots$ $\ldots = t^n = 0$; таким образом, S является k-мерной гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Пример 7. Множество E точек плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению $x^2 - y^2 = 0$, состоит из двух прямых, пересекающихся в начале координат. Это множество не является одномерным подмногообразием $\mathbb{R}^2$ (проверьте!) именно из-за указанной точки пересечения.

Если удалить из E начало координат $0 \in \mathbb{R}^2$, то множество $E \setminus 0$ уже, очевидно, будет удовлетворять определению 1. Заметим, что множество $E \setminus 0$ несвязно. Оно состоит из четырех не имеющих общих точек лучей.

Таким образом, удовлетворяющая определению 1 k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ может оказаться несвязным подмножеством, состоящим из некоторого числа связных компонент (и уже эти компоненты являются связными k-мерными поверхностями). Часто под поверхностью в $\mathbb{R}^n$ понимают именно связную k-мерную поверхность. Сейчас нас будут интересовать проблемы отыскания экстремумов функций, заданных на поверхностях. Это локальные проблемы, поэтому в них условие связности поверхности не проявляется.

Пример 8. Если гладкое отображение $f: G \to \mathbb{R}^n$ области $G \subset \mathbb{R}^k$, задаваемое в координатном виде соотношениями (1), имеет в точке $t_0 \in G$ ранг k, то найдется такая окрестность $U(t_0) \subset G$ этой точки, образ $f(U(t_0)) \subset \mathbb{R}^n$ которой является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

Действительно, как уже отмечалось выше, в этом случае соотношения (1) могут быть в некоторой окрестности $U(t_0)$ точки $t_0 \in G$ заменены эквива-

лентной им системой соотношений

$$\begin{cases} x^{k+1} = \varphi^{k+1}(x^1, \ldots, x^k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = \varphi^n(x^1, \ldots, x^k) \end{cases} \tag{4}$$

(для упрощения записи мы считаем, что уже система функций $f^1, \ldots, f^k$ имеет ранг k). Полагая

$$F^i(x^1, \ldots, x^n) = x^{k+i} - \varphi^{k+i}(x^1, \ldots, x^k) \quad (i = 1, \ldots, n-k),$$

записываем систему (4) в виде (2). Поскольку соотношение (3) выполнено, то в силу примера 6 множество $f(U(t_0))$ действительно является k-мерной гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

2. Касательное пространство. При рассмотрении закона движения $x = x(t)$ материальной частицы в $\mathbb{R}^3$, исходя из соотношения

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + o(t) \quad \text{при } t \to 0 \tag{5}$$

и считая, что точка $t = 0$ не является критической для отображения $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^3$, т. е. $x'(0) \neq 0$, мы определили прямую, касательную к траектории в точке $x(0)$, как линейное подмножество в $\mathbb{R}^3$, задаваемое в параметрическом виде уравнением

$$x - x_0 = x'(0)t \tag{6}$$

или уравнением

$$x - x_0 = \xi \cdot t, \tag{7}$$

где $x_0 = x(0)$, а $\xi = x'(0)$ — направляющий вектор прямой.

В сущности, аналогичную вещь мы делали, определяя плоскость, касательную к графику функции $z = f(x, y)$ в $\mathbb{R}^3$. Действительно, дополнив соотношение $z = f(x, y)$ тривиальными равенствами $x = x$, $y = y$, мы получаем отображение $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$, касательным к которому в точке (x_0, y_0) является линейное отображение

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Полагая здесь $t = (x - x_0, y - y_0)$, $x = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и обозначая через $x'(0)$ указанную в (8) матрицу Якоби рассматриваемого отображения, замечаем, что ее ранг равен двум и что в этих обозначениях соотношение (8) имеет вид (6).

Особенность соотношения (8) состоит в том, что из трех равенств:

$$\begin{cases} x - x_0 = x - x_0, \\ y - y_0 = y - y_0, \\ z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \end{cases} \tag{9}$$

совокупности которых оно равносильно, только последнее нетривиально. Поэтому именно оно осталось у нас как уравнение, задающее плоскость, касательную к графику функции $z=f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Сделанное наблюдение можно использовать, чтобы теперь дать определение k-мерной плоскости, касательной к k-мерной гладкой поверхности $S\subset\mathbb{R}^n$.

Из определения 1 поверхности видно, что в окрестности любой своей точки $x_0\in S$ k-мерная поверхность S может быть задана параметрически, т. е. с помощью отображения $I^k\ni(t^1, \dots, t^k)\mapsto(x^1, \dots, x^n)\in S$. В качестве такового может выступать ограничение отображения $\varphi^{-1}\colon I^n\to U(x_0)$ на k-мерную плоскость $t^{k+1}=\dots=t^n=0$ (см. рис. 62).

Поскольку φ^{-1} — диффеоморфизм, то якобиан отображения $\varphi^{-1}\colon I^n\to U(x_0)$ в любой точке куба I^n отличен от нуля. Но тогда ранг отображения $I^k\ni(t^1, \dots, t^k)\mapsto(x^1, \dots, x^n)\in S$, полученного ограничением φ^{-1} на указанную плоскость, должен быть равен k в любой точке куба I^k.

Полагая теперь $(t^1, \dots, t^k)=t\in I^k$ и обозначая отображение $I^k\ni t\mapsto x\in S$ через $x=x(t)$, получаем локальное параметрическое представление поверхности S, обладающее свойством, выраженным равенством (5), на основании которого уравнение (6) принимаем в качестве уравнения касательного пространства или касательной плоскости к поверхности $S\subset\mathbb{R}^n$ в точке $x_0\in S$.

Итак, мы принимаем следующее

Определение 2. Если k-мерная поверхность $S\subset\mathbb{R}^n$, $1\leqslant k\leqslant n$, в окрестности точки $x_0\in S$ задана параметрически с помощью гладкого отображения $(t^1, \dots, t^k)=t\mapsto x=(x^1, \dots, x^n)$ такого, что $x_0=x(0)$ и матрица $x'(0)$ имеет ранг k, то k-мерная плоскость в $\mathbb{R}^n$, задаваемая параметрически матричным равенством (6), называется *касательной плоскостью* или *касательным пространством к поверхности S в точке $x_0\in S$.*

В координатной записи равенству (6) соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x^1-x_0^1=\dfrac{\partial x^1}{\partial t^1}(0)t^1+\dots+\dfrac{\partial x^1}{\partial t^k}(0)t^k,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x^n-x_0^n=\dfrac{\partial x^n}{\partial t^1}(0)t^1+\dots+\dfrac{\partial x^n}{\partial t^k}(0)t^k. \end{cases}\tag{10}$$

Пространство, касательное к поверхности S в точке $x\in S$, будем, как и прежде, обозначать[1] символом TS_x.

Важным и полезным упражнением, которое читатель может проделать самостоятельно, является доказательство инвариантности определения касательного пространства и проверка того, что линейное отображение $t\mapsto x'(0)t$, касательное к отображению $t\mapsto x(t)$, задающему локально поверх-

[1]Это — небольшое отклонение от наиболее распространенного обозначения T_xS или $T_x(S)$.

ность S, осуществляет отображение пространства $\mathbb{R}^k = T\mathbb{R}^k_0$ на плоскость $TS_{x(0)}$ (см. задачу 3 в конце параграфа).

Выясним теперь, как выглядит уравнение касательной плоскости к k-мерной поверхности S, заданной в $\mathbb{R}^n$ системой (2). Будем для определенности считать, что в окрестности рассматриваемой точки $x_0 \in S$ выполнено условие (3).

Полагая $(x^1, \ldots, x^k) = u$, $(x^{k+1}, \ldots, x^n) = v$, $(F^1, \ldots, F^{n-k}) = F$, запишем систему (2) в виде

$$F(u, v) = 0, \tag{11}$$

а условие (3) — в виде

$$\det F'_v(u, v) \neq 0. \tag{12}$$

В окрестности точки $(u_0, v_0) = (x^1_0, \ldots, x^k_0, x^{k+1}_0, \ldots, x^n_0)$ по теореме о неявной функции перейдем от соотношения (11) к эквивалентному ему соотношению

$$v = f(u), \tag{13}$$

дополняя которое тождеством $u = u$, получаем параметрическое представление поверхности S в окрестности точки $x_0 \in S$:

$$\begin{cases} u = u, \\ v = f(u). \end{cases} \tag{14}$$

На основании определения 2, из (14) получаем параметрическое уравнение

$$\begin{cases} u - u_0 = E \cdot t, \\ v - v_0 = f'(u_0) \cdot t \end{cases} \tag{15}$$

касательной плоскости; здесь E — единичная матрица, а $t = u - u_0$.

Подобно тому, как это было в случае системы (9), в системе (15) оставляем только нетривиальное уравнение

$$v - v_0 = f'(u_0)(u - u_0), \tag{16}$$

которое и содержит в себе связи переменных $x^1, \ldots, x^k$ с переменными $x^{k+1}, \ldots, x^n$, выделяющие касательное пространство.

Пользуясь тем, что по теореме о неявной функции

$$f'(u_0) = -[F'_v(u_0, v_0)]^{-1}[F'_u(u_0, v_0)],$$

перепишем (16) в виде

$$F'_u(u_0, v_0)(u - u_0) + F'_v(u_0, v_0)(v - v_0) = 0,$$

откуда после возвращения к переменным $(x^1, \ldots, x^n) = x$ получаем искомое уравнение

$$F'_x(x_0)(x - x_0) = 0 \tag{17}$$

касательного пространства $TS_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$.

В координатном представлении уравнение (17) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^1}(x_0)(x^1-x_0^1)+\ldots+\dfrac{\partial F^1}{\partial x^n}(x_0)(x^n-x_0^n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^1}(x_0)(x^1-x_0^1)+\ldots+\dfrac{\partial F^{n-k}}{\partial x^n}(x_0)(x^n-x_0^n)=0. \end{cases} \tag{18}$$

Ранг этой системы по условию равен $n-k$, поэтому она задает k-мерную плоскость в $\mathbb{R}^n$.

Аффинное уравнение (17) эквивалентно (если указана точка x_0) векторному уравнению

$$F'_x(x_0)\cdot\xi=0, \tag{19}$$

в котором $\xi=x-x_0$.

Значит, вектор ξ лежит в плоскости TS_{x_0}, касательной в точке $x_0\in S$ к поверхности $S\subset\mathbb{R}^n$, заданной уравнением $F(x)=0$, в том и только в том случае, когда он удовлетворяет условию (19). Таким образом, TS_{x_0} можно рассматривать как векторное пространство векторов ξ, удовлетворяющих уравнению (19).

Именно с этим обстоятельством и связан сам термин *касательное пространство*.

Докажем теперь следующее, уже встречавшееся нам в его частном случае (см. § 4, п. 6)

Утверждение. *Пространство TS_{x_0}, касательное к гладкой поверхности $S\subset\mathbb{R}^n$ в точке $x_0\in S$, состоит из векторов, касательных в точке x_0 к гладким кривым, лежащим на поверхности S и проходящим через точку x_0.*

◄ Пусть поверхность S в окрестности точки $x_0\in S$ задана в виде системы уравнений (2), которую мы коротко запишем как

$$F(x)=0, \tag{20}$$

где $F=(F^1,\ldots,F^{n-k})$, $x=(x^1,\ldots,x^n)$. Пусть $\Gamma\colon I\to S$ — произвольный гладкий путь с носителем на S. Взяв $I=\{t\in\mathbb{R}\mid |t|<1\}$, будем считать, что $x(0)=$ $=x_0$. Поскольку $x(t)\in S$ при $t\in I$, то после подстановки $x(t)$ в уравнение (20) получаем

$$F(x(t))\equiv 0 \tag{21}$$

при $t\in I$. Дифференцируя это тождество по t, находим, что

$$F'_x(x(t))\cdot x'(t)\equiv 0.$$

В частности, при $t=0$, полагая $\xi=x'(0)$, получаем

$$F'_x(x_0)\xi=0,$$

т. е. вектор ξ, касательный к траектории в точке x_0 (в момент $t=0$), удовлетворяет уравнению (19) касательного пространства TS_{x_0}.

Покажем теперь, что для любого вектора ξ, удовлетворяющего уравнению (19), найдется гладкий путь $\Gamma\colon I \to S$, который задает кривую на поверхности S, проходит при $t=0$ через точку x_0 и имеет вектор ξ своим вектором скорости в момент $t=0$.

Этим заодно будет установлено само существование гладких кривых, проходящих на S через точку x_0, которое мы неявно предполагали в уже проведенной первой части доказательства утверждения.

Пусть для определенности выполнено условие (3). Тогда, зная первые k координат $\xi^1, \ldots, \xi^k$ вектора $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^k, \xi^{k+1}, \ldots, \xi^n)$, мы из уравнения (19) (равносильного системе (18)) однозначно определим остальные его координаты $\xi^{k+1}, \ldots, \xi^n$. Таким образом, если для некоторого вектора $\tilde{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^k, \tilde{\xi}^{k+1}, \ldots, \tilde{\xi}^n)$ будет установлено, что он удовлетворяет уравнению (19), то можно заключить, что $\tilde{\xi} = \xi$. Воспользуемся этим.

Вновь, как это было сделано выше, введем для удобства обозначения $u = (x^1, \ldots, x^k)$, $v = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$, $x = (x^1, \ldots, x^n) = (u, v)$, $F(x) = F(u, v)$. Тогда уравнение (20) будет иметь вид (11), а условие (3) — вид (12). В подпространстве $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ переменных $x^1, \ldots, x^k$ возьмем параметрически заданную прямую

$$\begin{cases} x^1 - x_0^1 = \xi^1 t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^k - x_0^k = \xi^k t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

с направляющим вектором $(\xi^1, \ldots, \xi^k)$, который мы обозначим через ξ_u. В более коротких обозначениях эта прямая может быть записана в виде

$$u = u_0 + \xi_u t. \tag{22}$$

Решая уравнение (11) относительно v, в силу теоремы о неявной функции получим гладкую функцию (13), подставляя в аргумент которой правую часть равенства (22), с учетом самого равенства (22), получим гладкую кривую в $\mathbb{R}^n$, заданную в следующем виде:

$$\begin{cases} u = u_0 + \xi_u t, \\ v = f(u_0 + \xi_u t), \end{cases} \qquad t \in U(0) \subset \mathbb{R}. \tag{23}$$

Поскольку $F(u, f(u)) \equiv 0$, то, очевидно, эта кривая лежит на поверхности S. Кроме того, из равенств (23) видно, что при $t = 0$ кривая проходит через точку $(u_0, v_0) = (x_0^1, \ldots, x_0^k, x_0^{k+1}, \ldots, x_0^n) = x_0 \in S$.

Дифференцируя по t тождество

$$F(u(t), v(t)) = F(u_0 + \xi_u t, f(u_0 + \xi_u t)) \equiv 0,$$

при $t = 0$ получаем

$$F'_u(u_0, v_0)\xi_u + F'_v(u_0, v_0)\tilde{\xi}_v = 0,$$

где $\tilde{\xi}_v = v'(0) = (\tilde{\xi}^{k+1}, \ldots, \tilde{\xi}^n)$. Это равенство показывает, что вектор $\tilde{\xi} = (\xi_u, \tilde{\xi}_v) = (\xi^1, \ldots, \xi^k, \tilde{\xi}^{k+1}, \ldots, \tilde{\xi}^n)$ удовлетворяет уравнению (19). Таким образом, в силу сделанного выше замечания заключаем, что $\xi = \tilde{\xi}$. Но

вектор $\tilde{\xi}$ является вектором скорости при $t = 0$ для траектории (23). Тем самым высказанное утверждение доказано полностью. ►

3. Условный экстремум

а. Постановка вопроса. Одним из наиболее ярких и популярных достижений дифференциального исчисления являются предлагаемые им рецепты отыскания экстремумов функций. Необходимые условия и достаточные дифференциальные признаки экстремума, которые мы получили из формулы Тейлора, относятся, как уже отмечалось, к внутренним экстремумам.

Иными словами, эти результаты применимы только к исследованию поведения функции $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ тогда, когда аргумент x может принимать любое значение из некоторой окрестности в $\mathbb{R}^n$ точки x_0.

Часто возникает более сложная и с практической точки зрения даже более интересная ситуация, когда ищется экстремум функции при некоторых условиях, ограничивающих область изменения аргумента. Типичным примером может служить изопериметрическая задача, когда ищется тело, имеющее максимальный объем при условии, что ограничивающая его поверхность имеет заданную площадь. Чтобы получить доступную нам математическую запись такой задачи, упростим постановку и будем считать, что задача состоит в том, чтобы среди прямоугольников, имеющих заданный периметр $2p$, найти тот, который имеет наибольшую площадь σ. Обозначив через x и y длины сторон прямоугольника, запишем, что

$$\sigma(x, y) = x \cdot y,$$
$$x + y = p.$$

Итак, надо найти экстремум функции $\sigma(x, y)$ при условии, что переменные x, y связаны соотношением $x + y = p$. Таким образом, экстремум функции ищется только на множестве тех точек плоскости $\mathbb{R}^2$, которые удовлетворяют указанному соотношению. Эта конкретная задача, конечно, решается без труда: достаточно, записав, что $y = p - x$, подставить это выражение в формулу для $\sigma(x, y)$ и найти обычными методами максимум функции $x(p-x)$. Она нам была нужна лишь для пояснения самой постановки вопроса.

В общем случае задача на условный экстремум обычно состоит в том, чтобы найти экстремум вещественнозначной функции

$$y = f(x^1, \ldots, x^n) \tag{24}$$

от n переменных при условии, что эти переменные удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^m(x^1, \ldots, x^n) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Поскольку мы собираемся получать дифференциальные условия экстремума, мы будем предполагать, что все рассматриваемые функции дифференцируемы и даже непрерывно дифференцируемы. Если ранг системы функций $F^1, \ldots, F^m$ равен $n-k$, то условия (25) задают в $\mathbb{R}^n$ некоторую k-мерную гладкую поверхность S и с геометрической точки зрения задача на условный экстремум состоит в отыскании экстремума функции f на поверхности S. Более точно, рассматривается ограничение $f|_S$ функции f на поверхность S и ищется экстремум функции $f|_S$.

Смысл самого понятия точки локального экстремума при этом, конечно, остается прежним, т. е. точка $x_0 \in S$ считается точкой локального экстремума функции f на S или, короче, функции $f|_S$, если найдется такая окрестность $U_S(x_0)$ точки x_0 в множестве[1] $S \subset \mathbb{R}^n$, что для любой точки $x \in U_S(x_0)$ выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$ (тогда x_0 — точка локального минимума) или $f(x) \leqslant f(x_0)$ (тогда x_0 — точка локального максимума). Если при $x \in U_S(x_0) \setminus x_0$ указанные неравенства являются строгими, то экстремум, как и прежде, будем называть строгим.

b. Необходимый признак условного экстремума

Теорема 1. *Пусть $f: D \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и принадлежащая классу $C^{(1)}(D; \mathbb{R})$. Пусть S — гладкая поверхность в D.*

Для того чтобы точка $x_0 \in S$, некритическая для функции f, была точкой локального экстремума функции $f|_S$, необходимо выполнение условия

$$\boxed{TS_{x_0} \subset TN_{x_0},} \tag{26}$$

где TS_{x_0} — пространство, касательное к поверхности S в точке x_0, а TN_{x_0} — пространство, касательное к поверхности $N = \{x \in D \mid f(x) = f(x_0)\}$ уровня функции f, которому принадлежит x_0.

Заметим прежде всего, что требование, чтобы точка x_0 была некритической для функции f, в контексте обсуждаемой задачи отыскания условного экстремума не является существенным ограничением. Действительно, если уж точка $x_0 \in D$ является критической точкой функции $f: D \to \mathbb{R}$ или точкой экстремума этой функции, то ясно, что она будет подозрительной точкой или соответственно точкой экстремума и для функции $f|_S$. Таким образом, новый элемент в рассматриваемой задаче состоит именно в том, что функция $f|_S$ может иметь критические точки и экстремумы, отличные от критических точек и экстремумов функции f.

◄ Возьмем произвольный вектор $\xi \in TS_{x_0}$ и такой гладкий путь $x = x(t)$ на S, который проходит через точку x_0 при $t = 0$ и для которого вектор ξ является вектором скорости при $t = 0$, т. е.

$$\frac{dx}{dt}(0) = \xi. \tag{27}$$

[1]Напомним, что $U_S(x_0) = S \cap U(x_0)$, где $U(x_0)$ — окрестность точки x_0 в $\mathbb{R}^n$.

Если x_0 — точка экстремума функции $f|_S$, то гладкая функция $f(x(t))$ должна при $t=0$ иметь экстремум. По необходимому условию экстремума ее производная при $t=0$ должна обращаться в нуль, т. е. должно выполняться условие

$$f'(x_0)\cdot\xi=0, \tag{28}$$

где

$$f'(x_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)(x_0), \quad \xi=(\xi^1,\ldots,\xi^n).$$

Поскольку x_0 — некритическая точка функции f, условие (28) равносильно тому, что $\xi\in TN_{x_0}$, ибо именно соотношение (28) является уравнением касательного пространства TN_{x_0}.

Таким образом, доказано, что $TS_{x_0}\subset TN_{x_0}$. ►

Если поверхность S в окрестности точки x_0 задана системой уравнений (25), то пространство TS_{x_0}, как нам известно, задается системой линейных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^1}{\partial x^1}(x_0)\xi^1+\ldots+\dfrac{\partial F^1}{\partial x^n}(x_0)\xi^n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{\partial F^m}{\partial x^1}(x_0)\xi^1+\ldots+\dfrac{\partial F^m}{\partial x^n}(x_0)\xi^n=0. \end{cases} \tag{29}$$

Пространство TN_{x_0} задается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\xi^1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\xi^n=0, \tag{30}$$

и, поскольку всякое решение системы (29) является решением уравнения (30), последнее уравнение является следствием системы (29).

Из этих соображений вытекает, что соотношение $TS_{x_0}\subset TN_{x_0}$ в аналитической записи равносильно тому, что вектор $\operatorname{grad} f(x_0)$ является линейной комбинацией векторов $\operatorname{grad} F^i(x_0)$ $(i=1,\ldots,m)$, т. е.

$$\boxed{\operatorname{grad} f(x_0)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i \operatorname{grad} F^i(x_0).} \tag{31}$$

Учитывая эту форму записи необходимого признака экстремума функции (24), переменные которой связаны соотношениями (25), Лагранж предложил при отыскании условного экстремума использовать следующую вспомогательную функцию:

$$L(x,\lambda)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F^i(x) \tag{32}$$

от $n+m$ переменных $(x,\lambda)=(x^1,\ldots,x^n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$.

Эту функцию называют *функцией Лагранжа*, а метод ее использования — *методом множителей Лагранжа*.

Функция (32) удобна тем, что необходимые условия ее экстремума как функции переменных $(x, \lambda) = (x^1, \ldots, x^n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ в точности совпадают с условиями (31) и (25).

Действительно,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x^j}(x, \lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial x^j}(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial F^i}{\partial x^j}(x) = 0 & (j = 1, \ldots, n), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x, \lambda) = -F^i(x) = 0 & (i = 1, \ldots, m). \end{cases} \tag{33}$$

Таким образом, при отыскании экстремума функции (24), переменные которой подчинены связям (25), можно написать с неопределенными множителями функцию Лагранжа (32) и искать уже ее критические точки. Если есть возможность из системы (33) найти $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, не находя $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, то с точки зрения исходной задачи именно это и следует делать.

Как видно из соотношения (31), множители λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ определяются однозначно, если только векторы $\operatorname{grad} F^i(x_0)$ $(i = 1, \ldots, m)$ линейно независимы. Независимость этих векторов равносильна тому, что ранг системы (29) равен m, т. е. что все уравнения этой системы существенны (ни одно из них не является следствием остальных).

Это обычно выполнено, ибо считается, что все соотношения (25) независимы и ранг системы функций $F^1, \ldots, F^m$ в любой точке $x \in S$ равен m.

Функцию Лагранжа часто записывают в виде

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F^i(x),$$

который отличается от прежнего только несущественной заменой λ_i на $-\lambda_i$.[1]

Пример 9. Найдем экстремумы симметрической квадратичной формы

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j \quad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{34}$$

на сфере

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 - 1 = 0. \tag{35}$$

Запишем функцию Лагранжа данной задачи:

$$L(x, \lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x^i x^j - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 - 1 \right)$$

---

[1] По поводу необходимого признака условного экстремума см. также задачу 6 к § 7 гл. X (часть II).

и, с учетом того, что $a_{ij}=a_{ji}$, необходимые условия экстремума функции $L(x,\lambda)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x^i}(x,\lambda)=2\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x^j-\lambda x^i\right)=0 \quad (i=1,\ldots,n),\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,\lambda)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x^i)^2-1\right)=0. \end{cases} \tag{36}$$

Домножая первое уравнение на x^i и суммируя затем все первые соотношения, с учетом второго уравнения получим, что в точке экстремума должно быть выполнено равенство

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x^ix^j-\lambda=0. \tag{37}$$

Систему (36) без последнего уравнения можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x^j=\lambda x^i \quad (i=1,\ldots,n), \tag{38}$$

откуда следует, что λ — собственное значение линейного преобразования A, задаваемого матрицей (a_{ij}), а $x=(x^1,\ldots,x^n)$ — собственный вектор этого преобразования, отвечающий этому собственному значению.

Поскольку непрерывная на компакте $S=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n}(x^i)^2=1\right\}$ функция (34) обязана принимать в некоторой его точке максимальное значение, система (36), а значит и система (38), должна иметь решение. Таким образом, мы попутно установили, что любая вещественная симметрическая матрица (a_{ij}) имеет по крайней мере одно вещественное собственное значение. Это хорошо известный вам из линейной алгебры результат, являющийся основным в доказательстве существования базиса из собственных векторов симметрического оператора.

Чтобы указать геометрический смысл собственного значения λ, заметим, что если $\lambda>0$, то, переходя к координатам $t^i=x^i/\sqrt{\lambda}$, вместо (37) получим

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}t^it^j=1, \tag{39}$$

а вместо (35) —

$$\sum_{i=1}^{n}(t^i)^2=\frac{1}{\lambda}. \tag{40}$$

Но $\sum\limits_{i=1}^{n}(t^i)^2$ есть квадрат расстояния от точки $t=(t^1,\ldots,t^n)$ квадрики (39) до начала координат. Таким образом, если, например, соотношение (39) задает эллипсоид, то величина $1/\lambda$, обратная к собственному значению λ, является квадратом величины одной из его полуосей.

Это полезное наблюдение. Оно, в частности, показывает, что соотношения (36), необходимые для условного экстремума, еще не являются достаточными: ведь, например, в $\mathbb{R}^3$ эллипсоид кроме наибольшей и наименьшей полуосей может иметь промежуточную по величине полуось, в любой окрестности конца которой есть как точки более близкие к началу координат, так и более далекие от него в сравнении с расстоянием от конца полуоси до начала координат. Последнее становится совсем очевидным, если рассмотреть эллипсы, получающиеся в сечении исходного эллипсоида двумя плоскостями, проходящими через промежуточную полуось и меньшую или большую полуоси эллипсоида соответственно. В одном из этих случаев промежуточная полуось будет большей из двух полуосей эллипса сечения, а в другом случае — меньшей полуосью.

К сказанному следует добавить, что если $1/\sqrt{\lambda}$ есть величина этой промежуточной полуоси, то, как видно из канонического уравнения эллипсоида, величина λ, очевидно, будет собственным значением преобразования A, поэтому система (36), выражающая необходимые условия экстремума функции $f|_S$, действительно будет иметь решение, не дающее экстремума этой функции.

Полученный в теореме 1 результат (необходимый признак условного экстремума) проиллюстрирован на рис. 63, a, b.

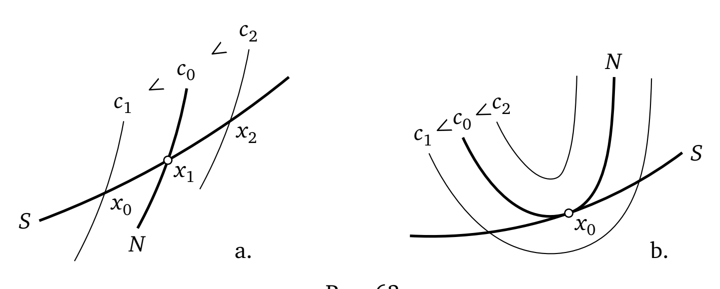


Рис. 63

Первый из этих рисунков поясняет, почему точка x_0 поверхности S не может быть точкой экстремума функции $f|_S$, если S не касается поверхности $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(x_0) = c_0\}$ в точке x_0. При этом предполагается, что $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$. Последнее условие гарантирует то, что в окрестности точки x_0 имеются точки как более высокого c_2-уровня функции f, так и точки более низкого c_1-уровня этой функции.

Поскольку гладкая поверхность S пересекает поверхность N, т. е. c_0-уровень гладкой функции f, то S будет пересекать как более высокие, так и более низкие уровни функции f в окрестности точки x_0. Но это и означает, что x_0 не может быть точкой экстремума функции $f|_S$.

Второй рисунок показывает, почему при касании N и S в точке x_0 эта точка может оказаться точкой экстремума. На рисунке x_0 — точка локального максимума функции $f|_S$.

Эти же соображения позволяют нарисовать картинку, аналитическая запись которой может показать, что необходимый признак условного экстремума не является достаточным.

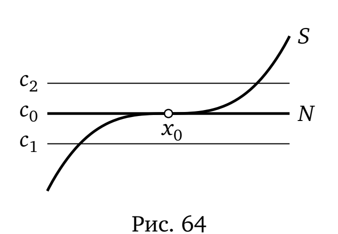


Рис. 64

Действительно, в соответствии с рис. 64 положим, например,

$$f(x, y) = y, \quad F(x, y) = x^3 - y = 0.$$

Тогда очевидно, что на кривой $S \subset \mathbb{R}^2$, заданной уравнением $y = x^3$, величина y не имеет экстремума в точке $(0, 0)$, хотя эта кривая касается линии уровня $f(x, y) = 0$ функции f в этой точке. Заметим, что $\operatorname{grad} f(0, 0) = (0, 1) \neq 0$.

Очевидно, это по существу тот же пример, который нам в свое время служил для иллюстрации различия между необходимым и достаточным условиями классического внутреннего экстремума функции.

c. Достаточный признак условного экстремума. Докажем теперь следующий достаточный признак наличия или отсутствия условного экстремума.

Теорема 2. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ и принадлежащая классу $C^{(2)}(D; \mathbb{R})$; S — поверхность в D, заданная системой уравнений* (25)*, где $F^i \in C^{(2)}(D; \mathbb{R})$ $(i = 1, \ldots, m)$ и ранг системы функций $\{F^1, \ldots, F^m\}$ в любой точке области D равен m.*

Пусть в функции Лагранжа

$$L(x) = L(x; \lambda) = f(x^1, \ldots, x^n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F^i(x^1, \ldots, x^n)$$

параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ выбраны в соответствии с необходимым признаком (31) *условного экстремума функции $f|_S$ в точке $x_0 \in S$.*[1]

Для того чтобы при этом точка x_0 была точкой экстремума функции $f|_S$, достаточно, чтобы квадратичная форма

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\xi^i \xi^j \tag{41}$$

была знакоопределенной для векторов $\xi \in TS_{x_0}$.

Если форма (41) *положительно определена на TS_{x_0}, то x_0 — точка строгого локального минимума функции $f|_S$; если форма* (41) *отрицательно определена на TS_{x_0}, то x_0 — точка строгого локального максимума функции $f|_S$.*

Для того чтобы точка x_0 не была точкой экстремума функции $f|_S$, достаточно, чтобы форма (41) *принимала на TS_{x_0} значения разных знаков.*

◄ Отметим прежде всего, что $L(x) \equiv f(x)$ для $x \in S$, поэтому, показав, что точка $x_0 \in S$ является точкой экстремума функции $L|_S$, мы одновременно покажем, что она является точкой экстремума функции $f|_S$.

[1] Фиксировав λ, мы получаем из $L(x; \lambda)$ функцию, зависящую только от x; мы позволили себе обозначать ее через $L(x)$.

По условию необходимый признак (31) экстремума функции $f|_S$ в точке $x_0 \in S$ выполнен, поэтому в этой точке $\operatorname{grad} L(x_0) = 0$. Значит, тейлоровское разложение функции $L(x)$ в окрестности точки $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ имеет вид

$$L(x) - L(x_0) = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + o(\|x - x_0\|^2) \tag{42}$$

при $x \to x_0$.

Напомним теперь, что, мотивируя определение 2, мы отметили возможность локального (например, в окрестности точки $x_0 \in S$) параметрического задания гладкой k-мерной поверхности S (в нашем случае $k = n - m$).

Иными словами, существует гладкое отображение

$$\mathbb{R} \ni (t^1, \ldots, t^k) = t \mapsto x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

(мы будем его, как и прежде, записывать в виде $x = x(t)$), при котором окрестность точки $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^k$ биективно преобразуется в некоторую окрестность точки x_0 на поверхности S, причем $x_0 = x(0)$.

Заметим, что соотношение

$$x(t) - x(0) = x'(0)t + (\|t\|) \quad \text{при } t \to 0,$$

выражающее дифференцируемость отображения $t \mapsto x(t)$ в точке $t = 0$, равносильно n координатным равенствам

$$x^i(t) - x^i(0) = \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha}(0)t^\alpha + o(\|t\|) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{43}$$

в которых индекс α пробегает целые значения от 1 до k и по нему происходит суммирование.

Из этих числовых равенств следует, что

$$|x^i(t) - x^i(0)| = O(\|t\|) \quad \text{при } t \to 0$$

и, значит,

$$\|x(t) - x(0)\|_{\mathbb{R}^n} = O(\|t\|_{\mathbb{R}^k}) \quad \text{при } t \to 0. \tag{44}$$

Используя соотношения (43), (44), из равенства (42) получаем, что при $t \to 0$

$$L(x(t)) - L(x(0)) = \frac{1}{2!}\partial_{ij}L(x_0)\partial_\alpha x^i(0)\partial_\beta x^j(0)t^\alpha t^\beta + o(\|t\|^2). \tag{42$'$}$$

Отсюда при условии знакоопределенности формы

$$\partial_{ij}L(x_0)\partial_\alpha x^i(0)\partial_\beta x^j(0)t^\alpha t^\beta \tag{45}$$

следует, что функция $L(x(t))$ имеет при $t = 0$ экстремум. Если же форма (45) принимает значения разных знаков, то $L(x(t))$ при $t = 0$ экстремума не имеет. Но, поскольку при отображении $t \mapsto x(t)$ некоторая окрестность точки $0 \in \mathbb{R}^k$ преобразуется в окрестность точки $x(0) = x_0 \in S$ на поверхности S, можно заключить, что тогда и функция $L|_S$ в точке x_0 либо будет иметь экстремум, причем того же характера, что и функция $L(x(t))$, либо, как и $L(x(t))$, не будет иметь экстремума.

Итак, остается проверить, что для векторов $\xi \in TS_{x_0}$ выражения (41) и (45) просто являются разными записями одного и того же объекта.

Действительно, полагая

$$\xi = x'(0)t,$$

мы получаем вектор ξ, касательный к S в точке x_0, и если $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, $x(t) = (x^1, \ldots, x^n)(t)$, $t = (t^1, \ldots, t^k)$, то

$$\xi^j = \partial_\beta x^j(0)\, t^\beta \quad (j = 1, \ldots, n),$$

откуда и следует совпадение величин (41), (45). ►

Отметим, что практическое использование теоремы 2 затруднено тем, что среди координат вектора $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in TS_{x_0}$ только $k = n - m$ независимых, поскольку координаты вектора ξ должны удовлетворять системе (29), определяющей пространство TS_{x_0}. Таким образом, непосредственное применение к форме (41) критерия Сильвестра в нашем случае, вообще говоря, ничего не дает: форма (41) может не быть определенной на $T\mathbb{R}^n_{x_0}$, но оказаться определенной на TS_{x_0}. Если же из соотношений (29) выразить m координат вектора ξ через остальные k координат и полученные линейные формы подставить в (41), то мы придем к квадратичной форме относительно k переменных, определенность которой уже можно исследовать с помощью критерия Сильвестра.

Поясним сказанное простейшими примерами.

Пример 10. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z задана функция

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2.$$

Ищется экстремум этой функции на плоскости S, заданной уравнением

$$F(x, y, z) = 2x - y - 3 = 0.$$

Записав функцию Лагранжа

$$L(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2) - \lambda(2x - y - 3)$$

и необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2y + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(2x - y - 3) = 0, \end{cases}$$

находим подозрительную точку $p = (2, 1, 0)$.

Далее находим форму (41):

$$\frac{1}{2}\partial_{ij} L \xi^i \xi^j = (\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2. \tag{46}$$

Отметим, что в данном случае параметр λ не вошел в эту квадратичную форму, поэтому мы его и не вычисляли.

Записываем теперь условие $\xi \in TS_p$:

$$2\xi^1 - \xi^2 = 0. \tag{47}$$

Из этого равенства находим $\xi^2 = 2\xi^1$ и подставляем в форму (46), после чего она приобретает вид

$$-3(\xi^1)^2 + (\xi^3)^2,$$

где на сей раз ξ^1 и ξ^3 — независимые переменные.

Последняя форма, очевидно, может принимать значения разных знаков, поэтому в точке $p \in S$ функция $f|_S$ экстремума не имеет.

Пример 11. В условиях примера 10 заменим $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^2$ и функцию f на

$$f(x, y) = x^2 - y^2,$$

сохранив условие

$$2x - y - 3 = 0,$$

которое теперь задает прямую S в плоскости $\mathbb{R}^2$.

В качестве подозрительной найдем точку $p = (2, 1)$.

Вместо формы (46) получим форму

$$(\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 \tag{48}$$

с прежним соотношением (47) между ξ^1 и ξ^2.

Таким образом, на TS_p форма (48) теперь имеет вид

$$-3(\xi^1)^2,$$

т. е. является отрицательно определенной. Отсюда заключаем, что точка $p = (2, 1)$ является точкой локального максимума функции $f|_S$.

Весьма поучительны во многих аспектах следующие простые примеры, на которых можно отчетливо рассмотреть механизм работы как необходимых, так и достаточных условий экстремума, в том числе роль параметра и неформальную роль самой функции Лагранжа.

Пример 12. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x, y) дана функция

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Найдем экстремумы этой функции на эллипсе, заданном каноническим соотношением

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{где } 0 < a < b.$$

Из геометрических соображений очевидно, что $\min f|_S = a^2$, $\max f|_S = b^2$. Получим это, опираясь на рекомендации теорем 1 и 2.

Записав функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = (x^2 + y^2) - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

и решая уравнение $dL=0$, т. е. систему $\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$, находим ее решения:

$$(x, y, \lambda)=(\pm a, 0, a^2), (0, \pm b, b^2).$$

Теперь в соответствии с теоремой 2 выпишем и исследуем квадратичную форму $\frac{1}{2}d^2L\boldsymbol{\xi}^2$ — второй член тейлоровского разложения функции Лагранжа в окрестности соответствующих точек:

$$\frac{1}{2}d^2L\boldsymbol{\xi}^2=\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right)(\xi^1)^2+\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right)(\xi^2)^2.$$

В точках $(\pm a, 0)$ эллипса S касательный вектор $\boldsymbol{\xi}=(\xi^1, \xi^2)$ имеет вид $(0, \xi^2)$, а квадратичная форма при $\lambda=a^2$ принимает вид

$$\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)(\xi^2)^2.$$

Учитывая условие $0<a<b$, заключаем, что эта форма положительно определена и, значит, в точках $(\pm a, 0)\in S$ имеется строгий локальный (а здесь, очевидно, и глобальный) минимум функции $f|_S$, т. е. $\min f|_S=a^2$.

Аналогично находим форму

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)(\xi^1)^2,$$

отвечающую точкам $(0, \pm b)\in S$, и получаем $\max f|_S=b^2$.

Замечание. Обратите здесь внимание на роль функции Лагранжа в сравнении с ролью функции f. В соответствующих точках на указанных касательных векторах дифференциал функции f (как и дифференциал L) обращается в нуль, а квадратичная форма $\frac{1}{2}d^2f\boldsymbol{\xi}^2=(\xi^1)^2+(\xi^2)^2$ положительно определена, в какой бы из этих точек ее ни вычислять. Тем не менее функция $f|_S$ в точках $(\pm a, 0)$ имеет строгий минимум, а в точках $(0, \pm b)$ — строгий максимум.

Чтобы понять, в чем тут дело, просмотрите еще раз доказательство теоремы 2 и попробуйте провести его, заменив L на f. Несмотря на то, что функции L и f на поверхности S совпадают, и на то, что $f'(x_0)\xi=0$, как и $L'(x_0)\xi=0$, при $\xi\in T_{x_0}S$, доказательство наткнется на существенное препятствие. Оно состоит в том, что в отличие от $dL(x_0)$ дифференциал $df(x_0)$ функции f в точке x_0 не есть тождественный нуль, хотя на касательном пространстве $T_{x_0}S$ он действительно нулевой. Это приводит к появлению довесков, препятствующих получению равенств (42), (42′), в которых L заменено на f.

Пример 13. Найдем экстремумы функции

$$f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$$

на эллипсоиде S, заданном соотношением

$$F(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \quad \text{где } 0<a<b<c.$$

Записав функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda) = (x^2 + y^2 + z^2) - \lambda\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\Big),$$

в соответствии с необходимым признаком экстремума находим решения уравнения $dL = 0$, т. е. системы $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$:

$$(x, y, z, \lambda) = (\pm a, 0, 0, a^2), (0, \pm b, 0, b^2), (0, 0, \pm c, c^2).$$

Квадратичная форма

$$\frac{1}{2}d^2L\boldsymbol{\xi}^2 = \Big(1 - \frac{\lambda}{a^2}\Big)(\xi^1)^2 + \Big(1 - \frac{\lambda}{b^2}\Big)(\xi^2)^2 + \Big(1 - \frac{\lambda}{c^2}\Big)(\xi^3)^2$$

в каждом из этих случаев на соответствующей касательной плоскости имеет вид

$$\Big(1 - \frac{a^2}{b^2}\Big)(\xi^2)^2 + \Big(1 - \frac{a^2}{c^2}\Big)(\xi^3)^2, \qquad \text{(a)}$$

$$\Big(1 - \frac{b^2}{a^2}\Big)(\xi^1)^2 + \Big(1 - \frac{b^2}{c^2}\Big)(\xi^3)^2, \qquad \text{(b)}$$

$$\Big(1 - \frac{c^2}{a^2}\Big)(\xi^1)^2 + \Big(1 - \frac{c^2}{b^2}\Big)(\xi^2)^2. \qquad \text{(c)}$$

Поскольку $0 < a < b < c$, то на основании теоремы 2, дающей достаточный признак наличия или отсутствия условного экстремума, можно заключить, что в случаях (a) и (c) мы нашли соответственно $\min f|_S = a^2$ и $\max f|_S = c^2$, а в точках $(0, \pm b, 0) \in S$, отвечающих случаю (b), функция $f|_S$ экстремума не имеет. Это вполне согласуется с очевидными геометрическими соображениями, высказанными по этому поводу при обсуждении необходимого признака условного экстремума.

Некоторые дальнейшие, порой весьма полезные стороны встретившихся в этом параграфе понятий анализа и геометрии, в том числе физическая интерпретация самой задачи об условном экстремуме, а также его необходимого признака (31) как разложения сил в точке равновесия и интерпретация множителей Лагранжа как величин реакций идеальных связей, представлены в приведенных ниже задачах и упражнениях.

Задачи и упражнения

1. *Путь и поверхность.*

a) Пусть $f: I \to \mathbb{R}^2$ — отображение класса $C^{(1)}(I; \mathbb{R}^2)$ интервала $I \subset \mathbb{R}$. Рассматривая это отображение как путь в $\mathbb{R}^2$, покажите на примере, что его носитель $f(I)$ может не быть подмногообразием в $\mathbb{R}^2$, а вот график этого отображения в $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ всегда является одномерным подмногообразием $\mathbb{R}^3$, проекцией которого в $\mathbb{R}^2$ является носитель $f(I)$ указанного пути.

b) Решите задачу a) в случае, когда I — промежуток в $\mathbb{R}^k$, а $f \in C^{(1)}(I; \mathbb{R}^n)$. Покажите, что в этом случае график отображения $f: I \to \mathbb{R}^n$ является гладкой k-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, проекция которой на подпространство $\mathbb{R}^n$ совпадает с $f(I)$.

c) Проверьте, что если $f_1: I_1 \to S$ и $f_2: I_2 \to S$ — две гладкие параметризации одной и той же k-мерной поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$, причем ни f_1 в I_1, ни f_2 в I_2 не имеют критических точек, то определенные при этих условиях отображения

$$f_1^{-1} \circ f_2: I_2 \to I_1, \quad f_2^{-1} \circ f_1: I_1 \to I_2$$

являются гладкими.

2. *Сфера в* $\mathbb{R}^n$.

a) На сфере $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ укажите какую-нибудь максимальную область действия криволинейных координат (φ, ψ), полученных из полярных координат в $\mathbb{R}^3$ (см. формулу (5) предыдущего параграфа) при $\rho = 1$.

b) Ответьте на вопрос a) в случае $(m-1)$-мерной сферы

$$S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = 1\}$$

в $\mathbb{R}^m$ и координат $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1})$ на ней, получаемых из полярных координат в $\mathbb{R}^n$ (см. формулы (6) предыдущего параграфа) при $\rho = 1$.

c) Можно ли сферу $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ задать одной системой координат $(t^1, \ldots, t^k)$, т. е. одним диффеоморфизмом $f: G \to \mathbb{R}^{k+1}$ области $G \subset \mathbb{R}^k$?

d) Какое наименьшее количество карт должно быть в атласе поверхности Земли?

e) Расстояние между точками сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ будем измерять длиной кратчайшей кривой, лежащей на сфере S^2 и соединяющей эти точки. Такой кривой является дуга соответствующего большого круга. Может ли существовать такая локальная плоская карта сферы, что все расстояния между точками сферы были бы пропорциональны (с одним и тем же коэффициентом пропорциональности) расстояниям между их изображениями на карте?

f) Углом между кривыми (лежащими или не лежащими на сфере) в точке их пересечения называется угол между касательными к этим кривым в этой точке.

Покажите, что существуют локальные плоские карты сферы, в которых углы между кривыми на сфере и соответствующими кривыми на карте одинаковы (см. рис. 65, изображающий так называемую *стереографическую проекцию*).

3. *Касательное пространство*.

a) Проверьте прямым расчетом, что касательное к гладкой k-мерной поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in S$ многообразие TS_{x_0} не зависит от выбора системы координат в $\mathbb{R}^n$.

b) Покажите, что если при диффеоморфизме $f: D \to D'$ области $D \subset \mathbb{R}^n$ на область $D' \subset \mathbb{R}^n$ гладкая поверхность $S \subset D$ отображается на гладкую поверхность $S' \subset D'$, а точка $x_0 \in S$ переходит в $x_0' \in S'$, то при линейном отображении $f'(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, касательном к f в точке $x_0 \in D$, векторное пространство TS_{x_0} изоморфно преобразуется в векторное пространство $TS'_{x_0'}$.

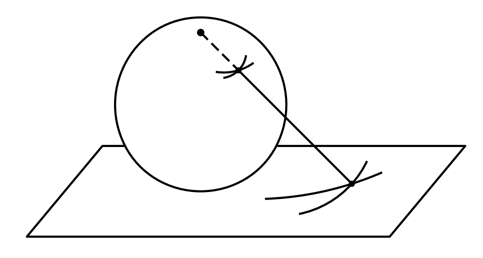


Рис. 65

c) Если в условиях предыдущей задачи отображение $f: D \to D'$ является любым отображением класса $C^{(1)}(D; D')$, при котором $f(S) \subset S'$, то $f'(TS_{x_0}) \subset TS'_{x'_0}$.

d) Покажите, что ортогональная проекция гладкой k-мерной поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ на касательную к ней в точке $x_0 \in S$ k-мерную плоскость TS_{x_0} является отображением, взаимно однозначным в некоторой окрестности точки касания x_0.

e) Пусть в условиях предыдущей задачи $\xi \in TS_{x_0}$ и $\|\xi\| = 1$.

Уравнение $x - x_0 = \xi t$ прямой в $\mathbb{R}^n$, лежащей в TS_{x_0}, можно использовать, чтобы каждую точку $x \in TS_{x_0} \setminus x_0$ характеризовать парой (t, ξ). Это по существу полярные координаты в TS_{x_0}.

Покажите, что прямым $x - x_0 = \xi t$ на поверхности S в окрестности точки x_0 отвечают гладкие кривые, пересекающиеся только в точке x_0. Проверьте, что, сохраняя в качестве параметра на этих кривых величину t, мы получаем пути, скорость вдоль которых при $t = 0$ совпадает с вектором $\xi \in TS_{x_0}$, определяющим прямую $x - x_0 = \xi t$, из которой получена данная кривая на S.

Таким образом, пары (t, ξ), где $\xi \in TS_{x_0}$, $|\xi| = 1$, а t — вещественные числа из некоторой окрестности $U(0)$ нуля в $\mathbb{R}$, могут служить аналогом полярных координат в некоторой окрестности точки $x_0 \in S$ на поверхности S.

4. Пусть функция $F \in C^{(1)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, не имеющая критических точек, такова, что уравнение $F(x^1, \ldots, x^n) = 0$ задает в $\mathbb{R}^n$ компактную поверхность S (т. е. S как подмножество $\mathbb{R}^n$ является компактом). Для любой точки $x \in S$ находим вектор $\boldsymbol{\eta}(x) = \operatorname{grad} F(x)$, нормальный к S в точке x. Если каждую точку $x \in S$ заставить двигаться равномерно со своей скоростью $\boldsymbol{\eta}(x)$, то возникает зависящее от времени t отображение $S \ni x \mapsto x + \boldsymbol{\eta}(x)t \in \mathbb{R}^n$.

a) Покажите, что при достаточно близких к нулю значениях t это отображение биективно и при каждом таком значении t из S получается гладкая поверхность $\widetilde{S}_t$.

b) Пусть E — множество в $\mathbb{R}^n$; δ-окрестностью множества E назовем совокупность тех точек $\mathbb{R}^n$, расстояние которых до E меньше δ.

Покажите, что при значениях t, близких к нулю, уравнение

$$F(x^1, \ldots, x^n) = t$$

задает компактную поверхность $S_t \subset \mathbb{R}^n$, и покажите, что поверхность $\widetilde{S}_t$ лежит в $\delta(t)$-окрестности поверхности S_t, где $\delta(t) = O(t)$ при $t \to 0$.

c) С каждой точкой x поверхности $S = S_0$ свяжем единичный вектор нормали

$$\boldsymbol{n}(x) = \frac{\boldsymbol{\eta}(x)}{\|\boldsymbol{\eta}(x)\|}$$

и рассмотрим новое отображение $S \ni x \mapsto x + \boldsymbol{n}(x)t \in \mathbb{R}^n$.

Покажите, что при всех достаточно близких к нулю значениях t это отображение биективно, получающаяся из S при конкретном значении t поверхность $\widetilde{\widetilde{S}}_t$ гладкая и если $t_1 \neq t_2$, то $\widetilde{\widetilde{S}}_{t_1} \cap \widetilde{\widetilde{S}}_{t_2} = \varnothing$.

d) Опираясь на результат предыдущей задачи, покажите, что найдется число $\delta > 0$ такое, что между точками δ-окрестности поверхности S и парами (t, x), где $t \in]-\delta, \delta[\subset \mathbb{R}$, $x \in S$, имеется взаимно однозначное соответствие; если $(t^1, \ldots, t^k)$ — локальные координаты на поверхности S в окрестности $U_S(x_0)$ точки x_0, то величины $(t, t^1, \ldots, t^k)$ могут служить локальными координатами в некоторой пространственной окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

e) Покажите, что при $|t| < \delta$ точка $x \in S$ является ближайшей к $(x + \boldsymbol{n}(x)t) \in \mathbb{R}^n$ точкой поверхности S. Таким образом, поверхность $\widetilde{\widetilde{S}}_t$ при $|t| < \delta$ есть геометрическое место точек пространства $\mathbb{R}^n$, удаленных от поверхности S на расстояние $|t|$.

5. a) Пусть $d_p: S \to \mathbb{R}$ — функция на k-мерной гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$, определенная равенством $d_p(x) = \|p - x\|^2$, где p — фиксированная точка $\mathbb{R}^n$, x — точка S, а $\|p - x\|$ — расстояние в $\mathbb{R}^n$ между этими точками.

Покажите, что в точках экстремума функции $d_p(x)$ вектор $p - x$ ортогонален поверхности S.

b) Покажите, что на любой прямой, ортогонально пересекающей поверхность S в точке $q \in S$, имеется не более k таких точек p, что функция $d_p(x)$ имеет q своей вырожденной критической точкой (т. е. точкой, в которой гессиан функции обращается в нуль).

c) Покажите, что в случае кривой S $(k = 1)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ $(n = 2)$ точка p, для которой точка $q \in S$ является вырожденной критической точкой функции $d_p(x)$, совпадает с центром кривизны кривой S в точке $q \in S$.

6. Постройте в плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y линии уровня функции $f(x, y) = xy$ и кривую

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Используя полученную картинку, проведите полное исследование задачи об экстремуме функции $f|_S$.

7. На плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y определены следующие функции класса $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$:

$$f(x, y) = x^2 - y; \quad F(x, y) = \begin{cases} x^2 - y + e^{-1/x^2} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ x^2 - y, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

a) Нарисуйте линии уровня функции $f(x, y)$ и линию S, заданную соотношением $F(x, y) = 0$.

b) Исследуйте на экстремум функцию $f|_S$.

c) Покажите, что условие определенности формы $\partial_{ij} f(x_0)\xi^i \xi^j$ на TS_{x_0}, в отличие от условия определенности формы $\partial_{ij} L(x_0)\xi^i \xi^j$ на TS_{x_0}, приведенного в теореме 2, еще не является достаточным для того, чтобы подозрительная точка $x_0 \in S$ была точкой экстремума функции $f|_S$.

d) Проверьте, является ли точка $x_0 = (0, 0)$ критической для функции f и можно ли исследовать поведение f в окрестности этой точки только с помощью второго (квадратичного) члена формулы Тейлора, как это подразумевалось в c).

e) На примере пары функций $F(x, y) = 2x^2 + y$, $f(x, y) = x^2 + y$ покажите, что f может иметь строгий максимум в точке кривой $F(x, y) = 0$, хотя на касательной к этой кривой в этой точке функция f имеет строгий минимум. Это еще раз подчеркивает роль функции Лагранжа в формулировке доказанного выше достаточного признака условного экстремума.

f) На примере пары функций $F(x, y) = x^2 - y^3$, $f(x, y) = y$ покажите, что при $L(x, y) = f(x, y) + \lambda F$ уравнение $dL = 0$ может не иметь решения, когда экстремум f достигается в особой точке кривой $F(x, y) = 0$. Это можно учесть, рассматривая вместо L функцию $\tilde{L}(x, y) = \lambda_0 f + \lambda F$, допуская возможность $\lambda_0 = 0$.

8. В дифференциальной геометрии при определении главных кривизн и главных направлений бывает полезно уметь искать экстремум одной квадратичной формы $h_{ij}u^i u^j$ при условии постоянства другой (положительно определенной) формы $g_{ij}u^i u^j$. Решите эту задачу по аналогии с разобранным выше примером 9.

9. Пусть $A=[a^i_j]$ — квадратная матрица порядка n такая, что

$$\sum_{i=1}^{n}(a^i_j)^2=H_j \quad (j=1,\ldots,n),$$

где $H_1,\ldots,H_n$ — фиксированный набор из n положительных действительных чисел.

a) Покажите, что $\det^2 A$ при указанных условиях на матрицу A может иметь максимум, только если строки матрицы A являются попарно ортогональными векторами в $\mathbb{R}^n$.

b) Исходя из равенства

$$\det^2 A=\det A\cdot\det A^*,$$

где A^* — транспонированная по отношению к A матрица, покажите, что при указанных выше условиях

$$\max_A \det^2 A=H_1\ldots H_n.$$

c) Докажите, что для любой матрицы $[a^i_j]$ имеет место *неравенство Адамара*

$$\det^2(a^i_j)\leqslant\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(a^i_j)^2\right).$$

d) Дайте наглядно-геометрическое истолкование неравенства Адамара.

10. a) Нарисуйте поверхности уровня функции f и плоскость S в примере 10. Объясните на рисунке результат, полученный в этом примере.

b) Нарисуйте линии уровня функции f и прямую S в примере 11. Объясните на рисунке результат, полученный в этом примере.

11. В примере 6 из § 4 главы V, исходя из принципа Ферма, был получен закон Снеллиуса преломления света на поверхности раздела двух сред в случае, когда эта поверхность — плоскость. Остается ли этот закон в силе для произвольной гладкой поверхности раздела?

12. a) Материальная точка в потенциальном поле сил может находиться в положении равновесия (называемом также состоянием покоя или стационарным состоянием) только в критических (стационарных) точках потенциала. При этом строгому локальному минимуму потенциала отвечает положение устойчивого равновесия, а локальному максимуму — неустойчивого. Проверьте это.

b) К какой задаче на условный экстремум (которую и решал Лагранж) сводится вопрос о положении равновесия материальной точки, находящейся в потенциальном поле сил (например, тяжести) и стесненной идеальными связями (например, точка не может покидать некоторой гладкой поверхности, или бусинка — гладкой нити, или шарик — желоба)? Связь идеальна (нет трения); это значит, что ее воздействие на точку (*реакция связи*) происходит только в нормальном к связи направлении.

c) Какой физический (механический) смысл имеют в этом случае разложение (31) — необходимый признак условного экстремума и множители Лагранжа?

Кстати, каждую из функций системы (25) можно поделить на модуль ее градиента, что, очевидно, приводит к равносильной системе (если ее ранг всюду равен m). Значит, все векторы $\operatorname{grad} F^i(x_0)$ в правой части соотношения (31) можно считать единичными нормалями к соответствующей поверхности.

d) Не становится ли после приведенной физической интерпретации самоочевидным и естественным сам метод Лагранжа отыскания условного экстремума?

Некоторые задачи коллоквиумов

Введение в анализ (число, функция, предел)

1. Длину стягивающего земной шар по экватору обруча увеличили на 1 метр. Образовался зазор. Достаточен ли он для прохода муравья? Каковы величины абсолютного и относительного увеличения радиуса Земли при таком увеличении длины экватора? (Радиус Земли ≈ 6400 км.)

2. Как связаны полнота (непрерывность) действительных чисел, неограниченность натурального ряда и принцип Архимеда? Почему любое действительное число можно сколь угодно точно приблизить рациональным? Объясните на модели рациональных дробей (рациональных функций), что принцип Архимеда может быть нарушен и что в таких числовых системах натуральный ряд ограничен и имеются бесконечно малые числа.

3. Четыре букашки, сидевшие в вершинах единичного квадрата, стали двигаться друг за другом с единичной скоростью, держа курс на преследуемого. Нарисуйте траектории их движения. Какова длина каждой траектории? Каков закон движения (в декартовых и полярных координатах)?

4. Нарисуйте диаграмму вычисления $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ итерационным процессом $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. Как находить $\sqrt[n]{a}$?

Как связано решение уравнений с отысканием неподвижных точек? Верно ли, что каждое непрерывное отображение $f\colon [0,1] \to [0,1]$ имеет неподвижную точку?

5. Пусть $g(x) = f(x) + o(f(x))$ при $x \to \infty$. Верно ли, что тогда и $f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \to \infty$?

Пусть известно, что $o(f(x)) = O(g(x))$ при $x \to \infty$. Верно ли, что тогда и $O(g(x)) = o(f(x))$ при $x \to \infty$ (например, когда $f = g$)?

Известно, что всегда $O(f) + o(f) = O(f)$, и $o(f) + o(f) = o(f)$, и $2o(f) = o(f)$ при фиксированной базе. Следует ли отсюда, что $o(f) \equiv 0$?

6. Известно, что произведение двух или любого конечного числа бесконечно малых является функцией бесконечно малой. Приведите пример, показывающий, что для бесконечных произведений это уже не всегда так.

7. Зная степенное разложение функции e^x, найдите методом неопределенных коэффициентов (или иначе) несколько первых членов (или все) степенного разложения функции $\ln(1+x)$.

8. Вычислите $\exp A$, когда A — одна из матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Сколько членов ряда для e^x надо взять, чтобы получить многочлен, позволяющий вычислять e^x на отрезке $[-1, 2]$ с точностью до 10^{-3}?

10. Зная степенные разложения функций $\sin x$ и $\cos x$, найдите методом неопределенных коэффициентов (или иначе) несколько первых членов (или все) степенного разложения функции $\operatorname{tg} x$ в окрестности точки $x = 0$.

11. Длину стягивающего земной шар по экватору пояска увеличили на 1 метр, после чего поясок натянули, подперев вертикальным столбиком. Какова примерно высота столбика, если радиус Земли ≈ 6400 км?

12. Вычислите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}\right)^x$.

13. Нарисуйте эскизы графиков следующих функций:

a) $\log_{\cos x}\sin x$; b) $\operatorname{arctg}\dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Покажите, что если вектор ускорения $\boldsymbol{a}(t)$ в любой момент t ортогонален вектору $\boldsymbol{v}(t)$ скорости движения, то величина $|\boldsymbol{v}(t)|$ остается постоянной.

2. Пусть (x, t) и $(\tilde{x}, \tilde{t})$ — соответственно координата и время движущейся точки в двух системах отсчета. Считая известными формулы $\tilde{x} = \alpha x + \beta t$, $\tilde{t} = \gamma x + \delta t$ перехода из одной системы отсчета в другую, найдите формулу преобразования скоростей, т. е. связь между $v = \frac{dx}{dt}$ и $\tilde{v} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}$.

3. Функция $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, но f' разрывна при $x = 0$ (проверьте). «Докажем», однако, что если $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дифференцируема на $\mathbb{R}$, то f' непрерывна в любой точке $a \in \mathbb{R}$. По теореме Лагранжа

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi),$$

где ξ — точка между a и x. Тогда если $x \to a$, то $\xi \to a$. По определению,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a),$$

и поскольку этот предел существует, то существует и равен ему предел правой части формулы Лагранжа, т. е. $f'(\xi) \to f'(a)$ при $\xi \to a$. Непрерывность f' в точке a «доказана». Где ошибка?

4. Пусть функция f имеет $n+1$ производную в точке x_0, и пусть $\xi = x_0 + \theta_x(x - x_0)$ — средняя точка в формуле Лагранжа остаточного члена $\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n$, так что $0 < \theta_x < 1$. Покажите, что $\theta_x \to \frac{1}{n+1}$ при $x \to x_0$, если $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.

5. a) Если функция $f \in C^{(n)}([a,b],\mathbb{R})$ в $n+1$ точке отрезка $[a,b]$ имеет нули, то на этом отрезке имеется по крайней мере один нуль функции $f^{(n)}$ — производной f порядка n.

b) Покажите, что полином $P_n(x) = \dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ на отрезке $[-1,1]$ имеет n корней. (Указание: $x^2-1=(x-1)(x+1)$ и $P_n^{(k)}(-1) = P_n{}^{(k)}(1) = 0$ при $k = 0, \ldots, n-1$.)

6. Вспомните геометрический смысл производной и покажите, что если функция f определена и дифференцируема на интервале I и $[a,b] \subset I$, то функция f' (даже не будучи непрерывной!) принимает на отрезке $[a,b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.

7. Докажите неравенство

$$a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n,$$

где числа $a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ неотрицательны и $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$.

8. Покажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (z = x + iy),$$

поэтому естественно считать, что $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ (формула Эйлера) и

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

9. Найдите форму поверхности жидкости, равномерно вращающейся в стакане.

10. Покажите, что касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точке (x_0, y_0) имеет уравнение $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ и что световые лучи от источника, помещенного в одном из фокусов $F_1 = (-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ эллипса с полуосями $a > b > 0$, собираются эллиптическим зеркалом в другом фокусе.

11. Частица без предварительного разгона под действием силы тяжести начинает скатываться с вершины ледяной горки эллиптического профиля. Уравнение профиля: $x^2 + 5y^2 = 1$, $y \geqslant 0$. Рассчитайте траекторию движения частицы до ее приземления.

12. Средним порядка α чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют величину

$$s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}.$$

В частности, при $\alpha = 1, 2, -1$ получаем соответственно *среднее арифметическое, среднее квадратичное* и *среднее гармоническое* этих чисел.

Будем считать, что все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неотрицательны, а если степень $\alpha < 0$, то будем предполагать, что они даже положительны.

a) Используя неравенство Гёльдера, покажите, что если $\alpha < \beta$, то

$$s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant s_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

причем равенство имеет место, лишь когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

b) Покажите, что при стремлении α к нулю величина $s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ стремится к $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, т. е. к *среднему геометрическому* этих чисел.

С учетом результата задачи a) отсюда, например, следует классическое неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим неотрицательных чисел (напишите его).

c) Если $\alpha \to +\infty$, то $s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, а при $\alpha \to -\infty$ величина $s_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ стремится к меньшему из рассматриваемых чисел, т. е. к $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Докажите это.

13. Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ — закон движения точки (т. е. ее радиус-вектор как функция времени). Считаем, что это непрерывно дифференцируемая функция на промежутке $a \leqslant t \leqslant b$.

a) Можно ли, ссылаясь на теорему Лагранжа о среднем, утверждать, что на $[a, b]$ найдется момент ξ, такой что $\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}'(\xi) \cdot (b - a)$? Поясните ответ примерами.

b) Пусть $\mathrm{Convex}\{\boldsymbol{r}'\}$ — выпуклая оболочка множества (концов) векторов $\boldsymbol{r}'(t)$, $t \in [a, b]$. Покажите, что найдется вектор $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Convex}\{\boldsymbol{r}'\}$, такой что $\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{v} \cdot (b - a)$.

c) Соотношение $|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \leqslant \sup |\boldsymbol{r}'(t)| \cdot |b - a|$, где верхняя грань берется по $t \in [a, b]$, имеет очевидный физический смысл. Какой? Докажите это неравенство как общий математический факт, развивающий классическую теорему Лагранжа о конечном приращении.

Интеграл и введение в многомерный анализ

1. Зная неравенства Гёльдера, Минковского и Иенсена для сумм, получите соответствующие неравенства для интегралов.

2. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с относительной погрешностью в пределах 10 %.

3. Функция $\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt$, называемая *интегралом вероятности ошибок*, имеет пределом 1 при $x \to +\infty$. Изобразите график этой функции и найдите ее производную. Покажите, что при $x \to +\infty$

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right) \right).$$

Как продолжить эту асимптотическую формулу до ряда? Сходится ли этот ряд хотя бы при каком-то значении $x \in \mathbb{R}$?

4. Зависит ли длина пути от закона движения (от параметризации)?

5. Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет жук. Каждый раз, как только он проползает 1 см, вы удлиняете резинку на 1 км. Доползет ли жук до вашей руки? Если да, то приблизительно сколько ему на это потребуется времени? (Задача Л. Б. Окуня, предложенная им А. Д. Сахарову.)

6. Подсчитайте работу по перемещению массы в гравитационном поле Земли и покажите, что эта работа зависит только от уровней высот исходного и конечного положений. Найдите для Земли работу выхода из ее гравитационного поля и соответствующую (вторую) космическую скорость.

7. На примере маятника и двойного маятника поясните, как на множестве соответствующих конфигураций можно ввести локальные координаты и окрестности и как при этом возникает естественная топология, превращающая его в конфигурационное пространство механической системы. Можно ли метризовать это пространство в рассмотренных случаях?

8. Является ли компактом единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, в $\mathbb{R}_0^\infty$, в $C[a,b]$?

9. Подмножество данного множества называется его *ε-сетью*, если любая точка множества находится на расстоянии меньшем чем ε от какой-либо точки этого подмножества. Обозначим через $N(\varepsilon)$ наименьшее возможное число точек в ε-сети данного множества. Оцените *ε-энтропию* $\log_2 N(\varepsilon)$ отрезка, квадрата, куба и ограниченной области в пространстве $\mathbb{R}^n$. Дает ли величина $\dfrac{\log_2 N(\varepsilon)}{\log_2(1/\varepsilon)}$ при $\varepsilon \to 0$ представление о размерности рассматриваемого множества? Проверьте, что эта *энтропийная* размерность стандартного канторова подмножества отрезка $[0,1]$ равна $\log_3 2$.

10. На поверхности единичной сферы S в $\mathbb{R}^3$ температура T как функция точки меняется непрерывно. Обязаны ли на сфере быть точки минимума и максимума температуры? При наличии точек с двумя фиксированными значениями температуры должны ли быть точки и с промежуточными ее значениями? Что из этого верно в случае, когда единичная сфера S берется в пространстве $C[a,b]$, а температура в точке $f \in S$ выражается формулой

$$T(f) = \left(\int_a^b |f|(x)\,dx\right)^{-1}?$$

11. a) Взяв 1,5 в качестве исходного приближения для $\sqrt{2}$, проведите две итерации по методу Ньютона и посмотрите, сколько верных знаков получилось на каждом из двух шагов.

b) Найдите итерационным процессом функцию f, удовлетворяющую уравнению

$$f(x) = x + \int_0^x f(t)\,dt.$$

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. Локальная линеаризация. Рассмотрите и продемонстрируйте ее на следующих примерах: мгновенная скорость и перемещение; упрощение уравнения движения при малых колебаниях маятника; вычисление линейных поправок к значениям величин A^{-1}, $\exp(E)$, $\det(E)$, $\langle a, b\rangle$ при малом изменении аргументов (здесь A — обратимая, E — единичная матрицы; a, b — векторы; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение).

2. a) Какова относительная погрешность $\delta = \dfrac{|\Delta f|}{|f|}$ при вычислении значения функции $f(x, y, z)$ в точке (x, y, z), координаты которой даны с абсолютными погрешностями Δx, Δy, Δz соответственно?

b) Какова относительная ошибка в вычислении объема комнаты, размеры которой таковы: длина $x = 5 \pm 0{,}05$ м, ширина $y = 4 \pm 0{,}04$ м, высота $z = 3 \pm 0{,}03$ м?

c) Верно ли, что относительная погрешность значения линейной функции совпадает с относительной погрешностью значения ее аргумента?

d) Верно ли, что дифференциал линейной функции совпадает с ней самой?

e) Верно ли, что для линейной функции f справедливо соотношение $f' = f$?

3. a) Одна из частных производных функции двух переменных, заданной в круге, равна нулю во всех точках круга. Значит ли это, что функция не зависит от соответствующей переменной в этом круге?

b) Изменится ли ответ, если вместо круга взять произвольную выпуклую область?

c) А если взять вообще произвольную область?

d) Пусть $x = x(t)$ — закон движения точки в плоскости (или в $\mathbb{R}^n$) в промежутке времени $t \in [a, b]$; $\boldsymbol{v}(t)$ — ее скорость как функция времени, а $C = \operatorname{Convex}\{\boldsymbol{v}(t) \mid t \in [a, b]\}$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее все векторы $\boldsymbol{v}(t)$ (называемое обычно *выпуклой оболочкой* того множества, на которое оболочка натягивается). Покажите, что в C найдется такой вектор $\boldsymbol{v}$, что $x(b) - x(a) = \boldsymbol{v} \cdot (b - a)$.

4. a) Пусть $F(x, y, z) = 0$. Верно ли, что $\dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial z} = -1$? Проверьте это на зависимости $\dfrac{xy}{z} - 1 = 0$ (соответствующей уравнению Клапейрона $\dfrac{PV}{T} = R$ состояния идеального газа).

b) Пусть теперь $F(x, y) = 0$. Верно ли, что $\dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial y} = 1$?

c) Что можно утверждать в общем случае зависимости $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$?

d) Как, зная первые несколько членов тейлоровского разложения функции $F(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0), где $F(x_0, y_0) = 0$, а $F'_y(x_0, y_0)$ обратима, найти первые несколько членов тейлоровского разложения неявной функции $y = f(x)$, определяемой в окрестности (x_0, y_0) уравнением $F(x, y) = 0$?

5. a) Проверьте, что плоскость, касательная к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ в точке (x_0, y_0, z_0), может быть задана уравнением $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$.

b) Точка $P(t)=\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)\cdot t$ в момент времени $t=1$ стартовала с эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Пусть $p(t)$ — точка того же эллипсоида, ближайшая к $P(t)$ в момент времени t. Найдите предельное положение точки $p(t)$ при $t\to+\infty$.

6. Если в векторном пространстве V имеется невырожденная билинейная форма $B(x, y)$, то каждой линейной функции $g^*\in V^*$ на этом пространстве отвечает единственный вектор g, такой что $g^*(v)=B(g, v)$ для любого вектора $v\in V$.

a) Проверьте, что если $V=\mathbb{R}^n$, $B(x, y)=b_{ij}x^ix^j$, $g^*v=g_iv^i$, то вектор g имеет координаты $g^j=b^{ij}g_i$, где (b^{ij}) — матрица, обратная матрице (b_{ij}).

Чаще всего в качестве билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$ выступает стандартное симметричное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в евклидовой геометрии или кососкалярное произведение $\omega(\cdot,\cdot)$ (когда форма B кососимметрична) в симплектической геометрии.

b) Пусть $B(v_1, v_2)=\begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{vmatrix}$ — ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы $v_1, v_2\in\mathbb{R}^2$. Найдите вектор $g=(g^1, g^2)$, отвечающий относительно B линейной функции $g^*=(g_1, g_2)$, заданной своими коэффициентами.

c) Вектор, соответствующий дифференциалу функции $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ в точке x относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, как известно, называется градиентом функции f в этой точке и обозначается $\operatorname{grad} f(x)$. Итак, $df(x)v=:\langle\operatorname{grad} f(x), v\rangle$ для любого приложенного к x вектора $v\in T_x\mathbb{R}^n\sim\mathbb{R}^n$.

Значит,

$$f'(x)v=\frac{\partial f}{\partial x^1}(x)v^1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x^n}(x)v^n=\langle\operatorname{grad} f(x), v\rangle=|\operatorname{grad} f(x)|\cdot|v|\cos\varphi.$$

Убедитесь, что в стандартном ортонормированном базисе, т. е. в декартовых координатах, $\operatorname{grad} f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)(x)$.

Убедитесь, что скорость роста функции f при движении из точки x с единичной скоростью максимальна, когда направление движения совпадает с направлением градиента функции в этой точке, и равна $|\operatorname{grad} f(x)|$. При движении в направлении, перпендикулярном вектору $\operatorname{grad} f(x)$, функция не меняется.

Как изменятся координаты вектора $\operatorname{grad} f(x)$, если в $\mathbb{R}^2$ вместо ортонормированного базиса (e_1, e_2) взять ортогональный базис $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)=(\lambda_1e_1, \lambda_2e_2)$?

Как вычислять $\operatorname{grad} f$ в полярных координатах? Ответ: $\left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)$.

d) Выше в упражнении b) была рассмотрена кососимметрическая форма $B(v_1, v_2)$ ориентированной площади параллелограмма в $\mathbb{R}^2$.

Если вектор, отвечающий $df(x)$ относительно симметричной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ называют градиентом $\operatorname{grad} f(x)$, то вектор, отвечающий $df(x)$ относительно кососимметричной формы B называют косым градиентом и обозначают $\operatorname{sgrad} f(x)$ (от английского «skew» — косой). Запишите $\operatorname{grad} f(x)$ и $\operatorname{sgrad} f(x)$ в декартовых координатах $\mathbb{R}^2$.

7. a) Покажите, что в $\mathbb{R}^3$ (и вообще в $\mathbb{R}^{2n+1}$) нет невырожденной кососимметрической билинейной формы.

b) В ориентированном $\mathbb{R}^2$, как мы видели, есть невырожденная кососимметрическая билинейная форма (ориентированная площадь параллелограмма). В $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(x^1, \ldots, x^n, \ldots, x^{2n}) = (p^1, \ldots, p^n, q^1, \ldots, q^n)$ такая билинейная форма ω тоже есть: если $v_i = (p_i^1, \ldots, p_i^n, q_i^1, \ldots, q_i^n)$ $(i = 1, 2)$, то

$$\omega(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} p_1^1 & q_1^1 \\ p_2^1 & q_2^1 \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} p_1^n & q_1^n \\ p_2^n & q_2^n \end{vmatrix}.$$

т. е. $\omega(v_1, v_2)$ — это сумма ориентированных площадей проекций натянутого на v_1, v_2 параллелограмма в координатные плоскости (p^j, q^j) $(j = 1, \ldots, n)$.

Пусть g^* — линейная функция в $\mathbb{R}^{2n}$, заданная своими коэффициентами $g^* = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$. Найдите координаты вектора g, сопоставляемого функции g^* посредством формы ω.

Дифференциалу функции $f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^{2n}$ посредством кососимметрической формы ω сопоставляется вектор, называемый, как уже было сказано, косым градиентом функции f в этой точке и обозначаемый $\operatorname{sgrad} f(x)$. Найдите выражение $\operatorname{sgrad} f(x)$ в канонических декартовых координатах пространства $\mathbb{R}^{2n}$.

Найдите скалярное произведение $\langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{sgrad} f(x)\rangle$.

Покажите, что вектор $\operatorname{sgrad} f(x)$ направлен вдоль поверхности уровня функции f.

Закон движения $x = x(t)$ точки в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ таков, что $\dot{x}(t) = \operatorname{sgrad} f(x(t))$. Покажите, что $f(x(t)) = \text{const}$.

Запишите уравнение $\dot{x} = \operatorname{sgrad} f(x)$ в канонических обозначениях $(p^1, \ldots, p^n, q^1, \ldots, q^n)$ для координат и $H = H(p, q)$ для функции f. Полученная система, называемая системой уравнений Гамильтона, является одним из центральных объектов механики.

8. Канонические переменные и система уравнений Гамильтона.

a) В вариационном исчислении и фундаментальных вариационных принципах классической механики важную роль играет следующая *система уравнений Эйлера—Лагранжа:*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial v}\right)(t, x, v) = 0, \\ v = \dot{x}(t), \end{cases}$$

где $L(t, x, v)$ — заданная функция переменных t, x, v, среди которых t обыч-

но является временем, x — координатой, а v — скоростью. Это система двух уравнений на три переменные. Из нее обычно желают найти зависимости $x=x(t)$ и $v=v(t)$, что по существу сводится к отысканию закона движения $x=x(t)$, ибо $v=\dot{x}(t)$.

Запишите подробно первое уравнение системы, раскрыв производную $\frac{d}{dt}$, с учетом того, что $x=x(t)$ и $v=v(t)$.

b) Покажите, что если от переменных t, x, v, L перейти к так называемым *каноническим* переменным t, x, p, H, сделав преобразование Лежандра

$$\begin{cases} p=\frac{\partial L}{\partial v}, \\ H=pv-L \end{cases}$$

по переменным v, L, заменяя их на переменные p, H, то система Эйлера—Лагранжа приобретет симметричный вид

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}.$$

c) В механике чаще всего вместо x и $v=\dot{x}$ используют обозначения q и $\dot{q}$.

В многомерном случае, когда $L(t,q,\dot{q})=L(t,q^1,\ldots,q^m,\dot{q}^1,\ldots,\dot{q}^m)$, система уравнений Эйлера—Лагранжа имеет вид

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)(t,q,\dot{q})=0 \quad (i=1,\ldots,m).$$

Сделав преобразование Лежандра по переменным $\dot{q}, L$, перейдите от переменных $t, q, \dot{q}, L$ к каноническим переменным t, q, p, H и покажите, что при этом система уравнений Эйлера—Лагранжа перейдет в следующую систему уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad \dot{q}^i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i=1,\ldots,m).$$

Вопросы к экзамену

I семестр

Введение в анализ (число, функция, предел)

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Действительные числа. Ограниченные (сверху, снизу) числовые множества. Аксиома полноты и существование верхней (нижней) грани множества. Неограниченность множества натуральных чисел, принцип Архимеда и всюду плотность множества рациональных чисел.

2. Основные леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел $\mathbb{R}$ (вложенные отрезки, конечное покрытие, предельная точка).

3. Предел последовательности и критерий Коши его существования. Критерий существования предела монотонной последовательности.

4. Ряд и его сумма. Геометрическая прогрессия. Критерий Коши и необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Абсолютная сходимость.

5. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Теорема сравнения. Ряд $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

6. Предел функции. Основные базы предельного перехода. Определение предела функции при произвольной базе и его расшифровка в конкретных случаях. Бесконечно малые функции и их свойства. Сравнение финального поведения функций, асимптотические формулы и основные операции с символами $o(\cdot)$, $O(\cdot)$.

7. Взаимосвязь предельного перехода с арифметическими операциями и отношением порядка в $\mathbb{R}$. Предел $\sin x/x$ при $x\to 0$.

8. Предел композиции функций и монотонной функции. Предел $(1+1/x)^x$ при $x\to\infty$.

9. Критерий Коши существования предела функции.

10. Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (локальная ограниченность, сохранение знака, арифметические операции, непрерывность композиции). Непрерывность многочлена, рациональной функции и тригонометрических функций.

11. Глобальные свойства непрерывных функций (промежуточные значения, максимумы, равномерная непрерывность).

12. Разрывы монотонной функции. Теорема об обратной функции. Непрерывность обратных тригонометрических функций.

13. Закон движения, перемещение за малое время, вектор мгновенной скорости, траектория и касательная к ней. Определение дифференцируемости функции в точке. Дифференциал, его область определения и область значений. Единственность дифференциала. Производная вещественнозначной функции вещественного переменного и ее геометрический смысл. Дифференцируемость функций $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln|x|$, x^α.

14. Дифференцируемость и арифметические операции. Дифференцирование многочлена, рациональной функции, тангенса и котангенса.

15. Дифференциал композиции функций и обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.

16. Локальный экстремум функции. Необходимое условие внутреннего экстремума дифференцируемой функции (лемма Ферма).

17. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о конечном приращении (о среднем).

18. Формула Тейлора с остаточными членами в формах Коши и Лагранжа.

19. Ряд Тейлора. Тейлоровские разложения функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ (бином Ньютона).

20. Локальная формула Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано).

21. Взаимосвязь характера монотонности дифференцируемой функции и положительности ее производной. Достаточные условия наличия или отсутствия локального экстремума в терминах первой, второй и высших производных.

22. Правило Лопиталя.

23. Выпуклая функция. Дифференциальные условия выпуклости. Расположение графика выпуклой функции по отношению к касательной.

24. Общее неравенство Иенсена для выпуклой функции. Выпуклость (вогнутость) логарифма. Классические неравенства Коши, Юнга, Гёльдера и Минковского.

25. Преобразование Лежандра.

26. Комплексное число в алгебраической и тригонометрической записи. Сходимость последовательности комплексных чисел и ряда с комплексными членами. Критерий Коши. Абсолютная сходимость и достаточные признаки абсолютной сходимости ряда с комплексными членами. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

27. Круг и радиус сходимости степенного ряда. Определение функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ ($z\in\mathbb{C}$). Формула Эйлера и взаимосвязь элементарных функций.

28. Дифференциальные уравнения как математическая модель явления, примеры. Метод неопределенных коэффициентов и метод ломаных Эйлера.

29. Первообразная, основные общие приемы ее отыскания (почленное интегрирование слагаемых, интегрирование по частям, замена переменной). Первообразные основных элементарных функций.

II семестр

Интеграл (функции одной переменной)

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. Интеграл Римана на отрезке. Нижние и верхние суммы, их геометрический смысл, поведение при измельчении разбиения и взаимные оценки. Теорема Дарбу, верхний и нижний интегралы Дарбу и критерий интегрируемости по Риману вещественнозначной функции на отрезке(в терминах сумм колебаний). Примеры классов интегрируемых функций.

2. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману (формулировка). Множества меры нуль, их общие свойства, примеры. Пространство интегрируемых функций и допустимые операции над интегрируемыми функциями.

3. Линейность, аддитивность и общая оценка интеграла.

4. Оценки интеграла от вещественнозначной функции. Теорема о среднем (первая).

5. Интеграл с переменным верхним пределом, его свойства. Существование первообразной у непрерывной функции. Обобщенная первообразная и ее общий вид.

6. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной в интеграле.

7. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Формула Тейлора с интегральным остатком. Вторая теорема о среднем.

8. Аддитивная функция ориентированного промежутка и интеграл. Общая схема появления интеграла в приложениях, примеры: длина пути (и ее независимость от параметризации), площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, работа, энергия.

9. Интеграл Римана—Стилтьеса. Условия сведения к интегралу Римана. Дельта-функция Дирака и понятие обобщенной функции. Дифференцирование обобщенных функций и производная функции Хевисайда.

10. Понятие несобственного интеграла. Канонические интегралы. Критерий Коши и теорема сравнения для исследования сходимости несобственного интеграла. Интегральный признак сходимости ряда.

11. Метрическое пространство, примеры. Открытые и замкнутые подмножества. Окрестность точки. Индуцированная метрика, подпространство. Топологическое пространство. Окрестность точки, отделимость (аксиома Хаусдорфа). Топология, индуцируемая на подмножествах. Замыкание множества и описание относительно замкнутых подмножеств.

12. Компакт, его абсолютность. Замкнутость компакта и компактность замкнутого подмножества компакта. Вложенные компакты. Метрические компакты, ε-сеть. Критерий метрического компакта и его конкретизация в пространстве $\mathbb{R}^n$.

13. Полное метрическое пространство. Полнота $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ и пространства $C[a, b]$ непрерывных функций относительно равномерной сходимости.

14. Критерий непрерывности отображения топологических пространств. Сохранение компактности и связности при непрерывном отображении. Классические теоремы об ограниченности, максимуме и промежуточном значении для непрерывных функций. Равномерная непрерывность на метрическом компакте.

15. Норма (длина, модуль) вектора в векторном пространстве; важнейшие примеры. Пространство $L(X, Y)$ линейных непрерывных операторов и норма в нем. Непрерывность линейного оператора и конечность его нормы.

16. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал, его область определения и область значений. Координатная запись дифференциала отображения $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Соотношения между дифференцируемостью, непрерывностью и наличием частных производных.

17. Дифференцирование композиции функций и обратной функции. Координатная запись полученных законов применительно к различным случаям отображений $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

18. Производная по вектору и градиент. Геометрические и физические примеры использования градиента (уровни функций, градиентный спуск, касательная плоскость; потенциальные поля; уравнение Эйлера динамики идеальной жидкости, закон Бернулли, работа крыла).

19. Однородные функции и соотношение Эйлера. Метод размерностей.

20. Теорема о конечном приращении. Ее геометрический и физический смысл. Примеры приложений (достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных; условие постоянства функции в области).

21. Высшие производные и их симметричность.

22. Формула Тейлора.

23. Экстремумы функций (необходимые и достаточные условия внутреннего экстремума).

24. Сжимающие отображения. Принцип Пикара—Банаха неподвижной точки.

25. Теорема о неявной функции.

26. Теорема об обратной функции. Криволинейные координаты и выпрямления. Гладкая поверхность размерности k в $\mathbb{R}^n$ и касательная плоскость к ней. Способы задания поверхности и соответствующие им уравнения касательного пространства.

27. Теорема о ранге и зависимость функций.

28. Разложение диффеоморфизма в композицию простейших.

29. Условный экстремум (необходимый признак). Геометрическая, алгебраическая и физическая интерпретации метода Лагранжа.

30. Достаточный признак условного экстремума.

Дополнение 1

Математический анализ (вводная лекция для первого курса)

Два слова о математике

Математика — наука абстрактная. Например, она учит сложению, не спрашивая, считаем ли мы ворон, капитал или что-то еще. Поэтому математика одна из самых универсальных и общеупотребительных прикладных наук. В ней как науке, конечно, есть и еще много чего, почему к математике обычно относятся с уважением, например, она учит слышать аргумент и ценить истину.

Ломоносов считал, что математика ум в порядок приводит, а Галилей без обиняков сказал: «Великая книга природы написана языком математики». Подтверждения этому очевидны: все, кто желает читать эту книгу, изучают математику. Тут не только представители естественных наук или технических специальностей, но и гуманитарии. Например, на экономическом факультете МГУ есть кафедра математики, а в системе Академии наук есть Экономико-математический институт. Бытует даже мнение, что в науке столько от науки, сколько в ней математики. Хотя сказано слишком сильно, но в общем-то это довольно точное наблюдение.

Имея атрибуты языка, математика, конечно, не сводится к собственно языку (иначе ее изучали бы скорее филологи). Математика умеет не только перевести вопрос на математический язык, но обычно доставляет и метод решения сформулированной математической задачи.

Умение правильно поставить вопрос — большое искусство исследователя вообще и математика в частности.

Анри Пуанкаре — замечательный ученый, с именем которого студенты-математики встречаются почти в каждом математическом курсе, не без доли юмора подметил: «Математика — это искусство называть разные вещи одинаковыми именами». Например, точка — это и едва различимая в микроскоп частица, и самолет на планшете диспетчера, и город на карте, и планета на небосводе, и вообще все то, размерами чего можно пренебречь в рассматриваемых масштабах.

Итак, абстрактные понятия математики и их взаимосвязи, подобно числу, обслуживают громадную сферу конкретных явлений и закономерностей.

Число, функция, закон

К чудесам люди привыкают быстро и «Не может быть???» вскоре незаметно превращается в «Не может быть иначе!!!».

Мы уже настолько свыклись с тем, что $2+3=5$, что не видим тут никакого чуда. А ведь тут не сказано, что два яблока и еще три яблока будет пять яблок, а сказано, что это так и для яблок, и для слонов, и для всего прочего. Это мы уже отметили.

Потом мы свыкаемся с тем, что $a+b=b+a$, где теперь уже символы a и b могут означать и 2, и 3, и любые целые числа.

Функция, или функциональная зависимость, — это очередное математическое чудо. Оно сравнительно молодо: ему, как научному понятию, всего три с небольшим сотни лет, хотя в природе и даже в быту мы с ним сталкиваемся никак не реже, чем со слонами или даже с теми же яблоками.

Каждая наука или область человеческой деятельности относится к какой-то конкретной сфере объектов и их взаимосвязей. Эти связи, зависимости, законы математика описывает и изучает в отвлеченном и потому общеполезном виде, объединяя их термином *функция* или *функциональная зависимость* $y=f(x)$ *состояния* (значения) *одной величины* (y) *от состояния* (значения) *другой* (x).

Особенно важно то, что теперь уже речь не о постоянных, а о переменных величинах x и y, связанных законом f. Функция приспособлена к описанию развивающихся процессов и явлений, к описанию характера изменения их состояний и вообще к описанию зависимостей переменных величин.

Иногда закон f связи известен (дан) (например, государством или технологическим процессом) и тогда в условиях действия закона f мы, например, часто стараемся так выбрать стратегию, т. е. состояние (значение) доступной нашему выбору независимой переменной x, чтобы получить наиболее благоприятное для нас в том или ином отношении состояние (значение) нужной нам величины y (учитывая, что $y=f(x)$).

В других случаях (и это даже интереснее) ищется сам закон природы f, связывающий явления. И хотя это дело конкретных наук, математика и здесь бывает удивительно полезна потому, что часто по казалось бы очень малой исходной конкретной информации, которой располагают те или иные профессионалы, она, подобно Шерлоку Холмсу, способна сама дальше найти закон f (решая или исследуя некоторые новые, так называемые *дифференциальные уравнения*, которых не было у древних математиков и которые возникли с появлением дифференциального и интегрального исчисления на рубеже XVII—XVIII веков усилиями Ньютона, Лейбница, их предшественников и последователей).

Итак, открываем букварь современной математики.

Математическая модель явления (дифференциальное уравнение, или учимся писать)

Одним из наиболее ярких и долго сохраняющихся впечатлений от школьной математики, конечно, является маленькое чудо, когда что-то вам неизвестное вы заколдовываете буквой x или там буквами x, y, потом пишете что-то вроде $\cdot x = b$ или какую-нибудь систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x - y = 2, \end{cases}$$

после чего парой математических заклинаний открываете то, что было неизвестно: $x = 1$, $y = -1$.

Давайте попробуем научиться хотя бы писать уравнения в новой ситуации, когда нам надо найти не какое-то одно число, а неизвестный нам закон связи важных для нас переменных величин, т. е. когда мы ищем нужную функцию. Рассмотрим некоторые примеры.

Для определенности мы сначала будем говорить о биологии (размножении микроорганизмов, росте биомассы, экологических ограничениях и т. п.), но будет ясно, что при желании все это можно перенести в другие сферы и говорить о росте капитала, ядерной реакции, атмосферном давлении и так далее, и тому подобное.

Для разминки полушуточный вопрос:

Простейший организм, который ежесекундно размножается делением пополам (удвоением), положили в пустой стакан. Через одну минуту стакан наполнился. За какое время наполнится пустой стакан, если в него положить не один, а два этих простейших организма?

Теперь ближе к делу и обещанным примерам.

1. Известно, что в благоприятных условиях скорость размножения микроорганизмов, т. е. скорость роста биомассы, пропорциональна (с некоторым коэффициентом пропорциональности k) наличному количеству биомассы. Надо найти закон $x = x(t)$ изменения биомассы во времени, если известно ее начальное состояние $x(0) = x_0$.

По нашим представлениям, знай мы сам закон $x = x(t)$ изменения величины x, мы бы знали и скорость ее изменения в любой момент времени t. Не вдаваясь пока в обсуждение того, как именно по $x(t)$ находить эту скорость, обозначим ее через $x'(t)$. Поскольку функция $x' = x'(t)$ порождается функцией $x = x(t)$, ее в математике называют *производной* от функции $x = x(t)$. (Как находить производную функции и многому другому учит дифференциальное исчисление. Оно впереди.)

Теперь можно коротко записать, что нам дано:

$$x'(t) = k \cdot x(t), \tag{1}$$

причем $x(0) = x_0$. Хотим же мы найти саму зависимость $x = x(t)$.

Мы написали первое *дифференциальное уравнение* (1). Вообще, дифференциальными называют уравнения, содержащие производные (некоторые оговорки и уточнения здесь пока неуместны). Кстати, для упрощения текста в записи уравнения независимую переменную часто опускают. Например, уравнение (1) пишут в виде $x' = k \cdot x$. Если бы искомая функция была обозначена буквой f или u, то то же уравнение имело бы вид $f' = k \cdot f$ или $u' = k \cdot u$ соответственно.

Уже сейчас ясно, что если мы научимся не только писать, но и решать или исследовать дифференциальные уравнения, то мы сможем многое узнать и предвидеть. Именно поэтому сакраментальная фраза Ньютона, относившаяся к новому исчислению, звучала примерно так: «Полезно решать дифференциальные уравнения».

Упражнение. Свяжите написанное уравнение с рассмотренным примером размножения в стакане. Каковы тут коэффициент k, начальное условие $x(0) = x_0$ и сама зависимость $x = x(t)$?

Попробуем по горячим следам записать уравнением еще несколько конкретных вопросов.

2. Допустим теперь, как это всегда и случается, что еды не бесконечно много и среда может прокормить не более чем M особей или биомассу, не превышающую значения M. Тогда, надо полагать, скорость роста биомассы будет уменьшаться, например, пропорционально остающимся возможностям среды. За меру остающихся возможностей можно взять разность $M - x(t)$ или лучше взять безразмерную величину $1 - x(t)/M$. Этой ситуации вместо уравнения (1), очевидно, отвечает уравнение

$$x' = k \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{M}\right), \tag{2}$$

которое переходит в (1) на стадии, когда $x(t)$ еще много меньше M. Наоборот, когда $x(t)$ близко к M, скорость роста становится близкой к нулю, т. е. рост прекращается, что естественно. Как именно выглядит закон $x = x(t)$ в этом случае, мы найдем позже, овладев кое-какими навыками.

Упражнение. Тело, имевшее начальную температуру T_0, остывает в среде, имеющей постоянную температуру C. Пусть $T = T(t)$ закон изменения температуры тела во времени. Напишите уравнение, которому должна удовлетворять эта функция, считая, что скорость остывания пропорциональна разности температур тела и среды.

Скорость $v(t)$ изменения величины $x(t)$ мы назвали производной функции $x = x(t)$ и обозначили $x'(t)$. Ускорение $a(t)$, как известно, это скорость изменения скорости $v(t)$. Значит $a(t) = v'(t) = (x')'(t)$, т. е. по отношению к исходной функции это производная от ее производной. Она называется второй производной исходной функции и часто обозначается как $x''(t)$. (Другие обозначения появятся позже.) Если мы умеем находить первую производную, то, повторяя процедуру, можно определить производную $x^{(n)}(t)$ любого порядка n от исходной функции $x = x(t)$.

3. Пусть, например, $x = x(t)$ — закон движения точки массы m, т. е. координаты положения точки как функции времени. Для простоты будем считать, что движение происходит вдоль прямой (горизонтальной или вертикальной), тогда координата только одна.

Классический закон Ньютона $m \cdot a = F$, связывающий силу, действующую на точку массы m, с вызванной этим действием ускорением точки, теперь можно записать в виде

$$m \cdot x''(t) = F(t) \tag{3}$$

или, сокращенно, $m \cdot x'' = F$.

Если действующая сила $F(t)$ известна, то соотношение $m \cdot x'' = F$ можно рассматривать как дифференциальное уравнение (второго порядка) относительно функции $x(t)$.

Например, если F — это сила тяжести у поверхности Земли, то $F = mg$, где g — ускорение свободного падения. В этом случае наше уравнение приобретает вид $x''(t) = g$. Как вы знаете, еще Галилей нашел, что в свободном падении $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$, где x_0 — начальное положение, а v_0 — начальная скорость точки.

Чтобы хотя бы проверить, что указанная функция удовлетворяет уравнению, уже надо уметь дифференцировать функцию, т. е. находить ее производную. В нашем случае нужна даже вторая производная.

Чуть ниже мы приведем табличку некоторых функций и их производных. Вывод ее будет сделан позже во время систематического изложения дифференциального исчисления. А сейчас попробуйте сами сделать следующее.

Упражнение. Напишите уравнение свободного падения в атмосфере. В этом случае возникает сила сопротивления. Считайте ее пропорциональной первой (или второй) степени скорости движения. (Скорость свободного падения не растет до бесконечности именно ввиду присутствия силы сопротивления.)

Итак, надо бы научиться вычислять производные.

Скорость, производная, дифференцирование

Рассмотрим сначала знакомую ситуацию, где мы можем обратиться к нашей интуиции (и сменим обозначение $x(t)$ на $s(t)$).

Пусть точка движется вдоль числовой оси, $s(t)$ — ее координата в момент времени t, а $v(t) = s'(t)$ — ее скорость в тот же момент t. За промежуток времени h, прошедший после момента t, точка сместится в положение $s(t+h)$. По нашим представлениям о скорости, величина $s(t+h) - s(t)$ перемещения точки за малый промежуток времени h, прошедший после момента t, и ее скорость $v(t)$ в момент t связаны соотношением

$$s(t+h) - s(t) \approx v(t) \cdot h \tag{4}$$

или, иначе, $v(t) \approx \frac{s(t+h)-s(t)}{h}$, и это приближенное равенство тем точнее, чем меньше промежуток времени h, прошедший после момента t.

Значит, надо полагать,

$$v(t) := \lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h},$$

т. е. мы определяем $v(t)$ как *предел* отношения приращения функции к приращению ее аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Теперь нам ничего не стоит, копируя этот пример, дать общее определение значения $f'(x)$ *производной* f' *функции* f *в точке* x:

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{5}$$

т. е. $f'(x)$ есть предел отношения *приращения* $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ *функции* к *приращению* $\Delta x = (x+h) - x$ *ее аргумента*, когда последнее стремится к нулю.

Соотношение (5) можно переписать в подобной (4) другой и, быть может, самой удобной и полезной форме:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + (h), \tag{6}$$

где (h) — некоторая *величина* (поправка), *малая по сравнению с* h *при стремлении* h *к нулю*. (Последнее означает, что отношение $(h)/h$ стремится к нулю при стремлении h к нулю.)

Проделаем несколько пробных расчетов.

1. Пусть f — постоянная, т. е. $f(x) \equiv c$. Тогда, очевидно, $\Delta f = f(x+h) - f(x) \equiv 0$ и $f'(x) \equiv 0$, что естественно: скорость изменения равна нулю, если изменений нет.

2. Если $f(x) = x$, то $f(x+h) - f(x) = h$, поэтому $f'(x) \equiv 1$. А если $f(x) = kx$, то $f(x+h) - f(x) = kh$ и $f'(x) \equiv k$.

3. Кстати, тут можно сделать два очевидных, но весьма полезных общих наблюдения: если функция f имеет своей производной f', то функция cf, где c — числовой множитель, имеет своей производной cf', т. е. $(cf)' = cf'$; в этом же смысле $(f+g)' = f' + g'$, т. е. производная суммы функций равна сумме их производных, если последние определены.

4. Пусть $f(x) = x^2$. Тогда $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2 = 2xh + o(h)$, поэтому $f'(x) = 2x$.

5. Аналогично, если $f(x) = x^3$, то

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3 = 3x^2h + (h),$$

поэтому $f'(x) = 3x^2$.

6. Теперь понятно, что вообще, если $f(x) = x^n$, то поскольку

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + (h),$$

имеем $f'(x) = nx^{n-1}$.

7. Значит, если имеем многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

то

$$P'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}.$$

Пробное прощупывание определения производной сделали. Разрабатывать и осваивать технику и практику дифференцирования надо будет отдельно. А сейчас для примера и вашего сведения приведем небольшую табличку функций и их производных. Потом мы ее получим, расширим и уточним.

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$\ldots$	$f^{(n)}(x)$
a^x	$a^x \ln a$	$a^x \ln^2 a$	$\ldots$	$a^x \ln^n a$
e^x	e^x	e^x	$\ldots$	e^x
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\ldots$	$\sin(x + n\pi/2)$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\ldots$	$\cos(x + n\pi/2)$
$(1+x)^\alpha$	$\alpha(1+x)^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$	$\ldots$	?
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$	$\ldots$	?

Здесь e — число ($e = 2{,}7\ldots$), такое же вездесущее в анализе, как π в геометрии. Логарифм по основанию e вместо $\log_e$ часто обозначают через ln, что и отражено во второй строчке таблицы. Использование логарифмов по этому основанию, называемых натуральными логарифмами, упрощает многие формулы (что, например, видно из сравнения второй и третьей строк таблицы).

Упражнение. Считая, что столбец f' правильный, проверьте столбец $f^{(n)}$ и дозаполните таблицу, сняв вопросы.

После этого вычислите в каждом случае значение $f^{(n)}(0)$.

Упражнение. Попробуйте найти производную функции $f(x) = e^{kx}$ и решение уравнения (1). Выясните, за какое время начальное состояние x_0 (капитала, биомассы или еще чего-то, подчиняющегося этому уравнению) удвоится.

Высшие производные, зачем?

Замечательным и весьма полезным развитием центрального соотношения (6), которое можно переписать в виде

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + (h), \qquad (7)$$

является следующая формула (формула Тейлора)

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n + (h^n). \qquad (8)$$

Если положить здесь $x = 0$, а потом букву h заменить буквой x, то получим

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + (x^n). \qquad (9)$$

Например, если $f(x)=(1+x)^\alpha$, то вслед за Ньютоном найдем, что

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+(x^n). \qquad (10)$$

Иногда в формуле (9) можно продолжить суммирование до бесконечности, ликвидировав при этом поправочный член.

В частности,

$$e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots, \qquad (11)$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\ldots+(-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}+\ldots, \qquad (12)$$

$$\sin x = \frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots+(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\ldots \qquad (13)$$

Мы получили представление сравнительно сложных функций в виде суммы (бесконечной суммы — *ряда*) простейших функций, допускающих вычисления обычными действиями арифметики. Конечные куски этих сумм — полиномы. Они дают хорошие приближения раскладываемых в такой ряд функций.

Снова к числу

Мы все время молчаливо предполагали, что имеем дело с функциями, определенными на множестве *вещественных чисел*. Но правые части равенств (11), (12), (13) имеют смысл и при подстановке вместо *x комплексного числа* $z=x+iy$. Тогда мы сможем сказать, что бы значило e^z, $\cos z$, $\sin z$.

Упражнение. Откройте вслед за Эйлером связывающую элементарные функции формулу $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ и вытекающее из нее замечательно красивое соотношение $e^{i\pi}+1=0$, связывающее основные константы математических наук (арифметики, алгебры, анализа, геометрии и даже логики).

И что теперь?

Как говорится, «на пальцах», без подробностей и обоснований вам дано некоторое представление о дифференциальном исчислении — ядре первого семестра курса математического анализа. По дороге мы встретились с понятиями числа, функции, предела, производной, ряда …, которых пока коснулись только поверхностно.

Теперь, когда вы знаете, зачем что нужно, придется на время погрузиться в подробное, тщательное рассмотрение всех этих понятий и объектов. Понимание их необходимо для профессионального математика. Пользователю это не обязательно. Большинство водит автомобиль, не открывая капот. Но это только потому, что кто-то хорошо разбирается в двигателях и сделал надежно работающий аппарат.

Дополнение 2

Начальные сведения о численных методах решения уравнений

Корни уравнений и неподвижные точки отображений

Заметим, что уравнение $f(x)=0$, очевидно, равносильно уравнению $\alpha(x)f(x)=0$, если $\alpha(x)\neq 0$. Последнее уравнение, в свою очередь, равносильно соотношению $x=x-\alpha(x)f(x)$, в котором x можно интерпретировать как неподвижную точку отображения $\varphi(x):=x-\alpha(x)f(x)$.

Таким образом, отыскание корней уравнений равносильно отысканию неподвижных точек соответствующих отображений.

Сжимающие отображения и итерационный процесс

Отображение $\varphi\colon X\to X$ множества $X\subset\mathbb{R}$ в себя будем называть *сжимающим отображением*, если существует такое число q, $0\leqslant q<1$, что для любой пары точек x', x'' и их образов $\varphi(x')$, $\varphi(x'')$ выполняется неравенство $|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant q|x'-x''|$.

Ясно, что это определение без изменений распространяется на отображения любых множеств, где определено расстояние $d(x',x'')$ между точками; в нашем случае $d(x',x'')=|x'-x''|$.

Ясно также, что сжимающее отображение непрерывно и может иметь не более одной неподвижной точки.

Пусть $\varphi\colon[a,b]\to[a,b]$ — сжимающее отображение отрезка $[a,b]$ в себя. Покажем, что *итерационный процесс* $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, начинающийся в любой точке x_0 этого отрезка, приводит к точке $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, неподвижной для отображения φ.

Заметим сначала, что

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant q|x_n-x_{n-1}|\leqslant\ldots\leqslant q^n|x_1-x_0|,$$

поэтому для любых натуральных m,n, таких что $m>n$, вставляя промежуточные точки и используя неравенство треугольника, получаем оценку

$$|x_m-x_n|\leqslant|x_m-x_{m-1}|+\ldots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant(q^{m-1}+\ldots+q^n)|x_1-x_0|<\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0|,$$

из которой следует, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная (последовательность Коши).

Значит, по критерию Коши она сходится к некоторой точке x отрезка $[a, b]$. Эта точка — неподвижная точка отображения $\varphi\colon [a, b] \to [a, b]$, ибо переход к пределу при $n \to \infty$ в соотношении $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ дает равенство $x = \varphi(x)$.

(Здесь мы воспользовались тем очевидным фактом, что сжимающее отображение непрерывно; кстати, оно даже равномерно непрерывно.)

Переход к пределу при $m \to \infty$ в соотношении

$$|x_m - x_n| < \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

дает оценку

$$|x - x_n| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

величины уклонения приближения x_n от неподвижной точки x отображения φ.

Метод касательных (метод Ньютона)

Доказывая теорему о том, что непрерывная на отрезке вещественнозначная функция, принимающая на концах отрезка значения разных знаков, имеет на этом отрезке по крайней один нуль (точку, где $f(x) = 0$), мы предъявили и простейший (но зато универсальный) алгоритм отыскания этой точки (деление отрезка пополам). Скорость сходимости тут порядка 2^{-n}.

В случае дифференцируемой выпуклой функции можно пользоваться значительно более эффективным в смысле скорости сходимости методом, предложенным еще Ньютоном.

Строим касательную к графику данной функции f в некоторой точке $(x_0, f(x_0))$, где $x_0 \in [a, b]$. Находим точку x_1, где эта касательная пересекает ось абсцисс. Повторяя процесс, получаем последовательность $\{x_n\}$ точек, которые быстро сходятся к точке x, в которой $f(x) = 0$. (Можно проверить, что каждая следующая итерация приводит к удвоению верных значащих цифр приближения к x.)

Аналитически, как легко проверить (проверьте!), метод касательных сводится к итерационному процессу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Например, решение уравнения $x^m - a = 0$, т. е. вычисление $\sqrt[m]{a}$, при этом сводится к итерационному процессу

$$x_{n+1} = \frac{1}{m}\left((m-1)x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}}\right).$$

В частности, для вычисления $\sqrt{a}$ методом касательных получаем

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Метод Ньютона, как видно из приведенных формул, ищет неподвижные точки отображения $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Оно является специальным случаем рассмотренного в самом первом разделе отображения $\varphi(x) = x - \alpha(x)f(x)$ и получается из него при $\alpha(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

Заметим, что в общем случае отображение $\varphi(x) = x - \alpha(x)f(x)$ и даже отображение $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, участвующее в методе касательных, не обязано быть сжимающим. Более того, как показывают простые примеры, в случае общей функции f даже метод касательных не всегда приводит к сходящемуся итерационному процессу.

Если же в выражении $\varphi(x) = x - \alpha(x)f(x)$ функцию $\alpha(x)$ удается выбрать так, что на рассматриваемом отрезке $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$, то отображение $\varphi\colon [a, b] \to [a, b]$, конечно, будет сжимающим.

В частности, если в качестве α взять постоянную $\frac{1}{f'(x_0)}$, то получим

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} \quad \text{и} \quad \varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}.$$

Если производная функции f непрерывна по крайней мере в точке x_0, то в некоторой ее окрестности будем иметь

$$|\varphi'(x)| = \left|1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}\right| \leqslant q < 1.$$

Если отображение φ переводит эту окрестность в себя (что не всегда так), то стандартный итерационный процесс, индуцированный сжимающим отображением φ этой окрестности, приведет к единственной в этой окрестности неподвижной точке отображения φ, в которой исходная функция f обращается в нуль.

Дополнение 3

Преобразование Лежандра
(первое обсуждение)

Начальное определение преобразования Лежандра и общее неравенство Юнга

Преобразованием Лежандра функции f переменной x называется новая функция f^* новой переменной x^*, определяемая соотношением

$$f^*(x^*) := \sup_x (x^*x - f(x)), \tag{1}$$

где верхняя грань берется по переменной x при фиксированном значении x^*.

Упражнения. 1. Проверьте, что функция f^* выпукла на своей области определения.

2. Нарисуйте график функции f, прямую x^*x и укажите геометрический смысл величины $f^*(x^*)$.

3. Найдите $f^*(x^*)$, когда $f(x) = |x|$ и когда $f(x) = x^2$.

4. Заметьте, что из (1), очевидно, следует, что

$$x^*x \leqslant f^*(x^*) + f(x) \tag{2}$$

при любых значениях аргументов x^*, x из областей определения функций f^* и f соответственно. Соотношение (2) обычно называется *общим неравенством Юнга* или *неравенством Юнга—Фенхеля*, а функцию f^*, например в выпуклом анализе, часто называют *двойственной по Юнгу* к функции f.

Конкретизация определения в случае выпуклых функций

Если бы верхняя грань, фигурирующая в определении (1), достигалась в некоторой внутренней точке x области определения функции f, а сама эта функция была бы гладкой (или по крайней мере дифференцируемой), то мы нашли бы, что

$$x^* = f'(x) \tag{3}$$

и при этом

$$f^*(x^*) = x^*x - f(x) = xf'(x) - f(x). \tag{4}$$

Тем самым в этом случае преобразование Лежандра конкретизируется в виде равенств (3), (4), из которых первое дает аргумент x^*, а второе — значение $f^*(x^*)$ функции f^* — преобразования Лежандра функции f. (Заметим, что оператор $xf'(x) - f(x)$ встречался уже у Эйлера.)

Если функция f к тому же еще и выпукла, то,

во-первых, условие (3) выделит не просто локальный экстремум, а локальный максимум (проверьте!), который в этом случае, очевидно, будет и абсолютным максимумом;

во-вторых, ввиду монотонного возрастания производной строго выпуклой функции уравнение (3) для такой функции однозначно разрешимо относительно x.

Если уравнение (3) допускает явное решение $x = x(x^*)$, то, подставляя его в (4), получим явное выражение $f^*(x^*)$.

Упражнения. 1. Найдите преобразование Лежандра функции $\frac{1}{\alpha}x^\alpha$ при $\alpha > 1$ и получите классическое неравенство Юнга

$$ab \leqslant \frac{1}{\alpha}a^\alpha + \frac{1}{\beta}b^\beta, \tag{5}$$

где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

2. Какова область определения преобразования Лежандра гладкой строго выпуклой функции f, имеющей асимптотами прямые ax и bx при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ соответственно?

3. Найдите преобразование Лежандра функции e^x и докажите неравенство

$$xt \leqslant e^x + t \ln \frac{t}{e}. \tag{6}$$

Инволютивность преобразования Лежандра выпуклой функции

Как уже было отмечено, соотношение (2) или эквивалентное ему неравенство

$$f(x) \geqslant xx^* - f^*(x^*) \tag{7}$$

выполнено при любых значениях аргументов x, x^* из областей определения функций f и f^* соответственно.

Вместе с тем, как показывают формулы (3), (4), если x и x^* связаны соотношением (3), то последнее неравенство (7) обращается в равенство, по крайней мере в случае гладкой строго выпуклой функции f. Вспоминая определение (1) преобразования Лежандра, заключаем, что в этом случае

$$(f^*)^* = f. \tag{8}$$

Итак, преобразование Лежандра гладкой строго выпуклой функции *инволютивно*, т. е. повторное его применение приводит к исходной функции.

Упражнения. 1. Верно ли, что $f^{**}=f$ для любой гладкой функции f?

2. Верно ли, что $f^{***}=f^*$ для любой гладкой функции f?

3. Дифференцируя соотношение (4), с учетом (3) и при условии, что $f''(x)\neq 0$, покажите, что $x=f^{*\prime}(x^*)$ и, следовательно, $f(x)=xx^*-f^*(x^*)$ (инволютивность).



4. Проверьте, что в соответствующих точках x, x^*, связанных равенством (3), $f''(x)=\frac{1}{(f^*)''(x^*)}$ и $f^{(3)}(x)=-\frac{(f^*)^{(3)}(x^*)}{((f^*)'')^2(x^*)}$.

5. Семейство прямых $px+p^4$, зависящих от параметра p, является семейством касательных к некоторой кривой (*огибающей* этого семейства). Найдите уравнение этой кривой.

Заключительные замечания и комментарий

В рамках разговора о выпуклых функциях мы дали начальные представления о преобразовании Лежандра на уровне функций одной переменной. Однако уже они облегчат восприятие этого преобразования и работу с ним в ряде важных более общих случаях применения преобразования Лежандра в теоретической механике, термодинамике, уравнениях математической физики, вариационном исчислении, выпуклом анализе, контактной геометрии, … с которыми многим еще предстоит иметь дело.

Там будут проанализированы различные детали и возможные развития самого понятия преобразования Лежандра. Здесь же добавим только следующее. Как показывает равенство (3), аргументом преобразования Лежандра является производная или, равносильно тому, дифференциал исходной функции.

Если бы аргумент x был, например, вектором линейного пространства X со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то обобщением определения (1), естественно, было бы соотношение

$$f^*(x^*):=\sup_x(\langle x^*,x\rangle-f(x)). \tag{9}$$

Если под x^* вообще понимать линейную функцию на пространстве X, т. е. считать, что x^* — элемент двойственного X пространства X^* и действие x^* на вектор x, т. е. $x^*(x)$, по-прежнему обозначать через $\langle x^*,x\rangle$, то определение (9) сохранится и будет совсем ясно, что если функция f была определена на области пространства X, то ее преобразование Лежандра f^* оказывается определенным в области пространства X^*, двойственного пространству X.

Дополнение 4

Интеграл Римана—Стилтьеса, дельта-функция и идея обобщенных функций (начальные представления)

Интеграл Римана—Стилтьеса

Конкретная задача и наводящие соображения. Мы рассмотрели целый ряд примеров эффективного использования интеграла при вычислении площадей, объемов тел вращения, длин путей, работы сил, энергии... Обнаружили потенциальность гравитационного поля и подсчитали вторую космическую скорость для Земли. Располагая аппаратом интегрального исчисления, убедились, например, в том, что длина пути не зависит от его параметризации. Заодно отметили, что некоторые вычисления (например, длины эллипса) связаны с неэлементарными функциями (в данном случае с эллиптическими).

Все перечисленные выше величины (длины, площади, объемы, работа...), как и сам интеграл Римана, аддитивны. Мы знаем, что любая аддитивная функция $I[\alpha,\beta]$ ориентированного промежутка $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ имеет вид $I[\alpha,\beta]=F(\beta)-F(\alpha)$, если положить $F(x)=I[a,x]+C$. В частности, можно взять произвольную функцию F и по ней построить аддитивную функцию $I[\alpha,\beta]=F(\beta)-F(\alpha)$, считая $I[a,x]=F(x)$. Если функция F разрывна на отрезке $[a,b]$, то там разрывна и функция $I[a,x]$. Но тогда она не может быть представлена в виде интеграла Римана $\int\limits_a^x p(t)\,dt$ ни от какой интегрируемой по Риману функции (плотности p), — к такой интеграл, как мы знаем, непрерывен по x.

Пусть, например, отрезок $[-1,1]$ — нить, в середине которой закреплена бусинка массы 1. Если $I[\alpha,\beta]$ — масса, попавшая в промежуток $[\alpha,\beta]\subset$ $\subset[-1,1]$, то функция $I[-1,x]$ равна нулю, пока $-1\leqslant x<0$, и равна единице, когда $0\leqslant x\leqslant 1$. Если попытаться описать такое распределение массы на отрезке в терминах плотности распределения (т. е. предела отношения массы, попавшей в окрестность точки, к величине окрестности, когда последняя стягивается к точке), то мы должны были бы считать, что $p(x)=0$ при $x\neq 0$ и $p(x)=+\infty$ при $x=0$. Физики, а теперь и все, вслед за Дираком называют эту «функцию» (такую плотность распределения) дельта-функцией, обозначают ее через δ и пишут, что $\int\limits_\alpha^\beta \delta(x)\,dx=1$, если $\alpha<0<\beta$ и $\int\limits_\alpha^\beta \delta(x)\,dx=0$, если $\alpha<\beta<0$ или если $0<\alpha<\beta$, каковы бы ни были числа α и β.

Разумеется, интеграл, понимаемый традиционно, например по Риману, здесь не имеет смысла (уже по одному тому, что под интегралом стоит неограниченная «функция»). Вольное употребление символа интеграла здесь — всего-навсего замена аддитивной функции $I[\alpha, \beta]$, рассмотренной выше, когда мы говорили о бусинке на нитке.

Пример (центр масс). Вспомним фундаментальное уравнение $m\ddot{r} = F$ движения точки массы m под действием силы F, где r — радиус-вектор точки. Если имеется система из n материальных точек, то для каждой из них имеется свое равенство $m_i\ddot{r}_i = F_i$. Суммируя эти равенства, получаем соотношение $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\ddot{r}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i$, которое можно переписать в виде $M \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M}\ddot{r}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ или в форме $M\ddot{r}_M = F$, где $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$, $F = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ и $r_M = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M} r_i$. То есть если совокупную массу системы поместить в точку пространства, радиус-вектор которой $r_M = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M} r_i$, то под воздействием силы $F = \sum\limits_{i=1}^{n} F_i$ она будет двигаться согласно закону Ньютона, какими бы сложными ни были взаимные движения отдельных частей системы.

Точка пространства, радиус-вектор которой $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{m_i}{M} r_i$ мы нашли, называется *центром масс системы материальных точек*.

Пусть теперь перед нами стоит задача найти центр масс материального тела, т. е. области D пространства, в которой как-то распределена масса. Пусть в элементе объема dv сосредоточена масса dm, и пусть M — общая масса тела D. Тогда, надо полагать, $M = \int\limits_D dm$, а центр масс надо бы находить по формуле $\frac{1}{M} \int\limits_D r\, dm$, где r — радиус-вектор элемента массы dm.

По объемам мы пока интегрировать не умеем, поэтому рассмотрим одномерный случай, который тоже вполне содержателен. Итак, вместо области D рассмотрим отрезок $[a, b]$ координатной оси $\mathbb{R}$.

Тогда $M = \int\limits_a^b dm$, а центр масс надо бы находить по формуле $\frac{1}{M} \int\limits_a^b x\, dm$, где x — координата элемента массы dm, который поэтому можно написать и поточнее как $dm(x)$.

Смысл написанного, по-видимому, должен быть следующим. Берем разбиение P отрезка $[a, b]$ с какими-то отмеченными точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Отрезку $[x_{i-1}, x_i]$ отвечает масса Δm_i. Составляем суммы $\sum\limits_i \Delta m_i$, $\sum\limits_i \xi_i \Delta m_i$ и, переходя к пределу, когда параметр $\lambda(P)$ разбиения стремится к нулю, находим соответственно то, что обозначено как $\int\limits_a^b dm$ и $\int\limits_a^b x\, dm$.

Мы приходим к следующему обобщению интеграла Римана.

Определение интеграла Римана—Стилтьеса. Пусть f и g — функции, вещественно-, комплексно- или векторнозначные на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Пусть $(P, \xi) = (a = x_0 \leqslant \xi_1 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant \xi_n \leqslant x_n = b)$ — разбиение этого отрезка с отмеченными точками и параметром $\lambda(P)$. Составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i,$$

где $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$.

Интегралом Римана—Стилтьеса функции f по функции g на отрезке $[a, b]$ называется величина

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i, \tag{1}$$

если указанный предел существует.

В частности, когда $g(x) = x$, мы возвращаемся к стандартному интегралу Римана.

Случай сведения интеграла Римана—Стилтьеса к интегралу Римана. Отметим также, что если функция g гладкая, а f — функция, интегрируемая по Риману на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx, \tag{2}$$

т. е. в этом случае вычисление интеграла Римана—Стилтьеса сводится к вычислению интеграла Римана от функции fg' на рассматриваемом отрезке.

В самом деле, пользуясь гладкостью функции g и теоремой о среднем, перепишем сумму, стоящую в равенстве (1) справа, в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta g_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\tilde{\xi}_i)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g'(\tilde{\xi}_i) - g'(\xi_i))\Delta x_i.$$

В силу равномерной непрерывности функции g' на отрезке $[a, b]$ и ограниченности функции f, последняя сумма стремится к нулю при $\lambda(P) \to 0$. Предпоследняя сумма есть обычная интегральная сумма для интеграла, стоящего в (2) справа. В силу сделанных предположений о функциях f и g, функция fg' интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Поэтому указанная сумма при $\lambda(P) \to 0$ стремится к значению этого интеграла, что и завершает доказательство равенства (2).

Задача. Мы провели доказательство, используя теорему о среднем, справедливую для вещественнозначных функций. Используя теорему о конечном приращении, проведите доказательство для векторнозначных (например, комплекснозначных) функций.

Функция Хевисайда и пример вычисления интеграла Римана—Стилтьеса. *Функция Хевисайда* $H\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определяется соотношениями $H(x)=0$ при $x<0$ и $H(x)=1$ при $0\leqslant x$.

Подсчитаем интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dH(x)$. По определению (1) составим сумму $\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta H_i=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)(H(x_i)-H(x_{i-1}))$. В силу определения функции Хевисайда эта сумма, очевидно, равна нулю, если отрезок $[a,b]$ не содержит точки 0, и равна $f(\xi_i)$, если точка 0 попала на некоторый отрезок $[x_{i-1},x_i]$ (точнее, внутрь него или в его конец x_i). В первом случае интеграл, конечно, равен нулю.

Во втором случае при $\lambda(P)\to 0$ точка $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ стремится к 0, поэтому если функция f непрерывна в 0, то пределом рассматриваемых сумм будет величина $f(0)$.

Если же функция f разрывна в 0, то малым изменением значения ξ_i можно заметно менять значение $f(\xi_i)$ и, значит, интегральные суммы не будут иметь предела при $\lambda(P)\to 0$.

Ясно, что последнее наблюдение имеет общий характер: совпадение точек разрыва функций f и g, участвующих в интеграле Римана—Стилтьеса (1), неизбежно ведет к отсутствию предела, если такая точка оказалась внутри отрезка интегрирования.

Итак, проведенный подсчет показывает, что если, например, φ — функция класса $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, т. е. заданная на всей прямой непрерывная вещественнозначная функция, тождественно равная нулю вне некоторого ограниченного множества, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dH(x)=\varphi(0). \tag{3}$$

Обобщенные функции

Дельта-функция Дирака — эвристическое описание. Как уже было отмечено выше, физики, и не только они, вслед за Дираком используют дельта-функцию δ. Эта «функция» равна нулю всюду, кроме начала координат, где она бесконечна. Но вместе с тем (и это главное)

$$\int\limits_\alpha^\beta \delta(x)\,dx=1,\quad \text{если } \alpha<0<\beta,$$

и

$$\int\limits_\alpha^\beta \delta(x)\,dx=0,\quad \text{если } \alpha<\beta<0 \text{ или если } 0<\alpha<\beta,$$

каковы бы ни были числа α и β.

Естественно считать, что умножение подынтегральной функции на число приводит к умножению интеграла на это же число. Но тогда если некоторая функция φ непрерывна в начале координат, то, учитывая, что она почти постоянна в малой окрестности $U(0)$ начала координат, а интеграл $\int\limits_{U(0)} \delta(x)\,dx = 1$, заключаем, что должно быть

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\delta(x)\,dx = \varphi(0). \tag{4}$$

Сравнивая соотношения (2), (3) и (4) и продолжая эту смелую цепочку заключений, приходим к выводу, что

$$H'(x) = \delta(x). \tag{5}$$

Разумеется, ни в какую классику это не укладывается. Но изложенные соображения вполне конструктивны, и если бы непременно надо было написать значение $H'(x)$, то мы написали бы именно то, что и сейчас: 0, если $x \neq 0$, и $+\infty$, если $x = 0$.

Соответствие функция — функционал. Один из способов выхода из сложившихся затруднений состоит в следующей идее расширения (обобщения) самого понятия «функция».

Будем смотреть на функцию через ее взаимодействие с другими функциями. (Ведь нас обычно не интересует внутреннее устройство аппарата, например человека, и мы считаем, что знаем объект, если знаем, как объект отвечает на входные воздействия, на те или иные входящие вопросы.)

Возьмем интегрируемую на отрезке $[a,b]$ функцию f и рассмотрим порождаемый ею функционал A_f (функцию на функциях)

$$A_f(\varphi) = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{6}$$

Чтобы миновать технические затруднения, будем считать *пробные функции* φ гладкими и даже из класса $C_0^{(\infty)}[a,b]$ бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль в окрестности концов отрезка. Можно даже продолжить обе функции f, φ нулем вне отрезка $[a,b]$ и вместо интеграла по отрезку писать интеграл

$$A_f(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{7}$$

Зная значения функционала A_f на пробных функциях, мы, если надо, легко найдем значение $f(x)$ функции f в любой точке, где эта функция непрерывна.

Задача. а) Проверьте, что величина $\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\,dt$ (интегральное среднее) при $\varepsilon \to +0$ стремится к $f(x)$ в любой точке x непрерывности интегрируемой функции f.

b) Покажите, что ступенчатую функцию $\bar{\bar{\delta}}_\varepsilon$, равную нулю вне отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$ и равную $1/2\varepsilon$ на самом этом отрезке (функция $\bar{\bar{\delta}}_\varepsilon$ имитирует δ-функцию Дирака), можно аппроксимировать гладкой функцией δ_ε с теми же свойствами: $\delta_\varepsilon(x) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon(x) = 0$ при $|x| \geqslant \varepsilon$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} \delta_\varepsilon(x)\,dx = 1$, т. е. $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

c) Покажите теперь, что если $\varepsilon \to 0$, то $\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\delta_\varepsilon(x-t)\,dt \to f(x)$ в любой точке x непрерывности интегрируемой функции f.

Функционал как обобщенная функция. Итак, интегрируемая функция порождает линейный функционал A_f (линейную функцию на векторном пространстве функций $C_0^{(\infty)}[a, b]$ или на $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$), определенный формулами (6) или (7), причем по функционалу A_f сама интегрируемая функция восстанавливается во всех точках непрерывности (т. е. почти всюду). Таким образом, функционал A_f можно рассматривать как иную кодировку или интерпретацию функции f, рассматриваемой в зеркале функционалов.

Но в этом зеркале можно увидеть и иные линейные функционалы, которые не порождаются указанным способом никакой интегрируемой функцией. Примером может служить уже встретившийся нам функционал

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dH(x) = \varphi(0),$$

который мы обозначим как A_δ (учитывая желание написать $\delta(x)\,dx$ вместо $dH(x)$).

Функционалы первого типа называют *регулярными*, а второго — *сингулярными*.

На функционалы и будем смотреть как на *обобщенные функции*. Множество рассмотренных функционалов содержит наши обычные функции в виде подмножества, состоящего из регулярных функционалов.

Итак, в связи с рассмотрением интеграла Римана и его обобщения в виде интеграла Стилтьеса мы дали представление об идее построения обобщенных функций. Не станем погружаться в детали теории обобщенных функций, связанные, например, с рассмотрением различных пространств пробных функций и построением линейных функционалов (обобщенных функций) на них. Лучше продемонстрируем правило дифференцирования обобщенных функций. А здесь, в качестве заключительного замечания, указывающего на полезную роль интеграла Стилтьеса, добавим, что на пространстве $C[a, b]$ функций φ, непрерывных на отрезке $[a, b]$, любой (как регулярный, так и сингулярный) линейный непрерывный функционал представляется в виде интеграла Стилтьеса $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dg(x)$ с некоторой, должным образом подобранной, функцией g.

(Подобно тому, как сингулярный функционал A_δ, представляющий обобщенную функцию δ, имеет вид $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dH(x)$, указанный в формуле (3).)

Мы начали с примера, где при отыскании центра масс нам встретился интеграл Стилтьеса $\int\limits_a^b x\, dm(x)$. Интеграл $M_n = \int\limits_a^b x^n\, dm(x)$ называется *моментом порядка n* соответственно меры (например, вероятностной) или массы, или заряда, распределенных на отрезке $[a, b]$. Особенно часто встречаются моменты M_0, M_1, M_2: M_0 — совокупная масса (мера, заряд); M_1/M_0 — дает центр масс в механике, а M_1 — математическое ожидание случайной величины в теории вероятностей; M_2 — момент инерции в механике и дисперсия случайной величины с математическим ожиданием $M_1 = 0$ в теории вероятностей. Одна из задач теории моментов — восстановление распределения по его моментам.

Дифференцирование обобщенных функций. Пусть A — обобщенная функция. Какую обобщенную функцию A' следовало бы считать производной от A?

Рассмотрим вопрос сначала для регулярной обобщенной функции, т. е. для функционала A_f, порожденного некоторой классической функцией f, например гладкой финитной функцией класса $C_0^{(1)}$. Тогда производной A'_f от A_f естественно считать функционал $A_{f'}$, порожденный функцией f' — производной исходной функции.

Используя интегрирование по частям, находим, что

$$A'_f(\varphi) := A_{f'}(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\, dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\, dx =: -A_f(\varphi').$$

Итак, мы нашли, что в рассмотренном случае

$$A'_f(\varphi) = -A_f(\varphi'). \tag{8}$$

Это дает основание принять следующее *определение*

$$A'(\varphi) := -A(\varphi'). \tag{9}$$

Здесь указано, как функционал A' действует на любую функцию $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, и тем самым функционал A' полностью определен.

Действие линейного функционала A на функцию φ вместо $A(\varphi)$ часто записывают в удобном во многих отношениях виде $\langle A, \varphi\rangle$, напоминающем скалярное произведение и указывающем явно, что спаривание линейно по каждой из пары его переменных.

В этих обозначениях, если теперь f — любая обобщенная функция, то в соответствии с определением (9)

$$\langle f', \varphi \rangle := -\langle f, \varphi' \rangle. \tag{10}$$

Производные функции Хевисайда и дельта-функции. Подсчитаем, например, производную функции Хевисайда, рассматриваемой как обобщенную функцию, действующую по стандартному закону регулярной обобщенной функции

$$\langle H, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)\, dx.$$

В соответствии с определением (9) или (10)

$$\langle H', \varphi \rangle := -\langle H, \varphi' \rangle := -\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = -\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0).$$

Мы показали, что $\langle H', \varphi \rangle = \varphi(0)$. Но ведь по определению обобщенной функции δ имеем $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Значит, мы показали, что в смысле обобщенных функций имеет место равенство

$$H' = \delta.$$

Подсчитаем, например, еще δ' и δ'', т. е. укажем действие этих функционалов:

$$\langle \delta', \varphi \rangle := -\langle \delta, \varphi' \rangle := -\varphi'(0);$$
$$\langle \delta'', \varphi \rangle := -\langle \delta', \varphi' \rangle := \varphi''(0).$$

Ясно теперь, что вообще $\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$.

Мы видим, что обобщенные функции бесконечно дифференцируемы. Это их замечательное свойство имеет много разнообразных проявлений, разрешая операции, которые с обычными функциями возможны только при очень специальных ограничениях.

В заключение сделаем еще следующее замечание общего характера. Пусть X — векторное пространство, X^* — двойственное к X векторное пространство, состоящее из линейных функций на X, и пусть X^{**} — пространство, двойственное к пространству X^*. Значение $x^*(x)$ функции $x^* \in X^*$ на векторе $x \in X$ будем записывать, как и выше, в виде спаривания $\langle x^*, x \rangle$. Фиксируя здесь x, мы получаем линейную функцию относительно x^*. Таким образом, каждый элемент $x \in X$ можно трактовать как элемент пространства X^{**}, т. е. мы имеем вложение $I\colon X \to X^{**}$. В конечномерном случае все пространства X, X^*, X^{**} изоморфны и $I(X) = X^{**}$. В общем же случае $I(X) \Subset X^{**}$, т. е. $I(X)$ составляет только часть всего пространства X^{**}. Именно это и наблюдалось при переходе от функций (им отвечали регулярные функционалы) к обобщенным функциям, которых оказалось больше.

Дополнение 5

Формула Эйлера—Маклорена

a. Числа Бернулли. Якоб Бернулли нашел, что

$$\sum_{n=1}^{N-1} n^k = \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^{k} C_{k+1}^m B_m N^{k+1-m},$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальные коэффициенты, а $B_0, B_1, B_2, \ldots$ — рациональные числа, именуемые теперь числами Бернулли. Эти числа встречаются в разных вопросах. У них есть производящая функция $\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$, по коэффициентам тейлоровского разложения которой все они восстанавливаются.

Для них справедлива также следующая рекуррентная формула:

$$B_0 = 1, \quad B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k+1} B_{n-k}.$$

Найдите первые несколько чисел Бернулли и проверьте, что все числа Бернулли с нечетными номерами, кроме B_1, равны нулю, а знаки чисел Бернулли с четными номерами чередуются. (Функция $x/(e^x-1)+x/2$ четная!)

Эйлер обнаружил связь чисел Бернулли с ζ-функцией: $B_n = -n\zeta(1-n)$.

b. Многочлены Бернулли. Многочлены Бернулли можно определять различными способами. Например, многочлены Бернулли определяются

1) рекуррентно: $B_0(x) \equiv 1$, далее $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$ с условием, что $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$;

2) через производящую функцию $\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$;

3) формулой $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k} x^k$ или $B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (x+k)^n$.

Исходя из разных определений, найдите первые несколько многочленов Бернулли, проверьте совпадение и то, что числа Бернулли — это значения многочленов Бернулли при $x=0$.

Дифференцируя производящую функцию, убедитесь, что определяемые ею функции $B_n(x)$ удовлетворяют указанному выше рекуррентному соотно-

шению, которое, в свою очередь, означает, что

$$B_n(x) = B_n + n\int\limits_0^x B_{n-1}(t)\,dt.$$

c. Некоторые знакомые операторы и ряды операторов. Если A — оператор, то условимся, как это принято в числах, запись $\frac{1}{A}$ понимать как оператор A^{-1}, обратный оператору A.

Оператор $\int$ интегрирования обратен оператору D дифференцирования (при должном задании постоянной интегрирования). Аналогично оператор суммирования $\sum$ обратен разностному оператору Δ, действие которого определяется соотношением $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Укажите, как именно надо находить $\sum f(x)$.

Согласны ли вы с тем, что $B_n(x) = D(e^D - 1)^{-1}x^n$?

В соответствии с формулой Тейлора

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!} + \ldots = \Big(\frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \ldots\Big) f(x),$$

поэтому $\Delta = e^D - 1$ и $\sum = \Delta^{-1} = (e^D - 1)^{-1}$, а поскольку $\frac{z}{e^z - 1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}z^k$, то

$$\sum = \frac{B_0}{D} + \frac{B_1}{1!} + \frac{B_2}{2!}D + \frac{B_3}{3!}D^2 + \ldots = \int + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k!}D^{k-1}.$$

d. Ряд и формула Эйлера—Маклорена. Применяя это операторное соотношение к функции $f(x)$, угадываем формулу суммирования Эйлера—Маклорена, точнее, не саму формулу, а соответствующий ей ряд

$$\sum_{a\leqslant n<b} f(n) = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b,$$

где a, b, n — целые, а k — натуральные числа.

Отличие такое же, как у ряда Тейлора и формулы Тейлора. Последняя конечна и содержит информацию (остаточный член), дающую возможность оценить остаток (величину погрешности приближения).

В случае, когда сумма сводится к единственному слагаемому, простейшая и одновременно базовая формула Эйлера—Маклорена с остаточным членом имеет следующий вид:

$$f(0) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m}\frac{B_k}{k!}f^{(k-1)}(x)\Big|_0^1 + (-1)^{m+1}\int\limits_0^1 \frac{B_m(x)}{m!}f^{(m)}(x)dx.$$

Разумеется, здесь предполагается, что исходная функция f достаточно гладкая, например, имеет все непрерывные производные нужного порядка.

Зная формулу интегрирования по частям, докажите по индукции написанную формулу Эйлера—Маклорена. (Вспомните, кстати, что формулу Тейлора с интегральным видом остаточного члена тоже получают простым интегрированием по частям.)

e. Общая формула Эйлера—Маклорена. Общая формула Эйлера—Маклорена, дающая величину суммы $\sum\limits_{a\leqslant n<b} f(n)$, имеет вид

$$\sum_{a\leqslant n<b} f(n) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x)\Big|_a^b + R_m,$$

где a, b, n — целые, а k, m — натуральные числа.

$$R_m = (-1)^{(m+1)} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)\,dx,$$

и $\{x\}$ — дробная часть числа x.

Докажите теперь эту формулу, учитывая, что любой отрезок $[a, b]$, концы которого — натуральные числа, можно разбить на отрезки единичной длины и сдвигами привести к отрезку $[0, 1]$.

f. Примеры применения. Используя формулу Эйлера—Маклорена, полагая в ней $f(x) = x^m$, покажите, что

$$\sum_{a\leqslant k<b} k^{m-1} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m C_m^k B_k (b^{m-k} - a^{m-k})$$

и, в частности, получите вслед за Якобом Бернулли соотношение

$$\sum_{0\leqslant k<b} k^{m-1} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m C_m^k B_k b^{m-k}.$$

Для описания асимптотического поведения сумм большого или неограниченно растущего числа слагаемых обычно используется следующий вид формулы Эйлера—Маклорена:

$$\sum_{n=a}^b f(n) \sim \int_a^b f(x)\,dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^\infty \frac{B_{2k}}{(2k)!}(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)),$$

где a, b — целые. Часто формула остается справедливой и при расширении отрезка $[a, b]$ до всей прямой. Во многих случаях интеграл в правой части может быть вычислен в элементарных функциях, даже если сумма в левой части так не может быть выражена. Тогда все члены асимптотического ряда

могут быть выражены в терминах элементарных функций. Например,

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{(z+s)^2} \sim \int_0^{+\infty} \frac{1}{(z+s)^2} ds + \frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2k}}{z^{2k+1}},$$

причем интеграл здесь вычисляется и равен $\frac{1}{z}$.

Полагая $f(x) = x^{-1}$, проверьте асимптотическую формулу

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} - \theta_{m,n} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)n^{2m+2}},$$

где $0 < \theta_{m,n} < 1$, а γ — постоянная (постоянная Эйлера).

Взяв $f(x) = \ln x$, покажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = n \ln n - n + \sigma - \frac{1}{2} \ln n + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)n^{2k-1}} - R_{m,n},$$

где

$$R_{m,n} = \varphi_{m,n} \frac{B_{2m+2}}{(2m+1)(2m+2)n^{2m+1}},$$

$0 < \varphi_{m,n} < 1$, а σ — константа (на самом деле равная $\ln \sqrt{2\pi}$).

Потенцируя, отсюда можно получить асимптотическую формулу Стирлинга для величины $n!$ при $n \to +\infty$.

g. Вновь к самой формуле Эйлера—Маклорена. Если a и n — целые числа, такие что $a < n$, а f — функция, медленно меняющаяся на промежутке $[a, n]$, то сумма

$$S = \frac{1}{2}f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n)$$

хорошо аппроксимируется интегралом $I = \int_a^n f(x)\, dx$.

Вспомните это, нарисовав картинку, воскресив геометрический смысл величин S и I, а заодно вспомнив и численные методы вычисления интеграла.

Если j — целое число, то интегрирование по частям дает

$$\int_j^{j+1} f(x)\, dx = \left(x - j - \frac{1}{2}\right) f(x)\Big|_j^{j+1} - \int_j^{j+1} \left(x - j - \frac{1}{2}\right) f'(x)\, dx,$$

или

$$\frac{1}{2}f(j) + \frac{1}{2}f(j+1) = \int_j^{j+1} f(x)\, dx + \int_j^{j+1} \omega_1(x) f'(x)\, dx,$$

где $\omega_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2} = \{x\} - \frac{1}{2}$.

(Напомним, что $[x]$ и $\{x\}$ — целая и дробная части числа x.)

Суммируя полученные равенства по j от $j=a$ до $j=n-1$, получаем

$$S = I + \int_a^n \omega_1(x) f'(x)\, dx.$$

Нарисуйте график функции ω_1.

Проинтегрируйте теперь по частям интеграл $\int_j^{j+1} \omega_1(x) f'(x)\, dx$ и получите для него выражение с новым интегральным остатком $\int_j^{j+1} \omega_2(x) f''(x)\, dx$, где $\omega_2(x) = \int \omega_1(x)\, dx$. Убедитесь в непрерывности функции ω_2, учитывая, что $\int_j^{j+1} \omega_1(x)\, dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = 0$. Проведите, как и выше, суммирование и получите новое, на шаг более продвинутое, выражение для величины S с новым интегральным остатком.

Продолжая описанный процесс, получите следующую формулу Эйлера—Маклорена

$$S = I + \sum_{s=1}^{m-1} (-1)^{s+1} \omega_{s+1}(0) f^{(s)}(x)\Big|_a^n + (-1)^{m+1} \int_a^n \omega_m(x) f^{(m)}(x)\, dx.$$

Проверьте, что $\omega_k(x) = \frac{1}{k!} B_k(\{x\})$ и сопоставьте полученную формулу Эйлера—Маклорена с рассмотренной ранее.

Дополнение 6

Теорема о неявной функции (альтернативное изложение)

Постановка вопроса

Постановка вопроса и наводящие соображения, конечно, обсуждались в реальной лекции, но здесь мы это опустим, поскольку соответствующий материал можно прочитать в § 5 главы VIII.

Мы продемонстрируем здесь иной подход к доказательству теоремы о неявной функции, отличный и независимый от изложенного в § 5 главы VIII. Он, несмотря на идейную простоту, красоту и общность, предполагает несколько более продвинутую аудиторию слушателей, которые уже ознакомлены с некоторыми общематематическими понятиями, изложенными в начале второй части учебника. Во всяком случае именно такие сведения позволяют оценить реальную общность метода, который, кстати, без потери общности можно демонстрировать уже на простейших наглядных примерах в знакомых всем пространствах.

Некоторые напоминания о численных методах решения уравнений

Фиксировав в соотношении $F(x, y) = 0$ одну из переменных, мы получаем уравнение относительно другой, поэтому сначала полезно вспомнить, как решают уравнение $f(x) = 0$.

1. В зависимости от свойств функции f предлагаются и способы решения.

Например, если f вещественнозначна, непрерывна и на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то мы знаем, что на этом отрезке есть по крайней мере один корень уравнения $f(x) = 0$ и его можно искать последовательным делением отрезка. Разделив отрезок пополам, мы либо попадаем в корень, либо находим вдвое меньший отрезок, на концах которого функция имеет значения разных знаков. Продолжая процесс деления, получим последовательность (концов отрезков), которая сходится к корню уравнения.

2. Если f — гладкая выпуклая функция, то, следуя Ньютону, можно предложить значительно более эффективный в смысле скорости сходимости алгоритм отыскания единственного в этом случае корня.

Метод Ньютона, или *метод касательных*, состоит в следующем. Строим касательную в точке x_0, находим точку x_1 ее пересечения с осью абсцисс и, повторяя процесс, получаем рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_n - (f'(x_n))^{-1} f(x_n) \tag{1}$$

последовательность точек, быстро сходящуюся к корню. (Оцените скорость сходимости. Получите соотношение $x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)$, позволяющее искать положительный корень уравнения $x^2 - a = 0$, $a > 0$. Найдите $\sqrt{2}$ по этой формуле с нужной вам точностью и проследите, сколько дополнительных верных знаков появляется на каждом шаге).

3. Соотношение (1) можно переписать в виде

$$x_{n+1} = g(x_n), \tag{2}$$

где $g(x) = x - (f'(x))^{-1} f(x)$. Тем самым отыскание корня уравнения $f(x)$ сводится к отысканию *неподвижной точки* отображения g, т. е. такой точки, что

$$x = g(x). \tag{3}$$

Эта редукция, как нам известно, относится не только к методу Ньютона. В самом деле, уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению $\lambda f(x) = 0$ (если существует λ^{-1}), а последнее равносильно уравнению $x = x + \lambda f(x)$. Полагая $g(x) = x + \lambda f(x)$ (здесь λ может быть и переменной величиной), приходим к уравнению (3).

Процесс решения уравнения (3), т. е. отыскания неподвижной точки отображения g в соответствии с рекуррентной формулой (2), когда найденное на предыдущем шаге значение функции становится ее аргументом на следующем шаге, как мы уже знаем, называется *итерационным процессом* или *методом итераций*. Этот циклический процесс удобен для реализации на компьютере.

Если итерационный процесс (2) ведется в области, где $|g'(x)| \leqslant q < 1$, то последовательность

$$x_0, \quad x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1) = g^2(x_0), \quad \ldots \quad x_{n+1} = g(x_n) = g^n(x_0)$$

всегда оказывается фундаментальной (последовательностью Коши). В самом деле, применяя теорему о конечном приращении, имеем

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q|x_n - x_{n-1}| \leqslant \ldots \leqslant q^n|x_1 - x_0|, \tag{4}$$

откуда, применяя неравенство треугольника, находим

$$|x_{n+m} - x_n| \leqslant |x_n - x_{n+1}| + \ldots + |x_{n+m-1} - x_{n+m}| \leqslant \\ \leqslant (q^n + \ldots + q^{n+m-1})|x_1 - x_0| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|. \tag{5}$$

Полезно заметить, что при $m\to\infty$ из последнего неравенства получаем оценку

$$|x-x_n|\leqslant\frac{q^n}{1-q}|x_1-x_0| \tag{6}$$

уклонения x_n от неподвижной точки x.

Задача. Нарисуйте несколько вариантов кривых $y=g(x)$, пересекающих прямую $y=x$, и изобразите диаграмму, имитирующую итерационный процесс $x_{n+1}=g(x_n)$ отыскания неподвижной точки.

Принцип неподвижной точки. Последние рассуждения (относящиеся к формулам (3)—(6)), очевидно, можно повторить в любом метрическом пространстве, в котором действует критерий Коши, т. е. где любая фундаментальная последовательность является сходящейся. Такие метрические пространства называются *полными метрическими пространствами*. Например, $\mathbb{R}$ — полное метрическое пространство по отношению к стандартному расстоянию $d(x',x'')=|x'-x''|$ между точками $x',x''\in\mathbb{R}$. Отрезок $I=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\leqslant 1\}$ — также полное метрическое пространство относительно этой метрики. А если из $\mathbb{R}$ или из I удалить точку, то полученное метрическое пространство, очевидно, не будет полным.

Задача. 1. Проверьте полноту пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$.

2. Покажите, что замкнутый шар $B(a,r)=\{x\in X\mid d(a,x)\leqslant r\}$ радиуса r с центром $a\in X$ в полном метрическом пространстве (X,d) сам является полным метрическим пространством относительно индуцированной вложением $B\subset X$ метрики d.

Напомним еще следующее

Определение. Отображение $g\colon X\to Y$ одного метрического пространства (X,d_X) в другое (Y,d_Y) называется *сжимающим*, если существует число $q\in[0,1[$ такое, что для любых двух точек $x',x''\in X$

$$d_Y(g(x'),g(x''))\leqslant q\,d_X(x',x'').$$

Например, если дифференцируемая функция $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такова, что всюду $|g'(x)|\leqslant q<1$, то по теореме в конечном приращении $|g(x')-g(x'')|\leqslant q|x'-x''|$ и g осуществляет сжимающее отображение. Это же можно сказать и по отношению к дифференцируемому отображению $g\colon B\to Y$ выпуклого подмножества B нормированного пространства X (например, шара $B\subset\mathbb{R}^n$) в нормированное пространство Y, если $\|g'(x)\|\leqslant q$ в любой точке $x\in B$.

Теперь мы можем сформулировать следующий *принцип неподвижной точки*.

Сжимающее отображение $g\colon X\to X$ полного метрического пространства в себя имеет и притом единственную неподвижную точку x.

Эта точка может быть найдена итерационным процессом $x_{n+1}=g(x_n)$, начиная с любой точки $x_0\in X$. Скорость сходимости и оценка погрешности

приближения даются неравенством

$$d(x, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \qquad (6')$$

Доказательство этого утверждения было дано выше при выводе формул (4)—(6), где теперь вместо $|x'-x''|$ всюду надо писать $d(x', x'')$.

Чтобы оценить пользу и масштаб действия сделанного обобщения, рассмотрим следующий важный пример.

Пример. Ищется функция $y = y(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y' = f(x, y)$ и начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Пользуясь формулой Ньютона—Лейбница, перепишем задачу в виде следующего интегрального уравнения относительно неизвестной функции $y(x)$:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \qquad (7)$$

Справа стоит некоторое преобразование g, которое делается над функцией $y(x)$, и мы ищем неподвижную «точку» — функцию преобразования g.

Пусть, например, $f(x, y) = y$, $x_0 = 0$, а $y_0 = y(t)$. Тогда речь идет о решении уравнения $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$, а (7) принимает вид

$$y(x) = 1 + \int\limits_{0}^{x} y(t)\, dt. \qquad (8)$$

Проведем итерационный процесс, начиная, положим, с функции $y_0(x) \equiv \equiv 0$. При этом последовательно получаем

$$y_1(x) \equiv 1,$$

$$y_2(x) = 1 + \int\limits_0^x y_1(t)\, dt = 1 + x,$$

$$y_3(x) = 1 + \int\limits_0^x y_2(t)\, dt = 1 + \int\limits_0^x (1+t)\, dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$

. . . .

$$y_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \ldots + \frac{1}{n!}x^n,$$

. . . .

Видно, что мы идем к функции $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$

Задача. Покажите, что если $\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leqslant M\|y_1 - y_2\|$, то в окрестности точки x_0 итерационный процесс применим и в случае общего уравнения (7).

Именно так Пикар (Emile Picard, 1856—1941) искал решение дифференциального уравнения $y'(x)=f(x, y(x))$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$ как неподвижную точку преобразования (7).

Банах (Stephane Banach, 1882—1945) сформулировал принцип неподвижной точки в приведенной выше абстрактной форме, в которой он часто называется *принципом Банаха неподвижной точки* или *принципом Пикара—Банаха*. Истоки его, однако, как мы видели, можно связывать и с Ньютоном.

Теорема о неявной функции

Формулировка теоремы. Вернемся теперь к основному объекту нашего рассмотрения и покажем, что справедлива следующая *теорема о неявной функции.*

Теорема. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства (например, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ или даже $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$), причем Y — полное пространство относительно метрики, индуцированной нормой.*

Пусть $F\colon W \to Z$ — отображение, определенное в окрестности W точки $(x_0, y_0)\in X\times Y$, непрерывное в (x_0, y_0) вместе с частной производной $F'_y(x, y)$, которая предполагается существующей в W.

Если $F(x_0, y_0)=0$ и существует $(F'_y(x_0, y_0))^{-1}$ (и $\|(F'_y(x_0, y_0))^{-1}\|<\infty$), то найдутся окрестность $U=U(x_0)$ точки x_0 в X, окрестность $V=V(y_0)$ точки y_0 в Y и такая функция $f\colon U\to V$, непрерывная в x_0, что $U\times V\subset W$ и

$$(F(x, y)=0 \text{ в } U\times V) \iff (y=f(x),\ x\in U). \qquad (9)$$

Короче, при условиях теоремы заданное соотношением $F(x, y)=0$ множество в пределах окрестности $U\times V$ является графиком функции $y=f(x)$.

Доказательство существования неявной функции.

◄ Без ограничения общности и для сокращения записи будем считать, что $(x_0, y_0)=(0, 0)$, чего всегда можно добиться, перейдя к новым переменным $x-x_0$ и $y-y_0$.

При фиксированном x будем решать уравнение $F(x, y)=0$ относительно y. Решение будем искать как неподвижную точку отображения

$$g_x(y)=y-(F'_y(0, 0))^{-1}F(x, y) \qquad (10)$$

— это упрощенный вариант формулы Ньютона (1), когда коэффициент λ (см. абзац после формулы (3)) постоянен. Непосредственно видно, что $F(x, y)=0 \iff g_x(y)=y$.

Отображение (10) является сжимающим, если x и y близки к 0 в X и Y. В самом деле,

$$\frac{dg_x}{dy}(y)=E-(F'_y(0, 0))^{-1}F'_y(x, y). \qquad (11)$$

Здесь E — тождественное (единичное) отображение, а поскольку $F'_y(x, y)$ непрерывно в точке $(0, 0)$, то найдется число $\Delta \in \mathbb{R}$ такое, что при $\|x\| < \Delta$ и $\|y\| < \Delta$
$$\left\| \frac{dg_x}{dy} \right\| < \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Заметим, наконец, что при любом $\varepsilon \in]0, \Delta[$ найдется $\delta \in]0, \Delta[$ такое, что если $\|x\| < \delta$, то отображение g_x переводит отрезок (шарик) $\|y\| \leqslant \varepsilon$ в себя.

Действительно, ведь $F(0, 0) = 0$, значит, в силу (10), и $g_0(0) = 0$. Ввиду непрерывности F в точке (0,0) из (10) следует, что найдется число $\delta \in]0, \Delta[$ такое, что $\|g_x(0)\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ при $\|x\| < \delta$.

Итак, при $\|x\| < \delta$ отображение $g_x : B(\varepsilon) \to Y$ отрезка (шара) $B(\varepsilon) = \{y \in \in Y \mid \|y\| \leqslant \varepsilon\}$ смещает его центр не более чем на $\frac{1}{2}\varepsilon$, при этом, в силу (12), сжимая $B(\varepsilon)$ по крайней мере вдвое. Значит, $g_x(B(\varepsilon)) \subset B(\varepsilon)$ при $\|x\| < \delta$.

По условию Y — полное пространство, поэтому и $B(\varepsilon) \subset Y$ тоже полное метрическое пространство (относительно индуцированной метрики).

Тогда, в силу принципа неподвижной точки, найдется, и притом единственная, точка $y = f(x) \in B(\varepsilon)$, неподвижная при отображении $g_x : B(\varepsilon) \to B(\varepsilon)$.

Тем самым при любом x таком, что $\|x\| < \delta$, мы нашли, и притом единственное в пределах $B(\varepsilon)$, значение $y = f(x)$ ($\|f(x)\| < \varepsilon$) такое, что $F(x, f(x)) = 0$.

(Сечение области $P = \{(x, y) \in X \times Y \mid \|x\| < \delta, \|y\| < \varepsilon\}$, проходящее через точку $(x, 0)$, — это отрезок (шарик) $B(\varepsilon)$, в котором и находится соответствующая неподвижная точка $y = f(x)$.)

Итак, показано, что
$$(F(x, y) = 0 \text{ при } \|x\| < \delta \text{ и } \|y\| < \varepsilon) \iff (y = f(x), \text{ где } \|x\| < \delta). \tag{13}$$

Заметим, что мы не только получили соотношение (9), но, в силу конструкции, по любому $\varepsilon \in]0, \Delta[$ умеем подбирать $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось (13). Поскольку функция f уже найдена и фиксирована, это означает и то, что $f(0) = 0$, и то, что f *непрерывна при* $x = 0$. ►

Доказанную теорему можно рассматривать как теорему существования неявной функции $y = f(x)$.

Посмотрим теперь, какие свойства функции F и как наследуются функцией f.

Непрерывность неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функции F, F'_y непрерывны не только в точке (x_0, y_0), но и в некоторой ее окрестности, то и неявная функция f непрерывна в некоторой окрестности x_0.

◄ Действительно, в этом случае условия теоремы окажутся выполненными во всех близких к (x_0, y_0) точках множества $F(x, y) = 0$ и каждую из них можно было бы рассматривать как исходную (x_o, y_0). Функция же f уже найдена и фиксирована.

Внимание! Вспомните задачу: если отображение $A \to A^{-1}$ (например, для матриц A) определено в A, то определено и в окрестности A. ►

Дифференцируемость неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функция F дифференцируема в точке (x_0, y_0), то неявная функция f дифференцируема в точке x_0, причем

$$f'(x_0) = -(F'_y(x_0, y_0))^{-1} F'_x(x_0, y_0). \tag{14}$$

◄ Учитывая дифференцируемость F в точке (x_0, y_0), можно написать, что

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \\ = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(|x - x_0| + |y - y_0|).$$

Полагая для упрощения записи $(x_0, y_0) = (0, 0)$ и считая, что мы перемещаемся только вдоль кривой $y = f(x)$, получаем

$$0 = F'_x(0, 0)x + F'_y(0, 0)y + o(|x| + |y|),$$

или

$$y = -(F'_y(0, 0))^{-1} F'_x(0, 0)x - (F'_y(0, 0))^{-1} o(|x| + |y|). \tag{15}$$

Поскольку $y = f(x) = f(x) - f(0)$, то формула (14) будет оправдана, если мы покажем, что при $x \to 0$ второй член в правой части (15) есть $o(x)$.

Но

$$|(F'_y(0, 0))^{-1} o(|x| + |y|)| \leqslant \|(F'_y(0, 0))^{-1}\| \cdot |o(|x| + |y|)| = o(|x| + |y|).$$

Далее,

$$\|-(F'_y(0, 0))^{-1} F'_x(0, 0)\| \leqslant \|(F'_y(0, 0))^{-1}\| \cdot \|F'_x(0, 0)\| = a < \infty,$$

поэтому из (15) получаем, что $|y| \leqslant a|x| + \alpha(|x| + |y|)$, где $y = f(x) \to 0$ и $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Значит,

$$|y| \leqslant \frac{a + \alpha}{1 - \alpha}|x| < 2a|x|$$

при x, достаточно близких к 0. Учитывая это, из (15) получаем, что при $x \to 0$

$$f(x) = -(F'_y(0, 0))^{-1} F'_x(0, 0)x + o(x).$$

А это с учетом $f(0) = 0$ дает (14). ►

Непрерывная дифференцируемость неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функции F'_x и F'_y определены и непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то и неявная функция f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.

Короче говоря, если $F \in C^{(1)}$, то и $f \in C^{(1)}$.

◄ В этом случае условия дифференцируемости f и формула (14) оказываются выполнены не только в (x_0, y_0), но и во всех точках «кривой» $F(x, y) = 0$, близких к (x_0, y_0). (См. выше предостерегающее «*Внимание!*».) Тогда в некоторой окрестности точки x_0 в соответствии с формулой (14)

$$f'(x) = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x)), \tag{14'}$$

откуда видно, что f' — непрерывна.

Внимание! Вспомните, что отображение $A \to A^{-1}$ непрерывно. ►

Высшие производные неявной функции.

Если в дополнение к условиям теоремы известно, что функция F принадлежит классу $C^{(k)}$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то и f принадлежит классу $C^{(k)}$ в окрестности x_0.

◄ Пусть, например, $F \in C^{(2)}$. Поскольку $f \in C^{(1)}$, то правую часть равенства (14′) можно продифференцировать в соответствии с правилом дифференцирования композиции функций. Получается формула для $f''(x)$, из которой следует непрерывность $f''(x)$.

Более того, как в формуле (14′) для $f'(x)$ справа участвуют первые частные производные F и сама функция f (но не f'), так и в формуле для $f''(x)$ участвуют вторые частные производные F и функции f, f' (но не f'').

Значит, если $F \in C^{(3)}$, то $f''(x)$ снова можно дифференцировать и мы снова приходим к формуле, теперь уже для $f'''(x)$, в которой участвуют третьи частные производные F, а также производные функции f (f, f', f'') только меньшего порядка.

По индукции получаем то, что и утверждалось. ►

Внимание! Вспомните, что отображение $A \to A^{-1}$ дифференцируемо и даже бесконечно дифференцируемо.

Задача. 1. Найдите $f''(x)$ (т. е. выпишите формулу для вычисления $f''(x)(h_1, h_2)$ при заданных векторах смещения h_1, h_2).

2. Как выглядит (упрощается) формула для $f''(x)$ в случае, когда x, y и $z = F(x, y)$ — числовые вещественные или комплексные переменные?

Задача (метод неопределенных коэффициентов). Зная первые (или все) коэффициенты ряда Тейлора функции F, найдите первые (или все) коэффициенты ряда Тейлора неявной функции f.

Задача. 1. Запишите в координатной форме формулировку теоремы о неявной функции для случая $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, когда $m = n = 1$ и когда $n > 1$.

2. Пусть $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m > n)$ — линейное отображение максимального ранга $(= n)$. Какова размерность подпространства $F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^m$ и какова его коразмерность? Пусть теперь $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m > n)$ — произвольное гладкое отображение, $F(0) = 0$ и $\operatorname{rang} F'(x) = n$. Ответьте на те же вопросы $(\dim F^{-1}(0) = ?\ \operatorname{codim} F^{-1}(0) = ?)$ в отношении множества $F^{-1}(0)$.

Литература

I. Классика

1. Первоисточники

Ньютон И.
Математические начала натуральной философии. Пер. с лат. А. Н. Крылова. — М.: Наука, 1989. — 688 с.
Математические работы. — М.—Л.: ОНТИ, 1937.

Лейбниц Г. В. Избранные отрывки из математических сочинений. *Успехи матем. наук*, 1948. **3** (1), 165—205.

2. Важнейшие систематические изложения предмета

Эйлер Л.
Введение в анализ бесконечных. В 2-х т. — М.: Физматгиз, 1961.
Дифференциальное исчисление. — М.—Л.: Гостехиздат, 1949.
Интегральное исчисление. В 3-х т. — М.: Гостехиздат, 1956—1958.

Коши О. Л.
Алгебраический анализ. — Лейпциг: Бэр и Хэрманн, 1864.
Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. — СПб.: Имп. Акад. наук, 1831.

II. Учебники

Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Высшая школа, 2000.
Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. В 2-х ч. Изд. 2-е, перераб. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985, 1987.
Камынин Л. И. Курс математического анализа. В 2-х ч. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993, 1995.
Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3-х т. — М.: Высшая школа, 1988, 1989.
Никольский С. М. Курс математического анализа. В 2-х т. — М.: Наука, 1990.

III. Учебные пособия

Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 1990.

Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. Избранные задачи по вещественному анализу. — М.: Наука, 1992.

Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. — Новосибирск: Изд-во Ин-та матем. Ч. I, книги 1 и 2, 1999. Ч. II, книги 1 и 2, 2000, 2001.

Рудин У. Основы математического анализа. Изд. 2-е. — М.: Мир, 1976.

Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1—2. — М.: Наука, 1969.

Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. В 3-х ч. — М.: Наука, 1972.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. Изд. 7-е, стереотип. — М.: Наука, 1969.

IV. Дополнительная литература

Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. — М.: ГТТИ, 1938.

Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. статей. К 100-летию со дня рождения. — М.: Мир, 1979.

Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. — М.: Наука, 1989; МЦНМО, 2012.

Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.

Боос В. Лекции по математике. Анализ. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. (В частности, статья «Архитектура математики».)

Валле-Пуссен Ш. Ж. Курс анализа бесконечно малых. В 2-х т. Л.—М.: ГТТИ, 1933.

Вейль Г. Математическое мышление. — М.: Наука, 1989.

Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. — М.: Мир, 1967.

Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998.

Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.

Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.

Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1967.

Зорич В. А. Математический анализ задач естествознания. — М.: МЦНМО, 2008.

Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 4-е, перераб. — М.: Наука, 1976.

Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986.

Кириллов А. А. Что такое число? — М.: Наука, 1993.

Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 2-х т. — М.: Наука, 1970.

Ландау Э. Основы анализа. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1947.

Манин Ю. И. Математика и физика. — М.: Знание, 1979. — (Новое в жизни, науке, технике. Серия: Математика, кибернетика; № 12.)

Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965. — (Библиотека сборника «Математика».)

Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. — М.: Мир, 1971.

Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. В 2-х ч. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1978.

Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.

Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1990.

Спивак М. Математический анализ на многообразиях. — М.: Мир, 1971.

Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. В 2-х ч. Изд. 2-е. — М.: Физматгиз, 1962—1963.

Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ? — М.: Наука, 1987.

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. I: Современная наука о природе. Законы механики. — М.: Мир, 1965.

Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Наука, 1963.

Шварц Л. Анализ. В 2-х т. — М.: Мир, 1972.

Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Том IV. — М.: Наука, 1967. (В том числе статьи «Мотивы научного исследования» (с. 39—41) и «Физика и реальность» (с. 200—227).)

Предметный указатель

Указатель имен

В. А. ЗОРИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

II

В. А. Зорич

Математический анализ

Часть II

Издание девятое,
исправленное

Рекомендовано УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
01.05.01 Фундаментальные математика и механика
и направлениям
01.03.01 Математика,
01.03.03 Механика и математическое моделирование,
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Издательство МЦНМО
Москва, 2019

УДК 517
ББК 22.16
З86

Рецензенты:

Отдел теории функций комплексного переменного
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
Заведующий отделом академик А. А. Гончар

Академик В. И. Арнольд

Зорич В. А.

З86 Математический анализ. Часть II. — Изд. 9-е, испр. — М.: МЦНМО, 2019. — xii+676 с. Библ.: 57 назв. Илл.: 41.

ISBN 978-5-4439-1303-2, 978-5-4439-1305-6 (часть II).

Университетский учебник для студентов физико-математических специальностей. Может быть полезен студентам факультетов и вузов с расширенной математической подготовкой, а также специалистам в области математики и ее приложений.

ББК 22.16

«Учебник В. А. Зорича представляется мне наиболее удачным из имеющихся подробных учебников анализа для математиков и физиков. Основные его отличия от традиционных изложений состоят, с одной стороны, в большей близости к естественно-научным приложениям (и прежде всего к физике и механике), а с другой — в большем, чем это обычно принято, использовании идей и методов современной математики: алгебры, геометрии, топологии.

Курс необычно богат идеями и ясно показывает могущество идей и методов современной математики при исследовании конкретных вопросов. Особенно нестандартен второй том, включающий векторный анализ, теорию дифференциальных форм на многообразиях, введение в теорию обобщенных функций и в теорию потенциала, ряды и преобразования Фурье, а также начала теории асимптотических разложений.

...В наше время такое построение курса следует считать новаторским. Оно было обычным во времена Гурса, но наблюдающаяся последние полстолетия тенденция к специализации курсов выхолостила курс анализа, оставив ему почти одни лишь обоснования. Необходимость вернуться к более содержательным курсам анализа представляется сейчас очевидной, особенно в связи с прикладным характером будущей деятельности большинства студентов.

...По моему мнению, курс является лучшим из существующих современных курсов анализа». — Из отзыва академика В. И. Арнольда.

ISBN 978-5-4439-1305-6
9 785443 913056 >

12+

ISBN 978-5-4439-1303-2
ISBN 978-5-4439-1305-6 (часть II)

© В. А. Зорич, 2001—2019.
© Издательство МЦНМО, 2019.

Оглавление

Предисловие к первому изданию

В предисловии к первой части была дана достаточно подробная характеристика курса в целом, поэтому я ограничусь здесь замечаниями по содержанию лишь этой второй его части.

Основной материал настоящего тома составляют, с одной стороны, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, доведенные до общей формулы Стокса и примеров ее приложений, а с другой стороны, аппарат рядов и интегралов, зависящих от параметра, включающий ряды Фурье, преобразование Фурье и представления об асимптотических разложениях.

Таким образом, эта часть II в основном соответствует программе второго года обучения на математических факультетах университетов.

Чтобы не закреплять жестко порядок следования указанных двух больших тем по семестрам, я изложил их практически независимо.

Главы IX и X, с которых начинается эта книга, в сжатом и общем виде воспроизводят по существу почти все самое ценное, что было получено в первой части в отношении непрерывных и дифференцируемых функций. Они отмечены звездочкой и написаны как дополнение к первой части. В нем, однако, содержится много таких понятий, которые уже сейчас фигурируют в любом изложении анализа математикам. Наличие этих двух глав делает вторую книгу формально почти независимой от первой при условии, что читатель достаточно подготовлен, чтобы при чтении этих двух глав обойтись без многочисленных примеров и наводящих соображений, которые в первой части предшествовали излагаемому здесь формализму.

Основной новый материал книги, посвященный интегральному исчислению функций многих переменных, начинается с главы XI, с которой, собственно, без потери связности восприятия после первой части можно читать эту вторую часть курса.

При изложении теории криволинейных и поверхностных интегралов разъясняется и используется язык дифференциальных форм и сначала на элементарном материале вводятся все основные геометрические понятия и аналитические конструкции, которые потом составляют лестницу абстрактных определений, ведущую к общей формуле Стокса.

Такому итоговому изложению интегрирования дифференциальных форм на многообразиях посвящена глава XV, которую я рассматриваю как весьма желательное систематизирующее дополнение к изложенному и разъясненному на конкретных объектах в обязательных для изучения главах XI—XIV.

В разделе, относящемся к рядам и интегралам, зависящим от параметра, наряду с традиционным материалом даны (гл. XIX) начальные сведения об асимптотических рядах и асимптотике интегралов, поскольку это, несомненно, полезный, благодаря своей эффективности, аппарат анализа.

Для удобства ориентировки дополнительный материал или разделы, которые при первом чтении можно опустить, помечены звездочкой.

Нумерация глав и рисунков этой книги продолжает нумерацию уже вышедшей из печати первой части.

Биографические сведения здесь даются только о тех ученых, которые не упоминались в первой части.

Как и прежде, для удобства читателя и сокращения текста начало и конец доказательства отмечаются знаками ◄ и ► соответственно, а когда это удобно, определения вводятся специальными символами := или =: (равенства по определению), в которых двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.

Сохраняя традиции части I, в этой книге много внимания мы уделяем как прозрачности и логической четкости самих математических конструкций, так и демонстрации содержательных естественно-научных приложений развиваемой теории.

Предисловие ко второму изданию

Отличия второго издания этой книги от первого, помимо того, что исправлены замеченные опечатки первого издания, в основных чертах состоят в следующем. Заново изложены (надеюсь, к лучшему) некоторые разделы отдельных тем (например, это коснулось рядов и преобразований Фурье). Даны более прозрачные доказательства отдельных важных теорем (например, общей теоремы о конечном приращении). Включены некоторые новые примеры приложений и новые содержательные задачи, примыкающие к соответствующим разделам теории и порой заметно расширяющие ее. Приведены экзаменационные вопросы, а также вопросы и задачи коллоквиумов. Расширен список дополнительной литературы.

Предисловие к седьмому изданию

Я только что написал предисловие к новому английскому изданию этого учебника, поэтому позволю себе повторить то, что в равной мере относится и к этому седьмому русскому изданию книги.

Время, прошедшее с момента выхода предыдущих изданий учебника, наука не стояла на месте. Например, решена проблема Ферма, доказана гипотеза Пуанкаре, найден бозон Хиггса. Сделано еще многое, что, возможно, не имеет прямого отношения к учебнику классического математического анализа, но косвенно сказывается в том, что автор за это время тоже кое-что выучил, обдумал, понял и углубил свои знания. А они, эти дополнительные знания, полезны, даже когда вы рассказываете вроде бы совсем о другом.

Кроме исходного русского издания, учебник вышел на английском, немецком и китайском языках. Внимательные разноязычные читатели нашли в тексте много погрешностей. К счастью, это локальные погрешности, в основном опечатки. Конечно, они учтены и исправлены в этом новом издании.

Главное, что отличает седьмое русское издание от шестого, — новые дополнения. В первой книге оно одно («Формула Эйлера—Маклорена»), а во второй их три («Функции многих переменных и дифференциальные формы с термодинамическими интерпретациями»; «Операторы теории поля в криволинейных координатах»; «Современная формула Ньютона—Лейбница и единство математики»). Чтобы не нарушать прежний текст, дополнения помещены в конце каждой книги. Они могут быть полезны как студентам (математикам, физикам), так и преподавателям, — каждому для своих целей. Последнее из них можно рассматривать как итоговый обзор, который содержит важнейшие концептуальные достижения всего курса, связывающие анализ с другими разделами единой математики.

Мне приятно, что книга оказалась в какой-то мере полезной и математикам, и физикам, и даже инженерам в высших технических школах с углубленным изучением математики. Это вдохновило меня на написание дополнения, в котором математика и элементарная, но вполне содержательная термодинамика идут рука об руку.

Удовольствие видеть новое поколение, когда оно мыслит шире, понимает глубже и умеет больше, чем поколение, на плечах которого оно поднялось.

Москва, 2015 г. В. Зорич

* Глава IX

Непрерывные отображения (общая теория)

В этой главе будут обобщены и изложены с единой точки зрения свойства непрерывных отображений, которые были ранее установлены для числовых функций и отображений типа $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. При этом будет введен ряд простых, но важных понятий, имеющих общематематическое употребление.

§ 1. Метрическое пространство

1. Определение и примеры

Определение 1. Говорят, что множество X наделено *метрикой* или *структурой метрического пространства*, или что X есть *метрическое пространство*, если указана функция

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

удовлетворяющая условиям

a) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$,

b) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ (симметричность),

c) $d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ (неравенство треугольника),

где x_1, x_2, x_3 — произвольные элементы X.

Функцию (1) называют в этом случае *метрикой* или *расстоянием* в X.

Таким образом, *метрическое пространство* есть пара (X, d), состоящая из множества X и заданной на нем метрики. Элементы множества X в соответствии с геометрической терминологией обычно называют *точками*.

Заметим, что если в неравенстве треугольника c) положить $x_3 = x_1$, то с учетом аксиом a) и b) метрики получим, что

$$0 \leqslant d(x_1, x_2),$$

т. е. расстояние, удовлетворяющее аксиомам a), b), c), неотрицательно.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел становится метрическим пространством, если для чисел x_1, x_2 положить $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$, как мы это всегда и делали.

Пример 2. На $\mathbb{R}$ можно ввести и много других метрик. Тривиальной метрикой является, например, такая, при которой между любыми двумя различными точками расстояние полагается равным единице.

Значительно содержательнее следующая метрика на $\mathbb{R}$. Пусть $x \mapsto f(x)$ — определенная для $x \geqslant 0$ неотрицательная функция, обращающаяся в нуль лишь при $x = 0$. Если эта функция строго выпукла вверх, то, полагая для точек $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$d(x_1, x_2) = f(|x_1 - x_2|), \tag{2}$$

получим метрику на $\mathbb{R}$.

Аксиомы a), b) здесь, очевидно, выполнены, а неравенство треугольника следует из того, что, как легко проверить, f строго монотонна и при $0 < a < b$ удовлетворяет неравенствам

$$f(a+b) - f(b) < f(a) - f(0) = f(a).$$

В частности, можно было бы положить $d(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 - x_2|}$ или $d(x_1, x_2) = \frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|}$. В последнем случае расстояние между любыми точками прямой меньше единицы.

Пример 3. В $\mathbb{R}^n$, кроме традиционного расстояния

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_1^i - x_2^i|^2} \tag{3}$$

между точками $x_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^n)$, $x_2 = (x_2^1, \ldots, x_2^n)$, можно ввести расстояние

$$d_p(x_1, x_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_1^i - x_2^i|^p \right)^{1/p}, \tag{4}$$

где $p \geqslant 1$. То, что для функции (4) выполнено неравенство треугольника, вытекает из неравенства Минковского (см. гл. V, § 4, п. 2).

Пример 4. Если в печатном тексте встретилось слово с искаженными буквами, то, если дефектов не слишком много, мы без особого труда восстанавливаем слово, исправляя ошибки. Однако исправление ошибок и получение слова — операция не всегда однозначная, и потому при прочих равных условиях предпочтение надо отдать той расшифровке искаженного текста, для получения которой потребуется сделать меньше исправлений. В соответствии со сказанным в теории кодирования на множестве всех последовательностей длины n, состоящих из нулей и единиц, используется метрика (4) при $p = 1$.

Геометрически множество таких последовательностей интерпретируется как множество вершин единичного куба $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x^i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ в $\mathbb{R}^n$. Расстояние между двумя вершинами — это число перемен нулей и единиц, необходимое, чтобы получить из координат одной из этих вершин координаты другой вершины. Каждая такая перемена есть переход вдоль одного из ребер куба. Таким образом, рассматриваемое расстояние есть кратчайший путь по ребрам куба между рассматриваемыми его вершинами.

Пример 5. При сравнении результатов двух серий из n однотипных измерений чаще всего используют метрику (4) при $p = 2$. Расстояние между

точками в этой метрике называют обычно их *средним квадратичным уклонением*.

Пример 6. Если в (4) сделать предельный переход при $p \to +\infty$, то, как легко видеть, получается следующая метрика в $\mathbb{R}^n$:

$$d(x_1, x_2) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_1^i - x_2^i|. \tag{5}$$

Пример 7. Множество $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке, становится метрическим пространством, если для функций f, g из $C[a, b]$ положить

$$d(f, g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|. \tag{6}$$

Аксиомы a), b) метрики, очевидно, выполнены, а неравенство треугольника следует из того, что

$$|f(x) - h(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leqslant d(f, g) + d(g, h),$$

т. е.

$$d(f, h) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - h(x)| \leqslant d(f, g) + d(g, h).$$

Метрика (6) — так называемая *равномерная*, или *чебышевская, метрика* в $C[a, b]$ — используется тогда, когда мы желаем заменить одну функцию другой, например, полиномом, по которой можно было бы вычислять значения первой функции с нужной точностью в любой точке $x \in [a, b]$. Величина $d(f, g)$ как раз характеризует точность такого приближенного расчета.

Метрика (6) в $C[a, b]$ очень схожа с метрикой (5) в $\mathbb{R}^n$.

Пример 8. Подобно метрике (4) в $C[a, b]$ при $p \geqslant 1$ можно ввести метрику

$$d_p(f, g) = \left(\int_a^b |f - g|^p(x)\, dx \right)^{1/p}. \tag{7}$$

То, что при $p \geqslant 1$ это действительно метрика, следует из неравенства Минковского для интегралов, получающегося предельным переходом из неравенства Минковского, которое можно написать для интегральных сумм.

Особо важными частными случаями метрики (7) являются: при $p = 1$ — интегральная метрика; при $p = 2$ — метрика среднего квадратичного уклонения; при $p = +\infty$ — равномерная метрика.

Пространство $C[a, b]$, наделенное метрикой (7), часто обозначают символом $C_p[a, b]$. Можно проверить, что $C_\infty[a, b]$ есть пространство $C[a, b]$, наделенное метрикой (6).

Пример 9. Метрику (7) можно было бы использовать также на множестве $\mathcal{R}[a, b]$ функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$. Однако поскольку интеграл от модуля разности двух функций может обратиться в нуль, даже если функции не совпадают тождественно, то аксиома a) в этом случае не будет выполнена. Мы знаем, однако, что интеграл от неотрица-

тельной функции $\varphi \in \mathcal{R}[a, b]$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = 0$ почти во всех точках отрезка $[a, b]$.

Таким образом, если разбить $\mathcal{R}[a, b]$ на классы эквивалентных функций, причем функции из $\mathcal{R}[a, b]$ считать эквивалентными, если они отличаются не более чем на множестве меры нуль, то на совокупности $\widetilde{\mathcal{R}}[a, b]$ таких классов эквивалентности соотношение (7) действительно задает метрику. Множество $\widetilde{\mathcal{R}}[a, b]$, наделенное этой метрикой, обозначается через $\widetilde{\mathcal{R}}_p[a, b]$, а иногда и просто через $\mathcal{R}_p[a, b]$.

Пример 10. В множестве $C^{(k)}[a, b]$ функций, определенных на $[a, b]$ и имеющих на этом отрезке непрерывные производные до порядка k включительно, можно определить следующую метрику:

$$d(f, g) = \max\{M_0, \ldots, M_k\}, \tag{8}$$

где

$$M_i = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)|, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Используя то, что (6) есть метрика, легко проверить, что и (8) есть метрика.

Предположим, например, что f есть координата движущейся точки как функция времени. Если ставится ограничение на допустимый район пребывания точки в промежуток времени $[a, b]$ и запрещается превышать определенную скорость, а, кроме того, желают иметь некоторый комфорт, состоящий в том, что ускорения не должны превышать определенный уровень, то естественно рассмотреть для функции $f \in C^{(2)}[a, b]$ набор

$$\Big\{\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|, \ \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|, \ \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|\Big\}$$

и по этим характеристикам два движения f, g считать близкими, если величина (8) для них мала.

Рассмотренные примеры показывают, что одно и то же множество можно метризовать различными способами. Введение той или иной метрики диктуется обычно самой постановкой задачи. Сейчас же мы будем интересоваться самыми общими свойствами метрических пространств, присущими им всем.

2. Открытые и замкнутые подмножества метрического пространства. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Подобно тому, как это было сделано в главе VII, § 1 для случая $X = \mathbb{R}^n$, в общем случае тоже можно ввести понятия шара с центром в данной точке, открытого множества, замкнутого множества, окрестности точки, предельной точки множества и т. д.

Напомним эти основные для дальнейшего понятия.

Определение 2. При $\delta > 0$ и $a \in X$ множество

$$B(a, \delta) = \{x \in X \mid d(a, x) < \delta\}$$

называется *шаром с центром $a \in X$ радиуса δ* или также *δ-окрестностью точки a*.

В случае общего метрического пространства это название удобно, но его не следует отождествлять с традиционным геометрическим образом, к которому мы привыкли в $\mathbb{R}^3$.

Пример 11. Единичный шар в $C[a, b]$ с центром в функции, тождественно равной нулю на $[a, b]$, состоит из тех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, модуль которых меньше единицы на этом отрезке.

Пример 12. Пусть X — единичный квадрат в $\mathbb{R}^2$, расстояние между точками которого определяется как расстояние между этими же точками в $\mathbb{R}^2$. Тогда X является метрическим пространством, причем взятый сам по себе квадрат X с такой метрикой можно считать шаром любого радиуса $\rho \geqslant \sqrt{2}/2$ относительно своего центра.

Ясно, что так можно было бы построить шары весьма причудливой формы. Так что термин шар не следует понимать слишком буквально.

Определение 3. Множество $G \subset X$ называется *открытым в метрическом пространстве* (X, d), если для любой точки $x \in G$ найдется шар $B(x, \delta)$ такой, что $B(x, \delta) \subset G$.

Из этого определения, очевидно, следует, что само X — открытое в (X, d) множество; пустое множество $\varnothing$ также открыто. Теми же рассуждениями, что и в случае $\mathbb{R}^n$, можно доказать, что шар $B(a, r)$ или его внешность $\{x \in X \mid d(a, x) > r\}$ суть открытые множества. (См. гл. VIII, § 1, примеры 3, 4.)

Определение 4. Множество $\mathscr{F} \subset X$ называется *замкнутым в* (X, d), если его дополнение $X \setminus \mathscr{F}$ открыто в (X, d).

В частности, отсюда заключаем, что *замкнутый шар*

$$\widetilde{B}(a, r) := \{x \in X \mid d(a, x) \leqslant r\}$$

является множеством, замкнутым в метрическом пространстве (X, d).

Для открытых и замкнутых множеств в метрическом пространстве (X, d) справедливо

Утверждение 1. a) *Объединение* $\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$ *множеств любой системы* $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ *множеств* G_α, *открытых в* X, *является множеством, открытым в* X.

b) *Пересечение* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$, *конечного числа множеств, открытых в* X, *является множеством, открытым в* X.

a′) *Пересечение* $\bigcap\limits_{\alpha \in A} \mathscr{F}_\alpha$ *множеств любой системы* $\{\mathscr{F}_\alpha, \alpha \in A\}$ *множеств* $\mathscr{F}_\alpha$, *замкнутых в* X, *является множеством, замкнутым в* X.

b′) *Объединение* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathscr{F}_i$ *конечного числа множеств, замкнутых в* X, *является множеством, замкнутым в* X.

Доказательство утверждения 1 дословно повторяет доказательство соответствующего утверждения для открытых и замкнутых множеств в $\mathbb{R}^n$, и мы его опускаем. (См. гл. VII, § 1, утверждение 1.)

Определение 5. Открытое в X множество, содержащее точку $x \in X$, называется *окрестностью* этой точки в X.

Определение 6. Точка $x \in X$ по отношению к множеству $E \subset X$ называется

внутренней точкой E, если она содержится в E вместе с некоторой своей окрестностью;

внешней точкой E, если она является внутренней точкой дополнения к E в X,

граничной точкой E, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой по отношению к E (т. е. если в любой окрестности этой точки имеются как точки, принадлежащие, так и точки, не принадлежащие множеству E).

Пример 13. Все точки шара $B(a, r)$ являются его внутренними точками, а множество $C_X \widetilde{B}(a, r) = X \setminus \widetilde{B}(a, r)$ состоит из точек, внешних по отношению к шару $B(a, r)$.

В случае пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой d в $\mathbb{R}^n$ сфера $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) = r > 0\}$ является множеством граничных точек шара $B(a, r)$[1].

Определение 7. Точка $a \in X$ называется *предельной* для множества $E \subset X$, если для любой ее окрестности $O(a)$ множество $E \cap O(a)$ бесконечно.

Определение 8. Объединение множества E и всех его предельных точек в X называется *замыканием* множества E в X.

Как и прежде, замыкание множества $E \subset X$ будем обозначать через $\overline{E}$.

Утверждение 2. *Множество $\mathscr{F} \subset X$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Итак,

$$(\mathscr{F} \text{ замкнуто в } X) \iff (\mathscr{F} = \overline{\mathscr{F}} \text{ в } X).$$

Доказательство мы опускаем, так как оно повторяет доказательство аналогичного утверждения в случае, когда $X = \mathbb{R}^n$, изложенного в гл. VII, § 1.

3. Подпространство метрического пространства. Если (X, d) — метрическое пространство, E — подмножество X, то, полагая для любой пары точек x_1, x_2 из E расстояние равным $d(x_1, x_2)$, т. е. расстоянию между этими точками в X, мы получим метрическое пространство (E, d), которое по отношению к исходному пространству (X, d) принято называть подпространством.

Итак, мы принимаем следующее

Определение 9. Метрическое пространство (X_1, d_1) называется *подпространством метрического пространства* (X, d), если $X_1 \subset X$ и для любой пары точек a, b множества X_1 справедливо равенство $d_1(a, b) = d(a, b)$.

---

[1]В связи с примером 13 см. также задачу 2 в конце этого параграфа.

Поскольку шар $B_1(a,r)=\{x\in X_1 \mid d_1(a,x)<r\}$ в подпространстве (X_1,d_1) метрического пространства (X,d), очевидно, является пересечением

$$B_1(a,r)=X_1\cap B(a,r)$$

множества $X_1\subset X$ с шаром $B(a,r)$ в X, то всякое открытое в X_1 множество имеет вид

$$G_1=X_1\cap G,$$

где G — множество, открытое в X, а всякое замкнутое в X_1 множество $\mathscr{F}_1$ имеет вид

$$\mathscr{F}_1=X\cap\mathscr{F},$$

где $\mathscr{F}$ — множество, замкнутое в X.

Из сказанного следует, что свойство множества, лежащего в метрическом пространстве, быть открытым или замкнутым относительно и зависит от этого объемлющего пространства.

Пример 14. Интервал $|x|<1$, $y=0$ оси абсцисс плоскости $\mathbb{R}^2$ со стандартной метрикой в $\mathbb{R}^2$ является метрическим пространством (X_1,d_1), которое, как и всякое метрическое пространство, замкнуто в себе, ибо содержит все свои предельные точки в X_1. Вместе с тем очевидно, что X_1 не является замкнутым множеством в $\mathbb{R}^2=X$.

Этот же пример показывает, что и понятие открытости множества также относительно.

Пример 15. Множество $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с метрикой (7) является подпространством метрического пространства $\mathscr{R}_p[a,b]$. Однако, если на $C[a,b]$ рассматривать метрику (6), а не (7), то это уже не будет иметь место.

4. Прямое произведение метрических пространств. Если (X_1,d_1) и (X_2,d_2) — два метрических пространства, то в прямом произведении $X_1\times X_2$ можно ввести метрику d. Наиболее распространенные способы введения метрики в $X_1\times X_2$ состоят в следующем. Если $(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$ и $(x_1',x_2')\in$ $\in X_1\times X_2$, то можно положить

$$d((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=\sqrt{d_1^2(x_1,x_1')+d_2^2(x_2,x_2')},$$

или

$$d((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=d_1(x_1,x_1')+d_2(x_2,x_2'),$$

или

$$d((x_1,x_2),(x_1',x_2'))=\max\{d_1(x_1,x_1'),d_2(x_2,x_2')\}.$$

Легко видеть, что в любом из этих случаев мы получаем метрику на $X_1\times X_2$.

Определение 10. Если (X_1, d_1), (X_2, d_2) — два метрических пространства, то пространство $(X_1 \times X_2, d)$, где d — введенная любым из указанных выше способов метрика в $X_1 \times X_2$, будем называть *прямым произведением* исходных *метрических пространств*.

Пример 16. Пространство $\mathbb{R}^2$ можно считать прямым произведением двух метрических пространств $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой на $\mathbb{R}$, а метрическое пространство $\mathbb{R}^3$ есть прямое произведение $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ метрических пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Задачи и упражнения

1. a) Развивая пример 2, покажите, что если $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная строго выпуклая вверх функция, причем $f(0) = 0$, а (X, d) — метрическое пространство, то на X можно определить новую метрику d_f следующим соотношением:

$$d_f(x_1, x_2) = f(d(x_1, x_2)).$$

b) Покажите, что на любом метрическом пространстве (X, d) можно ввести метрику $d'(x_1, x_2) = \dfrac{d(x_1, x_2)}{1 + d(x_1, x_2)}$, в которой расстояния между точками не будут превосходить единицу.

2. Пусть (X, d) — метрическое пространство с указанной в начале примера 2 тривиальной (*дискретной*) метрикой, и пусть $a \in X$. Каковы в данном случае множества $B(a, 1/2)$, $B(a, 1)$, $\overline{B}(a, 1)$, $\widetilde{B}(a, 1)$, $B(a, 3/2)$ и множества $\{x \in X \mid d(a, x) = 1/2\}$, $\{x \in X \mid d(a, x) = 1\}$, $\overline{B}(a, 1) \setminus B(a, 1)$, $\widetilde{B}(a, 1) \setminus B(a, 1)$?

3. a) Верно ли, что объединение любого семейства замкнутых множеств является множеством замкнутым?

b) Всякая ли граничная точка множества является его предельной точкой?

c) Верно ли, что в любой окрестности граничной точки множества имеются как внутренние, так и внешние точки этого множества?

d) Покажите, что множество граничных точек любого множества является замкнутым множеством.

4. a) Докажите, что если (Y, d_Y) есть подпространство метрического пространства (X, d_X), то для любого открытого (замкнутого) множества G_Y ($\mathscr{F}_Y$) в Y найдется такое открытое (замкнутое) множество G_X ($\mathscr{F}_X$) в X, что $G_Y = Y \cap G_X$ ($\mathscr{F}_Y = Y \cap \mathscr{F}_X$).

b) Проверьте, что если открытые множества G'_Y, G''_Y из Y не пересекаются, то соответствующие множества G'_X, G''_X в X можно выбрать так, что они тоже не будут иметь общих точек.

5. Имея метрику d на множестве X, можно попытаться определить расстояние $\tilde{d}(A, B)$ между множествами $A \subset X$ и $B \subset X$ следующим образом:

$$\tilde{d}(A, B) = \inf_{a \in A,\, b \in B} d(a, b).$$

a) Приведите пример метрического пространства и двух замкнутых не пересекающихся его подмножеств A, B, для которых $\tilde{d}(A, B) = 0$.

b) Покажите, следуя Хаусдорфу, что на множестве замкнутых подмножеств метрического пространства (X, d) можно ввести *метрику Хаусдорфа* D, полагая, что для $A \subset X$ и $B \subset X$

$$D(A, B) := \max\Big\{\sup_{a \in A} \tilde{d}(a, B),\ \sup_{b \in B} \tilde{d}(A, b)\Big\}.$$

§ 2. Топологическое пространство

Для вопросов, связанных с понятием предела функции или отображения, во многих случаях существенным является не наличие той или иной метрики в пространстве, а возможность сказать, что такое окрестность точки. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что само определение предела или определение непрерывности может быть сформулировано в терминах окрестностей. Топологическое пространство является тем математическим объектом, на котором операция предельного перехода и непрерывность отображения изучаются в наиболее общем виде.

1. Основные определения

Определение 1. Говорят, что множество X *наделено структурой топологического пространства*, или *наделено топологией*, или что X есть *топологическое пространство*, если указана система τ подмножеств X (называемых *открытыми множествами в* X), обладающая следующими свойствами:

a) $\varnothing \in \tau$; $X \in \tau$.

b) $(\forall \alpha \in A \ (\tau_\alpha \in \tau)) \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} \tau_\alpha \in \tau$.

c) $(\tau_i \in \tau;\ i = 1, \ldots, n) \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} \tau_i \in \tau$.

Таким образом, топологическое пространство есть пара (X, τ), состоящая из множества X и системы τ выделенных его подмножеств, обладающей теми свойствами, что τ содержит пустое множество и все множество X, что объединение любого числа множеств системы τ есть множество системы τ и пересечение конечного числа (любых двух) множеств системы τ есть множество системы τ.

Как видно, в аксиоматике a), b), c) топологического пространства постулированы те свойства открытых множеств, которые мы уже доказали в случае метрического пространства. Таким образом, любое метрическое пространство с определенным выше понятием открытого множества в нем является топологическим пространством.

Итак, *задать топологию* в X значит указать систему τ подмножеств X, удовлетворяющую аксиомам a), b), c) топологического пространства.

Задание метрики в X, как мы видели, автоматически задает топологию на X, индуцированную этой метрикой. Следует, однако, заметить, что разные метрики на X могут порождать на этом множестве одну и ту же топологию.

Пример 1. Пусть
$$X = \mathbb{R}^n \quad (n > 1).$$
Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ метрику $d_1(x_1, x_2)$, задаваемую соотношением (5) § 1, и метрику $d_2(x_1, x_2)$, определенную формулой (3) § 1.

Из неравенств
$$d_1(x_1, x_2) \leqslant d_2(x_1, x_2) \leqslant \sqrt{n}\, d_1(x_1, x_2),$$

очевидно, следует, что каждый шар $B(a, r)$ с центром в произвольной точке $a \in X$, понимаемый в смысле одной из этих метрик, содержит шар с тем же центром, понимаемый в смысле другой метрики. Отсюда в силу определения открытого подмножества метрического пространства вытекает, что обе метрики индуцируют на X одну и ту же топологию.

Почти все топологические пространства, которые мы будем активно использовать в пределах этого курса, являются метрическими. Не следует, однако, думать, что всякое топологическое пространство можно метризовать, т. е. наделить его метрикой, открытые множества в которой будут совпадать с открытыми множествами системы τ, задающей топологию на X. Условия, при которых это можно сделать, составляют содержание так называемых метризационных теорем.

Определение 2. Если (X, τ) — топологическое пространство, то множества системы τ называют *открытыми*, а дополнения к ним в X — *замкнутыми множествами* топологического пространства (X, τ).

Топологию τ в множестве X редко задают перечислением всех множеств системы τ. Чаще систему τ задают, указывая лишь некоторый набор подмножеств X, объединением и пересечением которых можно получить любое множество системы τ. Весьма важным поэтому является

Определение 3. *Базой топологического пространства* (X, τ) (*открытой базой* или *базой топологии*) называется такое семейство $\mathfrak{B}$ открытых подмножеств X, что каждое открытое множество $G \in \tau$ является объединением некоторой совокупности элементов семейства $\mathfrak{B}$.

Пример 2. Если (X, d) — метрическое пространство, а (X, τ) — соответствующее ему топологическое пространство, то совокупность

$$\mathfrak{B} = \{B(a, r)\}$$

всех шаров, где $a \in X$ и $r > 0$, очевидно, является базой топологии τ. Более того, если брать систему $\mathfrak{B}$ всех шаров с положительными рациональными радиусами r, то эта система также будет базой топологии τ.

Итак, топологию τ можно задать, описав лишь базу этой топологии. Как видно из примера 2, топологическое пространство может иметь много различных баз топологии.

Определение 4. Минимальная мощность баз топологического пространства называется его *весом*.

Мы будем, как правило, иметь дело с топологическими пространствами, допускающими счетную базу топологии (см., однако, задачи 4 и 6).

Пример 3. Если в $\mathbb{R}^k$ взять систему $\mathfrak{B}$ шаров всевозможных рациональных радиусов $r = \frac{m}{n} > 0$ с центрами во всевозможных рациональных точках

$$\left(\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}\right) \in \mathbb{R}^k,$$

то мы, очевидно, получим счетную базу стандартной топологии пространства $\mathbb{R}^k$. Нетрудно проверить, что конечной системой открытых множеств

стандартную топологию в $\mathbb{R}^k$ задать невозможно. Таким образом, стандартное топологическое пространство $\mathbb{R}^k$ имеет счетный вес.

Определение 5. *Окрестностью* точки топологического пространства (X, τ) называется открытое множество, содержащее эту точку.

Ясно, что если на X задана топология τ, то для каждой точки определена система ее окрестностей.

Ясно также, что система всех окрестностей всевозможных точек топологического пространства может служить базой топологии этого пространства. Таким образом, топологию в X можно ввести, описав окрестности точек множества X. Именно эта форма задания топологии в X и была начальной в определении топологического пространства[1]. Заметьте, что, например, в метрическом пространстве саму топологию мы ввели по существу, указав лишь, что такое δ-окрестность точки. Приведем еще

Пример 4. Рассмотрим множество $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ вещественнозначных непрерывных функций, определенных на всей числовой прямой, и на его основе построим новое множество — множество ростков непрерывных функций. Две функции $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ будем считать эквивалентными в точке $a \in \mathbb{R}$, если найдется такая окрестность $U(a)$ этой точки, что $\forall x \in U(a)$ $(f(x) = g(x))$. Введенное отношение действительно является отношением эквивалентности (оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Класс эквивалентных между собой в точке $a \in \mathbb{R}$ непрерывных функций назовем *ростком непрерывных функций* в этой точке. Если f — одна из функций, порождающих росток в точке a, то сам росток будем обозначать символом f_a. Определим теперь окрестность ростка. Пусть $U(a)$ — окрестность точки a в $\mathbb{R}$, f — определенная в $U(a)$ функция, порождающая росток f_a в точке a. Эта же функция в любой точке $x \in U(a)$ порождает свой росток f_x. Множество $\{f_x\}$ ростков, отвечающих точкам $x \in U(a)$, назовем *окрестностью ростка* f_a. Приняв множество таких окрестностей всевозможных ростков за базу топологии, мы превратим множество ростков непрерывных функций в топологическое пространство. Полезно заметить, что в полученном топологическом пространстве две различные точки (ростки) f_a, g_a могут не иметь непересекающихся окрестностей (рис. 66).

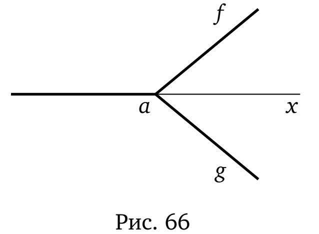


Рис. 66

Определение 6. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если в нем выполнена *аксиома Хаусдорфа*: любые две различные точки пространства обладают непересекающимися окрестностями.

[1] Понятия метрического и топологического пространства были сформулированы в явном виде в начале двадцатого столетия. В 1906 г. французский математик М. Р. Фреше (1878—1973) ввел понятие метрического пространства, а в 1914 г. немецкий математик Ф. Хаусдорф (1868—1942) определил топологическое пространство.

Пример 5. Любое метрическое пространство, очевидно, является хаусдорфовым, поскольку для любых двух точек $a, b \in X$ таких, что $d(a, b) > 0$, их шаровые окрестности $B\Big(a, \frac{1}{2}d(a, b)\Big)$, $B\Big(b, \frac{1}{2}d(a, b)\Big)$ не имеют общих точек.

Вместе с тем, как показывает пример 4, бывают и не хаусдорфовы топологические пространства. Пожалуй, простейшим примером тут может служить топологическое пространство (X, τ) с простейшей топологией $\tau = \{\varnothing, X\}$. Если X содержит хотя бы две точки, то (X, τ), очевидно, не хаусдорфово. Более того, дополнение $X \setminus x$ к точке в этом пространстве не является открытым множеством.

Мы будем работать исключительно с хаусдорфовыми пространствами.

Определение 7. Множество $E \subset X$ называется *всюду плотным* в топологическом пространстве (X, τ), если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $U(x)$ пересечение $E \cap U(x)$ непусто.

Пример 6. Если в $\mathbb{R}$ рассмотреть стандартную топологию, то множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел является всюду плотным в $\mathbb{R}$. Аналогично множество $\mathbb{Q}^n$ рациональных точек $\mathbb{R}^n$ всюду плотно в $\mathbb{R}^n$.

Можно показать, что в каждом топологическом пространстве имеется всюду плотное множество, мощность которого не превосходит веса этого топологического пространства.

Определение 8. Метрическое пространство, обладающее счетным всюду плотным множеством, называется *сепарабельным пространством*.

Пример 7. Метрическое пространство $(\mathbb{R}^n, d)$ в любой из стандартных метрик является сепарабельным пространством, поскольку множество $\mathbb{Q}^n$ всюду плотно в нем.

Пример 8. Метрическое пространство $(C([0, 1], \mathbb{R}), d)$ с метрикой, определенной соотношением (6), также сепарабельно, ибо, как следует из равномерной непрерывности функций $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$, график любой такой функции сколь угодно точно можно аппроксимировать конечнозвенной ломаной, вершины которой имеют рациональные координаты. Множество таких ломаных счетно.

Мы будем иметь дело главным образом с сепарабельными пространствами.

Отметим теперь, что поскольку определение окрестности точки в топологическом пространстве дословно совпадает с определением окрестности точки в метрическом пространстве, то, естественно, рассмотренные в § 1 понятия *внутренней, внешней, граничной, предельной* точки множества и понятия *замыкания* множества, использующие только понятие окрестности, без изменения переносятся на случай произвольного топологического пространства.

Кроме того (как видно из проведенного в гл. VII, § 1 доказательства утверждения 2), справедливо также утверждение о том, что множество в хаусдорфовом топологическом пространстве замкнуто в том и только в том случае, когда оно содержит все свои предельные точки.

2. Подпространство топологического пространства. Пусть (X, τ_X) — топологическое пространство, а Y — подмножество в X. Топология τ_X позволяет определить следующую топологию τ_Y в Y, называемую *индуцированной* или *относительной топологией* в $Y \subset X$. Открытым в Y назовем любое множество G_Y вида $G_Y = Y \cap G_X$, где G_X — множество, открытое в X.

Нетрудно проверить, что возникающая система τ_Y подмножеств Y удовлетворяет аксиомам открытых множеств топологического пространства.

Определение открытых в Y множеств G_Y, как видно, согласуется с тем, которое мы получили в п. 3 предыдущего параграфа в случае, когда Y было подпространством метрического пространства X.

Определение 9. Подмножество $Y \subset X$ топологического пространства (X, τ) с индуцированной в Y топологией τ_Y называется *подпространством топологического пространства* (X, τ).

Ясно, что множество, открытое в (Y, τ_Y), уже не обязано быть открытым в (X, τ_X).

3. Прямое произведение топологических пространств. Если (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — два топологических пространства с системами $\tau_1 = \{G_1\}$, $\tau_2 = \{G_2\}$ открытых множеств, то в $X_1 \times X_2$ можно ввести топологию, считая ее базой всевозможные множества вида $G_1 \times G_2$.

Определение 10. Топологическое пространство $(X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$, базу топологии которого составляют множества вида $G_1 \times G_2$, где G_i — открытое множество в топологическом пространстве (X_i, τ_i), $i = 1, 2$, называется *прямым произведением* топологических пространств (X_1, τ_1), (X_2, τ_2).

Пример 9. Если $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$ рассматривать со стандартной топологией, то, как видно, $\mathbb{R}^2$ является прямым произведением $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, ибо всякое открытое множество в $\mathbb{R}^2$ можно получить, например, как объединение «квадратных» окрестностей всех его точек. Квадраты же (со сторонами, параллельными координатным осям) являются прямым произведением интервалов — открытых в $\mathbb{R}$ множеств.

Следует обратить внимание на то, что множества вида $G_1 \times G_2$, где $G_1 \in \tau_1$ и $G_2 \in \tau_2$, образуют лишь базу топологии, а не все открытые множества прямого произведения топологических пространств.

Задачи и упражнения

1. Проверьте, что если (X, d) — метрическое пространство, то $(X, d/(1+d))$ — тоже метрическое пространство, причем метрики d и $d/(1+d)$ индуцируют на X одну и ту же топологию. (См. также задачу 1 из предыдущего параграфа.)

2. a) В множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел окрестностью числа $n \in \mathbb{N}$ назовем арифметическую прогрессию с разностью d, взаимно простой с n. Является ли возникающее при этом топологическое пространство хаусдорфовым?

b) Какова топология $\mathbb{N}$ как подмножества $\mathbb{R}$ действительных чисел, взятых со стандартной топологией?

c) Опишите все открытые подмножества $\mathbb{R}$.

3. Если на одном и том же множестве заданы две топологии τ_1 и τ_2, то говорят, что топология τ_2 *сильнее* топологии τ_1, если $\tau_1 \subset \tau_2$, т. е. в τ_2, кроме открытых множеств, составляющих систему τ_1, содержатся еще некоторые множества, не вошедшие в τ_1.

a) Сравнимы ли две топологии на $\mathbb{N}$, рассмотренные в предыдущей задаче?

b) Если на множестве $C[0,1]$ непрерывных вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[0,1]$, ввести метрику сначала соотношением (6) из § 1, а затем соотношением (7) из того же параграфа, то на $C[a,b]$ возникнут, вообще говоря, две топологии. Сравнимы ли они?

4. a) Докажите подробно, что рассмотренное в примере 4 пространство ростков непрерывных функций не хаусдорфово.

b) Объясните, почему это топологическое пространство не метризуемо.

c) Каков вес этого пространства?

5. a) Сформулируйте аксиомы топологического пространства на языке замкнутых множеств.

b) Проверьте, что повторное замыкание множества совпадает с его замыканием.

c) Проверьте, что граница любого множества является множеством замкнутым.

d) Покажите, что если $\mathscr{F}$ замкнуто, а G открыто в (X,τ), то множество $G \setminus \mathscr{F}$ открыто в (X,τ).

e) Если (Y,τ_Y) — подпространство топологического пространства (X,τ_X), а множество E таково, что $E \subset Y \subset X$ и $E \in \tau_X$, то $E \in \tau_Y$.

6. Топологическое пространство (X,τ), в котором любая точка является замкнутым множеством, называют *топологическим пространством в сильном смысле* или *τ_1-пространством*. Проверьте, что

a) всякое хаусдорфово пространство является τ_1-пространством (отчасти поэтому хаусдорфовы пространства называют *τ_2-пространствами*);

b) не всякое τ_1-пространство является τ_2-пространством (см. пример 4);

c) двоеточие $X=\{a,b\}$ с системой открытых множеств $\tau=\{\varnothing,X\}$ не является τ_1-пространством;

d) в τ_1-пространстве множество $\mathscr{F}$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}$ содержит все свои предельные точки.

7. a) Докажите, что в любом топологическом пространстве имеется всюду плотное множество, мощность которого не превосходит веса пространства.

b) Проверьте сепарабельность метрических пространств $C[a,b]$, $C^{(k)}[a,b]$, $\mathscr{R}_1[a,b]$, $\mathscr{R}_p[a,b]$ (формулы соответствующих метрик см. в § 1).

c) Проверьте, что если на множестве ограниченных вещественнозначных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, ввести метрику соотношением (6) из § 1, то получится не сепарабельное метрическое пространство.

§ 3. Компакты

1. Определение и общие свойства компакта

Определение 1. Множество K в топологическом пространстве (X,τ) называется *компактом* (бикомпактом[1]), если из любого покрытия K множествами, открытыми в X, можно выделить конечное покрытие K.

---

[1]То понятие компакта, которое вводит определение 1, в топологии иногда именуют *бикомпактом*.

Пример 1. Отрезок $[a, b]$ множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, рассматриваемого в стандартной топологии, является компактом, что немедленно вытекает из доказанной в гл. II, § 1, п. 3 леммы о возможности выделить конечное покрытие из покрытия отрезка интервалами.

И вообще m-мерный промежуток

$$I^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \ldots, m\}$$

в $\mathbb{R}^m$ является компактом, что было установлено в гл. VII, § 1, п. 3.

В гл. VII, § 1, п. 3 было доказано также, что подмножество $\mathbb{R}^m$ является компактом в том и только в том случае, когда оно замкнуто и ограничено.

В отличие от относительных свойств множества быть открытым или замкнутым в топологическом пространстве, свойство множества быть компактом абсолютно в том смысле, что не зависит от объемлющего пространства. Точнее, имеет место следующее

Утверждение 1. *Подмножество K топологического пространства (X, τ) является компактом в X тогда и только тогда, когда K является компактом в себе как в топологическом пространстве с индуцированной из (X, τ) топологией.*

◄ Сформулированное утверждение следует из определения компакта и того обстоятельства, что каждое множество G_K, открытое в K, получается пересечением K с некоторым множеством G_X, открытым в X. ►

Таким образом, если (X, τ_X) и (Y, τ_Y) — два топологических пространства, индуцирующих одинаковую топологию на множестве $K \subset (X \cap Y)$, то K одновременно компактно или нет как в X, так и в Y.

Пример 2. Пусть d — стандартная метрика на $\mathbb{R}$, а $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ — единичный интервал в $\mathbb{R}$. Метрическое пространство (I, d) замкнуто (в себе) и ограничено, однако это не компакт, ибо, например, оно не является компактом в $\mathbb{R}$.

Установим теперь важнейшие свойства компактов.

Лемма 1 (о замкнутости компакта). *Если K — компакт в хаусдорфовом пространстве (X, τ), то K — замкнутое подмножество X.*

◄ В силу критерия замкнутости множества достаточно проверить, что любая предельная для K точка $x_0 \in X$ принадлежит K.

Пусть $x_0 \notin K$. Для каждой точки $x \in K$ построим такую ее открытую окрестность $G(x)$, что x_0 обладает окрестностью, не пересекающейся с $G(x)$. Совокупность $G(x)$, $x \in K$, всех таких окрестностей образует открытое покрытие K, из которого выделяется конечное покрытие $G(x_1), \ldots, G(x_n)$. Если теперь $O_i(x_0)$ — такая окрестность точки x_0, что $G(x_i) \cap O_i(x_0) = \varnothing$, то множество $O(x) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i(x_0)$ также является окрестностью точки x_0, причем $G(x_i) \cap O(x_0) = \varnothing$ при любом $i = 1, \ldots, n$. Но это означает, что $K \cap O(x_0) = \varnothing$ и x_0 не может быть предельной точкой для K. ►

Лемма 2 (о вложенных компактах). *Если $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ — последовательность непустых вложенных компактов хаусдорфова пространства, то пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i$ непусто.*

◄ В силу леммы 1 множества $G_i = K_1 \setminus K_i$, $i = 1, \ldots, n, \ldots$ открыты в K_1. Если пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i$ пусто, то последовательность $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$ в совокупности образует покрытие K_1. Извлекая из него конечное покрытие, найдем, что некоторый элемент G_m последовательности уже покрывает K_1. Но по условию $K_m = K_1 \setminus G_m \neq \varnothing$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 2. ►

Лемма 3 (о замкнутом подмножестве компакта). *Замкнутое подмножество $\mathscr{F}$ компакта K само является компактом.*

◄ Пусть $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ — открытое покрытие $\mathscr{F}$. Добавив к нему открытое множество $G = K \setminus \mathscr{F}$, получим открытое покрытие всего компакта K. Из этого покрытия можно извлечь конечное покрытие K. Поскольку $G \cap \mathscr{F} = \varnothing$, то, значит, из системы $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ выделяется конечное покрытие множества $\mathscr{F}$. ►

2. Метрические компакты. Далее мы установим некоторые свойства метрических компактов, т. е. метрических пространств, являющихся компактами, относительно топологии, индуцированной метрикой.

Определение 2. Говорят, что множество $E \subset X$ является *ε-сетью* в метрическом пространстве (X, d), если для любой точки $x \in X$ найдется точка $e \in E$ такая, что $d(e, x) < \varepsilon$.

Лемма 4 (о конечной ε-сети). *Если метрическое пространство (K, d) — компакт, то для любого $\varepsilon > 0$ в нем имеется конечная ε-сеть.*

◄ Для каждой точки $x \in K$ берем открытый шар $B(x, \varepsilon)$. Из открытого покрытия K этими шарами выделяем конечное покрытие $B(x_1, \varepsilon), \ldots, B(x_n, \varepsilon)$. Точки $x_1, \ldots, x_n$, очевидно, образуют искомую ε-сеть. ►

Наряду с рассуждениями, в которых выделяют конечные покрытия, в анализе часто встречаются рассуждения, в которых из произвольной последовательности извлекают сходящуюся подпоследовательность. Оказывается, справедливо следующее

Утверждение 2 (критерий метрического компакта). *Метрическое пространство (K, d) является компактом в том и только в том случае, когда из любой последовательности его точек можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из K.*

Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к некоторой точке $a \in K$, как и прежде, означает, что для любой окрестности $U(a)$ точки $a \in K$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при $n > N$ будем иметь $x_n \in U(a)$.

Подробнее о пределе мы будем говорить ниже в § 6.

Доказательству утверждения 2 предпошлем две леммы.

Лемма 5. *Если метрическое пространство (K, d) таково, что из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность, то для любого $\varepsilon > 0$ имеется конечная ε-сеть.*

◄ Если бы для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ в K не было конечной ε_0-сети, то в K можно было бы построить последовательность $\{x_n\}$ точек так, что $d(x_n, x_i) > \varepsilon_0$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и любом значении $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Из этой последовательности, очевидно, нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. ►

Лемма 6. *Если метрическое пространство (K, d) таково, что из любой последовательности его точек можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность, то любая последовательность вложенных замкнутых непустых подмножеств такого пространства имеет непустое пересечение.*

◄ Если $\mathscr{F}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{F}_n \supset \ldots$ — указанная последовательность замкнутых в K множеств, то, взяв в каждом из них по точке, получим последовательность $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, из которой извлечем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$. Ее предел $a \in K$ по построению обязан принадлежать каждому из замкнутых множеств $\mathscr{F}_i$, $i \in \mathbb{N}$. ►

Теперь докажем утверждение 2.

◄ Сначала проверим, что если (K, d) — компакт, а $\{x_n\}$ — последовательность его точек, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке K. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет всего конечное число различных значений, то утверждение очевидно, поэтому можем считать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечно много различных значений. Для $\varepsilon_1 = 1/1$ строим конечную 1-сеть и берем тот замкнутый шар $\widetilde{B}(a_k, 1)$, который содержит бесконечное число членов последовательности. По лемме 3 шар $\widetilde{B}(a_1, 1)$ сам является компактом, в котором существует конечная $\varepsilon_2 = 1/2$ сеть и ее шар $\widetilde{B}(a_2, 1/2)$, содержащий бесконечно много элементов последовательности. Так возникает последовательность

$$\widetilde{B}(a_1, 1) \supset \widetilde{B}(a_2, 1/2) \supset \ldots \supset \widetilde{B}(a_n, 1/n) \supset \ldots$$

вложенных компактов, имеющих по лемме 2 общую точку $a \in K$. Выбирая в шаре $\widetilde{B}(a_1, 1)$ точку x_{n_1}, последовательности $\{x_n\}$, затем в шаре $\widetilde{B}(a_2, 1/2)$ точку x_{n_2}, последовательности с номером $n_2 > n_1$ и т. д., получим подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, которая по построению сходится к a.

Докажем теперь обратное утверждение, т. е. проверим, что если из любой последовательности $\{x_n\}$ точек метрического пространства (K, d) можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность, то (K, d) — компакт.

В самом деле, если из некоторого открытого покрытия $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$ пространства (K, d) нельзя выделить конечное покрытие, то, построив в силу леммы 5 конечную 1-сеть в K, найдем замкнутый шар $\widetilde{B}(a_1, 1)$, который тоже нельзя покрыть конечным набором множеств системы $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$.

Этот шар $\widetilde{B}(a_1, 1)$ теперь можно считать исходным множеством, и, построив в нем конечную 1/2-сеть, найдем в нем шар $\widetilde{B}(a_2, 1/2)$, который не допускает конечного покрытия множествами системы $\{G_\alpha, \alpha \in A\}$.

Получаемая таким образом последовательность вложенных замкнутых множеств $\widetilde{B}(a_1, 1) \supset \widetilde{B}(a_2, 1/2) \supset \ldots \supset \widetilde{B}(a_n, 1/n) \supset \ldots$ в силу леммы 6 имеет, и как видно из построения, только одну общую точку $a \in K$. Эта точка покрыта некоторым множеством G_{α_0} нашей системы, и, поскольку G_{α_0} открыто, все множества $\widetilde{B}(a_n, 1/n)$ при достаточно больших значениях n должны лежать в G_{α_0}. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 2. ►

Задачи и упражнения

1. Подмножество метрического пространства называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ оно имеет конечную ε-сеть.

a) Проверьте, что полная ограниченность множества не зависит от того, формируется ли ε-сеть из точек самого множества или из точек объемлющего пространства.

b) Покажите, что подмножество полного метрического пространства (см. стр. 21) является компактом тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и замкнуто.

c) Покажите на примере, что замкнутое ограниченное множество метрического пространства не всегда вполне ограничено и, значит, не всегда является компактом.

2. Подмножество топологического пространства называется *относительно компактным*, если его замыкание является компактом.

Приведите примеры относительно компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$.

3. Топологическое пространство называется *локально компактным*, если каждая точка этого пространства имеет относительно компактную окрестность.

Приведите примеры локально компактных, но не компактных топологических пространств.

4. Покажите, что для любого локально компактного, но не компактного топологического пространства (X, τ_X) найдется такое компактное топологическое пространство (Y, τ_Y), что $X \subset Y$, а $Y \setminus X$ состоит из одной точки и пространство (X, τ_X) является подпространством топологического пространства (Y, τ_Y).

§ 4. Связные топологические пространства

Определение 1. Топологическое пространство (X, τ) называется *связным*, если в нем нет других открыто-замкнутых подмножеств[1], кроме самого X и пустого множества.

Это определение становится более прозрачным с точки зрения нашей интуиции, если ему придать следующую форму.

Топологическое пространство связно тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде объединения двух его непустых замкнутых (открытых) подмножеств без общих точек.

Определение 2. Множество E в топологическом пространстве (X, τ) называется *связным*, если оно связно как топологическое подпространство (X, τ) (с индуцированной топологией).

[1]То есть одновременно открытых и замкнутых.

Из этого определения и определения 1 вытекает, что свойство множества E быть связным не зависит от объемлющего пространства. Точнее, если (X, τ_X) и (Y, τ_Y) — топологические пространства, содержащие E и индуцирующие на E одну и ту же топологию, то E связно или нет одновременно как в X, так и в Y.

Пример 1. Пусть $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$. Множество $E_- = \{x \in E \mid x < 0\}$ непусто, не совпадает с E и в то же время открыто-замкнуто в E (как и $E_+ = \{x \in E \mid x > 0\}$), если рассматривать E как топологическое пространство с топологией, индуцированной стандартной топологией $\mathbb{R}$. Таким образом, E не связно, как и подсказывает наша интуиция.

Утверждение (о связных подмножествах $\mathbb{R}$). *Непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда для любых x, z, принадлежащих E, из $x < y < z$ следует, что $y \in E$.*

Таким образом, на прямой связными являются только промежутки (конечные или бесконечные): интервалы, полуинтервалы, отрезки.

◄ *Необходимость.* Пусть E — связное подмножество $\mathbb{R}$ и тройка точек a, b, c такова, что $a \in E$, $b \in E$, но $c \notin E$, хотя $a < c < b$. Полагая $A = \{x \in E \mid x < c\}$, $B = \{x \in E \mid x > c\}$, видим, что $a \in A$, $b \in B$, т. е. $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$ и $A \cap B = \varnothing$. Кроме того, $E = A \cup B$ и оба множества A, B открыты в E. Это противоречит связности E.

Достаточность. Пусть E — подпространство $\mathbb{R}$, обладающее тем свойством, что вместе с любой парой точек a и b ему принадлежит и всякая промежуточная точка отрезка $[a, b]$. Покажем, что E связно.

Предположим, что A — открыто-замкнутое подмножество E, причем $A \neq \varnothing$ и $B = E \setminus A \neq \varnothing$. Пусть $a \in A$ и $b \in B$. Для определенности будем считать, что $a < b$ ($a \neq b$, так как $A \cap B = \varnothing$). Рассмотрим точку $c_1 = \sup\{A \cap [a, b]\}$. Поскольку $A \ni a \leqslant c_1 \leqslant b \in B$, имеем $c_1 \in E$. Ввиду замкнутости A в E заключаем, что $c_1 \in A$.

Рассматривая теперь точку $c_2 = \inf\{B \cap [c_1, b]\}$, аналогично, ввиду замкнутости B, заключаем, что $c_2 \in B$. Таким образом, $a \leqslant c_1 < c_2 \leqslant b$, поскольку $c_1 \in A$, $c_2 \in B$ и $A \cap B = \varnothing$. Но из определений c_1 и c_2 и того, что $E = A \cup B$, теперь вытекает, что ни одна точка интервала $]c_1, c_2[$ не может принадлежать E. Это противоречит исходному свойству E. Таким образом, множество E не может иметь подмножества A с указанными свойствами, что и доказывает связность E. ►

Задачи и упражнения

1. a) Проверьте, что если A — открыто-замкнутое подмножество (X, τ), то $B = X \setminus A$ тоже является таковым.

b) Покажите, что в терминах объемлющего пространства свойство связности множества можно выразить в следующем виде: подмножество E топологического пространства (X, τ) связно тогда и только тогда, когда в X нельзя указать пару открытых (замкнутых) и не пересекающихся множеств G'_X, G''_X таких, что $E \cap G'_X \neq \varnothing$, $E \cap G''_X \neq \varnothing$ и $E \subset G'_X \cup G''_X$.

2. Покажите, что:
a) Объединение связных подпространств, имеющих общую точку, связно.
b) Пересечение связных подпространств не всегда связно.
c) Замыкание связного пространства — связно.

3. Группу $GL(n)$ невырожденных матриц порядка n с вещественными элементами можно рассматривать как открытое подмножество в произведении $\mathbb{R}^{n^2}$ топологических пространств, если с каждым элементом матрицы связывать свой экземпляр множества $\mathbb{R}$ действительных чисел. Связно ли пространство $GL(n)$?

4. Топологическое пространство называется *локально связным*, если каждая его точка обладает связной окрестностью.

a) Покажите, что из локальной связности еще не вытекает связность топологического пространства.

b) Множество E в $\mathbb{R}^2$ есть график функции $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ (при $x \neq 0$) плюс отрезок $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \wedge |y| \leqslant 1\}$ оси ординат. На E рассматривается индуцированная из $\mathbb{R}^2$ топология. Покажите, что получающееся при этом топологическое пространство является связным, но не является локально связным.

5. В гл. VII, § 2, п. 2 мы определили связное подмножество $\mathbb{R}^n$ как такое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, любые две точки которого можно соединить путем с носителем в E. В отличие от введенного в настоящем параграфе определения топологической связности, рассмотренное в гл. VII понятие именуется обычно *линейной связностью*. Проверьте, что:

a) Всякое линейно связное подмножество $\mathbb{R}^n$ является связным.

b) Не всякое связное подмножество $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$ является линейно связным (см. задачу 4).

c) Всякое связное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ является линейно связным.

§ 5. Полные метрические пространства

В этом параграфе речь будет уже только о метрических пространствах и, точнее, об одном классе таких пространств, играющем важную роль в различных отделах анализа.

1. Основные определения и примеры. По аналогии с уже известными нам из рассмотрения пространства $\mathbb{R}^n$ понятиями введем понятия фундаментальной и сходящейся последовательностей точек произвольного метрического пространства.

Определение 1. Последовательность $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ точек метрического пространства (X, d) называется *фундаментальной* последовательностью или *последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при любых номерах $m, n \in \mathbb{N}$, больших, чем N, выполняется соотношение $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ точек метрического пространства (X, d) *сходится к точке* $a \in X$ и что a есть *предел* этой последовательности, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(a, x_n) = 0$.

Последовательности, имеющие предел, будем, как и прежде, называть *сходящимися*.

Теперь (опять вспомнив $\mathbb{R}^n$) дадим основное

Определение 3. Метрическое пространство (X, d) называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность его точек является сходящейся.

Пример 1. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел со стандартной метрикой является полным метрическим пространством, что следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности.

Заметим, что поскольку всякая сходящаяся последовательность точек метрического пространства, очевидно, является фундаментальной последовательностью, то в определении полного метрического пространства в сущности просто постулируется выполнение в нем критерия Коши сходимости последовательности.

Пример 2. Если из множества $\mathbb{R}$ удалить, например, число 0, то в стандартной метрике множество $\mathbb{R}\setminus 0$ уже не будет полным пространством. Действительно, последовательность $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, его точек фундаментальна, но она не имеет предела в $\mathbb{R}\setminus 0$.

Пример 3. Пространство $\mathbb{R}^n$ с любой из стандартных метрик в нем является полным, как это было выяснено в гл. VII, § 2, п. 1.

Пример 4. Рассмотрим множество $C[a, b]$ вещественнозначных непрерывных на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функций с метрикой

$$d(f, g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)| \tag{1}$$

(см. § 1, пример 7).

Покажем, что метрическое пространство $(C[a, b], d)$ является полным.

◄ Пусть $\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ — фундаментальная последовательность функций из $C[a, b]$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \big((m > n \wedge n > N) \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall x \in [a, b]\ (|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon)\big). \tag{2}$$

При каждом фиксированном значении $x \in [a, b]$, как видно из (2), числовая последовательность $\{f_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна и по критерию Коши имеет определенный предел $f(x)$.

Итак,

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in [a, b]. \tag{3}$$

Проверим, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, т. е. $f \in C[a, b]$.

Из (2) и (3) следует, что при $n > N$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]. \tag{4}$$

Фиксируем точку $x \in [a, b]$ и проверим непрерывность функции f в этой точке. Пусть смещение h таково, что $(x + h) \in [a, b]$. Из тождества

$$f(x+h) - f(x) = f(x+h) - f_n(x+h) + f_n(x+h) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)$$

вытекает неравенство

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant \\ \leqslant |f(x+h)-f_n(x+h)|+|f_n(x+h)-f_n(x)|+|f_n(x)-f(x)|. \quad (5)$$

Крайние члены правой части последнего неравенства в силу (4) не превосходят ε, если $n > N$. Фиксировав $n > N$, получаем функцию $f_n \in C[a, b]$ и, подбирая $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, что при $|h| < \delta$ выполняется $|f_n(x+h) - f_n(x)| < \varepsilon$, получаем, что $|f(x+h)-f(x)| < 3\varepsilon$, если $|h| < \delta$. Но это и означает, что функция f непрерывна в точке x. Поскольку точка x была произвольной точкой отрезка $[a, b]$, мы показали, что $f \in C[a, b]$. ►

Итак, пространство $C[a, b]$ с метрикой (1) является полным метрическим пространством. Это очень важный и широко используемый в анализе факт.

Пример 5. Если на том же множестве $C[a, b]$ вместо метрики (1) рассмотреть интегральную метрику

$$d(f, g) = \int_a^b |f-g|(x)\, dx, \quad (6)$$

то возникающее метрическое пространство уже не будет полным.

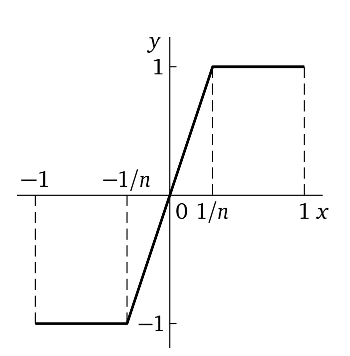


Рис. 67

◄ Ради простоты обозначений положим $[a, b] = [-1, 1]$ и рассмотрим, к примеру, последовательность $\{f_n \in C[-1, 1]; n \in \mathbb{N}\}$ функций, определенных следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/n, \\ nx, & \text{если} \quad -1/n < x < 1/n, \\ 1, & \text{если} \quad 1/n \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

(рис. 67).

Из свойств интеграла непосредственно вытекает, что эта последовательность фундаментальна в смысле метрики (6) в $C[-1, 1]$. Вместе с тем она не имеет предела в $C[-1, 1]$, ибо если бы непрерывная функция $f \in C[-1, 1]$ была пределом указанной последовательности в смысле метрики (6), то на промежутке $-1 \leqslant x < 0$ функция f должна была бы быть постоянной, равной -1, а на промежутке $0 < x \leqslant 1$ — постоянной, равной 1, что несовместимо с непрерывностью f в точке $x = 0$. ►

Пример 6. Несколько труднее показать, что даже множество $\mathcal{R}[a, b]$ определенных на отрезке $[a, b]$ вещественнозначных интегрируемых по Риману на этом отрезке функций также не является полным в смысле метрики (6)[1]. Мы покажем это, опираясь на критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

[1] По поводу самой метрики (6) на $\mathcal{R}[a, b]$ см. замечание, сделанное в примере 9 из § 1.

◄ В качестве $[a, b]$ возьмем отрезок $[0, 1]$ и построим на нем такое канторовское множество, которое не является множеством меры нуль. Пусть $\Delta \in\,]0, 1/3[$. Удалим из отрезка $[0, 1]$ среднюю его часть длины Δ, точнее, $\Delta/2$-окрестность середины отрезка $[0, 1]$. На каждом из оставшихся двух отрезков удалим среднюю часть длины $\Delta \cdot 1/3$. На каждом из четырех оставшихся отрезков удалим среднюю часть длины $\Delta \cdot 1/3^2$ и т. д. Длина всех удаленных в таком процессе интервалов равна $\Delta + \Delta \cdot 2/3 + \Delta \cdot 4/3^2 + \ldots + \Delta \cdot (2/3)^n + \ldots = 3\Delta$. Поскольку $0 < \Delta < 1/3$, имеем $1 - 3\Delta > 0$ и, как можно проверить, отсюда следует, что оставшееся на отрезке $[0, 1]$ (канторово) множество K не имеет меру нуль в смысле Лебега.

Рассмотрим теперь следующую последовательность: $\{f_n \in \mathcal{R}[0, 1];\, n \in \mathbb{N}\}$. Пусть f_n — функция, равная единице всюду на $[0, 1]$, кроме точек, выбрасываемых на первых n шагах интервалов, на которых она полагается равной нулю. Легко проверить, что эта последовательность фундаментальна в смысле метрики (6). Если бы некоторая функция $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ была пределом этой последовательности, то f должна была бы почти во всех точках отрезка $[0, 1]$ совпадать с характеристической функцией множества K. Тогда f имела бы разрывы во всех точках множества K. Но поскольку K не имеет меру нуль, из критерия Лебега можно было бы заключить, что $f \notin \mathcal{R}[0, 1]$. Значит, $\mathcal{R}[a, b]$ с метрикой (6) не является полным метрическим пространством. ►

2. Пополнение метрического пространства

Пример 7. Вернемся вновь на действительную ось и рассмотрим множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с метрикой, индуцированной стандартной метрикой на $\mathbb{R}$.

Ясно, что последовательность рациональных чисел, сходящаяся в $\mathbb{R}$ к $\sqrt{2}$, фундаментальна, но не имеет предела в $\mathbb{Q}$, т. е. $\mathbb{Q}$ с указанной метрикой не является полным пространством. Вместе с тем, $\mathbb{Q}$ оказывается подпространством полного метрического пространства $\mathbb{R}$, которое естественно рассматривать как пополнение $\mathbb{Q}$. Заметим, что множество $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ можно было бы рассматривать и как подмножество полного метрического пространства $\mathbb{R}^2$, однако называть $\mathbb{R}^2$ пополнением $\mathbb{Q}$ не представляется целесообразным.

Определение 4. Наименьшее полное метрическое пространство, содержащее данное метрическое пространство (X, d), назовем *пополнением* пространства (X, d).

Это интуитивно приемлемое определение требует по меньшей мере двух разъяснений: что такое «наименьшее» и существует ли оно.

Очень скоро мы сможем ответить на оба эти вопроса, а пока примем следующее более формальное

Определение 5. Если метрическое пространство (X, d) является подпространством полного метрического пространства (Y, d) и множество $X \subset Y$ всюду плотно в Y, то пространство (Y, d) называется *пополнением* метрического пространства (X, d).

Определение 6. Метрическое пространство (X_1, d_1) называется *изометричным* метрическому пространству (X_2, d_2), если существует биективное отображение $f: X_1 \to X_2$ такое, что для любых точек a, b из X_1 справедливо равенство $d_2(f(a), f(b)) = d_1(a, b)$. (Отображение $f: X_1 \to X_2$ называют в этом случае *изометрией*.)

Ясно, что введенное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности между метрическими пространствами. При изучении свойств метрических пространств мы изучаем не индивидуальное пространство, а свойства сразу всех изометричных ему пространств. По этой причине изометричные пространства можно не различать.

Пример 8. Две конгруэнтные фигуры на плоскости как метрические пространства изометричны, поэтому при изучении метрических свойств фигур мы вовсе отвлекаемся, например, от расположения фигуры в плоскости, отождествляя между собой все конгруэнтные фигуры.

Приняв соглашение об отождествлении изометричных пространств, можно показать, что если пополнение метрического пространства и существует, то оно единственно.

Проверим предварительно, что справедлива

Лемма. *Для любой четверки точек a, b, u, v метрического пространства (X, d) имеет место неравенство*

$$|d(a, b) - d(u, v)| \leqslant d(a, u) + d(b, v). \tag{7}$$

◄ В силу неравенства треугольника

$$d(a, b) \leqslant d(a, u) + d(u, v) + d(b, v).$$

Ввиду равноправности пар a, b и u, v, отсюда следует (7). ►

Теперь докажем

Утверждение 1. *Если метрические пространства (Y_1, d_1), (Y_2, d_2) являются пополнениями одного и того же пространства (X, d), то они изометричны.*

◄ Изометрию $f: Y_1 \to Y_2$ построим следующим образом. Для $x \in X$ положим $f(x) = x$. Тогда $d_2(f(x_1), f(x_2)) = d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) = d_1(x_1, x_2)$ при $x_1, x_2 \in X$. Если $y_1 \in Y_1 \setminus X$, то y_1 — предельная точка для X, так как X всюду плотно в Y_1. Пусть $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ — сходящаяся к y_1 в смысле метрики d_1 последовательность точек X. Эта последовательность фундаментальна в смысле d_1. Но поскольку на X метрики d_1 и d_2 совпадают с d, эта последовательность фундаментальна также и в (Y_2, d_2). Последнее пространство полное, поэтому эта последовательность имеет в нем предел $y_2 \in Y$. Стандартным образом проверяется, что такой предел единственный. Положим теперь $f(y_1) = y_2$. Поскольку любая точка $y_2 \in Y_2 \setminus X$, так же как и любая точка $y_1 \in Y_1 \setminus X$, является пределом некоторой фундаментальной последовательности точек из X, то построенное отображение $f: Y_1 \to Y_2$ сюръективно.

Проверим теперь, что для любой пары точек y_1', y_1'' из Y_1 выполнено равенство

$$d_2(f(y_1'), f(y_1'')) = d_1(y_1', y_1''). \tag{8}$$

Если y_1', y_1'' лежат в X, то это очевидно. В общем же случае возьмем две последовательности $\{x_n'; n \in \mathbb{N}\}$, $\{x_n''; n \in \mathbb{N}\}$ точек из X, сходящиеся соответственно к y_1' и y_1''. Из неравенства (7) вытекает, что

$$d_1(y_1', y_1'') = \lim_{n\to\infty} d_1(x_n', x_n''),$$

или, что то же самое,

$$d_1(y_1', y_1'') = \lim_{n\to\infty} d(x_n', x_n''). \tag{9}$$

По построению эти же последовательности сходятся к $y_2' = f(y_1')$ и $y_2'' = f(y_1'')$ соответственно в пространстве (Y_2, d_2). Значит,

$$d_2(y_2', y_2'') = \lim_{n\to\infty} d(x_n', x_n''). \tag{10}$$

Сравнивая соотношения (9) и (10), получаем равенство (8). Это равенство заодно устанавливает инъективность нашего отображения $f\colon Y_1 \to Y_2$ и тем самым завершает доказательство того, что f — изометрия. ►

В определении 5 пополнения (Y, d) метрического пространства (X, d) мы требовали, чтобы (X, d) было подпространством (Y, d), всюду плотным в (Y, d). С точки зрения отождествления изометричных пространств можно было бы теперь расширить представление о пополнении и принять следующее

Определение 6′. Полное метрическое пространство (Y, d_Y) называется *пополнением* метрического пространства (X, d_X), если в (Y, d_Y) имеется всюду плотное подпространство, изометричное (X, d_X).

Докажем теперь

Утверждение 2. *Каждое метрическое пространство имеет пополнение.*

◄ Если исходное пространство само является полным, то оно само является своим пополнением.

Идею построения пополнения неполного метрического пространства (X, d_X) мы уже, по существу, продемонстрировали, доказывая утверждение 1.

Рассмотрим множество фундаментальных последовательностей в пространстве (X, d_X). Две такие последовательности $\{x_n'; n \in \mathbb{N}\}$, $\{x_n''; n \in \mathbb{N}\}$ назовем *эквивалентными* или *конфинальными*, если $d_X(x_n', x_n'') \to 0$ при $n \to \infty$. Легко видеть, что отношение конфинальности действительно является отношением эквивалентности. Множество классов эквивалентных фундаментальных последовательностей обозначим через S. Введем в S метрику по следующему правилу. Если s' и s'' — элементы S, а $\{x_n';\ n \in \mathbb{N}\}$ и $\{x_n'';\ n \in \mathbb{N}\}$ — некоторые последовательности из классов s' и s'' соответственно, то положим

$$d(s', s'') = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n', x_n''). \tag{11}$$

Из неравенства (7) следует, что это определение корректно: написанный справа предел существует (по критерию Коши для числовой последовательности) и не зависит от индивидуального выбора последовательностей $\{x'_n;\, n\in\mathbb{N}\}$, $\{x''_n;\, n\in\mathbb{N}\}$ из s', s''.

Функция $d(s', s'')$ удовлетворяет всем аксиомам метрики. Полученное метрическое пространство (S, d) и является искомым пополнением пространства (X, d_X). В самом деле, (X, d_X) изометрично подпространству (S_X, d) пространства (S, d), состоящему из тех классов эквивалентных фундаментальных последовательностей, в каждом из которых имеется постоянная последовательность $\{x_n = x\in X;\, n\in\mathbb{N}\}$. Такой класс $s\in S$ естественно отождествить с точкой $x\in X$. Получающееся при этом отображение $f\colon (X, d_X)\to(S_X, d)$, очевидно, изометрично.

Остается проверить, что (S_X, d) всюду плотно в (S, d) и что (S, d) — полное метрическое пространство.

Проверим сначала плотность (S_X, d) в (S, d). Пусть s — произвольный элемент S, а $\{x_n;\, n\in\mathbb{N}\}$ — фундаментальная последовательность из (X, d_X), принадлежащая этому классу $s\in S$. Взяв $\xi_n = f(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, мы получаем последовательность $\{\xi_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ точек пространства (S_X, d), которая, как видно из (11), имеет своим пределом именно $s\in S$.

Докажем теперь полноту пространства (S, d). Пусть $\{s_n;\, n\in\mathbb{N}\}$ — произвольная фундаментальная последовательность пространства (S, d). Для каждого $n\in\mathbb{N}$ подберем элемент ξ_n из (S_X, d) так, что $d(s_n, \xi_n) < 1/n$. Тогда последовательность $\{\xi_n;\, n\in\notin\mathbb{N}\}$, так же как и последовательность $\{s_n;\, n\in\mathbb{N}\}$, окажется фундаментальной. Но в таком случае будет фундаментальной в (X, d_X) и последовательность $\{x_n = f^{-1}(\xi_n);\ n\in\mathbb{N}\}$. Последовательность $\{x_n;\, n\in\mathbb{N}\}$ определяет некоторый элемент $s\in S$, к которому в силу (11) и сходится данная последовательность $\{s_n;\, n\in\mathbb{N}\}$. ►

Замечание 1. После доказанных утверждений 1 и 2 становится понятно, что пополнение метрического пространства в смысле определения 5′ действительно является наименьшим полным пространством, содержащим (с точностью до изометрии) данное метрическое пространство. Этим мы уточнили и оправдали исходное определение 4.

Замечание 2. Построение множества $\mathbb{R}$ действительных чисел, исходя из множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, можно было бы провести в полном соответствии с проведенным выше в общем виде построением пополнения метрического пространства. Именно так переход от $\mathbb{Q}$ к $\mathbb{R}$ был осуществлен Кантором.

Замечание 3. В примере 6 мы показали, что пространство $\mathcal{R}[a, b]$ интегрируемых по Риману функций не является полным в естественной интегральной метрике. Его пополнением является важное пространство $\mathcal{L}[a, b]$ функций, интегрируемых по Лебегу.

Задачи и упражнения

1. a) Докажите следующую лемму о вложенных шарах. *Пусть (X, d) — метрическое пространство и $\widetilde{B}(x_1, r_1) \supset \ldots \supset \widetilde{B}(x_n, r_n) \supset \ldots$ — последовательность замкнутых вложенных шаров в X, радиусы которых стремятся к нулю. Пространство (X, d) полно тогда и только тогда, когда для любой такой последовательности существует, и притом единственная, точка, принадлежащая всем шарам этой последовательности.*

b) Покажите, что если из условий сформулированной выше леммы исключить требование $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то пересечение последовательности вложенных шаров может оказаться пустым даже в полном пространстве.

2. a) Множество $E \subset X$ метрического пространства (X, d) называется *нигде не плотным* в X, если оно не плотно ни в одном шаре, т. е. если для любого шара $B(x, r)$ найдется другой шар $B(x_1, r_1) \subset B(x, r)$, свободный от точек множества E.

Множество E называется *множеством первой категории* в X, если его можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

Множество, не являющееся множеством первой категории, называют множеством *второй категории* в X.

Покажите, что полное метрическое пространство есть множество второй категории (в себе).

b) Покажите, что если функция $f \in C^{(\infty)}[a, b]$ такова, что $\forall x \in [a, b]\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m > n$ $(f^{(m)}(x) = 0)$, то функция f — многочлен.

§ 6. Непрерывные отображения топологических пространств

Этот и следующий параграфы содержат наиболее важные с точки зрения анализа результаты настоящей главы.

Основные понятия и утверждения, которые здесь изложены, являются естественным, а иногда просто дословным переносом уже хорошо известных нам понятий и утверждений на случай отображений произвольных топологических или метрических пространств. Для многих фактов при этом оказываются почти идентичными с уже рассмотренными не только формулировки, но и доказательства, которые в этих случаях, разумеется, опускаются со ссылкой на соответствующие утверждения, изложенные подробно ранее.

1. Предел отображения

a. Основное определение и его частные случаи

Определение 1. Пусть $f: X \to Y$ — отображение множества X с фиксированной в X базой $\mathscr{B} = \{B\}$ в топологическое пространство Y. Говорят, что точка $A \in Y$ является *пределом отображения $f: X \to Y$ по базе $\mathscr{B}$* и пишут $\lim\limits_{\mathscr{B}} f(x) = A$, если для любой окрестности $V(A)$ точки A в Y существует элемент $B \in \mathscr{B}$ базы $\mathscr{B}$, образ которого при отображении f содержится в $V(A)$.

В логической символике определение 1 имеет вид

$$\lim_{\mathscr{B}} f(x) = A := \forall V(A) \subset Y\ \exists B \in \mathscr{B}\ (f(B) \subset V(A)).$$

Чаще всего нам будет встречаться случай, когда X, как и Y, — топологическое пространство, а $\mathcal{B}$ — база окрестностей или проколотых окрестностей некоторой точки $a \in X$. Сохраняя для базы проколотых окрестностей $\{\overset{\circ}{U}(a)\}$ точки a прежнее обозначение $x \to a$, можно конкретизировать определение 1 для этой базы:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A := \forall V(A) \subset Y \ \exists \overset{\circ}{U}(a) \subset X \ (f(\overset{\circ}{U}(a)) \subset V(A)).$$

Если (X, d_X) и (Y, d_Y) — метрические пространства, то последнее определение можно переформулировать уже на языке ε-δ:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A := \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ (0 < d_X(a, x) < \delta \ \Rightarrow \ d_Y(A, f(x)) < \varepsilon).$$

Иными словами,

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \lim_{x\to a} d_Y(A, f(x)) = 0.$$

Мы видим, таким образом, что, имея понятие окрестности, можно определить понятие предела отображения $f: X \to Y$ в топологическое или метрическое пространство Y так же, как это было сделано в случае $Y = \mathbb{R}$ или, более общо, в случае $Y = \mathbb{R}^n$.

b. О свойствах предела отображения. Сделаем некоторые замечания относительно общих свойств предела.

Отметим прежде всего, что получавшаяся ранее сама собой единственность предела в случае, когда Y не является хаусдорфовым пространством, уже не имеет места. Если же Y — хаусдорфово пространство, то единственность предела имеет место и доказательство ее ничем не отличается от уже проведенного в частных случаях $Y = \mathbb{R}$ или $Y = \mathbb{R}^n$.

Далее, если $f: X \to Y$ — отображение в метрическое пространство, то можно говорить об *ограниченности* отображения (что означает ограниченность множества $f(X)$ в Y) и о *финальной ограниченности* отображения по базе $\mathcal{B}$ в X (что означает существование элемента B базы $\mathcal{B}$, на котором f ограничено).

Из самого определения предела отображения вытекает, что если отображение $f: X \to Y$ множества X с базой $\mathcal{B}$ в метрическое пространство Y имеет предел по базе $\mathcal{B}$, то оно финально ограничено по этой базе.

c. Вопросы существования предела отображения

Утверждение 1 (о пределе композиции отображений). *Пусть Y — множество с базой $\mathcal{B}_Y$, а $g: Y \to Z$ — отображение Y в топологическое пространство Z, имеющее предел по базе $\mathcal{B}_Y$.*

Пусть X — множество с базой $\mathcal{B}_X$ и $f: X \to Y$ — такое отображение X в Y, что для любого элемента $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ базы $\mathcal{B}_Y$ существует элемент $B_X \in \mathcal{B}_X$ базы $\mathcal{B}_X$, образ которого содержится в B_Y, т. е. $f(B_X) \subset B_Y$.

При этих условиях композиция $g \circ f\colon X \to Z$ *отображений* f *и* g *определена, имеет предел по базе* $\mathcal{B}_X$ *и*

$$\lim_{\mathcal{B}_X} g \circ f(x) = \lim_{\mathcal{B}_Y} g(y).$$

Доказательство см. в гл. III, § 2, теорема 5.

Другим важным утверждением о существовании предела является критерий Коши, к которому мы теперь переходим. На сей раз речь будет идти уже об отображении $f\colon X \to Y$ в метрическое и даже в полное метрическое пространство.

В случае отображения $f\colon X \to Y$ множества X в метрическое пространство (Y, d) естественно принять следующее

Определение 2. *Колебанием* отображения $f\colon X \to Y$ на множестве $E \subset X$ называется величина

$$\omega(f, E) = \sup_{x_1, x_2 \in E} d(f(x_1), f(x_2)).$$

Имеет место

Утверждение 2 (критерий Коши существования предела отображения). *Пусть* X *— множество с базой* $\mathcal{B}$, $f\colon X \to Y$ *— отображение* X *в полное метрическое пространство* (Y, d).

Для того, чтобы отображение f *имело предел по базе* $\mathcal{B}$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашелся такой элемент* B *базы* $\mathcal{B}$, *на котором колебание отображения меньше* ε.

Короче:

$$\exists \lim_{\mathcal{B}} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathcal{B} \ (\omega(f, B) < \varepsilon).$$

Доказательство см. в гл. III, § 2, теорема 4.

Полезно заметить, что полнота пространства Y нужна только при переходе от правой части последнего соотношения к левой. Более того, если Y не является полным пространством, то именно этот переход, вообще говоря, невозможен.

2. Непрерывные отображения

a. Основные определения

Определение 3. Отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства (X, τ_X) в топологическое пространство (Y, τ_Y) называется *непрерывным в точке* $a \in X$, если для любой окрестности $V(f(a)) \subset Y$ точки $f(a) \in Y$ найдется окрестность $U(a) \subset X$ точки $a \in X$, образ которой $f(U(a))$ содержится в $V(f(a))$.

Итак,

$$f\colon X \to Y \text{ непрерывно в } a \in X := \forall V(f(a)) \ \exists U(a) \ (f(U(a)) \subset V(f(a))).$$

В случае, если X и Y — метрические пространства (X, d_X), (Y, d_Y), определение 3, разумеется, можно сформулировать на языке ε-δ:

$$f\colon X \to Y \text{ непрерывно в } a \in X := \\ = \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon).$$

Определение 4. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Множество непрерывных отображений X в Y обозначают символом $C(X, Y)$.

Теорема 1 (критерий непрерывности). *Отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства (X, τ_X) в топологическое пространство (Y, τ_Y) непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого* (*замкнутого*) *подмножества Y открыт* (*замкнут*) *в X.*

◄ Поскольку прообраз дополнения есть дополнение к прообразу, достаточно доказать теорему для открытых множеств.

Покажем сначала, что если $f \in C(X, Y)$, а $G_Y \in \tau_Y$, то $G_X = f^{-1}(G_Y) \in \tau_X$. Если $G_X = \varnothing$, то открытость прообраза налицо. Если же $G_X \neq \varnothing$ и $a \in G_X$, то по определению непрерывности отображения f в точке a для окрестности G_Y точки $f(a)$ найдется такая окрестность $U_X(a)$ точки a в X, что $f(U_X(a)) \subset \subset G_Y$. Значит, $U_X(a) \subset G_X = f^{-1}(G_Y)$. Поскольку $G_X = \bigcup\limits_{a \in G_X} U_X(a)$, заключаем, что G_X — открыто, т. е. $G_X \in \tau_X$.

Теперь докажем, что если прообраз любого открытого в Y множества открыт в X, то $f \in C(X, Y)$. Но, взяв любую точку $a \in X$ и произвольную окрестность $V_Y(f(a))$ ее образа в Y, мы обнаруживаем, что множество $U_X(a) = f^{-1}(V_Y(f(a)))$ является открытой окрестностью точки a в X, образ которой содержится в $V_Y(f(a))$. Следовательно, проверено определение непрерывности отображения $f\colon X \to Y$ в произвольной точке $a \in X$. ►

Определение 5. Биективное отображение $f\colon X \to Y$ одного топологического пространства (X, τ_X) на другое (Y, τ_Y) называется *гомеоморфным* или *гомеоморфизмом*, если как оно само, так и ему обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ непрерывны.

Определение 6. Топологические пространства, допускающие гомеоморфное отображение друг на друга, называются *гомеоморфными*.

Как показывает теорема 1, при гомеоморфном отображении $f\colon X \to Y$ топологического пространства (X, τ_X) на пространство (Y, τ_Y) системы открытых множеств τ_X, τ_Y соответствуют друг другу в том смысле, что $G_X \in \in \tau_X \Leftrightarrow f(G_X) = G_Y \in \tau_Y$.

Таким образом, с точки зрения топологических свойств гомеоморфные пространства абсолютно одинаковы. Следовательно, гомеоморфность топологических пространств есть такое же отношение эквивалентности в множестве топологических пространств, как, например, изометричность есть отношение эквивалентности в метрических пространствах.

b. Локальные свойства непрерывных отображений. Укажем локальные свойства непрерывных отображений. Они вытекают непосредственно из соответствующих свойств предела.

Утверждение 3 (непрерывность композиции непрерывных отображений). *Пусть (X, τ_X), (Y, τ_Y), (Z, τ_Z) — топологические пространства. Если отображение $g\colon Y \to Z$ непрерывно в точке $b \in Y$, а отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $a \in X$, причем $f(a) = b$, то композиция этих отображений $g \circ f\colon X \to Z$ непрерывна в точке $a \in X$.*

Это следует из определения непрерывности отображения и утверждения 1.

Утверждение 4 (ограниченность отображения в окрестности точки непрерывности). *Если отображение $f\colon X \to Y$ топологического пространства (X, d) в метрическое пространство (Y, d) непрерывно в некоторой точке $a \in X$, то оно ограничено в некоторой окрестности этой точки.*

Утверждение следует из финальной ограниченности (по базе) отображения, имеющего предел.

Прежде чем формулировать следующее утверждение о свойствах непрерывных отображений, напомним, что для отображений в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{R}^n$ величину

$$\omega(f, a) := \lim_{r \to 0} \omega(f, B(a, r))$$

мы назвали колебанием отображения f в точке a.

Поскольку и понятие колебания отображения на множестве, и понятие шара $B(a, r)$ остаются в силе в любом метрическом пространстве, то определение колебания $\omega(f, a)$ отображения f в точке a также остается в силе для отображения $f\colon X \to Y$ метрического пространства (X, d_X) в метрическое пространство (Y, d_Y).

Утверждение 5. *Отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства (X, d_X) в метрическое пространство (Y, d_Y) непрерывно в точке $a \in X$ тогда и только тогда, когда $\omega(f, a) = 0$.*

Это утверждение непосредственно следует из определения непрерывности отображения в точке.

c. Глобальные свойства непрерывных отображений. Остановимся теперь на важнейших глобальных свойствах непрерывных отображений.

Теорема 2. *При непрерывном отображении образ компакта является компактом.*

◄ Пусть $f\colon K \to Y$ — непрерывное отображение компакта (K, τ_K) в топологическое пространство (Y, τ_Y) и пусть $\{G_Y^\alpha, \alpha \in A\}$ — покрытие $f(K)$ множествами, открытыми в Y. В силу теоремы 1 множества $\{G_X^\alpha = f^{-1}(G_Y^\alpha), \alpha \in A\}$ образуют открытое покрытие K. Извлекая из него конечное покрытие $G_X^{\alpha_1}, \ldots, G_X^{\alpha_n}$, находим конечное покрытие $G_Y^{\alpha_1}, \ldots, G_Y^{\alpha_n}$ множества $f(K) \subset Y$. Таким образом, $f(K)$ — компакт в Y. ►

Следствие. *Непрерывная вещественная функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ на компакте принимает в некоторой точке компакта наибольшее (наименьшее) значение.*

◄ Действительно, $f(K)$ — компакт в $\mathbb{R}$, т. е. ограниченное и замкнутое множество. Это значит, что $\inf f(K) \in f(K)$ и $\sup f(K) \in f(K)$. ►

В частности, если K — отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, то мы вновь получаем классическую теорему Вейерштрасса.

На отображения, непрерывные на компактах, дословно переносится теорема Кантора о равномерной непрерывности. Прежде чем ее формулировать, приведем нужное

Определение 7. Отображение $f: X \to Y$ метрического пространства (X, d_X) в метрическое пространство (Y, d_Y) называется *равномерно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что на любом множестве $E \subset X$ с диаметром, меньшим δ, колебание $\omega(f, E)$ отображения f меньше ε.

Теорема 3 (о равномерной непрерывности). *Непрерывное отображение $f: K \to Y$ метрического компакта K в метрическое пространство (Y, τ_Y) равномерно непрерывно.*

В частности, если K — отрезок на $\mathbb{R}$, а $Y = \mathbb{R}$, то мы вновь возвращаемся к классической теореме Кантора, доказательство которой, изложенное в гл. IV, § 2, п. 2, практически без изменений переносится на указанный общий случай.

Рассмотрим теперь непрерывные отображения связных пространств.

Теорема 4. *При непрерывном отображении образ связного топологического пространства связен.*

◄ Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение связного топологического пространства (X, τ_X) на топологическое пространство (Y, τ_Y). Пусть E_Y — открыто-замкнутое подмножество Y. В силу теоремы 1 прообраз $E_X = f^{-1}(E_Y)$ множества E_Y открыто-замкнут в X. В силу связности X имеем тогда: либо $E_X = \varnothing$, либо $E_X = X$. Но это означает, что либо $E_Y = \varnothing$, либо $E_Y = Y = f(X)$. ►

Следствие. *Если функция $f: X \to \mathbb{R}$, непрерывная на связном топологическом пространстве (X, τ), принимает значения $f(a) = A \in \mathbb{R}$ и $f(b) = B \in \mathbb{R}$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдется такая точка $c \in X$, в которой $f(c) = C$.*

◄ Действительно, по теореме 4 $f(X)$ — связное множество в $\mathbb{R}$. Но в $\mathbb{R}$ связными множествами являются только промежутки (см. утверждение из § 4). Таким образом, вместе с точками A и B точка C содержится в $f(X)$. ►

В частности, если X — отрезок, мы возвращаемся к классической теореме о промежуточном значении непрерывной вещественнозначной функции.

Задачи и упражнения

1. a) Если отображение $f: X \to Y$ непрерывно, то будут ли образы открытых (замкнутых) в X множеств открытыми (замкнутыми) множествами в Y?

b) Если при отображении $f: X \to Y$ не только прообраз открытого множества, но и образ открытого множества открыт, то обязано ли f быть гомеоморфизмом?

c) Если отображение $f: X \to Y$ непрерывно и биективно, то всегда ли оно гомеоморфно?

d) Будет ли гомеоморфным отображение, удовлетворяющее условиям b) и c) одновременно?

2. Покажите, что

a) всякое непрерывное биективное отображение компакта в хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом;

b) без требования хаусдорфовости пространства образа предыдущее утверждение, вообще говоря, неверно.

3. Выясните, гомеоморфны ли (попарно) как топологические пространства следующие подмножества $\mathbb{R}^n$: прямая, интервал на прямой, отрезок на прямой; сфера; тор.

4. Топологическое пространство (X, τ) называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путем, лежащим в X. Точнее это означает, что для любых точек A и B из X существует такое непрерывное отображение $f: I \to X$ отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в X, что $f(a) = A$, $f(b) = B$.

a) Покажите, что всякое линейно связное пространство связно.

b) Покажите, что любое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ линейно связно.

c) Проверьте, что любое связное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ линейно связно.

d) Покажите, что сфера $S(a, r)$ линейно связна в $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, но в другом метрическом пространстве она как множество, наделенное совсем иной топологией, может быть вообще не связной.

e) Проверьте, что в топологическом пространстве нельзя соединить путем внутреннюю точку множества с внешней точкой множества, не пересекая границу этого множества.

§ 7. Принцип сжимающих отображений

Здесь будет установлен принцип, который, несмотря на всю свою простоту, оказывается средством эффективного доказательства многих теорем существования.

Определение 1. Точка $a \in X$ называется *неподвижной точкой отображения* $f: X \to X$, если $f(a) = a$.

Определение 2. Отображение $f: X \to X$ метрического пространства (X, d) в себя называется *сжимающим*, если существует число q, $0 < q < 1$, такое, что для любых точек x_1, x_2 из X имеет место неравенство

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant q d(x_1, x_2). \tag{1}$$

Теорема (принцип неподвижной точки Пикара[1]—Банаха[2]). *Сжимающее отображение $f: X \to X$ полного метрического пространства (X, d) в себя имеет и притом единственную неподвижную точку a.*

---

[1]Ш. Э. Пикар (1856—1941) — французский математик, которому принадлежит ряд важных результатов в теории дифференциальных уравнений и теории аналитических функций.

[2]С. Банах (1892—1945) — польский математик, один из создателей функционального анализа.

Более того, для любой точки $x_0 \in X$ итерационная последовательность x_0, $x_1 = f(x_0)$, …, $x_{n+1} = f(x_n)$, … сходится к a. Скорость этой сходимости дается оценкой

$$d(a, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \tag{2}$$

◄ Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и покажем, что последовательность x_0, $x_1 = f(x_0)$, …, $x_{n+1} = f(x_n)$, … фундаментальна. Отображение f сжимающее, поэтому в силу (1)

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant q d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant q^n d(x_1, x_0)$$

и

$$d(x_{n+k}, x_n) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \leqslant$$
$$\leqslant (q^n + q^{n+1} + \ldots + q^{n+r-1}) d(x_1, x_0) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Отсюда видно, что последовательность x_0, x_1, …, x_n, … действительно фундаментальная.

Пространство (X, d) полное, поэтому указанная последовательность имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in X$.

Из определения сжимающего отображения видно, что сжимающее отображение всегда непрерывно, поэтому

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a).$$

Таким образом, a — неподвижная точка отображения f.

Другой неподвижной точки отображение f иметь не может, поскольку из $a_i = f(a_i)$, $i = 1, 2$, с учетом (1), следует

$$0 \leqslant d(a_1, a_2) = d(f(a_1), f(a_2)) \leqslant q d(a_1, a_2),$$

что возможно только при $d(a_1, a_2) = 0$, т. е. при $a_1 = a_2$.

Далее, из соотношения

$$d(x_{n+k}, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0),$$

переходя к пределу при $k \to \infty$, находим, что

$$d(a, x_n) \leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). ►$$

В дополнение к этой теореме докажем следующее

Утверждение (об устойчивости неподвижной точки). *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство; (Ω, τ) — топологическое пространство, играющее в дальнейшем роль пространства параметров.*

Пусть каждому значению параметра $t \in \Omega$ отвечает сжимающее отображение $f_t : X \to X$ пространства X в себя, причем выполнены следующие условия:

a) *семейство* $\{f_t; t\in\Omega\}$ *равномерно сжимающее, т. е. существует такое число* q, $0<q<1$, *что каждое отображение* f_t *является* q*-сжимающим;*

b) *при каждом* $x\in X$ *отображение* $f_t(x)\colon \Omega\to X$ *как функция от* t *непрерывно в некоторой точке* $t_0\in\Omega$, *т. е.* $\lim\limits_{t\to t_0} f_t(x)=f_{t_0}(x)$.

Тогда решение $a(t)\in X$ *уравнения* $x=f_t(x)$ *в точке* t_0 *непрерывно зависит от* t, *т. е.* $\lim\limits_{t\to t_0} a(t)=a(t_0)$.

◄ Как было показано при доказательстве теоремы, решение $a(t)$ уравнения $x=f_t(x)$ может быть получено как предел последовательности $\{x_{n+1}=f_t(x_n);\ n=0,1,\dots\}$, исходя из любой точки $x_0\in X$. Пусть $x_0=a(t_0)=f_{t_0}(a(t_0))$.

С учетом оценки (2) и условия a), получаем

$$d(a(t),a(t_0))=d(a(t),x_0)\leqslant\frac{1}{1-q}d(x_1,x_0)=\frac{1}{1-q}d(f_t(a(t_0)),f_{t_0}(a(t_0))).$$

Последний член в этом соотношении в силу условия b) стремится к нулю при $t\to t_0$. Таким образом, доказано, что

$$\lim_{t\to t_0} d(a(t),a(t_0))=0,\quad \text{т. е.}\quad \lim_{t\to t_0} a(t)=a(t_0).\ ►$$

Пример 1. В качестве важного примера применения принципа сжимающих отображений докажем, следуя Пикару, теорему существования решения дифференциального уравнения $y'(x)=f(x,y(x))$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0)=y_0$.

Если функция $f\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ *такова, что*

$$|f(u,v_1)-f(u,v_2)|\leqslant M|v_1-v_2|,$$

где M *— некоторая постоянная, то, каково бы ни было начальное условие*

$$y(x_0)=y_0, \tag{3}$$

существуют окрестность $U(x_0)$ *точки* $x_0\in\mathbb{R}$ *и определенная в ней единственная функция* $y=y(x)$, *которая удовлетворяет уравнению*

$$y'=f(x,y) \tag{4}$$

и начальному условию (3).

◄ Уравнение (4) совместно с условием (3) можно записать в виде одного соотношения

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt. \tag{5}$$

Обозначая через $A(y)$ правую часть последнего равенства, находим, что $A\colon C(V(x_0),\mathbb{R})\to C(V(x_0),\mathbb{R})$ есть отображение множества определенных в окрестности $V(x_0)$ точки x_0 непрерывных функций в себя. Рассматривая $C(V(x_0),\mathbb{R})$ как метрическое пространство с равномерной метрикой (см.

формулу (6) из § 1), находим, что

$$d(Ay_1, Ay_2) = \max_{x\in\overline{V}(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x\in\overline{V}(x_0)} \left| \int_{x_0}^{x} M|y_1(t) - y_2(t)|\, dt \right| \leqslant M|x - x_0| d(y_1, y_2).$$

Если считать, что $|x - x_0| \leqslant \frac{1}{2M}$, то на соответствующем отрезке I оказывается выполненным неравенство

$$d(Ay_1, Ay_2) \leqslant \frac{1}{2} d(y_1, y_2),$$

где $d(y_1, y_2) = \max\limits_{x\in I} |y_1(x) - y_2(x)|$. Таким образом, мы имеем сжимающее отображение

$$A\colon C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$$

полного (см. пример 4 из § 5) метрического пространства $(C(I, \mathbb{R}), d)$ в себя, которое по принципу сжимающих отображений должно иметь и притом единственную неподвижную точку $y = Ay$. Но это означает, что найденная в $C(I, \mathbb{R})$ функция и будет той единственной функцией, которая определена в $I \ni x_0$ и удовлетворяет уравнению (5). ►

Пример 2. В качестве иллюстрации к сказанному будем искать, исходя из принципа сжимающих отображений, решение уже знакомого нам уравнения

$$y' = y$$

при начальном условии (3).

В данном случае

$$Ay = y_0 + \int_{x_0}^{x} y(t)\, dt,$$

и принцип применим по крайней мере при $|x - x_0| \leqslant q < 1$.

Исходя из начального приближения $y(x) \equiv 0$, построим последовательность 0, $y_1 = A(0), \ldots, y_{n+1}(t) = A(y_n(t)), \ldots$ приближений

$$y_1(t) \equiv y_0,$$
$$y_2(t) = y_0(1 + (x - x_0)),$$
$$y_3(t) = y_0\Big(1 + (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\Big),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{n+1}(t) = y_0\Big(1 + (x - x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n\Big),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

из которой уже видно, что

$$y(x) = y_0 e^{x - x_0}.$$

Принцип неподвижной точки, сформулированный в приведенной выше теореме, носит также название *принципа сжимающих отображений*. Он возник как обобщение рассмотренного в примере 1 доказательства Пикара теоремы существования решения дифференциального уравнения (4). В полной общности принцип сжимающих отображений был сформулирован Банахом.

Пример 3. *Метод Ньютона отыскания корня уравнения* $f(x)=0$. Пусть выпуклая с положительной производной на отрезке $[\alpha,\beta]$ вещественнозначная функция принимает на концах отрезка значения разных знаков. Тогда на этом отрезке она имеет, и притом единственную, точку a, в которой $f(a)=0$. Наряду с простейшим общим методом поиска точки a путем деления отрезка пополам существуют разные более тонкие и быстрые методы отыскания точки a, использующие специфику функций f. Так, в нашем случае можно воспользоваться следующим методом, предложенным Ньютоном и называемым *методом Ньютона* или *методом касательных*. Возьмем произвольную точку $x_0\in[\alpha,\beta]$ и запишем уравнение $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ касательной к графику нашей функции в точке $(x_0, f(x_0))$. Найдем точку $x_1=x_0-[f'(x_0)]^{-1}\cdot f(x_0)$ пересечения касательной с осью абсцисс (рис. 68).

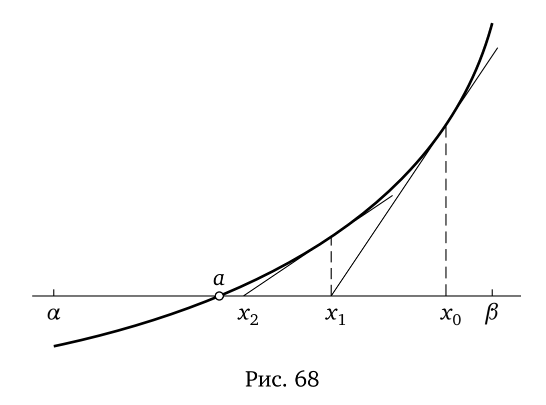


Рис. 68

Примем x_1 в качестве первого приближения корня a и повторим операцию, заменяя x_0 на x_1. Так мы получим последовательность

$$x_{n+1}=x_n-[f'(x_n)]^{-1}\cdot f(x_n) \tag{6}$$

точек, которые, как можно проверить, в нашем случае будут монотонно стремиться к a.

В частности, если $f(x)=x^k-a$, т. е. когда мы ищем $\sqrt[k]{a}$, где $a>0$, рекуррентное соотношение (6) имеет вид

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}},$$

что при $k=2$ преобразуется к знакомому выражению

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(x_n+\frac{a}{x_n}\Big).$$

Способ (6) образования последовательности $\{x_n\}$ называют *методом Ньютона*.

Если вместо последовательности (6) рассматривается последовательность, получаемая рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_0)]^{-1} \cdot f(x_n), \tag{7}$$

то говорят о *модифицированном методе Ньютона*[1]. Модификация состоит в том, что производная вычислена раз и навсегда в точке x_0.

Рассмотрим отображение

$$x \mapsto A(x) = x - [f'(x_0)]^{-1} f(x). \tag{8}$$

По теореме Лагранжа

$$|A(x_2) - A(x_1)| = |[f'(x_0)]^{-1} \cdot f'(\xi)| \cdot |x_2 - x_1|,$$

где ξ — некоторая точка, лежащая между x_1 и x_2.

Таким образом, если на некотором отрезке $I \subset \mathbb{R}$ выполнены условия

$$A(I) \subset I \tag{9}$$

и

$$|[f'(x_0)]^{-1} \cdot f'(x)| \leqslant q < 1, \tag{10}$$

то задаваемое соотношением (8) отображение $A\colon I \to I$ окажется сжимающим отображением этого отрезка. Тогда по общему принципу оно имеет на отрезке единственную неподвижную точку a. Но, как видно из (8), условие $A(a) = a$ равносильно соотношению $f(a) = 0$.

Значит, при выполнении условий (9) и (10), для любой функции f модифицированный метод Ньютона (7) на основании принципа сжимающих отображений приводит к искомому решению a уравнения $f(x) = 0$.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что в принципе сжимающих отображений условие (1) нельзя заменить более слабым условием

$$d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2).$$

2. а) Докажите, что если отображение $f\colon X \to X$ полного метрического пространства (X, d) в себя таково, что некоторая его итерация $f^n\colon X \to X$ является сжимающим отображением, то f имеет, и притом единственную, неподвижную точку.

---

[1]В функциональном анализе он имеет многочисленные применения и называется методом Ньютона—Канторовича. Л. В. Канторович (1912—1986) — выдающийся советский математик, экономико-математические исследования которого отмечены Нобелевской премией.

b) Проверьте, что рассмотренное в примере 2 отображение $A\colon C(I,\mathbb{R})\to C(I,\mathbb{R})$ таково, что при любом отрезке $I\subset\mathbb{R}$ некоторая итерация A^n отображения A является сжимающим отображением.

c) Получите из b, что найденное в примере 2 локальное решение $y=y_0e^{x-x_0}$ на самом деле является решением исходного уравнения на всей числовой прямой.

3. a) Покажите, что в случае выпуклой с положительной производной на отрезке $[\alpha,\beta]$ функции, принимающей на концах отрезка значения разных знаков, метод Ньютона (6) действительно дает последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к той точке $a\in[\alpha,\beta]$, в которой $f(a)=0$.

b) Оцените скорость сходимости последовательности (6) к точке a.

* Глава X

Дифференциальное исчисление с более общей точки зрения (общая теория)

§ 1. Линейное нормированное пространство

Дифференцирование — это отыскание наилучшего локального линейного приближения функции, поэтому любая сколь-нибудь общая теория дифференцирования должна опираться на элементарные представления, связанные с линейными функциями. Из курса алгебры читателю хорошо знакомо понятие *линейного пространства*, а также понятия линейной зависимости и независимости системы векторов, базиса и размерности линейного пространства, подпространства и т. д. В этом параграфе мы дадим представление о линейных пространствах с нормой или, как говорят, линейных *нормированных* пространствах, широко используемых в анализе. Начнем, однако, с примеров линейных пространств.

1. Некоторые примеры линейных пространств анализа

Пример 1. Классическими примерами линейных пространств над полем действительных и комплексных чисел являются соответственно вещественное $\mathbb{R}^n$ и комплексное $\mathbb{C}^n$ арифметические пространства размерности n.

Пример 2. В анализе, наряду с указанными в примере 1 пространствами $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, встречается наиболее близкое к ним пространство l последовательностей $x = (x^1, \dots, x^n, \dots)$ действительных или комплексных чисел. Линейные операции в l, как и в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$, осуществляются покоординатно. Особенностью в сравнении с $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ является то, что любая конечная подсистема счетной системы векторов $\{x_i = (0, \dots, 0, x^i = 1, 0, \dots),\ i \in \mathbb{N}\}$ линейно независима, то есть l — бесконечномерное (в данном случае счетномерное) линейное пространство.

Совокупность финитных последовательностей (все члены которых, начиная с некоторого, равны нулю) является линейным подпространством l_0 пространства l, причем тоже бесконечномерным.

Пример 3. Пусть $F[a, b]$ — множество числовых (действительно- или комплекснозначных) функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Это множество является линейным пространством (над соответствующим числовым полем) по отношению к операциям сложения функций и умножения функции на число.

Совокупность функций вида

$$e_\tau(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [a,b] \text{ и } x \neq \tau, \\ 1, & \text{если } x \in [a,b] \text{ и } x = \tau, \end{cases}$$

является континуальной системой линейно независимых векторов в $F[a,b]$.

Множество $C[a,b]$ непрерывных функций, очевидно, является подпространством построенного пространства $F[a,b]$.

Пример 4. Если X_1 и X_2 — два линейных пространства над одним и тем же полем, то в их прямом произведении $X_1 \times X_2$ естественным образом вводится структура линейного пространства, если линейные операции над элементами $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ выполнять покомпонентно.

Аналогично вводится структура линейного пространства в прямом произведении $X_1 \times \ldots \times X_n$ любого конечного набора линейных пространств. Это полный аналог пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$.

2. Норма в линейном пространстве. Теперь дадим основное

Определение 1. Пусть X — линейное пространство над полем действительных или комплексных чисел.

Функция $\| \ \|\colon\ X \to \mathbb{R}$, ставящая каждому вектору $x \in X$ в соответствие действительное число $\|x\|$, называется *нормой* в линейном пространстве X, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (невырожденность);

b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (однородность);

c) $\|x_1 + x_2\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\|$ (неравенство треугольника).

Определение 2. Линейное пространство с определенной на нем нормой называется *линейным нормированным пространством*.

Определение 3. Значение нормы на векторе называется *нормой* этого *вектора*.

Норма вектора всегда неотрицательна и, как видно из a), равна нулю только для нулевого вектора.

◄ Действительно, для любого $x \in X$ в силу c) и с учетом a) и b) получаем

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leqslant \|x\| + \|-x\| = \|x\| + |-1|\,\|x\| = 2\|x\|. \ ►$$

Из c) и принципа индукции следует общее неравенство

$$\|x_1 + \ldots + x_n\| \leqslant \|x_1\| + \ldots + \|x_n\|, \tag{1}$$

а с учетом b) из c) легко вывести также полезное неравенство

$$\Big| \|x_1\| - \|x_2\| \Big| \leqslant \|x_1 - x_2\|. \tag{2}$$

Любое линейное нормированное пространство имеет естественную метрику

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|. \tag{3}$$

То, что так определенная функция $d(x_1, x_2)$ удовлетворяет аксиомам метрики, непосредственно следует из свойств нормы. Благодаря наличию в X линейной структуры метрика d в X обладает двумя дополнительными специфическими свойствами:

$$d(x_1+x, x_2+x) = \|(x_1+x)-(x_2+x)\| = \|x_1-x_2\| = d(x_1, x_2),$$

т. е. метрика инвариантна относительно переносов, и

$$d(\lambda x_1, \lambda x_2) = \|\lambda x_1 - \lambda x_2\| = \|\lambda(x_1-x_2)\| = |\lambda|\,\|x_1-x_2\| = |\lambda|\,d(x_1, x_2),$$

т. е. она однородна.

Определение 4. Если линейное нормированное пространство является полным как метрическое пространство относительно естественной метрики (3), то оно называется *полным нормированным пространством* или *банаховым пространством*.

Пример 5. Если для вектора $x=(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ при $p \geqslant 1$ положить

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i|^p\right)^{1/p}, \tag{4}$$

то, как следует из неравенства Минковского, мы получим норму в $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathbb{R}^n$, наделенное этой нормой, будем обозначать символом $\mathbb{R}^n_p$.

Можно проверить, что

$$\|x\|_{p_2} \leqslant \|x\|_{p_1}, \quad \text{если } 1 \leqslant p_1 \leqslant p_2, \tag{5}$$

и что

$$\|x\|_p \to \max\{|x^1|, \ldots, |x^n|\} \tag{6}$$

при $p \to +\infty$. Таким образом, естественно положить

$$\|x\|_\infty := \max\{|x^1|, \ldots, |x^n|\}. \tag{7}$$

Тогда из (4) и (5) следует, что

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty \quad \text{при } p \geqslant 1. \tag{8}$$

Из этого неравенства, как, впрочем, и из самого определения (4) нормы $\|x\|_p$, видно, что $\mathbb{R}^n_p$ является полным нормированным пространством.

Пример 6. Предыдущий пример полезно обобщить следующим образом. Если $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ есть прямое произведение нормированных пространств, то в X можно ввести норму вектора $x=(x_1, \ldots, x_n)$, положив

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1, \tag{9}$$

где $\|x_i\|$ есть норма вектора $x_i \in X_i$ в пространстве X_i.

Естественно, неравенства (8) и в этом случае остаются в силе.

В дальнейшем, когда рассматривается прямое произведение нормированных пространств, всегда, если нет специальных оговорок, предполагается,

что в нем норма определена в соответствии с формулой (9) (включая случай $p = +\infty$).

Пример 7. Пусть $p \geqslant 1$. Обозначим через l_p множество таких последовательностей $x = (x^1, \ldots, x^n, \ldots)$ действительных или комплексных чисел, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^n|^p$ сходится, и для $x \in l_p$ положим

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^n|^p \right)^{1/p}. \tag{10}$$

Используя неравенство Минковского, легко видеть, что l_p является линейным нормированным пространством относительно стандартных линейных операций и нормы (10). Это бесконечномерное пространство, по отношению к которому $\mathbb{R}^n_p$ является линейным подпространством конечной размерности.

Для нормы (10) справедливы все неравенства (8), кроме последнего. Нетрудно проверить, что l_p является банаховым пространством.

Пример 8. В линейном пространстве $C[a, b]$ числовых функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, чаще всего рассматривается следующая норма:

$$\|f\| := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|. \tag{11}$$

Проверку аксиом нормы мы оставляем читателю. Заметим, что эта норма порождает уже знакомую нам метрику (см. гл. IX, § 5) на $C[a, b]$ и нам известно, что возникающее при этом метрическое пространство полно. Таким образом, линейное пространство $C[a, b]$ с нормой (11) является банаховым.

Пример 9. В $C[a, b]$ можно ввести и иную норму

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p(x)\, dx \right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1, \tag{12}$$

которая сводится к (11) при $p \to +\infty$.

Легко видеть (см., например, гл. IX, § 5), что при $1 \leqslant p < +\infty$ пространство $C[a, b]$ с нормой (12) не является полным.

3. Скалярное произведение в векторном пространстве. Важный класс нормированных пространств составляют пространства со скалярным произведением. Они являются прямым обобщением евклидовых пространств.

Напомним

Определение 5. Говорят, что в линейном (над полем комплексных чисел) пространстве X задана *эрмитова форма*, если задано отображение $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$, обладающее свойствами:

a) $\langle x_1, x_2 \rangle = \overline{\langle x_2, x_1 \rangle}$,

b) $\langle \lambda x_1, x_2 \rangle = \lambda \langle x_1, x_2 \rangle$,

c) $\langle x_1 + x_2, x_3 \rangle = \langle x_1, x_3 \rangle + \langle x_2, x_3 \rangle$,

где x_1, x_2, x_3 — векторы из X, а $\lambda \in \mathbb{C}$.

Из a), b), c) следует, например, что

$$\langle x_1, \lambda x_2\rangle = \overline{\langle \lambda x_2, x_1\rangle} = \overline{\lambda\langle x_2, x_1\rangle} = \overline{\lambda}\,\overline{\langle x_2, x_1\rangle} = \overline{\lambda}\langle x_1, x_2\rangle;$$

$$\langle x_1, x_2+x_3\rangle = \overline{\langle x_2+x_3, x_1\rangle} = \overline{\langle x_2, x_1\rangle} + \overline{\langle x_3, x_1\rangle} = \langle x_1, x_2\rangle + \langle x_1, x_3\rangle;$$

$$\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle},\ \text{т. е. } \langle x, x\rangle \ \text{— действительное число.}$$

Эрмитова форма называется *положительной*, если

d) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$,

и *невырожденной*, если

e) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

Если X — линейное пространство над полем вещественных чисел, то, разумеется, надо рассматривать вещественнозначную форму $\langle x_1, x_2\rangle$. В этом случае вместо a) можно записать просто $\langle x_1, x_2\rangle = \langle x_2, x_1\rangle$, что означает симметричность формы относительно векторов-аргументов, x_1, x_2.

Примером такой формы может служить знакомое из аналитической геометрии скалярное произведение векторов трехмерного евклидова пространства. В связи с этой аналогией принято

Определение 6. Невырожденную положительную эрмитову форму в линейном пространстве называют *скалярным произведением* в этом пространстве.

Пример 10. В $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$ можно определить, положив

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x^i y^i, \tag{13}$$

а в $\mathbb{C}^n$ — положив

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x^i\, \overline{y^i}. \tag{14}$$

Пример 11. В l_2 скалярное произведение векторов x, y можно определить, полагая

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x^i\, \overline{y^i}.$$

Написанный здесь ряд сходится абсолютно, поскольку

$$2\sum_{i=1}^{\infty} |x^i\, \overline{y^i}| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^2.$$

Пример 12. В $C[a, b]$ скалярное произведение можно определить формулой

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b (f\cdot\bar{g})(x)\, dx. \tag{15}$$

Из свойств интеграла легко следует, что все требования к скалярному произведению в этом случае выполнены.

Для скалярного произведения справедливо следующее важное *неравенство Коши—Буняковского*:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqslant \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle, \tag{16}$$

где равенство реализуется тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны.

◄ Действительно, пусть $a=\langle x, x\rangle$, $b=\langle x, y\rangle$ и $c=\langle y, y\rangle$. По условию $a\geqslant 0$ и $c\geqslant 0$. Если $c>0$, то из

$$0\leqslant \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = a+\overline{b}\lambda+b\overline{\lambda}+c\lambda\overline{\lambda}$$

при $\lambda=-\frac{b}{c}$ получим

$$0\leqslant a-\frac{\overline{b}b}{c}-\frac{b\overline{b}}{c}+\frac{b\overline{b}}{c}$$

или

$$0\leqslant ac-b\overline{b}=ac-|b|^2,$$

что совпадает с (16).

Аналогично рассматривается случай $a>0$.

Если же $a=c=0$, то, подставляя в (17) $\lambda=-b$, получим $0\leqslant -\overline{b}b-b\overline{b}= =-2|b|^2$, т. е. $b=0$, и неравенство (16) опять справедливо.

Если x и y не коллинеарны, то $0<\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$ и, следовательно, неравенство (16) в этом случае строгое. Если же x и y коллинеарны, в этом случае оно, как легко проверить, переходит в равенство. ►

Линейное пространство со скалярным произведением обладает естественной нормой

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{18}$$

и метрикой

$$d(x, y) := \|x-y\|.$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, проверим, что если $\langle x, y\rangle$ — невырожденная положительная эрмитова форма, то формула (18) действительно определяет норму.

◄ В самом деле,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \iff x=0,$$

поскольку форма $\langle x, y\rangle$ невырожденная.

Далее

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\,\|x\|.$$

Проверим, наконец, неравенство треугольника

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|.$$

Нам, таким образом, следует показать, что

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}+\sqrt{\langle y, y\rangle},$$

или после возведения в квадрат и упрощений, что

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \leqslant 2\sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle}.$$

Но

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leqslant 2|\langle x, y\rangle|,$$

и доказываемое неравенство теперь непосредственно следует из неравенства Коши—Буняковского (16). ►

Отметим в заключение, что линейные пространства со скалярным произведением в конечномерном случае называют обычно *евклидовыми* или *эрмитовыми*, когда полем констант является $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ соответственно. Если же линейное нормированное пространство бесконечной размерности, то его называют *гильбертовым*, если оно полно, и *предгильбертовым*, если оно не полно по отношению к метрике, индуцированной естественной нормой в нем.

Задачи и упражнения

1. a) Покажите, что если в линейном пространстве X задана метрика $d(x_1, x_2)$, трансляционно инвариантная и однородная, то X можно нормировать, положив $\|x\| = d(0, x)$.

b) Проверьте, что норма в линейном пространстве X является функцией, непрерывной по отношению к той топологии, которая индуцируется естественной метрикой (3).

c) Докажите, что если X — конечномерное линейное пространство, а $\|x\|$ и $\|x\|'$ — две нормы на X, то всегда можно найти положительные числа M, N такие, что для любого вектора $x \in X$ выполнено

$$M\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant N\|x\|. \tag{19}$$

d) На примере норм $\|x\|_1$ и $\|x\|_\infty$ в пространстве l убедитесь, что предыдущее неравенство в бесконечномерных пространствах, вообще говоря, не выполняется.

2. a) Докажите неравенство (5).

b) Проверьте соотношение (6).

c) Покажите, что при $p \to +\infty$ определенная формулой (12) величина $\|f\|_p$ стремится к величине $\|f\|$, задаваемой формулой (11).

3. a) Проверьте, что рассмотренное в примере 7 нормированное пространство l_p является полным.

b) Покажите, что подпространство пространства l_p, состоящее из финитных (заканчивающихся нулями) последовательностей, не является банаховым пространством.

4. a) Проверьте, что соотношения (11), (12) задают норму в пространстве $C[a, b]$, и убедитесь в том, что при этом в одном случае получается полное, а в другом не полное нормированное пространство.

b) Задает ли формула (12) норму в линейном пространстве $\mathcal{R}[a, b]$ интегрируемых по Риману функций?

c) Какую факторизацию (отождествление) следует провести в $\mathcal{R}[a, b]$, чтобы задаваемая формулой (12) величина была нормой в полученном линейном пространстве?

5. a) Проверьте, что формулы (13)—(15) действительно задают скалярное произведение в соответствующих линейных пространствах.

b) Будет ли задаваемая формулой (15) форма скалярным произведением в пространстве $\mathcal{R}[a,b]$ интегрируемых по Риману функций?

c) Какие функции в $\mathcal{R}[a,b]$ следует отождествить, чтобы ответ на вопрос b) был положительным в фактор-пространстве классов эквивалентности?

6. Используя неравенство Коши—Буняковского, найдите нижнюю грань значений произведения $\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int\limits_a^b (1/f)(x)\,dx\right)$ на множестве непрерывных вещественнозначных функций, не обращающихся в нуль на отрезке $[a,b]$.

§ 2. Линейные и полилинейные операторы

1. Определения и примеры. Начнем с того, что напомним следующее

Определение 1. Если X и Y — линейные пространства над одним и тем же полем (в нашем случае полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то отображение $A\colon X\to Y$ называется *линейным*, если для любых векторов x, x_1, x_2 пространства X и любого числа λ поля коэффициентов имеют место равенства

$$A(x_1+x_2)=A(x_1)+A(x_2),$$
$$A(\lambda x)=\lambda A(x).$$

Для линейного оператора $A\colon X\to Y$ вместо $A(x)$ часто пишут Ax.

Определение 2. Отображение $A\colon X_1\times\ldots\times X_n\to Y$ прямого произведения линейных пространств $X_1,\ldots,X_n$ в линейное пространство Y называется *полилинейным* (*n-линейным*), если это отображение $y=A(x_1,\ldots,x_n)$ линейно по каждой переменной при фиксированных значениях остальных переменных.

Множество n-линейных отображений $A\colon X_1\times\ldots\times X_n\to Y$ будет обозначаться символом $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;Y)$.

В частности, при $n=1$ получаем множество $\mathcal{L}(X;Y)$ линейных отображений из $X_1=X$ в Y.

При $n=2$ полилинейное отображение называется *билинейным*, при $n=3$ — *трилинейным* и т. д.

Не следует смешивать n-линейное отображение $A\in\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ и линейное отображение $A\in\mathcal{L}(X;Y)$ линейного пространства $X=X_1\times\ldots\times X_n$ (см. в этой связи примеры 9—11).

Если $Y=\mathbb{R}$ или $Y=\mathbb{C}$, то линейные и полилинейные отображения называют чаще линейными или соответственно *полилинейными функциями* (или *функционалами*, если отображаются пространства функций). Когда же Y — произвольное линейное пространство, линейное отображение $A\colon X\to Y$ чаще называют *линейным оператором*, действующим из пространства X в пространство Y.

Рассмотрим некоторые примеры линейных отображений.

Пример 1. Пусть l_0 — линейное пространство числовых финитных последовательностей. Оператор $A\colon l_0 \to l_0$ определим следующим образом:

$$A((x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)) := (1x_1, 2x_2, \ldots, nx_n, 0, \ldots).$$

Пример 2. Функционал $A\colon C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ определим соотношением

$$A(f) := f(x_0),$$

где $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, а x_0 — фиксированная точка отрезка $[a, b]$.

Пример 3. Функционал $A\colon C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ определим соотношением

$$A(f) := \int_a^b f(x)\, dx.$$

Пример 4. Преобразование $A\colon C([a, b], \mathbb{R}) \to C([a, b], \mathbb{R})$ определим формулой

$$A(f) := \int_a^x f(t)\, dt,$$

где x — точка, пробегающая отрезок $[a, b]$.

Все это, очевидно, линейные отображения.

Рассмотрим некоторые знакомые примеры полилинейных отображений.

Пример 5. Обычное произведение $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ n действительных чисел является типичным примером n-линейной функции $A \in \mathscr{L}(\underbrace{\mathbb{R}, \ldots, \mathbb{R}}_{n}; \mathbb{R})$.

Пример 6. Скалярное произведение $(x_1, x_2) \overset{A}{\longmapsto} \langle x_1, x_2 \rangle$ в евклидовом векторном пространстве над полем $\mathbb{R}$ является билинейной функцией.

Пример 7. Векторное произведение $(x_1, x_2) \overset{A}{\longmapsto} [x_1, x_2]$ векторов трехмерного евклидова пространства E^3 является билинейным оператором, т. е. $A \in \mathscr{L}(E^3, E^3; E^3)$.

Пример 8. Если X — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$; $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в X; $x = x^i e_i$ — координатное представление вектора $x \in X$, то, полагая

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix},$$

получаем n-линейную функцию $A\colon X^n \to \mathbb{R}$.

В качестве полезного дополнения к приведенным примерам разберем еще структуру линейных отображений произведения линейных пространств в произведение линейных пространств.

Пример 9. Пусть $X = X_1 \times \ldots \times X_m$ — линейное пространство, являющееся прямым произведением линейных пространств $X_1, \ldots, X_m$, и пусть $A\colon X \to Y$ — линейное отображение X в линейное пространство Y. Представляя

каждый вектор $x=(x_1, \dots, x_m)\in X$ в виде

$$x=(x_1, \dots, x_m)=(x_1, 0, \dots, 0)+(0, x_2, 0, \dots, 0)+\dots+(0, \dots, 0, x_m) \quad (1)$$

и полагая для $x_i\in X_i$, $i\in\{1, \dots, m\}$,

$$A_i(x_i):=A((0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)), \quad (2)$$

мы замечаем, что $A_i: X_i\to Y$ суть линейные отображения и что

$$A(x)=A_1(x_1)+\dots+A_m(x_m). \quad (3)$$

Поскольку при любых линейных отображениях $A_i: X_i\to Y$ определяемое формулой (3) отображение $A: X=X_1\times\dots\times X_m\to Y$, очевидно, линейно, то мы показали, что формула (3) дает общий вид любого линейного отображения $A\in\mathscr{L}(X=X_1\times\dots\times X_m; Y)$.

Пример 10. Исходя из определения прямого произведения $Y=Y_1\times\dots\times Y_n$ линейных пространств $Y_1, \dots, Y_n$ и определения линейного отображения $A: X\to Y$, легко видеть, что любое линейное отображение

$$A: X\to Y=Y_1\times\dots\times Y_n$$

имеет вид $x\mapsto Ax=(A_1x, \dots, A_nx)=(y_1, \dots, y_n)=y\in Y$, где $A_i: X\to Y_i$ — линейные отображения.

Пример 11. Объединяя примеры 9 и 10, заключаем, что любое линейное отображение

$$A: X_1\times\dots\times X_m=X\to Y=Y_1\times\dots\times Y_n$$

прямого произведения $X=X_1\times\dots\times X_m$ линейных пространств в другое прямое произведение $Y=Y_1\times\dots\times Y_n$ линейных пространств имеет вид

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\ \dots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & \dots & A_{1m}\\ \dots & \dots & \dots\\ A_{n1} & \dots & A_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \dots\\ x_m\end{pmatrix}=Ax, \quad (4)$$

где $A_{ij}: X_j\to Y_i$ — линейные отображения.

В частности, если $X_1=X_2=\dots=X_m=\mathbb{R}$, $Y_1=Y_2=\dots=Y_n=\mathbb{R}$, то $A_{ij}: X_j\to Y_i$ суть линейные отображения $\mathbb{R}\ni x\mapsto a_{ij}x\in\mathbb{R}$, каждое из которых задается одним числом a_{ij}. Таким образом, в этом случае соотношение (4) превращается в знакомую численную запись линейного отображения $A: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$.

2. Норма оператора

Определение 3. Пусть $A: X_1\times\dots\times X_n\to Y$ — полилинейный оператор, действующий из прямого произведения нормированных пространств $X_1, \dots, X_n$ в нормированное пространство Y.

Величина

$$\|A\|:=\sup_{\substack{x_1,\dots,x_n\\ x_i\neq 0}}\frac{|A(x_1, \dots, x_n)|_Y}{|x_1|_{X_1}\cdot\ldots\cdot|x_n|_{X_n}}, \quad (5)$$

где верхняя грань берется по всевозможным наборам $x_1, \ldots, x_n$ отличных от нуля векторов пространств $X_1, \ldots, X_n$, называется *нормой* полилинейного оператора A.

В правой части формулы (5) вместо знака $\|\cdot\|$ нормы вектора употреблено обозначение $|\cdot|$, рядом с которым стоит символ того нормированного пространства, которому вектор принадлежит. В дальнейшем мы будем придерживаться этого обозначения для нормы вектора и, если не возникает недоразумений, будем опускать символ пространства, подразумевая, что норма (модуль) вектора вычисляется всегда в том пространстве, которому вектор принадлежит. Мы хотим тем самым пока внести некоторое различие в обозначения нормы вектора и нормы линейного или полилинейного оператора, действующего на нормированных векторных пространствах.

Пользуясь свойствами нормы вектора и свойствами полилинейного оператора, формулу (5) можно переписать следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{\substack{x_1, \ldots, x_n \\ x_i \neq 0}} \left| A\left(\frac{x_1}{|x_1|}, \ldots, \frac{x_n}{|x_n|}\right) \right| = \sup_{e_1, \ldots, e_n} |A(e_1, \ldots, e_n)|, \tag{6}$$

где последняя верхняя грань берется по всевозможным наборам $e_1, \ldots, e_n$ единичных векторов пространств $X_1, \ldots, X_n$ соответственно (т. е. $|e_i| = 1$, $i = 1, \ldots, n$).

В частности, для линейного оператора $A\colon X \to Y$ из (5) и (6) получаем

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|e|=1} |Ae|. \tag{7}$$

Из определения 3 нормы полилинейного оператора A следует, что если $\|A\| < \infty$, то при любых векторах $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, справедливо неравенство

$$|A(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \|A\| \, |x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|. \tag{8}$$

В частности, для линейного оператора получаем

$$|Ax| \leqslant \|A\| \, |x|. \tag{9}$$

Кроме того, из определения 3 следует, что если норма полилинейного оператора конечна, то она есть нижняя грань тех чисел M, для которых неравенство

$$|A(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant M |x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n| \tag{10}$$

выполнено при любых значениях $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 4. Полилинейный оператор $A\colon X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ называется *ограниченным*, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что при любых значениях $x_1, \ldots, x_n$ из пространств $X_1, \ldots, X_n$ соответственно справедливо неравенство (10).

Таким образом, ограниченными являются те и только те операторы, которые имеют конечную норму.

На основании соотношения (7) легко понять геометрический смысл нормы линейного оператора в знакомом случае $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. В этом случае единичная сфера пространства $\mathbb{R}^m$ переходит под действием преобразования A в некоторый эллипсоид в $\mathbb{R}^n$, центр которого совпадает с нулем в $\mathbb{R}^n$. Значит, норма A в данном случае просто наибольшая из полуосей этого эллипсоида.

С другой стороны, норму линейного оператора можно трактовать также как верхнюю грань коэффициентов растяжения векторов при данном отображении, что видно из первого равенства в (7).

Нетрудно доказать, что при отображении конечномерных пространств норма полилинейного и, в частности, линейного оператора всегда конечна. В случае пространств бесконечной размерности это, вообще говоря, уже не так, что видно на первом из следующих примеров.

Подсчитаем нормы операторов, рассмотренных в примерах 1—8.

Пример 1′. Если считать, что l_0 — подпространство нормированного пространства l_p, в котором вектор $e_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots)$ имеет единичную норму, то, поскольку $Ae_n = ne_n$, ясно, что $\|A\| = \infty$.

Пример 2′. Если $|f| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \leqslant 1$, то $|Af| = |f(x_0)| \leqslant 1$, причем $|Af| = 1$, если $f(x_0) = 1$, значит, $\|A\| = 1$.

Заметим, что если на том же линейном пространстве $C([a, b], \mathbb{R})$ ввести, например, интегральную норму

$$|f| = \int\limits_a^b |f|(x)\, dx,$$

то результат вычисления $\|A\|$ может существенно измениться. Действительно, пусть $[a, b] = [0, 1]$, а $x_0 = 1$. Интегральная норма функции $f_n = x^n$ на отрезке $[0, 1]$, очевидно, равна $\frac{1}{n+1}$, в то время как $Af_n = Ax^n = x^n|_{x=1} = 1$. Отсюда следует, что в этом случае $\|A\| = \infty$.

Всюду дальше, если не оговорено противное, пространство $C([a, b], \mathbb{R})$ рассматривается с нормой, определяемой максимумом модуля функции на отрезке $[a, b]$.

Пример 3′. Если $|f| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \leqslant 1$, то

$$|Af| = \left| \int\limits_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f|(x)\, dx \leqslant \int\limits_a^b 1\, dx = b - a.$$

Но при $f(x) \equiv 1$ получаем $|A1| = b - a$, поэтому $\|A\| = b - a$.

Пример 4′. Если $|f| = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \leqslant 1$, то

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\int\limits_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}\int\limits_a^x |f|(t)\,dt \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}(x-a) = b-a.$$

Но при $f(t)\equiv 1$ получаем

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\int\limits_a^x 1\,dt = b-a,$$

поэтому и в данном примере $\|A\| = b-a$.

Пример 5′. Непосредственно из определения 3 в данном случае получаем, что $\|A\| = 1$.

Пример 6′. В силу неравенства Коши—Буняковского

$$|\langle x_1, x_2\rangle| \leqslant |x_1|\cdot|x_2|,$$

причем если $x_1 = x_2$, то это неравенство переходит в равенство. Следовательно, $\|A\| = 1$.

Пример 7′. Мы знаем, что

$$|[x_1, x_2]| = |x_1|\,|x_2|\sin\varphi,$$

где φ — угол между векторами x_1 и x_2, поэтому $\|A\| \leqslant 1$. В то же время, если векторы x_1, x_2 ортогональны, то $\sin\varphi = 1$. Таким образом, $\|A\| = 1$.

Пример 8′. Если считать, что векторы берутся в евклидовом пространстве размерности n, то можно заметить, что $A(x_1, \ldots, x_n) = \det(x_1, \ldots, x_n)$ есть объем параллелепипеда, натянутого на векторы $x_1, \ldots, x_n$, и этот объем максимален, если векторы $x_1, \ldots, x_n$, сохранив их длины, сделать взаимно ортогональными.

Таким образом,

$$|\det(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant |x_1|\cdot\ldots\cdot|x_n|,$$

причем для ортогональных векторов имеет место равенство. Значит, в рассматриваемом случае $\|A\| = 1$.

Оценим теперь нормы операторов, рассмотренных в примерах 9—11. Будем считать, что в прямом произведении $X = X_1\times\ldots\times X_m$ нормированных пространств $X_1, \ldots, X_m$ норма вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$ введена в соответствии с принятым в § 1 (пример 6) соглашением.

Пример 9′. Задание линейного оператора

$$A\colon X_1\times\ldots\times X_m = X\to Y,$$

как было показано, равносильно заданию m линейных операторов $A_i: X_i\to Y$, определенных соотношениями $A_i x_i = A((0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0))$, $i = 1, \ldots, m$. При этом имеет место формула (3), в силу которой

$$|Ax|_Y \leqslant \sum_{i=1}^m |A_i x_i|_Y \leqslant \sum_{i=1}^m \|A_i\|\,|x_i|_{X_i} \leqslant \left(\sum_{i=1}^m \|A\|\right)|x|_X.$$

Таким образом, показано, что

$$\|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|A_i\|.$$

С другой стороны, поскольку

$$|A_i x_i| = |A((0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0))| \leqslant \|A\| \, |(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)|_X = \|A\| \, |x_i|_{X_i},$$

можно заключить, что при любом $i = 1, \ldots, m$ справедлива также оценка

$$\|A_i\| \leqslant \|A\|.$$

Пример 10′. С учетом введенной в $Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ нормы в этом случае сразу получаем двусторонние оценки

$$\|A_i\| \leqslant \|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|A_i\|.$$

Пример 11′. Учитывая результаты примеров 9 и 10, можно заключить, что

$$\|A_{ij}\| \leqslant \|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \|A_{ij}\|.$$

3. Пространство непрерывных операторов. В дальнейшем нас будут интересовать не все линейные или полилинейные операторы, а только непрерывные. В этой связи полезно иметь в виду

Утверждение 1. *Для полилинейного оператора $A\colon X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$, действующего из произведения нормированных пространств $X_1, \ldots, X_n$ в нормированное пространство Y, следующие условия равносильны:*

a) *A имеет конечную норму,*

b) *A — ограниченный оператор,*

c) *A — непрерывный оператор,*

d) *A — оператор, непрерывный в точке* $(0, \ldots, 0) \in X_1 \times \ldots \times X_n$.

◄ Докажем замкнутую цепочку импликаций a) ⇒ b) ⇒ c) ⇒ d) ⇒ a).

Ввиду (8), очевидно, a) ⇒ b).

Проверим, что b) ⇒ c), т. е. что из (10) следует непрерывность оператора A. Действительно, учитывая полилинейность A, можем записать, что

$$\begin{aligned}
A(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - A(x_1, x_2, \ldots, x_n) =& \\
= A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, h_n) =& \\
+ A(h_1, h_2, x_3, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-2}, h_{n-1}, h_n) +& \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
+ A(h_1, \ldots, h_n).&
\end{aligned}$$

Теперь в силу (10) получаем оценку

$$|A(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n)-A(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant M(|h_1|\cdot|x_2|\cdot\ldots\cdot|x_n|+\ldots+|x_1|\cdot|x_2|\cdot\ldots\cdot|x_{n-1}|\cdot|h_n|+$$
$$+|h_1|\cdot|h_2|\cdot|x_3|\cdot\ldots\cdot|x_n|+\ldots+|x_1|\cdot|x_2|\cdot\ldots\cdot|h_{n-1}|\cdot|h_n|+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+|h_1|\cdot\ldots\cdot|h_n|),$$

из которой следует непрерывность A в любой точке $(x_1, \ldots, x_n)\in X_1\times\ldots\times X_n$.

В частности, если $(x_1, \ldots, x_n)=(0, \ldots, 0)$, то из c) получаем d).

Осталось показать, что d) $\Rightarrow$ a).

По $\varepsilon>0$ найдем $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ так, чтобы при $\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}<\delta$ иметь $|A(x_1, \ldots, x_n)|<\varepsilon$.

Тогда для любого набора $e_1, \ldots, e_n$ единичных векторов получаем

$$|A(e_1, \ldots, e_n)|=\frac{1}{\delta^n}|A(\delta e_1, \ldots, \delta e_n)|<\frac{\varepsilon}{\delta^n},$$

т. е. $\|A\|<\frac{\varepsilon}{\delta^n}<\infty$. ►

Выше (пример 1) мы видели, что не всякий линейный оператор имеет конечную норму, т. е. он не всегда непрерывен. Мы отмечали также, что нарушение непрерывности линейного оператора может произойти только в случае, когда он определен на пространстве бесконечной размерности.

Начиная с этого места, символом $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ будет обозначаться множество полилинейных *непрерывных* операторов, действующих из прямого произведения линейных нормированных пространств $X_1, \ldots, X_n$ в линейное нормированное пространство Y.

В частности, $\mathscr{L}(X; Y)$ есть множество всех линейных непрерывных операторов из X в Y.

В множестве $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ вводится естественная структура линейного пространства:

$$(A+B)(x_1, \ldots, x_n):=A(x_1, \ldots, x_n)+B(x_1, \ldots, x_n)$$

и

$$(\lambda A)(x_1, \ldots, x_n):=\lambda A(x_1, \ldots, x_n).$$

Очевидно, если $A, B\in\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, то $(A+B)\in\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ и $(\lambda A)\in$ $\in\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

Таким образом, $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ можно рассматривать как линейное пространство.

Утверждение 2. *Норма полилинейного оператора является нормой в линейном пространстве $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ непрерывных полилинейных операторов.*

◄ Прежде всего отметим, что в силу утверждения 1 для любого оператора $A\in\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ определено неотрицательное число $\|A\|<\infty$.

Неравенство (8) показывает, что

$$\|A\| = 0 \iff A = 0.$$

Далее, по определению нормы полилинейного оператора

$$\|\lambda A\| = \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|(\lambda A)(x_1, \dots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} = \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|\lambda|\, |A(x_1, \dots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} = |\lambda|\, \|A\|.$$

Наконец, если A и B — элементы пространства $\mathscr{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$, то

$$\|A+B\| = \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|(A+B)(x_1, \dots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} =$$

$$= \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|A(x_1, \dots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} + \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ x_i \neq 0}} \frac{|B(x_1, \dots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} = \|A\| + \|B\|. \ \blacktriangleright$$

Теперь, употребляя символ $\mathscr{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$, мы будем иметь в виду линейное *пространство непрерывных n-линейных операторов*, нормированное указанной *операторной нормой*. В частности, $\mathscr{L}(X, Y)$ — нормированное пространство линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y.

Сделаем к утверждению 2 следующее полезное

Дополнение. *Если X, Y, Z — нормированные пространства и $A \in \mathscr{L}(X; Y)$, а $B \in \mathscr{L}(Y; Z)$, то*

$$\|B \circ A\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|.$$

◄ В самом деле,

$$\|B \circ A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(B \circ A)x|}{|x|} \leqslant \sup_{x \neq 0} \frac{\|B\|\, |Ax|}{|x|} = \|B\| \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \|B\| \cdot \|A\|. \ \blacktriangleright$$

Утверждение 3. *Если Y — полное нормированное пространство, то $\mathscr{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$ также является полным нормированным пространством.*

◄ Проведем доказательство для пространства $\mathscr{L}(X; Y)$ линейных непрерывных операторов. Общий случай, как будет видно из приводимых ниже рассуждений, отличается только более громоздкой записью.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — фундаментальная последовательность в $\mathscr{L}(X; Y)$. Поскольку при любом $x \in X$

$$|A_m x - A_n x| = |(A_m - A_n)x| \leqslant \|A_m - A_n\|\, |x|,$$

то ясно, что при любом $x \in X$ последовательность $A_1 x, A_2 x, \dots, A_n x, \dots$ фундаментальна в Y. Ввиду полноты Y она имеет предел в Y, который мы обозначим через Ax.

Итак,

$$Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

Покажем, что $A\colon X \to Y$ — линейный непрерывный оператор.

Линейность A следует из того, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lim_{n\to\infty} (\lambda_1 A_n x_1 + \lambda_2 A_n x_2) = \lambda_1 \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \lambda_2 \lim_{n\to\infty} A_n x_2.$$

Далее, при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ и достаточно больших значениях $m, n \in \mathbb{N}$ выполнено $\|A_m - A_n\| < \varepsilon$, поэтому

$$|A_m x - A_n x| \leqslant \varepsilon |x|$$

на любом векторе $x \in X$. Устремляя в последнем неравенстве m к бесконечности и пользуясь непрерывностью нормы вектора, получаем

$$|Ax - A_n x| \leqslant \varepsilon |x|.$$

Таким образом, $\|A - A_n\| \leqslant \varepsilon$, и, поскольку $A = A_n + (A - A_n)$, заключаем, что

$$\|A\| \leqslant \|A_n\| + \varepsilon.$$

Следовательно, мы показали, что $A \in \mathscr{L}(X; Y)$ и $\|A - A_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в смысле нормы пространства $\mathscr{L}(X; Y)$. ►

В заключение остановимся на одном специальном замечании, относящемся к пространству полилинейных операторов, которое нам потребуется при рассмотрении дифференциалов высшего порядка.

Утверждение 4. *Между пространствами*

$$\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathscr{L}(X_{m+1}, \ldots, X_n; Y)) \quad \text{и} \quad \mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$$

при любом $m \in \{1, \ldots, n\}$ *существует биекция, сохраняющая линейную структуру и норму.*

◄ Предъявим этот изоморфизм. Пусть $\mathfrak{B} \in \mathscr{L}(X_1, \ldots, X_m; \mathscr{L}(X_{m+1}, \ldots, X_n; Y))$, т. е. $\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m) \in \mathscr{L}(X_{m+1}, \ldots, X_n; Y)$. Положим

$$A(x_1, \ldots, x_n) := \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_n). \tag{11}$$

Тогда

$$\|\mathfrak{B}\| = \sup_{\substack{x_1,\ldots,x_m\\ x_i \neq 0}} \frac{\|\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)\|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_m|} = \sup_{\substack{x_1,\ldots,x_m\\ x_i \neq 0}} \frac{\sup\limits_{\substack{x_{m+1},\ldots,x_n\\ x_j \neq 0}} \dfrac{|\mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_n)|}{|x_{m+1}| \cdot \ldots \cdot |x_n|}}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_m|} =$$

$$= \sup_{\substack{x_1,\ldots,x_n\\ x_k \neq 0}} \frac{|A(x_1, \ldots, x_n)|}{|x_1| \cdot \ldots \cdot |x_n|} = \|A\|.$$

Проверку того, что соотношение (11) задает изоморфизм рассматриваемых линейных пространств, мы оставляем читателю. ►

Применяя n раз утверждение 4, в частности, получаем, что пространство $\mathscr{L}(X_1; \mathscr{L}(X_2; \ldots; \mathscr{L}(X_n; Y)) \ldots)$ изоморфно пространству $\mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ n-линейных операторов.

Задачи и упражнения

1. a) Докажите, что если $A\colon X \to Y$ — линейный оператор, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, и пространство X конечномерно, то A — непрерывный оператор.

b) Докажите для полилинейного оператора утверждение, аналогичное сформулированному в a).

2. Два линейных нормированных пространства называются *изоморфными*, если существует такой изоморфизм между ними (как линейными векторными пространствами), который вместе с ему обратным является непрерывным линейным оператором.

a) Покажите, что линейные нормированные пространства одинаковой конечной размерности изоморфны.

b) Покажите, что для бесконечномерного случая утверждение a) уже, вообще говоря, не имеет места.

c) В пространстве $C([a, b], \mathbb{R})$ введите две нормы так, чтобы тождественное отображение $C([a, b], \mathbb{R})$ на себя не было непрерывным отображением полученных нормированных пространств.

3. Покажите, что если полилинейный оператор непрерывен в некоторой точке, то он непрерывен всюду.

4. Пусть $A\colon E^n \to E^n$ — линейное преобразование евклидова n-мерного пространства, $A^*\colon E^n \to E^n$ — сопряженное к нему преобразование.

Покажите, что:

a) Все собственные значения оператора $A \cdot A^*\colon E^n \to E^n$ неотрицательны.

b) Если $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — собственные значения оператора $A \cdot A^*$, то $\|A\| = \sqrt{\lambda_n}$.

c) Если оператор A имеет обратный $A^{-1}\colon E^n \to E^n$, то $\|A^{-1}\| = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$.

d) Если (a^i_j) — матрица преобразования $A\colon E^n \to E^n$ в некотором базисе, то справедливы оценки

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a^i_j)^2} \leqslant \|A\| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (a^i_j)^2} \leqslant \sqrt{n}\, \|A\|.$$

5. Пусть $\mathbb{P}[x]$ — линейное пространство многочленов от переменной x с вещественными коэффициентами. Норму вектора $P \in \mathbb{P}[x]$ определим формулой

$$|P| = \sqrt{\int_0^1 P^2(x)\, dx}.$$

a) Ограничен ли в полученном пространстве оператор $D\colon \mathbb{P}[x] \to \mathbb{P}[x]$ дифференцирования $D(P(x)) := P'(x)$?

b) Найдите норму оператора $F\colon \mathbb{P}[x] \to \mathbb{P}[x]$ умножения на x, действующего по закону $F(P(x)) := x \cdot P(x)$.

6. На примере операторов проектирования в $\mathbb{R}^2$ покажите, что неравенство $\|B \cdot A\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|$ может быть строгим.

§ 3. Дифференциал отображения

1. Отображение, дифференцируемое в точке

Определение 1. Пусть X, Y — нормированные пространства. Отображение $f: E \to Y$ множества $E \subset X$ в Y называется *дифференцируемым в точке* $x \in E$, внутренней для E, если существует такое линейное непрерывное отображение $L(x): X \to Y$, что

$$f(x+h) - f(x) = L(x)h + \alpha(x; h), \tag{1}$$

где $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x + h \in E$[1].

Определение 2. Линейная относительно h функция $L(x) \in \mathscr{L}(X; Y)$, удовлетворяющая соотношению (1), называется *дифференциалом, касательным отображением* или *производной отображения* $f: E \to Y$ *в точке* x.

Как и прежде, мы будем обозначать $L(x)$ одним из символов $df(x)$, $Df(x)$ или $f'(x)$.

Мы видим, таким образом, что приведенное общее определение дифференцируемости отображения в точке почти дословно совпадает с уже знакомым нам из главы VIII, § 2 определением, где оно рассматривалось в случае $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$. Поэтому без повторных пояснений мы позволим себе в дальнейшем употреблять такие введенные там понятия, как *приращение функции*, *приращение аргумента*, *касательное пространство в точке*, оставляя за ними соответствующие обозначения.

Проверим, однако, в общем виде следующее

Утверждение 1. *Если отображение $f: E \to Y$ дифференцируемо во внутренней точке x множества $E \subset X$, то его дифференциал $L(x)$ в этой точке определен однозначно.*

◄ Итак, проверим единственность дифференциала.

Пусть $L_1(x)$ и $L_2(x)$ — линейные отображения, удовлетворяющие соотношению (1), т. е.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) - L_1(x)h &= \alpha_1(x; h), \\ f(x+h) - f(x) - L_2(x)h &= \alpha_2(x; h), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_i(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x + h \in E$, $i = 1, 2$.

Тогда, полагая $L(x) = L_2(x) - L_1(x)$ и $\alpha(x; h) = \alpha_2(x; h) - \alpha_1(x; h)$, после вычитания второго из равенств (2) из первого, получим, что

$$L(x)h = \alpha(x; h).$$

Здесь $L(x)$ — линейное относительно h отображение, а $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x + h \in E$. Взяв вспомогательный числовой параметр λ, можно теперь

---

[1] Запись «$\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x + h \in E$», разумеется, означает, что

$$\lim_{h \to 0,\, x+h \in E} |\alpha(x; h)|_Y \cdot |h|_X^{-1} = 0.$$

записать, что

$$|L(x)h| = \frac{|L(x)(\lambda h)|}{|\lambda|} = \frac{|\alpha(x;\lambda h)|}{|\lambda h|}|h| \to 0 \quad \text{при } \lambda \to 0.$$

Таким образом, $L(x)h = 0$ при любом $h \neq 0$ (напомним, что x — внутренняя точка E). Поскольку $L(x)0 = 0$, то мы показали, что при любом значении h имеет место равенство $L_1(x)h = L_2(x)h$. ►

Если E — открытое подмножество в X, а $f: E \to Y$ — отображение, дифференцируемое в каждой точке $x \in E$, т. е. *дифференцируемое на* E, то в силу доказанной единственности дифференциала отображения в точке, на множестве E возникает функция $E \ni x \mapsto f'(x) \in \mathscr{L}(X;Y)$, обозначаемая $f': E \to \mathscr{L}(X;Y)$, которую называют *производной от* f или *производным отображением* по отношению к исходному отображению $f: E \to Y$. Значение $f'(x)$ этой функции в индивидуальной точке $x \in E$ есть линейное непрерывное отображение $f'(x) \in \mathscr{L}(X;Y)$, являющееся дифференциалом или производной функции f в данной конкретной точке $x \in E$.

Отметим, что ввиду высказанного в определении 1 требования *непрерывности* линейного отображения $L(x)$ из равенства (1) следует, что отображение, дифференцируемое в точке, необходимо является непрерывным в этой точке.

Обратное, конечно, неверно, что мы уже видели на примере числовых функций.

Сделаем еще следующее важное

Замечание. Если условие дифференцируемости отображения f в некоторой точке a записать в виде

$$f(x) - f(a) = L(x)(x-a) + \alpha(a;x),$$

где $\alpha(a;x) = o(x-a)$ при $x \to a$, то становится ясно, что определение 1 на самом деле относится к отображениям $f: A \to B$ любых аффинных пространств (A, X), (B, Y), линейные пространства X и Y которых нормированы. Такие аффинные пространства, называемые *аффинными нормированными пространствами*, встречаются часто, поэтому сделанное замечание полезно иметь в виду при использовании дифференциального исчисления.

Все дальнейшее, если нет специальной оговорки, в равной степени относится как к линейным, так и к аффинным нормированным пространствам и лишь для упрощения записи мы используем символику векторных пространств.

2. Общие законы дифференцирования. Из определения 1 вытекают следующие общие свойства операции дифференцирования. В приводимых ниже формулировках X, Y, Z — нормированные пространства, а U и V — открытые множества в X и Y соответственно.

a. Линейность дифференцирования. *Если отображения* $f_i\colon U\to Y$, $i=1,2$, *дифференцируемы в точке* $x\in U$, *то их линейная комбинация* $(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)\colon U\to Y$ *также дифференцируема в точке* x, *причем*

$$(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)'(x)=\lambda_1 f_1'(x)+\lambda_2 f_2'(x).$$

Таким образом, дифференциал линейной комбинации отображений есть соответствующая линейная комбинация дифференциалов этих отображений.

b. Дифференцирование композиции отображений. *Если отображение* $f\colon U\to V$ *дифференцируемо в точке* $x\in U\subset X$, *а отображение* $g\colon V\to Z$ *дифференцируемо в точке* $f(x)=y\in V\subset Y$, *то композиция* $g\circ f$ *этих отображений дифференцируема в точке* x, *причем*

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\circ f'(x).$$

Таким образом, дифференциал композиции равен композиции дифференциалов.

c. Дифференцирование обратного отображения. *Пусть* $f\colon U\to Y$ — *непрерывное в точке* $x\in U\subset X$ *отображение, имеющее обратное* $f^{-1}\colon V\to X$, *определенное в окрестности точки* $y=f(x)$ *и непрерывное в этой точке.*

Если отображение f *дифференцируемо в точке* x *и его касательное отображение* $f'(x)\in\mathscr{L}(X;Y)$ *в этой точке имеет непрерывное обратное* $[f'(x)]^{-1}\in\mathscr{L}(Y,X)$, *то отображение* f^{-1} *дифференцируемо в точке* $y=f(x)$, *причем*

$$[f^{-1}]'(f(x))=[f'(x)]^{-1}.$$

Таким образом, дифференциал обратного отображения есть линейное отображение, обратное к дифференциалу исходного отображения в соответствующей точке.

Доказательства утверждений a, b, c мы опускаем, поскольку они аналогичны тем доказательствам, которые были даны в гл. VIII, § 3 для случая $X=\mathbb{R}^m$, $Y=\mathbb{R}^n$.

3. Некоторые примеры.

Пример 1. Если $f\colon U\to Y$ — постоянное отображение окрестности $U=U(x)\subset X$ точки x, т. е. $f(U)=y_0\in Y$, то $f'(x)=0\in\mathscr{L}(X;Y)$.

◄ Действительно, в этом случае, очевидно,

$$f(x+h)-f(x)-0h=y_0-y_0-0=0=o(h).\ ►$$

Пример 2. Если отображение $f\colon X\to Y$ есть линейное непрерывное отображение линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y, то $f'(x)=f\in\mathscr{L}(X;Y)$ в любой точке $x\in X$.

◄ Действительно,

$$f(x+h)-f(x)-fh=fx+fh-fx-fh=0.\ ►$$

Заметим, что на самом-то деле здесь $f'(x) \in \mathscr{L}(TX_x; TY_{f(x)})$, и h — вектор касательного пространства TX_x. Но в линейном пространстве определен перенос вектора в любую точку $x \in X$, что позволяет нам отождествить касательное пространство TX_x с самим линейным пространством X. (Аналогично в случае аффинного пространства (A, X) пространство TA_a векторов, «приложенных» к точке $a \in A$, можно отождествить с векторным пространством X данного аффинного пространства.) Следовательно, выбрав базис в X, его можно разнести по всем касательным пространствам TX_x. Это означает, что если, например, $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$ и отображение $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ задается матрицей (a_i^j), то в любой точке $x \in \mathbb{R}^m$ касательное к нему отображение $f'(x)\colon T\mathbb{R}^m_x \to T\mathbb{R}^n_{f(x)}$ также будет задаваться той же матрицей.

В частности, для линейного отображения $x \overset{f}{\longmapsto} ax = y$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ при $x \in \mathbb{R}$ и $h \in T\mathbb{R}_x \sim \mathbb{R}$ получаем соответствующее отображение $T\mathbb{R}_x \ni h \overset{f'}{\longmapsto} ah \in T\mathbb{R}_{f(x)}$.

С учетом сделанных оговорок результат примера 2 можно условно сформулировать так: отображение $f'\colon X \to Y$, производное от линейного отображения $f\colon X \to Y$ линейных нормированных пространств, постоянно, причем $f'(x) = f$ в любой точке $x \in X$.

Пример 3. Из правила дифференцирования композиции отображений и результата примера 2 можно заключить, что если $f\colon U \to Y$ — отображение окрестности $U = U(x) \subset X$ точки $x \in X$, дифференцируемое в x, а $A \in \mathscr{L}(Y; Z)$, то

$$(A \circ f)'(x) = A \circ f'(x).$$

Для числовых функций, когда $Y = Z = \mathbb{R}$, это не что иное, как знакомая возможность вынесения постоянного множителя за знак дифференцирования.

Пример 4. Пусть снова $U = U(x)$ — окрестность точки x нормированного пространства X, и пусть

$$f\colon U \to Y = Y_1 \times \ldots \times Y_n$$

— отображение U в прямое произведение нормированных пространств $Y_1, \ldots, Y_n$.

Задание такого отображения равносильно заданию n отображений $f_i\colon U \to Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, связанных с f соотношением

$$x \mapsto f(x) = y = (y_1, \ldots, y_n) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)),$$

справедливым в любой точке U.

Если теперь в формуле (1) учесть, что

$$f(x+h) - f(x) = (f_1(x+h) - f_1(x), \ldots, f_n(x+h) - f_n(x)),$$
$$L(x)h = (L_1(x)h, \ldots, L_n(x)h),$$
$$\alpha(x; h) = (\alpha_1(x; h), \ldots, \alpha_n(x; h)),$$

то со ссылкой на результаты примеров 6 из § 1 и 10 из § 2 можно заключить, что рассматриваемое отображение f дифференцируемо в точке x тогда и

только тогда, когда дифференцируемы все его компоненты $f_i\colon U \to Y_i$, $i = 1, \ldots, n$, причем в случае дифференцируемости отображения f имеет место равенство
$$f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_n'(x)).$$

Пример 5. Пусть теперь $A \in \mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, т. е. A — непрерывный n-линейный оператор, действующий из произведения $X_1 \times \ldots \times X_n$ линейных нормированных пространств $X_1, \ldots, X_n$ в линейное нормированное пространство Y.

Докажем дифференцируемость отображения
$$A\colon X_1 \times \ldots \times X_n = X \to Y$$
и найдем его дифференциал.

◄ Используя полилинейность A, находим, что
$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= A(x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n) - A(x_1, \ldots, x_n) = \\ &= A(x_1, \ldots, x_n) + A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n) + \\ &\quad + A(h_1, h_2, x_3, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-2}, h_{n-1}, h_n) + \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + A(h_1, \ldots, h_n) - A(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Поскольку норма в $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ удовлетворяет неравенствам
$$|x_i|_{X_i} \leqslant |x|_X \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|_{X_i},$$
а норма $\|A\|$ оператора A конечна и
$$|A(\xi_1, \ldots, \xi_n)| \leqslant \|A\|\, |\xi_1| \times \ldots \times |\xi_n|,$$
можно заключить, что
$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= A(x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n) - A(x_1, \ldots, x_n) = \\ &= A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n) + \alpha(x; h), \end{aligned}$$
где $\alpha(x; h) = o(h)$ при $h \to 0$.

Но оператор
$$L(x)h = A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n)$$
есть линейный по $h = (h_1, \ldots, h_n)$ непрерывный (в силу непрерывности A) оператор.

Таким образом, установлено, что
$$A'(x)h = A'(x_1, \ldots, x_n)(h_1, \ldots, h_n) = A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n)$$
или, короче,
$$dA(x_1, \ldots, x_n) = A(dx_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, dx_n). \ ►$$

В частности, если:

a) $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ — произведение n-числовых переменных, то

$$d(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = dx_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n + \ldots + x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot dx_n;$$

b) $\langle x_1, x_2 \rangle$ — скалярное произведение в E^3, то

$$d\langle x_1, x_2 \rangle = \langle dx_1, x_2 \rangle + \langle x_1, dx_2 \rangle;$$

c) $[x_1, x_2]$ — векторное произведение в E^3, то

$$d[x_1, x_2] = [dx_1, x_2] + [x_1, dx_2];$$

d) (x_1, x_2, x_3) — смешанное произведение в E^3, то

$$d(x_1, x_2, x_3) = (dx_1, x_2, x_3) + (x_1, dx_2, x_3) + (x_1, x_2, dx_3);$$

e) $\det(x_1, \ldots, x_n)$ — определитель матрицы, составленной из координат n векторов $x_1, \ldots, x_n$ n-мерного линейного пространства X с фиксированным в X базисом, то

$$d(\det(x_1, \ldots, x_n)) = \det(dx_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \det(x_1, \ldots, x_{n-1}, dx_n).$$

Пример 6. Пусть U — подмножество $\mathscr{L}(X; Y)$, состоящее из тех линейных непрерывных операторов $A\colon X \to Y$, которые имеют непрерывные обратные операторы $A^{-1}\colon Y \to X$ (принадлежащие $\mathscr{L}(Y; X)$). Рассмотрим отображение

$$U \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathscr{L}(Y; X),$$

состоящее в том, что каждому оператору $A \in U$ ставится в соответствие обратный к нему оператор $A^{-1} \in \mathscr{L}(Y; X)$.

Доказываемое ниже утверждение 2 позволяет ответить на вопрос о дифференцируемости этого отображения.

Утверждение 2. *Если X — полное пространство и $A \in U$, то при любом $h \in \mathscr{L}(X; Y)$ таком, что $\|h\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, оператор $A + h$ также принадлежит U и справедливо соотношение*

$$(A+h)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}hA^{-1} + o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{3}$$

◄ Поскольку

$$(A+h)^{-1} = (A(E + A^{-1}h))^{-1} = (E + A^{-1}h)^{-1}A^{-1}, \tag{4}$$

то достаточно найти оператор $(E+A^{-1}h)^{-1}$, обратный к оператору $(E+A^{-1}h) \in \mathscr{L}(X; X)$, где E — тождественное (единичное) отображение e_X пространства X на себя.

Пусть $\Delta := -A^{-1}h$. Учитывая сделанное к утверждению 2 из § 2 дополнение, можно заметить, что $\|\Delta\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|h\|$, поэтому в силу сделанных относительно оператора h предположений можно считать, что $\|\Delta\| \leqslant q < 1$.

Проверим теперь, что

$$(E - \Delta)^{-1} = E + \Delta + \Delta^2 + \ldots + \Delta^n + \ldots, \tag{5}$$

где ряд, стоящий справа, есть ряд, составленный из линейных операторов $\Delta^n = (\Delta \circ \ldots \circ \Delta) \in \mathscr{L}(X; X)$.

Ввиду полноты X (в силу утверждения 3 из § 2) линейное нормированное пространство $\mathscr{L}(X; X)$ является полным. Тогда сходимость указанного ряда, составленного из векторов этого пространства, немедленно вытекает из того, что $\|\Delta^n\| \leqslant \|\Delta\|^n \leqslant q^n$, и того, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, если $|q| < 1$.

Непосредственная проверка

$$(E + \Delta + \Delta^2 + \ldots)(E - \Delta) = (E + \Delta + \Delta^2 + \ldots) - (\Delta + \Delta^2 + \Delta^3 + \ldots) = E$$

и

$$(E - \Delta)(E + \Delta + \Delta^2 + \ldots) = (E + \Delta + \Delta^2 + \ldots) - (\Delta + \Delta^2 + \Delta^3 + \ldots) = E$$

показывает, что мы действительно нашли $(E - \Delta)^{-1}$.

Стоит отметить, что свобода выполнения арифметических операций над рядами (перестановки членов!) в данном случае гарантируется абсолютной сходимостью (сходимостью по норме) рассматриваемых рядов.

Сопоставляя соотношения (4) и (5), заключаем, что при $\|h\| \leqslant \|A^{-1}\|^{-1}$

$$(A + h)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}hA^{-1} + (A^{-1}h)^2A^{-1} - \ldots + (-1)^n(A^{-1}h)^nA^{-1} + \ldots \qquad (6)$$

Поскольку

$$\left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-A^{-1}h)^n A^{-1} \right\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \|A^{-1}h\|^n \|A^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\|^3 \|h\|^2 \sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{\|A^{-1}\|^3}{1-q} \|h\|^2,$$

то из (6), в частности, следует равенство (3). ►

Возвращаясь теперь к примеру 6, можно сказать, что в случае полного пространства X рассматриваемое отображение $A \overset{f}{\longmapsto} A^{-1}$ заведомо дифференцируемо, причем

$$df(A)h = d(A^{-1})h = -A^{-1}hA^{-1}.$$

В частности, это означает, что если A — квадратная невырожденная матрица и A^{-1} — обратная к ней матрица, то при возмущении матрицы A с помощью матрицы h с близкими к нулю элементами матрицу $(A + h)^{-1}$, обратную к возмущенной матрице $A + h$, можно в первом приближении находить по следующей формуле:

$$(A + h)^{-1} \approx A^{-1} - A^{-1}hA^{-1}.$$

Более точные формулы, очевидно, можно получить, исходя из равенства (6).

Пример 7. Пусть X — полное линейное нормированное пространство. Важное отображение

$$\exp\colon \mathscr{L}(X; X) \to \mathscr{L}(X; X)$$

определяется следующим образом:

$$\exp A := E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots, \tag{7}$$

если $A \in \mathscr{L}(X; X)$.

Стоящий в (7) ряд сходится, так как $\mathscr{L}(X; X)$ — полное пространство и $\left\|\frac{1}{n!}A^n\right\| \leqslant \frac{\|A\|^n}{n!}$, а числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$ сходится.

Нетрудно проверить, что

$$\exp(A+h) = \exp A + L(A)h + o(h) \quad \text{при } h \to \infty, \tag{8}$$

где

$$L(A)h = h + \frac{1}{2!}(Ah + hA) + \frac{1}{3!}(A^2h + AhA + hA^2) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}(A^{n-1}h + A^{n-2}hA + \ldots + AhA^{n-2} + hA^{n-1}) + \ldots$$

и $\|L(A)\| \leqslant \exp\|A\| = e^{\|A\|}$, т. е. $L(A) \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(X; X); \mathscr{L}(X; X))$.

Таким образом, отображение $\mathscr{L}(X; X) \ni A \mapsto \exp A \in \mathscr{L}(X; X)$ дифференцируемо при любом значении A.

Заметим, что если операторы A и h коммутируют, т. е. $Ah = hA$, то, как видно из выражения для $L(A)h$, в этом случае $L(A)h = (\exp A)h$. В частности, для $X = \mathbb{R}$ или $X = \mathbb{C}$ вместо (8) вновь получаем

$$\exp(A+h) = \exp A + (\exp A)h + o(h) \quad \text{при } h \to 0. \tag{9}$$

Пример 8. Попробуем дать математическое описание мгновенной скорости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой o (волчок). Рассмотрим в точке o ортонормальный репер $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, жестко связанный с телом. Ясно, что положение тела вполне характеризуется положением такого орторепера, а тройка $\{\dot{\boldsymbol{e}}_1, \dot{\boldsymbol{e}}_2, \dot{\boldsymbol{e}}_3\}$ мгновенных скоростей движения векторов репера, очевидно, вполне характеризует мгновенную скорость вращения тела. Положение самого репера $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ в момент t можно задать ортогональной матрицей (α_i^j), $i, j = 1, 2, 3$, составленной из координат векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ относительно некоторого неподвижного ортонормированного репера пространства. Таким образом, движению волчка отвечает отображение $t \to O(t)$ из $\mathbb{R}$ (ось времени) в группу $SO(3)$ специальных ортогональных матриц третьего порядка. Следовательно, скорость вращения тела, которую мы договорились описывать тройкой $\{\dot{\boldsymbol{e}}_1, \dot{\boldsymbol{e}}_2, \dot{\boldsymbol{e}}_3\}$, задается матрицей $\dot{O}(t) =: (\omega_i^j)(t) = (\dot{\alpha}_i^j)(t)$ — производной от матрицы $O(t) = (\alpha_i^j)(t)$ по времени.

Поскольку $O(t)$ — ортогональная матрица, то в любой момент t выполнено соотношение

$$O(t)O^*(t) = E, \tag{10}$$

где $O^*(t)$ — транспонированная по отношению к $O(t)$ матрица, а E — единичная матрица.

Заметим, что произведение $A \cdot B$ матриц есть билинейная функция от A и B, а производная от транспонированной матрицы, очевидно, равна матрице, транспонированной по отношению к производной исходной матрицы. Дифференцируя равенство (10) с учетом сказанного, находим, что

$$\dot{O}(t)O^*(t) + O(t)\dot{O}^*(t) = 0$$

или

$$\dot{O}(t) = -O(t)\dot{O}^*(t)O(t), \tag{11}$$

поскольку $O^*(t)O(t) = E$.

В частности, если считать, что в момент t репер $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ совпадает с репером пространства, то $O(t) = E$ и из (11) получается, что

$$\dot{O}(t) = -\dot{O}^*(t), \tag{12}$$

т. е. матрица $\dot{O}(t) =: \Omega(t) = (\omega_i^j)$ координат векторов $\{\dot{\boldsymbol{e}}_1, \dot{\boldsymbol{e}}_2, \dot{\boldsymbol{e}}_3\}$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ оказывается кососимметрической:

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мгновенная скорость волчка на самом-то деле характеризуется тремя независимыми параметрами, что в наших рассуждениях проистекало из соотношения (10) и что с физической точки зрения естественно, поскольку положение репера $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, а значит, и самого тела, описывается тремя независимыми параметрами (в механике это, например, углы Эйлера).

Если с каждым вектором $\boldsymbol{\omega} = \omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2 + \omega^3\boldsymbol{e}_3$ пространства, приложенным к точке o, связать правое вращение пространства с угловой скоростью $|\boldsymbol{\omega}|$ относительно определяемой этим вектором оси, то из полученных результатов нетрудно заключить, что в каждый момент t тело имеет свою мгновенную ось вращения и скорость тела в данный момент может быть адекватно описана мгновенным вектором скорости вращения $\boldsymbol{\omega}(t)$ (см. задачу 5).

4. Частные производные отображения. Пусть $U = U(a)$ — окрестность точки $a \in X = X_1 \times \ldots \times X_m$ в прямом произведении нормированных пространств $X_1, \ldots, X_m$, и пусть $f\colon U \to Y$ — отображение U в нормированное пространство V. В этом случае

$$y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_m), \tag{13}$$

и значит, фиксировав в (13) все переменные, кроме одной переменной x_i, положив $x_k = a_k$, $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus i$, мы получим функцию

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_m) =: \varphi_i(x_i), \tag{14}$$

определенную в некоторой окрестности U_i точки a_i пространства X_i.

Определение 3. Отображение $\varphi_i: U_i \to Y$ по отношению к исходному отображению (13) называют *частным отображением по переменной* x_i *в точке* $a \in X$.

Определение 4. Если отображение (14) дифференцируемо в точке $x_i = a_i$, то его производная в этой точке называется *частной производной* или *частным дифференциалом отображения* f *в точке* a *по переменной* x_i.

Эту частную производную обозначают обычно одним из символов

$$\partial_i f(a),\ D_i f(a),\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),\ f'_{x_i}(a).$$

В соответствии с этими определениями $D_i f(a) \in \mathscr{L}(X_i; Y)$, точнее, $D_i f(a) \in \mathscr{L}(TX_i(a_i); TY(f(a)))$.

Дифференциал $df(a)$ отображения (13) в точке a (если f дифференцируемо в точке a) часто в рассматриваемой ситуации называют *полным дифференциалом*, чтобы отличить его от частных дифференциалов по отдельным переменным.

Ранее все эти понятия нам уже встречались в случае вещественнозначных функций m вещественных переменных, поэтому мы не будем здесь подробно их обсуждать. Отметим только, что, повторив прежние рассуждения, с учетом разобранного в § 2 примера 9, легко доказать, что и в общем случае справедливо следующее

Утверждение 3. *Если отображение* (13) *дифференцируемо в точке* $a = (a_1, \ldots, a_m) \in X_1 \times \ldots \times X_m = X$, *то оно имеет в этой точке частные дифференциалы по каждой из переменных, причем полный дифференциал и частные дифференциалы связаны соотношением*

$$df(a)h = \partial_1 f(a)h_1 + \ldots + \partial_m f(a)h_m, \tag{15}$$

где $h = (h_1, \ldots, h_m) \in TX_1(a_1) \times \ldots \times TX_m(a_m) = TX(a)$.

На примере числовых функций мы уже уяснили себе, что наличие частных дифференциалов, вообще говоря, не гарантирует дифференцируемости функции (13).

Задачи и упражнения

1. a) Пусть $A \in \mathscr{L}(X; X)$ — *нильпотентный оператор*, т. е. существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $A^k = 0$. Покажите, что оператор $(E - A)$ в этом случае имеет обратный, причем

$$(E - A)^{-1} = E + A + \ldots + A^{k-1}.$$

b) Пусть $D: \mathbb{P}[x] \to \mathbb{P}[x]$ — оператор дифференцирования на линейном пространстве $\mathbb{P}[x]$ полиномов. Заметив, что D — нильпотентный оператор, запишите оператор $\exp(aD)$, где $a \in \mathbb{R}$, и покажите, что $\exp(aD)(P(x)) = P(x + a) =: T_a(P(x))$.

c) Запишите матрицы операторов $D: \mathbb{P}_n[x] \to \mathbb{P}_n[x]$ и $T_a: \mathbb{P}_n[x] \to \mathbb{P}_n[x]$ (из задачи b) в базисе $e_i = \dfrac{x^{n-i}}{(n-i)!}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, пространства $\mathbb{P}_n[x]$ вещественных полиномов степени n от одной переменной.

2. a) Если $A, B \in \mathscr{L}(X; X)$ и $\exists B^{-1} \in \mathscr{L}(X; X)$, то $\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}(\exp A)B$.

b) Если $AB = BA$, то $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$.

c) Проверьте, что $\exp 0 = E$ и что $\exp A$ всегда имеет обратный оператор, причем $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$.

3. Пусть $A \in \mathscr{L}(X; X)$. Рассмотрим отображение $\varphi_A : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(X; X)$, определяемое соответствием $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA) \in \mathscr{L}(X; X)$. Покажите, что:

a) отображение φ_A непрерывно;

b) φ_A есть гомоморфизм $\mathbb{R}$ как аддитивной группы в мультипликативную группу обратимых операторов из $\mathscr{L}(X; X)$.

4. Проверьте, что:

a) Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения оператора $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$, то $\exp \lambda_1, \ldots, \exp \lambda_n$ суть собственные значения оператора $\exp A$.

b) $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A)$, где $\operatorname{tr} A$ — след оператора $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$.

c) Если $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, то $\det(\exp A) > 0$.

d) Если A^* — транспонированная по отношению к матрице $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$ матрица, а $\bar{A}$ — матрица из комплексно сопряженных (по отношению к элементам A) элементов, то $(\exp A)^* = \exp A^*$ и $\overline{\exp A} = \exp \bar{A}$.

e) Матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ не является матрицей вида $\exp A$, какова бы ни была квадратная матрица A второго порядка.

5. Напомним, что множество, наделенное одновременно структурой группы и структурой топологического пространства, называется *топологической* или *непрерывной группой*, если групповая операция непрерывна в указанной топологии; если же групповая операция в некотором смысле даже аналитична, то топологическая группа называется *группой Ли*[1].

Алгебра Ли — это линейное пространство X с антикоммутативной билинейной операцией $[\ ,\ ] : X \times X \to X$, удовлетворяющей *тождеству Якоби*: для любых векторов $a, b, c \in X$ $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$. Группы и алгебры Ли тесно связаны между собой и важную роль в осуществлении этой связи играет отображение exp (см. задачу 1).

Примером алгебры Ли может служить ориентированное евклидово пространство E^3 с операцией векторного произведения его векторов. Обозначим пока эту алгебру Ли через LA_1.

a) Покажите, что вещественные кососимметрические матрицы порядка 3 образуют алгебру Ли (обозначим ее LA_2), если произведение матриц A и B определить соотношением $[A, B] = AB - BA$.

b) Покажите, что соответствие

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \boldsymbol{\omega}$$

является изоморфизмом алгебр LA_2 и LA_1.

c) Проверьте, что если кососимметрическая матрица Ω и вектор $\boldsymbol{\omega}$ соответствуют друг другу, как указано в b), то для любого вектора $\boldsymbol{r} \in E^3$ имеет место равенство $\Omega \boldsymbol{r} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]$, а для любой матрицы $P \in SO(3)$ — соответствие $P\Omega P^{-1} \leftrightarrow P\boldsymbol{\omega}$.

d) Проверьте, что если $\mathbb{R} \ni t \mapsto O(t) \in SO(3)$ — гладкое отображение, то матрица $\Omega(t) = O^{-1}(t)\dot{O}(t)$ — кососимметрическая.

[1]Точное определение группы Ли и соответствующую сноску см. в гл. XV, § 2, задача 8.

e) Покажите, что если $\boldsymbol{r}(t)$ — радиус-вектор некоторой точки вращающегося волчка, а $\Omega(t)$ — найденная в d) матрица $(O^{-1}\dot{O})(t)$, то $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\Omega \boldsymbol{r})(t)$.

f) Пусть $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — два приложенных к началу координат вектора пространства E^3. Пусть в E^3 выбран правый репер и пространство совершает правое вращение с угловой скоростью $|\boldsymbol{\omega}|$ вокруг оси, определяемой вектором $\boldsymbol{\omega}$. Покажите, что при этом $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}(t)]$.

g) Сопоставьте результаты задач d), e), f) и укажите вектор мгновенной скорости вращающегося волчка, о котором говорилось в примере 8.

h) Используя результат задачи c), проверьте, что вектор скорости $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора неподвижного орторепера в E^3, т. е. не зависит от системы координат.

6. Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) = (x^1(s), x^2(s), x^3(s))$ — параметрическое уравнение гладкой кривой в E^3, причем в качестве параметра взята длина дуги вдоль кривой (*натуральная параметризация кривой*).

a) Покажите, что вектор $\boldsymbol{e}_1(s) = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}(s)$, касательный к кривой, в этом случае имеет единичную длину.

b) Вектор $\dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}(s) = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}(s)$ ортогонален вектору $\boldsymbol{e}_1$. Пусть $\boldsymbol{e}_2(s)$ — единичный вектор, сонаправленный $\dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}(s)$. Коэффициент $k(s)$ в равенстве $\dfrac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}(s) = k(s)\boldsymbol{e}_2(s)$ называют *кривизной* кривой в соответствующей точке.

c) Построив вектор $\boldsymbol{e}_3(s) = [\boldsymbol{e}_1(s), \boldsymbol{e}_2(s)]$, мы получаем в каждой точке нашей кривой репер $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}(s)$, который называют *репером Френе*[1] или *сопровождающим трехгранником* кривой. Проверьте следующие формулы Френе:

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{e}_1}{ds}(s) &= \qquad\qquad k(s)\boldsymbol{e}_2(s),\\
\frac{d\boldsymbol{e}_2}{ds}(s) &= -k(s)\boldsymbol{e}_1(s) \qquad\qquad + \varkappa(s)\boldsymbol{e}_3(s),\\
\frac{d\boldsymbol{e}_3}{ds}(s) &= \qquad\qquad -\varkappa(s)\boldsymbol{e}_2(s).
\end{aligned}$$

Выясните геометрический смысл коэффициента $\varkappa(s)$, называемого *кручением* кривой в соответствующей точке.

§ 4. Теорема о конечном приращении и некоторые примеры ее использования

1. Теорема о конечном приращении. Изучая числовые функции одной переменной, мы в гл. V, § 3, п. 2 доказали для них теорему о конечном приращении и подробно обсудили различные аспекты этой важной теоремы анализа. Здесь теорема о конечном приращении будет доказана в общем виде. Чтобы ее утверждение было для читателя очевидным, советуем восстановить в памяти обсуждения, проведенные в указанном пункте, а также обратить внимание на геометрический смысл нормы линейного оператора (см. § 2, п. 2).

[1] Ж. Ф. Френе (1816—1900) — французский математик.

Теорема 1 (о конечном приращении). *Пусть $f\colon U\to Y$ — непрерывное отображение открытого множества U нормированного пространства X в нормированное пространство Y.*

Если отрезок $[x,x+h]=\{\xi\in X \mid \xi=x+\theta h,\ 0\leqslant\theta\leqslant 1\}$ полностью содержится в U и отображение f дифференцируемо во всех точках интервала $]x,x+h[=\{\xi\in X\mid \xi=x+\theta h,\ 0<\theta<1\}$, то справедлива следующая оценка:

$$|f(x+h)-f(x)|_Y\leqslant \sup_{\xi\in]x,x+h[}\|f'(\xi)\|_{\mathscr{L}(X;Y)}|h|_X. \tag{1}$$

◄ Заметим прежде всего, что если бы для любого отрезка $[x',x'']\subset[x,x+h]$ нам удалось проверить неравенство

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant \sup_{\xi\in[x',x'']}\|f'(\xi)\|\,|x''-x'|, \tag{2}$$

в котором верхняя грань берется уже по всему отрезку $[x',x'']$, то, пользуясь непрерывностью f и нормы, а также тем, что

$$\sup_{\xi\in[x',x'']}\|f'(\xi)\|\leqslant \sup_{\xi\in]x,x+h[}\|f'(\xi)\|,$$

мы в пределе при $x'\to x$ и $x''\to x+h$ получили бы неравенство (1).

Итак, нам достаточно доказать, что

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant M|h|, \tag{3}$$

где $M=\sup\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\|f'(x+\theta h)\|$ и функция f считается дифференцируемой на всем отрезке $[x,x+h]$.

Простая, использующая только неравенство треугольника и свойства отрезка, выкладка

$$\begin{aligned}|f(x_3)-f(x_1)|&\leqslant|f(x_3)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\\&\leqslant M|x_3-x_2|+M|x_2-x_1|=M(|x_3-x_2|+|x_2-x_1|)=M|x_3-x_1|\end{aligned}$$

показывает, что если на частях $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$ отрезка $[x_1,x_3]$ справедливо неравенство вида (3), то оно справедливо и на отрезке $[x_1,x_3]$.

Значит, если оценка (3) неверна для отрезка $[x,x+h]$, то последовательным делением его пополам можно получить последовательность стягивающихся к некоторой точке $x_0\in[x,x+h]$ отрезков $[a_k,b_k]\subset[x,x+h]$, на каждом из которых (3) нарушено. Поскольку $x_0\in[a_k,b_k]$, то, рассмотрев отрезки $[a_k,x_0]$, $[x_0,b_k]$, по тем же соображениям можно считать, что нашлась последовательность отрезков вида $[x_0,x_0+h_k]\subset[x,x+h]$, где $h_k\to 0$ при $k\to\infty$, на которых

$$|f(x_0+h_k)-f(x_0)|>M|h_k|. \tag{4}$$

Если (3) доказать с заменой M на $M+\varepsilon$, где ε — любое положительное число, то при $\varepsilon\to 0$ все равно получится (3), поэтому (4) тоже можно заменить на

$$|f(x_0+h_k)-f(x_0)|>(M+\varepsilon)|h_k| \tag{4$'$}$$

и теперь показать, что это несовместимо с дифференцируемостью f в точке x_0.

Действительно, в силу дифференцируемости

$$|f(x_0+h_k)-f(x_0)| = |f'(x_0)h_k+o(h_k)| \leqslant \|f'(x_0)\|\,|h_k|+o(|h_k|) \leqslant (M+\varepsilon)|h_k|$$

при $h_k \to 0$. ►

Теорема о конечном приращении имеет следующее часто технически полезное

Следствие. *Если $A \in \mathscr{L}(X;Y)$, т. е. A есть линейное непрерывное отображение нормированного пространства X в нормированное пространство Y, а $f\colon U \to Y$ — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы о конечном приращении, то*

$$|f(x+h)-f(x)-Ah| \leqslant \sup_{\xi\in]x,x+h[} \|f'(\xi)-A\|\,|h|.$$

◄ Для доказательства достаточно применить теорему о конечном приращении к отображению $t \mapsto F(t) = f(x+th)-Ath$ единичного отрезка $[0,1]\subset\mathbb{R}$ в Y, ибо

$$F(1)-F(0) = f(x+h)-f(x)-Ah,$$
$$F'(\theta) = f'(x+\theta h)h - Ah \quad \text{при } 0<\theta<1,$$
$$\|F'(\theta)\| \leqslant \|f'(x+\theta h)-A\|\,|h|,$$
$$\sup_{0<\theta<1}\|F'(\theta)\| \leqslant \sup_{\xi\in]x,x+h[}\|f'(\xi)-A\|\,|h|. \ ►$$

Замечание. Как видно из доказательства теоремы 1, в ее условиях нет нужды требовать, чтобы f было дифференцируемо как отображение $f\colon U \to Y$; достаточно, чтобы ограничение f на отрезок $[x, x+h]$ было непрерывным отображением этого отрезка, дифференцируемым в точках интервала $]x, x+h[$.

Это замечание в равной степени относится и к доказанному только что следствию теоремы о конечном приращении.

2. Некоторые примеры применения теоремы о конечном приращении

a. Непрерывно дифференцируемые отображения. Пусть

$$f\colon U \to Y \tag{5}$$

— отображение открытого подмножества U нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Если f дифференцируемо в каждой точке $x \in U$, то, сопоставляя точке x отображение $f'(x)\in\mathscr{L}(X;Y)$, касательное к f в этой точке, мы получаем производное отображение

$$f'\colon U \to \mathscr{L}(X;Y). \tag{6}$$

Поскольку пространство $\mathscr{L}(X;Y)$ линейных непрерывных операторов из X в Y является, как нам известно, нормированным (нормой оператора) пространством, то можно говорить о непрерывности отображения (6).

Определение. В том случае, когда производное отображение (6) непрерывно в U, отображение (5), в полном соответствии с прежней терминологией, будем называть *непрерывно дифференцируемым*.

Множество непрерывно дифференцируемых отображений типа (5) будем по-прежнему обозначать символом $C^{(1)}(U, Y)$ или, короче, $C^{(1)}(U)$, если из контекста ясно куда идет отображение.

Итак, по определению

$$f \in C^{(1)}(U, Y) \iff f' \in C(U, \mathscr{L}(X; Y)).$$

Посмотрим, что означает непрерывная дифференцируемость отображения в различных конкретных случаях.

Пример 1. Рассмотрим знакомую ситуацию, когда $X = Y = \mathbb{R}$, и, таким образом, $f: U \to \mathbb{R}$ есть вещественнозначная функция вещественного аргумента. Поскольку любое линейное отображение $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ сводится к умножению на некоторое число $a \in \mathbb{R}$, т. е. $Ah = ah$, причем, очевидно, $\|A\| = |a|$, то в любой точке $x \in U$ для любого вектора $h \in T\mathbb{R}_x \sim \mathbb{R}$ получаем, что $f'(x)h = a(x)h$, где $a(x)$ — числовая производная функции f в точке x.

Далее, так как

$$(f'(x+\delta) - f'(x))h = f'(x+\delta)h - f'(x)h = \\ = a(x+\delta)h - a(x)h = (a(x+\delta) - a(x))h, \quad (7)$$

то

$$\|f'(x+\delta) - f'(x)\| = |a(x+\delta) - a(x)|$$

и, значит, непрерывная дифференцируемость отображения f в данном случае равносильна рассматривавшемуся ранее понятию непрерывно дифференцируемой числовой функции (класса $C^{(1)}(U, \mathbb{R})$).

Пример 2. Пусть на сей раз X есть прямое произведение $X_1 \times \ldots \times X_m$ нормированных пространств. Отображение (5) в этом случае есть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ от m переменных $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, m$, со значениями в пространстве Y.

Если отображение f дифференцируемо в точке $x \in U$, то его дифференциал $df(x)$ в этой точке есть элемент пространства $\mathscr{L}(X_1 \times \ldots \times X_m = X; Y)$.

Действие $df(x)$ на вектор $h = (h_1, \ldots, h_m)$, согласно формуле (15) из § 3, представляется в виде

$$df(x)h = \partial_1 f(x)h_1 + \ldots + \partial_m f(x)h_m,$$

где $\partial_i f(x): X_i \to Y$, $i = 1, \ldots, m$, суть частные производные отображения f в рассматриваемой точке x.

Далее,

$$(df(x+\delta) - df(x))h = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f(x+\delta) - \partial_i f(x))h_i. \quad (8)$$

Но в силу свойств стандартной нормы в прямом произведении нормированных пространств (см. § 1, п. 2, пример 6) и определения нормы оператора получаем, что

$$\|\partial_i f(x+\delta) - \partial_i f(x)\|_{\mathscr{L}(X_i;Y)} \leqslant \|df(x+\delta) - df(x)\|_{\mathscr{L}(X;Y)} \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|\partial_i f(x+\delta) - \partial_i f(x)\|_{\mathscr{L}(X_i;Y)}. \quad (9)$$

Таким образом, дифференцируемое отображение (5) в данном случае непрерывно дифференцируемо в U, если и только если все его частные производные отображения непрерывны в U.

В частности, если $X = \mathbb{R}^m$ и $Y = \mathbb{R}$, мы вновь получаем уже знакомое понятие непрерывно дифференцируемой числовой функции m действительных переменных (функции класса $C^{(1)}(U, \mathbb{R})$, где $U \subset \mathbb{R}^m$).

Замечание. Стоит отметить, что в записи равенств (7) и (8) мы существенно пользовались каноническим отождествлением $TX_x \sim X$, позволившим сравнивать или отождествлять векторы, лежащие в различных касательных пространствах.

Покажем теперь, что для непрерывно дифференцируемых отображений имеет место

Утверждение 1. *Если K — выпуклый компакт в нормированном пространстве X и $f \in C^{(1)}(K, Y)$, где Y — тоже нормированное пространство, то отображение $f: K \to Y$ удовлетворяет условию Липшица на K, т. е. существует постоянная $M > 0$ такая, что для любых точек $x_1, x_2 \in K$ выполнено неравенство*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M|x_2 - x_1|. \quad (10)$$

◄ По условию $f': K \to \mathscr{L}(X; Y)$ есть непрерывное отображение компакта K в метрическое пространство $\mathscr{L}(X; Y)$. Поскольку норма есть непрерывная функция на нормированном пространстве, взятом с его естественной метрикой, то отображение $x \mapsto \|f'(x)\|$, как композиция непрерывных отображений, само есть непрерывное отображение компакта K в $\mathbb{R}$. Но такое отображение обязано быть ограниченным. Пусть M — такая постоянная, что в любой точке $x \in K$ имеет место неравенство $\|f'(x)\| \leqslant M$. Ввиду выпуклости K вместе с любыми двумя точками $x_1 \in K$, $x_2 \in K$ компакт K содержит и весь отрезок $[x_1, x_2]$. Применяя к этому отрезку теорему о конечном приращении, немедленно получаем соотношение (10). ►

Утверждение 2. *В условиях утверждения 1 существует такая неотрицательная стремящаяся к нулю при $\delta \to +0$ функция $\omega(\delta)$, что имеет место соотношение*

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \leqslant \omega(\delta)|h|, \quad (11)$$

справедливое в любой точке $x \in K$ при $|h| < \delta$, если $x + h \in K$.

◄ В силу следствия теоремы о конечном приращении можно записать, что

$$|f(x+h)-f(x)-f'(x)h| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|f'(x+\theta h)-f'(x)\|\,|h|$$

и, полагая

$$\omega(\delta)=\sup_{\substack{x_1,x_2\in K\\ |x_1-x_2|<\delta}} \|f'(x_2)-f'(x_1)\|,$$

получаем (11) ввиду равномерной непрерывности функции $x\mapsto f'(x)$, непрерывной на компакте K. ►

b. Достаточное условие дифференцируемости. Покажем теперь, как, располагая общей теоремой о конечном приращении, можно в общем виде получить достаточное условие дифференцируемости отображений в терминах частных производных.

Теорема 2. *Пусть U — окрестность точки x нормированного пространства $X=X_1\times\ldots\times X_m$, являющегося прямым произведением нормированных пространств $X_1\times\ldots\times X_m$, и пусть $f\colon U\to Y$ — отображение U в нормированное пространство Y. Если в U отображение f имеет все частные производные отображения, то при условии их непрерывности в точке x отображение f дифференцируемо в этой точке.*

◄ Для упрощения записи проведем доказательство в случае $m=2$. Проверим непосредственно, что линейное относительно $h=(h_1,h_2)$ отображение

$$Lh=\partial_1 f(x)h_1+\partial_2 f(x)h_2$$

является полным дифференциалом f в точке x.

Сделав элементарные преобразования

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)-Lh&=f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)-\partial_1 f(x)h_1-\partial_2 f(x)h_2=\\&=f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2+h_2)-\partial_1 f(x_1,x_2)h_1+\\&\quad+f(x_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)-\partial_2 f(x_1,x_2)h_2,\end{aligned}$$

по следствию из теоремы 1 получаем

$$\begin{aligned}&|f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1,x_2)-\partial_1 f(x_1,x_2)h_1-\partial_2 f(x_1,x_2)h_2|\leqslant\\&\leqslant\sup_{0<\theta_1<1}\|\partial_1 f(x_1+\theta_1 h_1,x_2+h_2)-\partial_1 f(x_1,x_2)\|\,|h_1|+\\&\quad+\sup_{0<\theta_2<1}\|\partial_2 f(x_1,x_2+\theta_2 h_2)-\partial_2 f(x_1,x_2)\|\,|h_2|.\end{aligned}\tag{12}$$

Поскольку $\max\{|h_1|,|h_2|\}\leqslant|h|$, то из непрерывности частных производных $\partial_1 f,\partial_2 f$ в точке $x=(x_1,x_2)$, очевидно, следует, что правая часть неравенства (12) есть $o(h)$ при $h=(h_1,h_2)\to 0$. ►

Следствие. *Отображение $f\colon U\to Y$ открытого подмножества U нормированного пространства $X=X_1\times\ldots\times X_m$ в нормированное пространство Y непрерывно дифференцируемо тогда и только тогда, когда в U непрерывны все частные производные отображения f.*

◄ В примере 2 мы показали, что при условии дифференцируемости отображения $f: U \to Y$ его непрерывная дифференцируемость равносильна непрерывности его частных производных.

Теперь же мы видим, что если частные производные непрерывны, то отображение f автоматически дифференцируемо, а следовательно (на основании примера 2), и непрерывно дифференцируемо. ►

Задачи и упражнения

1. Пусть $f: I \to Y$ — непрерывное отображение отрезка $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ в нормированное пространство Y, а $g: I \to \mathbb{R}$ — непрерывная вещественнозначная функция на I. Покажите, что если f и g дифференцируемы в интервале $]0, 1[$ и в точках этого интервала имеет место соотношение $\|f'(x)\| \leqslant g'(t)$, то справедливо также неравенство $|f(1) - f(0)| \leqslant g(1) - g(0)$.

2. a) Пусть $f: I \to Y$ — непрерывно дифференцируемое отображение отрезка $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ в нормированное пространство Y. Оно задает гладкий путь в Y. Определите длину этого пути.

b) Вспомните геометрический смысл нормы касательного отображения и оцените сверху длину пути, рассмотренного в a).

c) Дайте геометрическое истолкование теоремы о конечном приращении.

3. Пусть $f: U \to Y$ — непрерывное отображение окрестности U точки a нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Покажите, что если f дифференцируемо в $U \setminus a$ и $f'(x)$ имеет предел $L \in \mathscr{L}(X; Y)$ при $x \to a$, то отображение f дифференцируемо в точке a и $f'(a) = L$.

4. a) Пусть U — открытое выпуклое подмножество нормированного пространства X, а $f: U \to Y$ — отображение U в нормированное пространство Y. Покажите, что если $f'(x) \equiv 0$ на U, то отображение f постоянно.

b) Обобщите утверждение a) на случай произвольной области U (т. е. когда U — открытое и связное подмножество в X).

c) Частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ гладкой функции $f: D \to \mathbb{R}$, заданной в области $D \subset \mathbb{R}^2$ плоскости переменных (x, y), тождественно равна нулю. Верно ли, что тогда f не зависит от y в этой области? Для каких областей D это верно?

§ 5. Производные отображения высших порядков

1. Определение n-го дифференциала. Пусть U — открытое множество в нормированном пространстве X, а

$$f: U \to Y \tag{1}$$

— отображение U в нормированное пространство Y.

Если отображение (1) дифференцируемо в U, то в U определено производное от f отображение

$$f': U \to \mathscr{L}(X; Y). \tag{2}$$

Пространство $\mathscr{L}(X;Y) =: Y_1$ является нормированным пространством, по отношению к которому отображение (2) имеет вид (1), т. е. $f'\colon U \to Y_1$ и можно поставить вопрос о его дифференцируемости.

Если отображение (2) дифференцируемо, то его производное отображение

$$(f')'\colon U \to \mathscr{L}(X;Y_1) = \mathscr{L}(X;\mathscr{L}(X;Y))$$

называют *вторым производным отображением* или *вторым дифференциалом* от f и обозначают символом f'' или$f^{(2)}$. И вообще принимается следующее индуктивное

Определение 1. *Производным отображением порядка* $n \in \mathbb{N}$ *или* n*-м дифференциалом отображения* (1) *в точке* $x \in U$ называется отображение, касательное в этой точке к производному отображению порядка $n-1$ от f.

Если производное отображение порядка $k \in \mathbb{N}$ в точке $x \in U$ обозначать символом $f^{(k)}(x)$, то определение 1 означает, что

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x). \tag{3}$$

Таким образом, если $f^{(n)}(x)$ определено, то

$$f^{(n)}(x) \in \mathscr{L}(X;Y_n) = \mathscr{L}(X;\mathscr{L}(X;Y_{n-1})) = \ldots = \mathscr{L}(X;\mathscr{L}(X;\ldots;\mathscr{L}(X;Y))\ldots).$$

Следовательно, на основании утверждения 4 из § 2, дифференциал n-го порядка $f^{(n)}(x)$ отображения (1) в точке x можно интерпретировать как элемент пространства $\mathscr{L}(\underbrace{X,\ldots,X}_{n \text{ раз}};Y)$ n-линейных непрерывных операторов.

Отметим еще раз, что касательное отображение $f'(x)\colon TX_x \to TY_{f(x)}$ есть отображение касательных пространств, каждое из которых, благодаря аффинной или линейной структуре отображаемых пространств, мы отождествляли с соответствующим линейным пространством и говорили на этом основании, что $f'(x) \in \mathscr{L}(X;Y)$. Именно это рассмотрение элементов $f'(x_1) \in \mathscr{L}(TX_{x_1};TY_{f(x_1)})$, $f'(x_2) \in \mathscr{L}(TX_{x_2};TY_{f(x_2)})$ различных пространств как векторов одного и того же пространства $\mathscr{L}(X;Y)$ лежит в основе определения высших дифференциалов отображения нормированных пространств. В случае аффинного или линейного пространства имеется естественная связь между векторами различных касательных пространств, соответствующих различным точкам исходного пространства. Эта связь в конечном счете и позволяет в данном случае говорить как о непрерывной дифференцируемости отображения (1), так и о его высших дифференциалах.

2. Производная по вектору и вычисление значений n-го дифференциала. При конкретизации абстрактного определения 1 может быть удачно использовано понятие производной по вектору, которое для общего отображения (1) вводится так же, как это в свое время было сделано в случае $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}$.

Определение 2. Если X и Y — линейные нормированные пространства над полем $\mathbb{R}$, то *производной отображения* (1) *в точке* $x \in U$ *по вектору* $h \in \in TX_x \sim X$ назовем предел

$$D_h f(x) := \lim_{\mathbb{R} \ni t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},$$

если указанный предел в Y существует.

Непосредственно проверяется, что

$$D_{\lambda h} f(x) = \lambda D_h f(x) \tag{4}$$

и что если отображение f дифференцируемо в точке $x \in U$, то оно имеет в этой точке производную по любому вектору, причем

$$D_h f(x) = f'(x)h, \tag{5}$$

и, в силу линейности касательного отображения,

$$D_{\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2} f(x) = \lambda_1 D_{h_1} f(x) + \lambda_2 D_{h_2} f(x). \tag{6}$$

Из определения 2 видно также, что значение $D_h f(x)$ производной отображения $f: U \to Y$ по вектору есть элемент линейного пространства $TY_{f(x)} \sim Y$, и что если L — линейное непрерывное отображение Y в некоторое нормированное пространство Z, то

$$D_h(L \circ f)(x) = L \circ D_h f(x). \tag{7}$$

Попробуем теперь истолковать значение $f^{(n)}(x)(h_1, \ldots, h_n)$ n-го дифференциала отображения f в точке x на наборе $(h_1, \ldots, h_n)$ векторов $h_i \in TX_x \sim X$, $i = 1, \ldots, n$.

Начнем с $n = 1$. В этом случае по формуле (5)

$$f'(x)(h) = f'(x)h = D_h f(x).$$

Рассмотрим теперь случай n=2. Поскольку $f^{(2)}(x) = \mathscr{L}(X; \mathscr{L}(X; Y))$, то, фиксировав вектор $h_1 \in X$, мы сопоставляем ему по закону

$$h_1 \mapsto f^{(2)}(x)h_1$$

линейный оператор $(f^{(2)}(x)h_1) \in \mathscr{L}(X; Y)$, а вычислив затем значение этого оператора на векторе $h_2 \in X$, мы получим элемент

$$f^{(2)}(x)(h_1, h_2) := (f^{(2)}(x)h_1)h_2 \in Y \tag{8}$$

пространства Y.

Но

$$f^{(2)}(x)h = (f')'(x)h = D_h f'(x),$$

поэтому

$$f^{(2)}(x)(h_1, h_2) = (D_{h_1} f'(x))h_2. \tag{9}$$

Если $A \in \mathscr{L}(X;Y)$, а $h \in X$, то спаривание Ah можно рассматривать не только как отображение $h \mapsto Ah$ из X в Y, но и как отображение $A \mapsto Ah$ из $\mathscr{L}(X;Y)$ в Y, причем это последнее отображение, как и первое, является линейным.

Сравнив теперь соотношения (5), (7) и (9), можем записать, что

$$(D_{h_1} f'(x))h_2 = D_{h_1}(f'(x)h_2) = D_{h_1} D_{h_2} f(x).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$f^{(2)}(x)(h_1, h_2) = D_{h_1} D_{h_2} f(x).$$

Аналогично можно показать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$f^{(n)}(x)(h_1, \ldots, h_n) := (\ldots(f^{(n)}(x)h_1)\ldots h_n) = D_{h_1} D_{h_2} \ldots D_{h_n} f(x), \tag{10}$$

причем дифференцирование по векторам выполняется последовательно, начиная от дифференцирования по h_n и кончая дифференцированием по h_1.

3. Симметричность дифференциалов высшего порядка. В связи с формулой (10), уже вполне пригодной для вычислений, естественно возникает вопрос о том, в какой мере результат вычислений зависит от указанного порядка дифференцирования.

Утверждение. *Если для отображения* (1) *форма* $f^{(n)}(x)$ *в точке* x *определена, то она симметрична относительно любой пары своих аргументов.*

◄ Основным элементом доказательства является проверка справедливости этого утверждения в случае $n = 2$.

Пусть h_1, h_2 — два произвольных фиксированных вектора пространства $TX_x \sim X$. Поскольку U открыто в X, при всех достаточно близких к нулю значениях $t \in \mathbb{R}$ определена следующая вспомогательная функция от t:

$$F_t(h_1, h_2) = f(x + t(h_1 + h_2)) - f(x + th_1) - f(x + th_2) + f(x).$$

Рассмотрим еще одну вспомогательную функцию

$$g(v) = f(x + t(h_1 + v)) - f(x + tv),$$

заведомо определенную для векторов v, коллинеарных вектору h_2 и таких, что $|v| \leqslant |h_2|$.

Заметим, что

$$F_t(h_1, h_2) = g(h_2) - g(0).$$

Заметим также, что коль скоро функция $f: U \to Y$ в точке $x \in U$ имеет второй дифференциал $f''(x)$, она обязана быть дифференцируема по крайней мере в некоторой окрестности точки x. Мы будем считать, что параметр t настолько мал, что аргументы в правой части определяющего функцию $F_t(h_1, h_2)$ равенства лежат в указанной окрестности точки x.

Воспользуемся этими замечаниями и следствием теоремы о конечном приращении в следующих выкладках:

$$|F_t(h_1,h_2)-t^2f''(x)(h_1,h_2)| = |g(h_2)-g(0)-t^2f''(x)(h_1,h_2)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0<\theta_2<1} \|g'(\theta_2 h_2)-t^2f''(x)h_1\|\,|h_2| =$$
$$= \sup_{0<\theta_2<1} \|(f'(x+t(h_1+\theta_2h_2))-f'(x+t\theta_2h_2))t-t^2f''(x)h_1\|\,|h_2|.$$

По определению производного отображения можно записать, что

$$f'(x+t(h_1+\theta_2h_2)) = f'(x)+f''(x)(t(h_1+\theta_2h_2))+o(t)$$

и

$$f'(x+t\theta_2h_2) = f'(x)+f''(x)(t\theta_2h_2)+o(t)$$

при $t\to 0$. Учитывая это, предыдущую выкладку можно продолжить и после арифметических упрощений получить, что

$$|F_t(h_1,h_2)-t^2f''(x)(h_1,h_2)| = o(t^2)$$

при $t\to 0$. Но это равенство означает, что

$$f''(x)(h_1,h_2) = \lim_{t\to 0}\frac{F_t(h_1,h_2)}{t^2}.$$

Поскольку очевидно $F_t(h_1,h_2)=F_t(h_2,h_1)$, то отсюда уже следует, что $f''(x)(h_1,h_2)=f''(x)(h_2,h_1)$.

Завершить доказательство утверждения теперь можно по индукции дословно так же, как это было сделано при доказательстве независимости значения смешанных частных производных от порядка выполнения дифференцирования. ►

Итак, показано, что n-й дифференциал отображения (1) в точке $x\in U$ есть n-линейный симметрический оператор

$$f^{(n)}(x)\in\mathscr{L}(TX_x,\ldots,TX_x;TY_{f(x)})\sim\mathscr{L}(X,\ldots,X;Y),$$

значение которого на наборе $(h_1,\ldots,h_n)$ векторов $h_i\in TX_x\sim X$, $i=1,\ldots,n$, может быть вычислено по формуле (10).

Если X — конечномерное пространство, $\{e_1,\ldots,e_k\}$ — базис в X и $h_j = h_j^ie_i$ — разложение векторов h_j, $j=1,\ldots,n$, по этому базису, то в силу полилинейности $f^{(n)}(x)$ можно записать, что

$$f^{(n)}(x)(h_1,\ldots,h_n) = f^{(n)}(x)(h_1^{i_1}e_{i_1},\ldots,h_n^{i_n}e_{i_n}) = f^{(n)}(x)(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})h_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot h_n^{i_n},$$

или, используя прежние обозначения $\partial_{i_1\ldots i_n}f(x)$ для $D_{e_1}\ldots D_{e_n}f(x)$, можно окончательно получить, что

$$f^{(n)}(x)(h_1,\ldots,h_n) = \partial_{i_1\ldots i_n}f(x)h_1^{i_1}\ldots h_n^{i_n},$$

где в правой части, как обычно, имеется в виду суммирование по повторяющимся индексам в пределах их изменения, т. е. от 1 до k.

Условимся в следующем сокращении:

$$f^{(n)}(x)(h, \ldots, h) =: f^{(n)}(x)h^n. \tag{11}$$

В частности, если речь идет о конечномерном пространстве X и $h = h^i e_i$, то

$$f^{(n)}(x)h^n = \partial_{i_1 \ldots i_n} f(x) h^{i_1} \cdot \ldots \cdot h^{i_n},$$

что нам уже хорошо знакомо из теории числовых функций многих переменных.

4. Некоторые замечания. В связи с обозначением (11) рассмотрим полезный и используемый уже в следующем параграфе

Пример. Пусть $A \in \mathscr{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, т. е. $y = A(x_1, \ldots, x_n)$ есть n-линейный непрерывный оператор, действующий из прямого произведения линейных нормированных пространств $X_1, \ldots, X_n$ в линейное нормированное пространство Y.

В примере 5 из § 3 было показано, что A является дифференцируемым отображением $A\colon X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$, причем

$$A'(x_1, \ldots, x_n)(h_1, \ldots, h_n) = A(h_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + A(x_1, \ldots, x_{n-1}, h_n).$$

Таким образом, если $X_1 = \ldots = X_n = X$ и если A — симметрический оператор, то

$$A'(x, \ldots, x)(h, \ldots, h) = nA(\underbrace{x, \ldots, x}_{n-1}, h) =: (nAx^{n-1})h.$$

Значит, если рассмотреть функцию $F : X \to Y$, определяемую условием

$$X \ni x \mapsto F(x) = A(x, \ldots, x) =: Ax^n,$$

то она окажется дифференцируемой и

$$F'(x)h = (nAx^{n-1})h,$$

т. е. в этом случае

$$F'(x) = nAx^{n-1},$$

где $Ax^{n-1} := A(\underbrace{x, \ldots, x}_{n-1}, \cdot)$.

В частности, если отображение (1) имеет в некоторой точке $x \in U$ дифференциал $f^{(n)}(x)$, то функция $F(h) = f^{(n)}(x)h^n$ дифференцируема и

$$F'(h) = nf^{(n)}(x)h^{n-1}. \tag{12}$$

Заканчивая обсуждение понятия производного отображения n-го порядка, полезно еще отметить, что если исходная функция (1) определена на множестве U пространства X, являющегося прямым произведением

нормированных пространств $X_1, \ldots, X_m$, то можно говорить о частных производных отображениях $\partial_1 f(x), \ldots, \partial_m f(x)$ первого и более высокого порядка $\partial_{i_1 \ldots i_n} f(x)$ от функции f по переменным $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, m$.

На основании теоремы 2 из § 4 в этом случае по индукции получаем, что *если в некоторой точке $x \in X = X_1 \times \ldots \times X_m$ все частные производные $\partial_{i_1 \ldots i_n} f(x)$ отображения $f \colon U \to Y$ непрерывны, то в этой точке отображение f имеет дифференциал n-го порядка $f^{(n)}(x)$.*

Если учесть еще результат примера 2 из того же параграфа, то можно заключить, что *отображение $U \ni x \mapsto f^{(n)}(x) \in \mathscr{L}(\underbrace{X, \ldots, X}_{n \text{ раз}}; Y)$ непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все частные производные отображения $U \ni x \mapsto \partial_{i_1 \ldots i_n} f(x) \in \mathscr{L}(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}; Y)$ порядка n* (или, что то же самое, до порядка n включительно) *исходного отображения $F \colon U \to Y$.*

Класс отображений (1), имеющих в U непрерывные производные отображения до порядка n включительно, обозначают символом $C^{(n)}(U, Y)$ или, если не возникает недоразумений, более коротким символом $C^{(n)}(U)$ или даже $C^{(n)}$.

В частности, если $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, то сделанное выше заключение можно коротко записать в виде

$$(f \in C^{(n)}) \iff (\partial_{i_1 \ldots i_n} f \in C,\ i_1, \ldots, i_n = 1, \ldots, m),$$

где C, как всегда, символ соответствующего множества непрерывных функций.

Задачи и упражнения

1. Проведите полностью доказательство равенства (7).

2. Проведите подробно конец доказательства утверждения о симметричности $f^{(n)}(x)$.

3. a) Покажите, что если для пары векторов h_1, h_2 и отображения (1) в области U определены функции $D_{h_1} D_{h_2} f$, $D_{h_2} D_{h_1} f$ и они непрерывны в некоторой точке $x \in U$, то в этой точке имеет место равенство $D_{h_1} D_{h_2} f(x) = D_{h_2} D_{h_1} f(x)$.

b) Покажите на примере числовой функции $f(x, y)$, что непрерывность в некоторой точке смешанных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, хотя и влечет в силу a) их равенство в этой точке, вообще говоря, не влечет наличия в этой точке второго дифференциала функции.

c) Покажите, что наличие $f^{(2)}(x, y)$, хотя и обеспечивает наличие и равенство в соответствующей точке смешанных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, не влечет, вообще говоря, их непрерывность в этой точке.

4. Пусть $A \in \mathscr{L}(X, \ldots, X; Y)$, причем A — симметрический n-линейный оператор. Найдите последовательные производные до порядка $n+1$ включительно от функции $x \mapsto Ax^n := A(x, \ldots, x)$.

§ 6. Формула Тейлора и исследование экстремумов

1. Формула Тейлора для отображений

Теорема 1. *Если отображение $f: U \to Y$ окрестности $U = U(x)$ точки x нормированного пространства X в нормированное пространство Y таково, что f имеет в U производные до порядка $n-1$ включительно, а в самой точке x имеет производную $f^{(n)}(x)$ порядка n, то*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n + o(|h|^n) \quad \text{при } h \to 0. \qquad (1)$$

Равенство (1) есть одна из разновидностей формулы Тейлора, написанной на сей раз уже для достаточно общих классов отображений.

◄ Докажем формулу Тейлора (1) по индукции.

При $n = 1$ она верна в силу определения $f'(x)$.

Пусть формула (1) верна для некоторого $(n-1) \in \mathbb{N}$.

Тогда на основании теоремы о конечном приращении, формулы (12) из § 5 и сделанного предположения индукции получаем

$$\left| f(x+h) - (f(x) + f'(x)h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0<\theta<1} \left\| f'(x+\theta h) - \left(f'(x) + f''(x)(\theta h) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)(\theta h)^{n-1} \right) \right\| |h| =$$
$$= o(|\theta h|^{n-1})|h| = o(|h|^n)$$

при $h \to 0$. ►

Мы не останавливаемся здесь на других, иногда весьма полезных, вариантах формулы Тейлора. В свое время они подробно обсуждались для числовых функций. Теперь мы предоставляем их вывод читателю (см., например, задачу 1).

2. Исследование внутренних экстремумов. Используя формулу Тейлора, укажем необходимые, а также достаточные дифференциальные условия внутреннего локального экстремума вещественнозначной функции, определенной на некотором открытом множестве нормированного пространства. Как мы увидим, эти условия аналогичны уже известным нам дифференциальным условиям экстремума вещественнозначной функции вещественного переменного.

Теорема 2. *Пусть $f: U \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на открытом множестве U нормированного пространства X и имеющая в окрестности некоторой точки $x \in U$ непрерывные производные отображения до порядка $k-1 \geqslant 1$ включительно, а также производное отображение $f^{(k)}(x)$ порядка k в самой точке x.*

Если $f'(x) = 0, \ldots, f^{(k-1)}(x) = 0$ и $f^{(k)}(x) \neq 0$, то для того, чтобы x была точкой экстремума функции f,

необходимо*, чтобы k было четно, а форма $f^{(k)}(x)h^k$ была полуопределенной*[1];

достаточно*, чтобы значения формы $f^{(k)}(x)h^k$ на единичной сфере $|h|=1$ были отделены от нуля*; *при этом, если на этой сфере*

$$f^{(k)}(x)h^k \geqslant \delta > 0,$$

то x — точка локального минимума, а если

$$f^{(k)}(x)h^k \leqslant \delta < 0,$$

то x — точка локального максимума.

◄ Для доказательства рассмотрим тейлоровское разложение (1) функции f в окрестности точки x. Сделанные предположения позволяют записать, что

$$f(x+h)-f(x) = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k + \alpha(h)|h|^k,$$

где $\alpha(h)$ — вещественнозначная функция, причем $\alpha(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Докажем сначала необходимые условия.

Поскольку $f^{(k)}(x)\neq 0$, найдется такой вектор $h_0\neq 0$, на котором $f^{(k)}(x)h_0^k\neq \neq 0$. Тогда при значениях вещественного параметра t, достаточно близких к нулю,

$$f(x+th_0)-f(x) = \frac{1}{k!}(x)(th_0)^k + \alpha(th_0)|th_0|^k = \left(\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h_0^k + \alpha(th_0)|h_0|^k\right)t^k$$

и заключенное во внешние скобки выражение имеет тот же знак, что и $f^{(k)}(x)h_0^k$.

Для того, чтобы x была точкой экстремума, необходимо, чтобы левая (а значит, и правая) часть последнего равенства не меняла знака при изменении знака t. Но это возможно, только если k четно.

Проведенное рассуждение показывает, что если x — точка экстремума, то знак разности $f(x+th_0)-f(x)$ при достаточно малых значениях t совпадает со знаком $f^{(k)}(x)h_0^k$, и, следовательно, в этом случае не может быть двух векторов h_0, h_1, на которых бы форма $f^{(k)}(x)$ принимала значения разных знаков.

Перейдем к доказательству достаточных условий экстремума. Для определенности рассмотрим случай, когда $f^{(k)}(x)h^k \geqslant \delta > 0$ при $|h|=1$. Тогда

$$f(x+h)-f(x) = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k + \alpha(h)|h|^k = \\ = \left(\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\left(\frac{h}{|h|}\right)^k + \alpha(h)\right)|h|^k \geqslant \left(\frac{1}{k!}\delta + \alpha(h)\right)|h|^k,$$

[1]Это значит, что форма $f^{(k)}(x)h^k$ не может принимать значения разных знаков, хотя при некоторых значениях $h\neq 0$ она может обращаться в нуль. Равенство $f^{(i)}(x)=0$, как обычно, понимается в том смысле, что $f^{(i)}(x)h=0$ для любого вектора h.

и, поскольку $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$, последний член неравенства положителен для всех достаточно близких к нулю векторов $h \neq 0$. Таким образом, для всех таких векторов h

$$f(x+h) - f(x) > 0,$$

т. е. x — точка строгого локального минимума.

Аналогично проверяется достаточное условие строгого локального максимума. ►

Замечание 1. Если пространство X конечномерно, то единичная сфера $S(x, 1)$ с центром в точке $x \in X$, являясь ограниченным замкнутым множеством в X, компактна. Тогда непрерывная функция (k-форма) $f^{(k)}(x)h^k = \partial_{i_1 \dots i_k} f(x) h^{i_1} \cdot \ldots \cdot h^{i_k}$ имеет на $S(x, 1)$ как максимальное значение, так и минимальное значение. Если эти значения разных знаков, то экстремума в точке x функция f не имеет. Если же эти значения одного знака, то, как было показано в теореме 2, экстремум есть. В последнем случае достаточное условие экстремума, очевидно, можно высказать в виде эквивалентного ему требования определенности (положительной или отрицательной) формы $f^{(k)}(x)h^k$.

Именно в таком виде оно нам уже встречалось при рассмотрении вещественнозначных функций в $\mathbb{R}^n$.

Замечание 2. Как мы видели на примере функций $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, указанная в необходимых условиях экстремума полуопределенность формы $f^{(k)}(x)h^k$ еще не является достаточным признаком экстремума.

Замечание 3. На практике при исследовании экстремумов дифференцируемых функций обычно пользуются только первым или первым и вторым дифференциалами. Если по смыслу исследуемой задачи единственность и характер экстремума очевидны, то при отыскании экстремума можно ограничиться первым дифференциалом, найдя ту точку x, где $f'(x) = 0$.

3. Некоторые примеры.

Пример 1. Пусть $L \in C^{(1)}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, а $f \in C^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$. Иными словами, $(u^1, u^2, u^3) \mapsto L(u^1, u^2, u^3)$ — определенная в $\mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемая вещественнозначная функция, а $x \mapsto f(x)$ — гладкая вещественнозначная функция, определенная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию

$$F: C^{(1)}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \tag{2}$$

задаваемую соотношением

$$C^{(1)}([a, b], \mathbb{R}) \ni f \mapsto F(f) = \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\, dx \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Таким образом, (2) есть вещественнозначный функционал, определенный на множестве функций $f \in C^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$.

В физике и механике известны фундаментальные вариационные принципы, связанные с движением. Согласно этим принципам истинные движения среди всех мыслимых выделяются тем, что они совершаются по траекториям, вдоль которых те или иные функционалы имеют экстремум. Вопросы, связанные с экстремумами функционалов, — центральные в теории оптимального управления. Таким образом, отыскание и исследование экстремумов функционалов является важной самостоятельной задачей, теории которой посвящен обширный раздел анализа — вариационное исчисление. Мы уже кое-что сделали для того, чтобы переход от анализа экстремумов числовых функций к отысканию и исследованию экстремумов функционалов был для читателя естественным. Однако мы не будем углубляться в специальные вопросы вариационного исчисления и проиллюстрируем на примере функционала (3) лишь рассмотренные выше общие идеи дифференцирования и исследования локальных экстремумов.

Покажем, что функционал (3) является дифференцируемым отображением и найдем его дифференциал.

Заметим, что функцию (3) можно рассматривать как композицию отображения

$$F_1: C^{(1)}([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}), \tag{4}$$

задаваемого формулой

$$F_1(f)(x) = L(x, f(x), f'(x)), \tag{5}$$

и последующего отображения

$$C([a,b],\mathbb{R}) \ni g \mapsto F_2(g) = \int\limits_a^b g(x)\,dx \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Отображение F_2 в силу свойств интеграла, очевидно, линейное и непрерывное, таким образом, с его дифференцируемостью вопрос ясен.

Покажем, что отображение F_1 тоже дифференцируемо, причем

$$F_1'(f)h(x) = \partial_2 L(x, f(x), f'(x))h(x) + \partial_3 L(x, f(x), f'(x))h'(x) \tag{7}$$

при $h \in C^{(1)}([a,b];\mathbb{R})$.

Действительно, в силу следствия из теоремы о конечном приращении в нашем случае можно записать, что

$$\begin{aligned}&\Big|L(u^1+\Delta^1, u^2+\Delta^2, u^3+\Delta^3) - L(u^1,u^2,u^3) - \sum_{i=1}^{3}\partial_i L(u^1,u^2,u^3)\Delta^i\Big| \leqslant \\ &\quad\leqslant \sup_{0<\theta<1} \|(\partial_1 L(u+\theta\Delta) - \partial_1 L(u), x\partial_2 L(u+\theta\Delta) - \partial_2 L(u), \\ &\qquad\qquad \partial_3 L(u+\theta\Delta) - \partial_3 L(u))\| \cdot |\Delta| \leqslant \\ &\quad\leqslant 3 \max_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 1\\ i=1,2,3}} |\partial_i L(u+\theta u) - \partial_i L(u)| \cdot \max_{i=1,2,3} |\Delta^i|,\end{aligned} \tag{8}$$

где $u = (u^1, u^2, u^3)$ и $\Delta = (\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3)$.

Если теперь вспомнить, что в $C^{(1)}([a,b],\mathbb{R})$ норма $|f|_{C^{(1)}}$ функции f есть $\max\{|f|_C, |f'|_C\}$ (где $|f|_C$ есть максимум модуля функции на отрезке $[a,b]$), то, полагая $u^1 = x$, $u^2 = f(x)$, $u^3 = f'(x)$, $\Delta^1 = 0$, $\Delta^2 = h(x)$ и $\Delta^3 = h'(x)$, из неравенства (8), учитывая равномерную непрерывность функций $\partial_i L(u^1, u^2, u^3)$, $i = 1, 2, 3$, на ограниченных подмножествах $\mathbb{R}^3$, получаем

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |L(x, f(x)+h(x), f'(x)+h'(x)) - L(x, f(x), f'(x)) - \\ - \partial_2 L(x, f(x), f'(x))h(x) - \partial_3 L(x, f(x), f'(x))h'(x)| = \\ = o(|h|_{C^{(1)}}) \quad \text{при } |h|_{C^{(1)}} \to 0.$$

Но это и означает, что имеет место равенство (7).

В силу теоремы о дифференцировании композиции отображений теперь заключаем, что функционал (3) действительно дифференцируем и

$$F'(f)h = \int_a^b (\partial_2 L(x, f(x), f'(x))h(x) + \partial_3 L(x, f(x), f'(x))h'(x))\,dx. \tag{9}$$

Часто рассматривается ограничение функционала (3) на аффинное пространство тех функций $f \in C^{(1)}([a,b],\mathbb{R})$, которые на концах отрезка $[a,b]$ принимают фиксированные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$. В этом случае функции h из касательного пространства $TC_f^{(1)}$ должны на концах отрезка $[a,b]$ иметь нулевые значения. Учитывая это, равенство (9) интегрированием по частям в рассматриваемом случае, очевидно, можно привести к виду

$$F'(f)h = \int_a^b \left(\partial_2 L(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\partial_3 L(x, f(x), f'(x)\right)h(x)\,dx, \tag{10}$$

разумеется, уже в предположении, что L и f принадлежат соответствующему классу $C^{(2)}$.

В частности, если f — точка экстремума (экстремаль) такого функционала, то, согласно теореме 2, $F'(f)h = 0$ при любой функции $h \in C^{(1)}([a,b],\mathbb{R})$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$. Отсюда и из (10) нетрудно заключить (см. задачу 3), что функция f должна удовлетворять уравнению

$$\partial_2 L(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\partial_3 L(x, f(x), f'(x)) = 0. \tag{11}$$

Это частный вид уравнения, именуемого в вариационном исчислении *уравнением Эйлера—Лагранжа*.

Рассмотрим теперь конкретные примеры.

Пример 2. *Задача о кратчайшей.*

Среди кривых, лежащих в плоскости и соединяющих две фиксированные ее точки, найти ту кривую, которая имеет минимальную длину.

Ответ в данном случае очевиден, и он скорее послужит контролем над следующими формальными выкладками.

Будем считать, что в плоскости фиксирована декартова система координат, в которой указанными точками являются, например, точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Мы ограничимся рассмотрением только тех кривых, которые являются графиками функций $f \in C^{(1)}([0, 1], \mathbb{R})$, принимающих на концах отрезка $[0, 1]$ нулевые значения. Длина такой кривой

$$F(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + (f')^2(x)}\, dx \tag{12}$$

зависит от функции f и является функционалом рассмотренного в примере 1 типа. В данном случае функция L имеет вид

$$L(u^1, u^2, u^3) = \sqrt{1 + (u^3)^2},$$

поэтому необходимое условие экстремума (11) здесь сводится к уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f')^2(x)}}\right) = 0,$$

из которого следует, что на отрезке $[0, 1]$

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f')^2(x)}} \equiv \text{const}. \tag{13}$$

Поскольку функция $\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ нигде не постоянна, то (13) возможно лишь при условии, что $f'(x) \equiv \text{const}$ на $[a, b]$. Таким образом, гладкая экстремаль нашей задачи должна быть линейной функцией, график которой проходит через точки $(0, 0)$, $(1, 0)$. Отсюда следует, что $f(x) \equiv 0$, и мы приходим к отрезку прямой, соединяющему две заданные точки.

Пример 3. *Задача о кривой скорейшего спуска.*

Эта классическая, поставленная в 1696 г. Иоганном (первым) Бернулли, задача о брахистохроне состоит в отыскании формы желоба, вдоль которого материальная частица под действием силы тяжести за кратчайшее время переходит из заданной точки P_0 в другую фиксированную точку P_1, расположенную на более низком уровне.

Трением, разумеется, мы пренебрегаем. Кроме того, будем считать, что тривиальный случай, когда обе точки находятся на одной вертикали, исключен из дальнейшего рассмотрения.

В вертикальной плоскости, проходящей через точки P_0, P_1, введем прямоугольную систему координат так, чтобы точка P_0 была ее началом, ось абсцисс была направлена вертикально вниз, а точка P_1 имела положительные координаты (x_1, y_1). Форму желоба будем искать только среди графиков, заданных на отрезке $[0, x_1]$ гладких функций, удовлетворяющих условиям $f(0) = 0$, $f(x_1) = y_1$. На исследовании этого отнюдь не бесспорного предположения мы пока не останавливаемся (см. задачу 4).

Если частица начинала свое движение из точки P_0 с нулевой скоростью, то закон изменения величины ее скорости в выбранной системе координат запишется в виде

$$v = \sqrt{2gx}. \tag{14}$$

Вспоминая, что дифференциал длины дуги вычисляется по формуле

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (f')^2(x)}\, dx, \tag{15}$$

найдем время

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + (f')^2(x)}{x}}\, dx \tag{16}$$

движения вдоль траектории, заданной графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $[0, x_1]$.

Для функционала (16)

$$L(u^1, u^2, u^3) = \sqrt{\frac{1 + (u^3)^2}{u^1}},$$

поэтому необходимое условие экстремума (11) в данном случае сводится к уравнению

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{x(1 + (f')^2(x))}}\right) = 0,$$

из которого следует, что

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f')^2(x)}} = c\sqrt{x}, \tag{17}$$

где c — отличная от нуля постоянная (точки не лежат на одной вертикали!).

С учетом (15) уравнение (17) можно переписать в виде

$$\frac{dy}{ds} = c\sqrt{x}. \tag{18}$$

Однако с геометрической точки зрения

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi, \tag{19}$$

где φ — угол между касательной к траектории и положительным направлением оси абсцисс.

Сравнивая уравнение (18) со вторым из уравнений (19), находим

$$x = \frac{1}{c^2}\sin^2\varphi. \tag{20}$$

Но из (19) и (20) следует, что

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{d\varphi} = \operatorname{tg}\varphi\frac{dx}{d\varphi} = \operatorname{tg}\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin^2\varphi}{c^2}\right) = 2\frac{\sin^2\varphi}{c^2},$$

откуда находим

$$y = \frac{2}{c^2}(2\varphi - \sin 2\varphi) + b. \tag{21}$$

Полагая $2/c^2 =: a$ и $2\varphi =: t$, запишем соотношения (20) и (21) в виде

$$\begin{aligned} x &= a(1-\cos t), \\ y &= a(t-\sin t)+b. \end{aligned} \tag{22}$$

Поскольку $a \neq 0$, то $x = 0$ лишь при $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Из вида функций (22) следует, что без ограничения общности можно считать, что точке $P_0 = (0, 0)$ отвечает значение $t = 0$ параметра t. В этом случае $b = 0$, и мы приходим к более простой форме

$$\begin{aligned} x &= a(1-\cos t), \\ y &= a(t-\sin t) \end{aligned} \tag{23}$$

параметрического задания искомой кривой.

Таким образом, брахистохроной является циклоида, имеющая в исходной точке P_0 точку возврата с вертикальной касательной. Постоянная a, коэффициент гомотетии, должна быть подобрана так, чтобы кривая (23) прошла также через точку P_1. Такой выбор, как можно заметить, нарисовав кривую (23), вовсе не всегда является однозначным, и это свидетельствует о том, что необходимое условие экстремума (11), вообще говоря, не является достаточным. Из физических соображений, однако, ясно, какому из возможных значений параметра a следует отдать предпочтение (что, впрочем, можно подтвердить и прямым вычислением).

Задачи и упражнения

1. Пусть $f\colon U \to Y$ — отображение класса $C^{(n)}(U; Y)$ открытого подмножества U нормированного пространства X в нормированное пространство Y. Пусть отрезок $[x, x+h]$ полностью содержится в U, и в точках интервала $]x, x+h[$ функция f имеет дифференциал $(n+1)$-го порядка, причем $\|f^{(n+1)}(\xi)\| \leqslant M$ в любой точке $\xi \in]x, x+h[$.

a) Покажите, что функция

$$g(t) = f(x+th) - \left(f(x) + f'(x)(th) + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(th)^n\right)$$

определена на отрезке $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, дифференцируема на интервале $]0, 1[$ и при любом $t \in]0, 1[$ справедлива оценка

$$\|g'(t)\| \leqslant \frac{1}{n!}M|th|^n|h|.$$

b) Покажите, что $|g(1) - g(0)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}M|h|^{n+1}$.

c) Докажите следующую формулу Тейлора:

$$\left|f(x+h) - \left(f(x) + f'(x)h + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n\right)\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|h|^{n+1}.$$

d) Что можно сказать об отображении $f: U \to Y$, если известно, что $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ в U?

2. a) Если n-линейный симметрический оператор A таков, что $Ax^n = 0$ для любого вектора $x \in X$, то $A(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$, т. е. оператор A равен нулю на любом наборе $x_1, \ldots, x_n$ векторов из X.

b) Если отображение $f: U \to Y$ имеет в точке $x \in U$ n-й дифференциал $f^{(n)}(x)$ и удовлетворяет условию

$$f(x+h) = L_0 + L_1 h + \ldots + \frac{1}{n!} L_n h^n + \alpha(h)|h|^n,$$

где L_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, суть i-линейные операторы, а $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$, то $L_i = f^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

c) Покажите, что из наличия приведенного в предыдущей задаче разложения функции f, вообще говоря, еще не вытекает наличие n-го дифференциала $f^{(n)}(x)$ (при $n > 1$) у этой функции в точке x.

d) Докажите, что отображение $\mathscr{L}(X; Y) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathscr{L}(X; Y)$ в области своего определения является бесконечно дифференцируемым, причем $(A^{-1})^{(n)}(A)(h_1, \ldots, h_n) = (-1)^n A^{-1} h_1 A^{-1} h_2 \cdot \ldots \cdot A^{-1} h_n A^{-1}$.

3. a) Пусть $\varphi \in C([a, b], \mathbb{R})$. Покажите, что если для любой функции $h \in C^{(2)}([a, b], \mathbb{R})$ такой, что $h(a) = h(b) = 0$, выполняется условие

$$\int_a^b \varphi(x) h(x)\, dx = 0, \quad \text{то } \varphi(x) \equiv 0 \text{ на } [a, b].$$

b) Выведите уравнение (11) Эйлера—Лагранжа как необходимое условие экстремума функционала (3), ограниченного на множество функций $f \in C^{(2)}([a, b], \mathbb{R})$, принимающих на концах отрезка $[a, b]$ заданные значения.

4. Найдите форму $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, меридиана той поверхности вращения (вокруг оси Ox), которая имеет наименьшую площадь среди всех поверхностей вращения с окружностями заданного радиуса $\boldsymbol{r}_a$, $\boldsymbol{r}_b$ в сечениях поверхности плоскостями $x = a$, $x = b$ соответственно.

5. a) Функция L в задаче о брахистохроне не удовлетворяет условиям примера 1, поэтому непосредственное применение результатов примера 1 было в данном случае неоправданным. Покажите, повторив с нужными видоизменениями вывод формулы (10), что она и уравнение (11) остаются в силе и в рассматриваемом случае.

b) Изменится ли уравнение брахистохроны, если частица стартует из точки P_0 с отличной от нуля начальной скоростью (движение происходит без трения в закрытой трубке)?

c) Покажите, что если P — произвольная точка брахистохроны, отвечающей паре точек P_0, P_1, то дуга этой брахистохроны от P_0 до P является брахистохроной пары P_0, P.

d) Допущение о том, что брахистохрона, отвечающая паре точек P_0, P_1, может быть записана в виде $y = f(x)$, как выяснилось из окончательных формул (23), не всегда оправданно. Покажите, используя результат задачи c), что вывод формул (23) можно провести и без подобного предположения о глобальном устройстве брахистохроны.

e) Расположите точку P_1 так, чтобы отвечающая паре P_0, P_1 брахистохрона в системе координат, которая была введена в примере 3, не могла быть записана в виде $y = f(x)$.

f) Расположите точку P_1 так, чтобы отвечающая паре P_0, P_1 брахистохрона в системе координат примера 3 имела вид $y = f(x)$, причем $f \notin C^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$. Таким образом, получится, что в этом случае интересующий нас функционал (16) имеет на множестве $C^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$ нижнюю грань, но не имеет минимума.

g) Покажите, что брахистохрона пары точек P_0, P_1 пространства является плоской кривой.

6. Удаление $d(P_0, P_1)$ точки P_0 пространства от точки P_1 в однородном гравитационном поле будем измерять временем движения материальной частицы по брахистохроне, отвечающей паре P_0, P_1.

a) Найдите измеряемое в этом смысле удаление точки P_0 от фиксированной вертикальной прямой.

b) Найдите асимптотику функции $d(P_0, P_1)$, когда точка P_1 поднимается по вертикали, приближаясь к уровню высоты точки P_0.

c) Выясните, является ли функция $d(P_0, P_1)$ метрикой.

§ 7. Общая теорема о неявной функции

В этом заключительном параграфе главы почти весь развитый в ней аппарат будет продемонстрирован в работе на примере исследования неявно заданной функции. Представление о содержании и месте теоремы о неявной функции в анализе и его приложениях читатель уже имеет из гл. VIII, поэтому мы не останавливаемся здесь на предваряющих формализм пояснениях существа дела. Отметим только, что на сей раз неявно заданная функция будет построена совсем иным методом, опирающимся на принцип сжимающих отображений. Этот метод часто используется в анализе и весьма полезен ввиду его вычислительной эффективности.

Теорема. *Пусть X, Y, Z — нормированные пространства* (*например*, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$), *причем Y — полное пространство*; $W = \{(x, y) \in X \times Y \mid |x - x_0| < \alpha \land |y - y_0| < \beta\}$ — *окрестность точки (x_0, y_0) в произведении $X \times Y$ пространств X, Y.*

Если отображение $F : W \to Z$ удовлетворяет условиям:

1. $F(x_0, y_0) = 0$;
2. *$F(x, y)$ непрерывно в точке (x_0, y_0)*;
3. *$F'(x, y)$ определено в W и непрерывно в (x_0, y_0)*;
4. *$F'_y(x_0, y_0)$ — обратимый*[1] *оператор,*

то найдутся окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 в X, окрестность $V = V(y_0)$ точки y_0 в Y и отображение $f : U \to V$ такие, что:

1′. $U \times V \subset W$;

2′. $(F(x, y) = 0$ *в* $U \times V) \iff (y = f(x)$, *где* $x \in U$, *а* $f(x) \in V)$;

3′. $y_0 = f(x_0)$;

4′. *f непрерывно в точке x_0.*

[1] То есть $\exists\, [F'_y(x_0, y_0)]^{-1} \in \mathscr{L}(Z; Y)$.

По существу, теорема утверждает, что если линейное отображение F'_y обратимо в точке (условие 4), то в окрестности этой точки соотношение $F(x, y) = 0$ равносильно функциональной зависимости $y = f(x)$ (заключение 2′).

◄ 1° Для упрощения записи и, очевидно, без ограничения общности рассмотрения можно считать, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и, следовательно,

$$W = \{(x, y) \in X \times Y \mid |x| < \alpha \wedge |y| < \beta\}.$$

2° Основную роль в доказательстве теоремы играет вспомогательное семейство отображений

$$g_x(y) := y - (F'_y(0, 0))^{-1} \cdot F(x, y), \tag{1}$$

зависящих от параметра $x \in X$, $|x| < \alpha$, и определенных на множестве $\{y \in \in Y \mid |y| < \beta\}$.

Обсудим формулу (1). Прежде всего выясним, корректно ли определены отображения g_x и где лежат их значения.

При $(x, y) \in W$ определено отображение F, значение $F(x, y)$ которого на паре (x, y) лежит в пространстве Z. Частное производное отображение $F'_y(x, y)$ в любой точке $(x, y) \in W$, как мы знаем, есть линейное непрерывное отображение пространства Y в пространство Z.

По условию 4 отображение $F'_y(0, 0) \colon Y \to Z$ имеет непрерывное обратное отображение $(F'_y(0, 0))^{-1} \colon Z \to Y$. Значит, композиция $(F'_y(0, 0))^{-1} \cdot F(x, y)$ действительно определена и ее значения лежат в пространстве Y.

Итак, при любом x из α-окрестности $B_X(0, \alpha) := \{x \in X \mid |x| < \alpha\}$ точки $0 \in X$ g_x есть отображение $g_x \colon B_Y(0, \beta) \to Y$ β-окрестности $B_Y(0, \beta) := \{y \in Y \mid |y| < < \beta\}$ точки $0 \in Y$ в пространство Y.

Связь отображений (1) с задачей разрешения относительно переменной y уравнения $F(x, y) = 0$ состоит, очевидно, в том, что точка y_x является неподвижной точкой отображения g_x тогда и только тогда, когда $F(x, y_x) = 0$.

Зафиксируем это важное наблюдение:

$$g_x(y_x) = y_x \iff F(x, y_x) = 0. \tag{2}$$

Таким образом, отыскание и исследование неявно заданной функции $y = = y_x = f(x)$ сводится к отысканию неподвижных точек отображений (1) и исследованию их зависимости от параметра x.

3° Покажем, что существует положительное число $\gamma < \min\{\alpha, \beta\}$ такое, что при любом $x \in X$, удовлетворяющем условию $|x| < \gamma < \alpha$, отображение $g_x \colon B_Y(0, \gamma) \to Y$ шара $B_Y(0, \gamma) := \{y \in Y \mid |y| < \gamma < \beta\}$ в Y является сжимающим отображением с коэффициентом сжатия, не превосходящим, например, числа $1/2$. Действительно, при любом фиксированном $x \in B_X(0, \alpha)$ отображение $g_x \colon B_Y(0, \beta) \to Y$ дифференцируемо, что следует из условия 3 и теоремы о дифференцировании композиции отображений, причем

$$g'_x(y) = e_Y - (F'_y(0, 0))^{-1} \cdot (F'_y(x, y)) = (F'_y(0, 0))^{-1}(F'_y(0, 0) - F'_y(x, y)). \tag{3}$$

В силу непрерывности $F'_y(x, y)$ в точке $(0, 0)$ (условие 3) найдется такая окрестность $\{(x, y) \in X \times Y \mid |x| < \gamma < \alpha \wedge |y| < \gamma < \beta\}$ точки $(0, 0) \in X \times Y$, в которой

$$\|g'_x(y)\| \leqslant \|(F'_y(0, 0))^{-1}\| \cdot \|F'_y(0, 0) - F'_y(x, y)\| < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Здесь мы пользуемся тем, что $(F'_y(0, 0))^{-1} \in \mathscr{L}(Z; Y)$, т. е. тем, что $\|(F'_y(0, 0))^{-1}\| < \infty$.

Всюду дальше будем считать, что $|x| < \gamma$ и $|y| < \gamma$, поэтому имеет место оценка (4).

Таким образом, при любом $x \in B_X(0, \gamma)$ и любых $y_1, y_2 \in B_Y(0, \gamma)$ по теореме о конечном приращении мы действительно получаем теперь, что

$$|g_x(y_1) - g_x(y_2)| \leqslant \sup_{\xi \in]y_1, y_2[} \|g'(\xi)\| \, |y_1 - y_2| < \frac{1}{2}|y_1 - y_2|. \tag{5}$$

4° Для того, чтобы утверждать существование неподвижной точки y_x отображения g_x, нам надо иметь такое полное метрическое пространство, которое при этом отображении переходит в себя (быть может, и не на себя).

Проверим, что

для любого числа ε, удовлетворяющего условиям $0 < \varepsilon < \gamma$, найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$ из интервала $]0, \gamma[$, что при любом $x \in B_X(0, \delta)$ отображение g_x преобразует замкнутый шар $\overline{B}_Y(0, \varepsilon)$ в себя, т. е. $g_x(\overline{B}_Y(0, \varepsilon)) \subset \subset \overline{B}_Y(0, \varepsilon)$.

Действительно, сначала по ε подберем число $\delta \in]0, \gamma[$ так, чтобы при $|x| < \delta$ иметь

$$|g_x(0)| = |(F'_y(0, 0))^{-1} \cdot F(x, 0)| \leqslant \|(F'_y(0, 0))^{-1}\| \, |F(x, 0)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{6}$$

Это можно сделать благодаря условиям 1 и 2, в силу которых $F(0, 0) = 0$ и $F(x, y)$ непрерывно в точке $(0, 0)$.

Если теперь $|x| < \delta(\varepsilon) < \gamma$ и $|y| \leqslant \varepsilon < \gamma$, то из (5) и (6) получаем

$$|g_x(y)| \leqslant |g_x(y) - g_x(0)| + |g_x(0)| < \frac{1}{2}|y| + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon,$$

и, значит, при $|x| < \delta(\varepsilon)$

$$g_x(\overline{B}_y(0, \varepsilon)) \subset B_Y(0, \varepsilon). \tag{7}$$

Как замкнутое подмножество полного метрического пространства Y замкнутый шар $\overline{B}_Y(0, \varepsilon)$ сам является полным метрическим пространством.

5° Сопоставляя соотношения (5) и (7), на основании принципа неподвижной точки (см. гл. IX, § 7) теперь можно утверждать, что при каждом $x \in \in B_x(0, \delta(\varepsilon)) =: U$ найдется единственная точка $y = y_x =: f(x) \in B_Y(0, \varepsilon) =: V$, которая является неподвижной точкой отображения $g_x : \overline{B}_Y(0, \varepsilon) \to \overline{B}_Y(0, \varepsilon)$.

В силу основного соотношения (2) отсюда следует, что так построенная функция $f : U \to V$ уже обладает свойством 2′, а значит, и свойством 3′, поскольку $F(0, 0) = 0$ по условию 1.

Свойство $1'$ окрестностей U и V следует из того, что по построению $U \times V \subset B_X(0, \alpha) \times B_Y(0, \beta) = W$.

Наконец, непрерывность функции $y = f(x)$ в точке $x = 0$, т. е. свойство $4'$, следует из $2'$ и того, что, как было показано в п. 4° доказательства, для любого числа $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \gamma)$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$ $(\delta(\varepsilon) < \gamma)$, что при любом $x \in B_X(0, \delta(\varepsilon))$ выполнено $g_x(\overline{B}_Y(0, \varepsilon)) \subset B_Y(0, \varepsilon)$, т. е. единственная неподвижная точка $y_x = f(x)$ отображения $g_x : \overline{B}_Y(0, \varepsilon) \to \overline{B}_Y(0, \varepsilon)$ при $|x| < \delta(\varepsilon)$ удовлетворяет условию $|f(x)| < \varepsilon$. ►

Мы доказали теорему существования неявной функции. Сделаем теперь ряд дополнений о свойствах этой функции, порождаемых свойствами исходной функции F.

Дополнение 1 (о непрерывности неявной функции). *Если в дополнение к условиям 2, 3 теоремы известно, что отображения $F : W \to Z$ и F'_y непрерывны не только в точке (x_0, y_0), но и в некоторой ее окрестности, то найденная функция $f : U \to V$ будет непрерывна не только в точке $x_0 \in U$, но и в некоторой ее окрестности.*

◄ Из условий 3 и 4 теоремы на основании свойств отображения $\mathscr{L}(Y; Z) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathscr{L}(Z; Y)$ (см. пример 6 из § 3) заключаем, что в каждой точке (x, y) некоторой окрестности точки (x_0, y_0) оператор $f'_y(x, y) \in \mathscr{L}(Y; Z)$ является обратимым. Таким образом, при наличии сделанного дополнительного предположения о непрерывности F все точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$ вида $(x, f(x))$ из некоторой окрестности точки (x_0, y_0) удовлетворяют условиям 1—4, которым раньше удовлетворяла только точка (x_0, y_0).

Повторив построение неявной функции в окрестности любой из этих точек $(\tilde{x}, \tilde{y})$, мы получили бы функцию $y = \tilde{f}(x)$ непрерывную в $\tilde{x}$ и в силу $2'$ совпадающую с функцией $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x. Но это и означает, что функция f непрерывна в $\tilde{x}$. ►

Дополнение 2 (о дифференцируемости неявной функции). *Если в дополнение к условиям теоремы известно, что в окрестности W точки (x_0, y_0) существует также частная производная $F'_x(x, y)$, непрерывная в точке (x_0, y_0), то функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, причем*

$$f'(x_0) = -(F'_y(x_0, y_0))^{-1} \cdot (F'_x(x_0, y_0)). \tag{8}$$

◄ Проверим непосредственно, что линейный оператор $L \in \mathscr{L}(X; Y)$, стоящий в правой части формулы (8), действительно является дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Как и прежде, для упрощения записи будем считать, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, поэтому $f(0) = 0$.

Проведем сначала предварительный подсчет

$$\begin{aligned}|f(x) - f(0) - Lx| &= |f(x) - Lx| = |f(x) + ((F'_y(0,0))^{-1} \cdot (F'_x(0,0))x| = \\ &= |(F'_y(0,0))^{-1}(F'_x(0,0)x + F'_Y(0,0)f(x))| = \\ &= |(F'_y(0,0))^{-1}(F(x, f(x)) - F(0,0) - F'_x(0,0)x - F'_y(0,0)f(x))| \leqslant\end{aligned}$$

$$\leqslant \|(F'_y(0,0))^{-1}\|\,|(F(x,f(x))-F(0,0)-F'_x(0,0)x-F'_y(0,0)f(x))|\leqslant$$
$$\leqslant \|(F'_y(0,0))^{-1}\|\cdot\alpha(x,f(x))(|x|+|f(x)|),$$

где $\alpha(x,y)\to 0$ при $(x,y)\to(0,0)$.

Эти соотношения написаны с учетом того, что $F(x,f(x))\equiv 0$, и того, что непрерывность частных производных отображений F'_x, F'_y в точке $(0,0)$ обеспечивает дифференцируемость функции $F(x,y)$ в этой точке.

Положим для удобства записи $a:=\|L\|$ и $b:=\|(F'_y(0,0)^{-1}\|$.

Учитывая, что

$$|f(x)|=|f(x)-Lx+Lx|\leqslant|f(x)-Lx|+|Lx|\leqslant|f(x)-Lx|+a|x|,$$

проведенную выше предварительную выкладку можно продолжить и получить, что

$$|f(x)-Lx|\leqslant b\alpha(x,f(x))((a+1)|x|+|f(x)-Lx|),$$

или

$$|f(x)-Lx|\leqslant\frac{(a+1)b}{1-b\alpha(x,f(x))}\alpha(x,f(x))|x|.$$

Ввиду непрерывности f в точке $x=0$ и того, что $f(0)=0$, при $x\to 0$ также $f(x)\to 0$, поэтому $\alpha(x,f(x))\to 0$ при $x\to 0$.

Значит, из последнего неравенства следует, что

$$|f(x)-f(0)-Lx|=|f(x)-Lx|=o(|x|)\quad\text{при } x\to 0. \blacktriangleright$$

Дополнение 3 (о непрерывной дифференцируемости неявной функции). *Если в дополнение к условиям теоремы известно, что в окрестности W точки (x_0,y_0) существуют и непрерывны частные производные отображения F'_x, F'_y, то в некоторой окрестности точки x_0 функция $y=f(x)$ непрерывно дифференцируема и ее производное отображение вычисляется по формуле*

$$f'(x)=-(F'_y(x,f(x)))^{-1}\cdot(F'_x(x,f(x))). \tag{9}$$

◄ То, что в индивидуальной точке x, в которой оператор $F'_y(x,f(x))$ обратим, производное отображение $f'(x)$ существует и выражается в виде (9), нам уже известно из формулы (8).

Остается проверить, что при сделанных предположениях функция $f'(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x=x_0$.

Билинейная функция $(A,B)\mapsto A\cdot B$ — произведение линейных операторов A, B — является непрерывной функцией.

Оператор $B=-F'_x(x,f(x))$ непрерывно зависит от x как композиция непрерывных функций $x\mapsto(x,f(x))\mapsto -F'_x(x,f(x))$.

То же самое можно сказать о линейном операторе $A^{-1}=F'_y(x,f(x))$.

Остается вспомнить (см. пример 6 из § 3), что отображение $A^{-1}\mapsto A$ также непрерывно в области своего определения.

Таким образом, задаваемая формулой (9) функция $f'(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x=x_0$ как композиция непрерывных функций. ►

Теперь мы можем подвести итог и сформулировать следующее общее

Утверждение. *Если в дополнение к условиям теоремы о неявной функции известно, что функция F принадлежит классу $C^{(k)}(W, Z)$, то определяемая уравнением $F(x, y) = 0$ неявная функция $y = f(x)$ принадлежит классу $C^{(k)}(U, Y)$ в некоторой окрестности U точки x_0.*

◄ При $k = 0$ и $k = 1$ утверждение уже доказано. Общий случай может теперь быть получен по индукции из формулы (9), если заметить, что отображение $\mathscr{L}(Y; Z) \ni A \mapsto A^{-1} \in \mathscr{L}(Z; Y)$ (бесконечно) дифференцируемо и что при дифференцировании равенства (9) правая часть всегда содержит производные от f на один порядок более низкие, чем левая часть. Таким образом, последовательное дифференцирование равенства (9) возможно столько раз, каков порядок гладкости функции F. ►

В частности, если

$$f'(x)h_1 = -(F'_y(x, f(x)))^{-1} \cdot (F'_x(x, f(x)))h_1,$$

то

$$\begin{aligned} f''(x)(h_1, h_2) = &-d(F'_y(x, f(x)))^{-1} h_2 F'_x(x, f(x))h_1 - \\ &\qquad - (F'_y(x, f(x)))^{-1} d(F'_x(x, f(x))h_1)h_2 = \\ &= (F'_y(x, f(x)))^{-1} dF'_y(x, f(x))h_2 (F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x))h_1 - \\ &\qquad - (F'_y(x, f(x)))^{-1}((F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{xy}(x, f(x))f'(x))h_1)h_2 = \\ &= (F'_y(x, f(x)))^{-1}((F''_{yx}(x, f(x)) + F''_{yy}(x, f(x))f'(x))h_2) \times \\ &\qquad \times (F'_y(x, f(x)))^{-1} F'_x(x, f(x))h_1 - (F'_y(x, f(x)))^{-1} \times \\ &\qquad \times ((F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{xy}(x, f(x))f'(x))h_1)h_2. \end{aligned}$$

В менее подробной, но более обозримой записи это означает, что

$$\begin{aligned} f''(x)(h_1, h_2) = (F'_y)^{-1}[((F''_{yx} + F''_{yy}f')h_2)(F'_y)^{-1}F'_x h_1 - \\ - ((F''_{xx} + F''_{yy}f')h_1)h_2]. \end{aligned} \tag{10}$$

Так можно было бы в принципе получить выражение для производной любого порядка от неявной функции, однако, как видно уже из формулы (10), эти выражения в общем случае слишком громоздки, чтобы быть удобными в употреблении. Посмотрим теперь, как конкретизируются полученные результаты в важнейшем частном случае, когда $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$, $Z = \mathbb{R}^n$.

В этом случае отображение $z = F(x, y)$ имеет координатное представление

$$\begin{aligned} &z^1 = F^1(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &z^n = F^n(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n). \end{aligned} \tag{11}$$

Частные производные отображения $F'_x \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, $F'_y \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ задаются матрицами

$$F'_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}, \quad F'_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix},$$

вычисленными в соответствующей точке (x, y).

Непрерывность F'_x и F'_y, как нам известно, равносильна непрерывности всех элементов указанных матриц.

Обратимость линейного преобразования $F'_y(x_0, y_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ равносильна невырожденности матрицы, задающей это преобразование.

Таким образом, в рассматриваемом случае теорема о неявной функции утверждает, что если

1) $F^1(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^n) = 0,$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$F^n(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^n) = 0;$

2) $F^i(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n)$, $i = 1, \dots, n,$ — функции, непрерывные в точке $(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^n) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$;

3) все частные производные $\frac{\partial F^i}{\partial y^j}(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots$ $\dots, n$, определены в окрестности точки $(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^n)$ и непрерывны в самой этой точке;

4) в точке $(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^n)$ определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{vmatrix}$$

матрицы F'_y отличен от нуля, то найдутся окрестность U точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$ в $\mathbb{R}^m$, окрестность V точки $y_0 = (y_0^1, \dots, y_0^n)$ в $\mathbb{R}^n$ и отображение $f: U \to Y$, имеющее в данном случае координатное представление

$$\begin{aligned} y^1 &= f^1(x^1, \dots, x^m), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y^n &= f^n(x^1, \dots, x^m), \end{aligned} \tag{12}$$

такие, что:

1′) в пределах окрестности $U \times V$ точки $(x_0^1, \dots, x_0^m, y_0^1, \dots, y_0^n) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ система уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^n(x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n) = 0 \end{cases}$$

равносильна функциональной зависимости $f: U \to V$, выраженной равенствами (12);

2′) $y_0^1 = f^1(x_0^1, \ldots, x_0^m)$,

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$y_0^n = f^n(x_0^1, \ldots, x_0^m)$;

3′) отображение (12) непрерывно в точке $(x_0^1, \ldots, x_0^m, y_0^1, \ldots, y_0^n)$.

Если же, сверх того, известно, что отображение (11) принадлежит классу гладкости $C^{(k)}$, то, как следует из приведенного выше утверждения, отображение (12) также будет принадлежать классу $C^{(k)}$, разумеется, в соответствующей своей области определения.

Формула (9) в рассматриваемом случае конкретизируется, превращаясь в матричное равенство

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{pmatrix},$$

в котором левая часть вычисляется в точке $(x^1, \ldots, x^m)$, а правая — в соответствующей точке $(x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^n)$, где $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^m)$, $i = 1, \ldots, n$.

Если $n = 1$, т. е. когда решается относительно y уравнение

$$F(x^1, \ldots, x^m, y) = 0,$$

матрица F'_y состоит из одного элемента — числа $\frac{\partial F}{\partial y}(x^1, \ldots, x^m, y)$. В этом случае $y = f(x^1, \ldots, x^m)$ и

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^m}\right) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x^m}\right). \tag{13}$$

Формула (10) в этом случае также несколько упрощается, точнее, может быть переписана в следующем более симметричном виде:

$$f''(x)(h_1, h_2) = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xy}f')h_1 F'_y h_2 - (F''_{yx} + F''_{yy}f')h_2 F'_x h_1}{(F'_y)^2}. \tag{14}$$

Если же и $n = 1$, и $m = 1$, то $y = f(x)$ есть вещественнозначная функция одного числового аргумента, и формулы (13), (14) предельно упрощаются, превращаясь в знакомые числовые равенства

$$f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}(x, y),$$
$$f''(x) = -\frac{(F''_{xx} + F''_{xy}f')F'_y - (F''_{yx} + F''_{yy}f')F'_x}{(F'_y)^2}(x, y)$$

для первых двух производных неявной функции, задаваемой уравнением $F(x, y) = 0$.

Задачи и упражнения

1. a) Предположим, что наряду с указанной в теореме функцией $f: U \to Y$ нашлась функция $\tilde{f}: \widetilde{U} \to Y$, определенная в некоторой окрестности $\widetilde{U}$ точки x_0 и удовлетворяющая условиям $y_0 = f(x_0)$ и $F(x, f(x)) \equiv 0$ в $\widetilde{U}$. Докажите, что если $\tilde{f}$ непрерывна в x_0, то в некоторой окрестности точки x_0 функции f и $\tilde{f}$ совпадают.

b) Покажите, что без предположения о непрерывности $\tilde{f}$ в x_0 утверждение a, вообще говоря, неверно.

2. Проанализируйте еще раз доказательство теоремы о неявной функции и дополнений к ней и покажите, что:

a) Если $z = F(x, y)$ непрерывно дифференцируемая комплекснозначная функция комплексных переменных x, y, то определяемая уравнением $F(x, y) = 0$ неявная функция $y = f(x)$ будет дифференцируемой по комплексному переменному x.

b) В условиях теоремы пространство X не обязано быть нормированным, а может быть любым топологическим пространством.

3. a) Выясните, симметрична ли форма $f''(x)(h_1, h_2)$, заданная соотношением (10).

b) Запишите в матричном виде формы (9) и (10) для случая числовых функций $F(x^1, x^2, y)$ и $F(x, y^1, y^2)$.

c) Покажите, что если $\mathbb{R} \ni t \mapsto A(t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ есть бесконечно гладко зависящее от параметра t семейство невырожденных матриц $A(t)$, то

$$\frac{d^2A^{-1}}{dt^2} = 2A^{-1}\left(\frac{dA}{dt}A^{-1}\right)^2 - A^{-1}\frac{d^2A}{dt^2}A^{-1}, \quad \text{где } A^{-1} = A^{-1}(t)$$

— символ матрицы, обратной к матрице $A = A(t)$.

4. a) Покажите, что дополнение 1 к теореме является прямым следствием условий устойчивости неподвижной точки семейства сжимающих отображений, рассмотренных в § 7 главы IX.

b) Пусть $\{A_t: X \to X\}$ — семейство сжимающих отображений полного нормированного пространства X в себя, зависящих от параметра t, который изменяется в области Ω нормированного пространства T. Покажите, что если $A_t(x) = \varphi(t, x)$ является функцией класса $C^{(n)}(\Omega \times X, X)$, то неподвижная точка $x(t)$ отображения A_t как функция t принадлежит классу $C^{(n)}(\Omega, X)$.

5. a) Опираясь на теорему о неявной функции, докажите следующую теорему *об обратном отображении*.

Пусть $g: G \to X$ — отображение окрестности G точки y_0 полного нормированного пространства Y в нормированное пространство X.

Если отображение $x = g(y)$

1° дифференцируемо в G,

2° $g'(y)$ непрерывно в y_0,

3° $g'(y_0)$ обратимый оператор,

то найдутся окрестность $V \subset Y$ точки y_0 в Y и окрестность $U \subset X$ точки x_0 в X такие, что $g: V \to U$ биективно, а обратное к нему отображение $f: U \to V$ непрерывно в U и дифференцируемо в x_0, причем

$$f'(x_0) = (g'(y_0))^{-1}.$$

b) Покажите, что если сверх приведенных в a) условий известно, что отображение g принадлежит классу $C^{(n)}(V, U)$, то обратное отображение f принадлежит классу $C^{(n)}(U, V)$.

c) Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, у которого в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ матрица $f'(x)$ невырождена и удовлетворяет неравенству $\|(f')^{-1}(x)\| < C$ с константой C, не зависящей от x. Покажите, что f — биективное отображение.

d) Используя опыт решения задачи c), попробуйте дать некоторую оценку радиуса той шаровой окрестности $U = B(x_0, r)$ точки x_0, в которой заведомо определено рассматриваемое в теореме об обратной функции отображение $f\colon U \to V$.

6. a) Покажите, что если линейные отображения $A \in \mathscr{L}(X; Y)$ и $B \in \mathscr{L}(X; \mathbb{R})$ таковы, что $\ker A \subset \ker B$ (ker, как обычно, символ, обозначающий ядро оператора), то найдется такое линейное отображение $\lambda \in \mathscr{L}(Y; \mathbb{R})$, что $B = \lambda \cdot A$.

b) Пусть X и Y — нормированные пространства, а $f\colon X \to \mathbb{R}$ и $g\colon X \to Y$ — гладкие функции на X со значениями в $\mathbb{R}$ и Y соответственно. Пусть S — гладкая поверхность, задаваемая в X уравнением $g(x) = y_0$. Покажите, что если $x_0 \in S$ — точка экстремума функции $f|_S$, то любой вектор h, касательный к S в точке x_0, одновременно удовлетворяет двум условиям: $f'(x_0)h = 0$ и $g'(x_0)h = 0$.

c) Докажите, что если $x_0 \in S$ точка экстремума функции $f|_S$, то $f'(x_0) = \lambda \cdot g'(x_0)$, где $\lambda \in \mathscr{L}(Y; \mathbb{R})$.

d) Покажите, как из предыдущего результата получается классический *необходимый признак* Лагранжа *условного экстремума* функции на гладкой поверхности в $\mathbb{R}^n$.

7. a) Вслед за Адамаром покажите, что непрерывное локально обратимое отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обратимо глобально (т. е. является биективным) тогда и только тогда, когда при $x \to \infty$ также $f(x) \to \infty$. Убедитесь, что вместо $\mathbb{R}^n$ здесь можно поставить любое нормированное пространство. Как надо понимать (или переформулировать) условия Адамара, если от $\mathbb{R}^n$ или нормированного пространства перейти к любому их гомеоморфному образу?

b) Пусть $F\colon X \times Y \to Z$ — непрерывное отображение, определенное на прямом произведении нормированных пространств X и Y. Покажите, что уравнение $F(x, y) = 0$ относительно y разрешимо глобально (в том смысле, что локальное непрерывное решение $y = f(x)$ распространяется как таковое на все пространство X) в точности при выполнении двух условий: уравнение имеет непрерывное решение в окрестности любой точки (x_0, y_0), удовлетворяющей условию $F(x_0, y_0) = 0$; и в паре (x, y), удовлетворяющей условию $F(x, y) = 0$, вторая координа может, непрерывно изменяясь, стремится к бесконечности лишь если первая координата в своем пространстве тоже стремится к бесконечности.

c) Вслед за Джоном[1] покажите, что если непрерывное локально обратимое отображение $f\colon B \to H$ единичного шара B нормированного пространства H таково, что локально (в каждой точке шара) оно меняет элемент длины не более чем в $k \geqslant 1$ раз (растягивая или сжимая), то в шаре радиуса k^{-2} это отображение заведомо инъективно. (Внимание: бесконечномерное нормированное пространство сдвигом координат можно изометрично вложить в себя в качестве собственного подпространства, но это отображение не является обратимым или локально обратимым. Оно обратимо только как отображение на свой образ.)

[1] Ф. Джон (1910—1994) — немецкий, а впоследствии известный американский математик, ученик Р. Куранта.

Глава XI

Кратные интегралы

§ 1. Интеграл Римана на n-мерном промежутке

1. Определение интеграла

a. Промежуток в $\mathbb{R}^n$ и его мера

Определение 1. Множество $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \ldots, n\}$ называется *промежутком* или *координатным параллелепипедом* в $\mathbb{R}^n$.

Если желают отметить, что промежуток определяется точками $a = (a^1, \ldots, a^n)$ и $b = (b^1, \ldots, b^n)$, то его часто обозначают символом $I_{a,b}$ или, по аналогии с одномерным случаем, записывают в виде $a \leqslant x \leqslant b$.

Определение 2. Промежутку $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \ldots, n\}$ ставится в соответствие число $|I| := \prod_{i=1}^{n} (b^i - a^i)$, называемое *объемом* или *мерой промежутка*.

Объем (меру) промежутка I обозначают также символами $v(I)$ или $\mu(I)$.

Лемма 1. *Мера промежутка в* $\mathbb{R}^n$

a) *однородна, т. е. если* $\lambda I_{a,b} := I_{\lambda a, \lambda b}$, *где* $\lambda \geqslant 0$, *то* $|\lambda I_{a,b}| = \lambda^n |I_{a,b}|$;

b) *аддитивна, т. е. если промежутки* $I, I_1, \ldots, I_k$ *таковы, что* $I = \bigcup_{i=1}^{k} I_i$ *и промежутки* $I_1, \ldots, I_k$ *попарно не имеют общих внутренних точек, то* $|I| = \sum_{i=1}^{k} |I_i|$;

c) *если промежуток* I *покрыт конечной системой промежутков* $I_1, \ldots, I_k$, *т. е.* $I \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i$, *то* $|I| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |I_i|$.

Все эти утверждения легко вытекают из определений 1 и 2.

b. Разбиение промежутка и база в множестве разбиений. Пусть задан промежуток $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Разбиения координатных отрезков $[a^i, b^i]$, $i = 1, \ldots, n$, индуцируют разбиение промежутка I на более мелкие промежутки, получающиеся прямым произведением промежутков разбиения указанных координатных отрезков.

Определение 3. Описанное представление промежутка I (в виде объединения $I = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ более мелких промежутков I_j) будем называть *разбиением промежутка* I и обозначать символом P.

Определение 4. Величина $\lambda(P) := \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} d(I_j)$ (максимального из диаметров промежутков разбиения P) называется *параметром разбиения* P.

Определение 5. Если в каждом промежутке I_j разбиения P фиксирована некоторая точка $\xi_j \in I_j$, то говорят, что имеется *разбиение с отмеченными точками*.

Набор $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$, как и прежде, будем обозначать одним символом ξ, а разбиение с отмеченными точками — символом (P, ξ).

В множестве $\mathscr{P} = \{(P, \xi)\}$ разбиений с отмеченными точками промежутка I вводится база $\lambda(P) \to 0$, элементы B_d $(d > 0)$ которой, как и в одномерном случае, определяются соотношением $B_d := \{(P, \xi) \in \mathscr{P} \mid \lambda(P) < d\}$.

То, что $\mathscr{B} = \{B_d\}$ — действительно база, следует из существования разбиений с параметром $\lambda(P)$, сколь угодно близким к нулю.

c. Интегральная сумма и интеграл. Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная[1] функция на промежутке I, а $P = \{I_1, \ldots, I_k\}$ — разбиение этого промежутка с отмеченными точками $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$.

Определение 6. Сумма

$$\sigma(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)|I_i|$$

называется *интегральной суммой* (Римана) функции f, соответствующей разбиению (P, ξ) с отмеченными точками промежутка I.

Определение 7. Величина

$$\int_I f(x)\, dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi),$$

если указанный предел существует, называется *интегралом* (Римана) от *функции* f *на промежутке* I.

Мы видим, что данное определение и вообще весь процесс построения интеграла на промежутке $I \subset \mathbb{R}^n$ дословно повторяет уже знакомую нам процедуру определения интеграла Римана на отрезке. Для большего сходства мы даже оставили прежний вид $f(x)\, dx$ подынтегрального выражения. Равносильные, но более развернутые обозначения интеграла таковы:

$$\int_I f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n \quad \text{или} \quad \underbrace{\int \cdots \int_I}_{n} f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n.$$

Чтобы подчеркнуть, что речь идет об интеграле по многомерной области I, говорят, что это *кратный интеграл* (двойной, тройной и т. д. в соответствии с размерностью I).

---

[1]Обратите внимание на то, что в последующих определениях можно было бы считать, что значения f лежат в любом линейном нормированном пространстве. Например, это могут быть пространство $\mathbb{C}$ комплексных чисел, пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$.

d. Необходимое условие интегрируемости

Определение 8. Если для функции $f: I \to \mathbb{R}$ указанный в определении 7 конечный предел существует, то f называется *интегрируемой* (по Риману) *функцией на промежутке* I.

Множество всех таких функций будем обозначать символом $\mathcal{R}(I)$.

Проверим следующее простейшее необходимое условие интегрируемости.

Утверждение 1. $f \in \mathcal{R}(I) \Rightarrow f$ *ограничена на* I.

◄ Пусть P — произвольное разбиение промежутка I. Если функция f неограничена на I, то она неограничена и на некотором промежутке I_{i_0} разбиения P. Если (P, ξ'), (P, ξ'') — разбиения P с такими отмеченными наборами точек, что ξ' и ξ'' отличаются только выбором точек ξ'_{i_0}, ξ''_{i_0} в промежутке I_{i_0}, то

$$|\sigma(f, P, \xi') - \sigma(f, P, \xi'')| = |f(\xi'_{i_0}) - f(\xi''_{i_0})|\,|I_{i_0}|.$$

Меняя одну из точек ξ'_{i_0}, ξ''_{i_0}, при неограниченности f в I_{i_0}, мы могли бы сделать правую часть последнего равенства сколь угодно большой. В силу критерия Коши отсюда следует, что интегральные суммы функции f не имеют предела при $\lambda(P) \to 0$. ►

2. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману. Изучая интеграл Римана в одномерном случае, мы уже познакомили читателя (без доказательств) с критерием Лебега существования интеграла. Здесь мы напомним некоторые понятия и докажем этот критерий.

a. Множество меры нуль в $\mathbb{R}^n$

Определение 9. Говорят, что *множество* $E \subset \mathbb{R}^n$ *имеет* (n-мерную) *меру нуль* или является *множеством меры нуль* (в смысле Лебега), если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества E не более чем счетной системой $\{I_i\}$ n-мерных промежутков, сумма $\sum\limits_i |I_i|$ объемов которых не превышает ε.

Лемма 2. a) *Точка и конечное число точек суть множества меры нуль.*

b) *Объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

c) *Подмножество множества меры нуль само есть множество меры нуль.*

d) *Невырожденный промежуток*[1] $I_{a,b} \subset \mathbb{R}^n$ *не является множеством меры нуль.*

Доказательство леммы 2 ничем не отличается от доказательства ее одномерного варианта, рассмотренного в п. 3d, § 1, гл. VI, поэтому мы на нем не останавливаемся.

Пример 1. Множество рациональных точек в $\mathbb{R}^n$ (точек, все координаты которых рациональны) счетно и потому является множеством меры нуль.

[1]То есть такой промежуток $I_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \dots, n\}$, что при любом значении $i \in \{1, \dots, n\}$ имеет место строгое неравенство $a^i < b^i$.

Пример 2. Пусть $f: I \to \mathbb{R}$ — непрерывная вещественнозначная функция, определенная на $(n-1)$-мерном промежутке $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Покажем, что ее график в $\mathbb{R}^n$ есть множество n-мерной меры нуль.

◄ Поскольку функция f равномерно непрерывна на I, то по $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, чтобы для любых точек $x_1, x_2 \in I$ при условии $|x_1 - x_2| < \delta$ иметь $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Если теперь взять разбиение P промежутка I с параметром $\lambda(P) < \delta$, то на каждом промежутке I_i такого разбиения колебание функции f будет меньше ε. Значит, если x_i — произвольная фиксированная точка промежутка I_i, то n-мерный промежуток $\tilde{I}_i = I_i \times [f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon]$, очевидно, содержит всю часть графика функции f, которая лежит над промежутком I_i, а объединение $\bigcup\limits_i \tilde{I}_i$ промежутков $\tilde{I}_i$ покрывает весь график функции f над I. Но $\sum\limits_i |\tilde{I}_i| = \sum\limits_i |I_i| \cdot 2\varepsilon = 2\varepsilon |I|$ (здесь $|I_i|$ — объем I_i в $\mathbb{R}^{n-1}$, $|\tilde{I}_i|$ — объем $\tilde{I}_i$ в $\mathbb{R}^n$). Таким образом, уменьшая ε, действительно можно общий объем покрытия сделать сколь угодно близким к нулю. ►

Замечание 1. Сопоставляя утверждение b) леммы 2 с примером 2, можно заключить, что вообще график непрерывной функции $f: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ или непрерывной функции $f: M \to \mathbb{R}$, где $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$ является множеством n-мерной меры нуль в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3. a) *Класс множеств меры нуль не изменится от того, понимать ли в определении 9 покрытие множества E системой промежутков $\{I_i\}$ в обычном смысле, т. е. считая $E \subset \bigcup\limits_i I_i$, или в более жестком смысле, требуя, чтобы каждая точка множества была внутренней точкой по крайней мере одного из промежутков покрытия*[1].

b) *Компакт K в $\mathbb{R}^n$ является множеством меры нуль в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие K промежутками, сумма объемов которых меньше ε.*

◄ a) Если $\{I_i\}$ — покрытие множества E, т. е. $E \subset \bigcup\limits_i I_i$, причем $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$, то, взяв вместо каждого промежутка I_i гомотетичный ему относительно его центра промежуток $\tilde{I}_i$, получим систему промежутков $\{\tilde{I}_i\}$ такую, что $\sum |\tilde{I}_i| < \lambda^n \varepsilon$, где λ — общий для всех промежутков коэффициент гомотетии. Если $\lambda > 1$, то, очевидно, система $\{\tilde{I}_i\}$ будет покрывать множество E так, что любая точка E является внутренней точкой по крайней мере одного из промежутков покрытия.

b) Это следует из a) и возможности извлечь конечное покрытие из любого открытого покрытия компакта K. (В качестве такого покрытия может выступать система $\{\tilde{I}_i \setminus \partial \tilde{I}_i\}$ открытых промежутков, получаемая из рассмотренной в a) системы $\{\tilde{I}_i\}$.) ►

---

[1] Иными словами, все равно, иметь ли в виду в определении 9 замкнутые или открытые промежутки.

b. Одно обобщение теоремы Кантора. Напомним, что колебанием функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ на множестве E мы назвали величину

$$\omega(f;E) := \sup_{x_1,x_2\in E} |f(x_1)-f(x_2)|,$$

а колебанием функции в точке $x \in E$ — величину $\omega(f;x) := \lim\limits_{\delta\to 0} \omega(f;U_E^\delta(x))$, где $U_E^\delta(x)$ — δ-окрестность точки x в множестве E.

Лемма 4. *Если в каждой точке компакта K для функции $f\colon K\to\mathbb{R}$ имеет место соотношение $\omega(f;x)\leqslant\omega_0$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любой точки $x\in K$ будет выполнено неравенство $\omega(f;U_K^\delta(x))<\omega_0+\varepsilon$.*

При $\omega_0=0$ это утверждение превращается в теорему Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте. Доказательство леммы 4 буквально повторяет схему доказательства теоремы Кантора (п. 2, § 2, гл. IV), поэтому мы на нем не задерживаемся.

c. Критерий Лебега. Как и прежде, будем говорить, что некоторое свойство имеет место *почти во всех точках множества M* или выполнено *почти всюду на M*, если подмножество M, где это свойство может нарушаться, имеет меру нуль.

Теорема 1 (критерий Лебега). $f\in\mathcal{R}(I) \Longleftrightarrow (f$ *ограничена на* $I) \wedge (f$ *непрерывна почти всюду на* $I)$.

◄ *Необходимость*. Если $f\in\mathcal{R}(I)$, то по утверждению 1 функция f ограничена на I. Пусть $|f|\leqslant M$ на I.

Проверим, что f непрерывна почти во всех точках I. Для этого покажем, что если множество E точек разрыва функции не есть множество меры нуль, то $f\notin\mathcal{R}(I)$.

Действительно, представив E в виде $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n=\{x\in I \mid \omega(f;x)\geqslant 1/n\}$, на основании леммы 2 заключаем, что если E не имеет меру нуль, то найдется номер n_0 такой, что множество E_{n_0} тоже не есть множество меры нуль. Пусть P — произвольное разбиение промежутка I на промежутки $\{I_i\}$. Разделим промежутки разбиения P на две группы A и B, где

$$A=\left\{I_i\in P \mid I_i\cap E_{n_0}\neq\varnothing \wedge \omega(f;I_i)\geqslant\frac{1}{2n_0}\right\},\quad \text{а } B=P\setminus A.$$

Система промежутков A образует покрытие множества E_{n_0}. В самом деле, каждая точка E_{n_0} лежит либо внутри некоторого промежутка $I_i\in P$, и тогда, очевидно, $I_i\in A$, либо на границе некоторых промежутков разбиения P. В последнем случае хотя бы на одном из этих промежутков колебание функции должно быть (в силу неравенства треугольника) не менее чем $\frac{1}{2n_0}$, и он войдет в систему A.

Покажем теперь, что, выбирая различным образом набор ξ отмеченных точек в промежутках разбиения P, мы можем заметно менять величину интегральной суммы.

Именно, выберем наборы точек ξ', ξ'' так, чтобы в промежутках системы B отмеченные точки обоих наборов совпадали, а в промежутках I_i системы A точки ξ_i', ξ_i'' выберем так, что

$$f(\xi_i') - f(\xi_i'') > \frac{1}{3n_0}.$$

Тогда

$$|\sigma(f, P, \xi') - \sigma(f, P, \xi'')| = \Big|\sum_{I_i \in A} (f(\xi_i') - f(\xi_i''))|I_i|\Big| > \frac{1}{3n_0} \sum_{I_i \in A} |I_i| > c > 0.$$

Существование такой постоянной c вытекает из того, что промежутки системы A образуют покрытие множества E_{n_0}, которое по предположению не есть множество меры нуль.

Поскольку P было произвольным разбиением промежутка I, на основании критерия Коши заключаем, что интегральные суммы $\sigma(f, P, \xi)$ не могут иметь предел при $\lambda(P) \to 0$, т. е. $f \notin \mathcal{R}(I)$.

Достаточность. Пусть ε — произвольное положительное число, а $E_\varepsilon = \{x \in I \mid \omega(f; x) \geqslant \varepsilon\}$. По условию E_ε есть множество меры нуль.

Кроме того, E_ε, очевидно, замкнуто в I, поэтому E_ε — компакт. По лемме 3 существует такая конечная система $I_1, \ldots, I_k$ промежутков в $\mathbb{R}^n$, что $E_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$. Положим $C_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, а через C_2 и C_3 обозначим объединение промежутков, полученных из промежутков I_i гомотетией с центром в центре I_i и коэффициентом 2 и 3 соответственно. Ясно, что E_ε лежит строго внутри C_2 и что расстояние d между границами множеств C_2 и C_3 положительно.

Отметим, что сумма объемов любой конечной системы промежутков, которые лежат в C_3 и попарно не имеют общих внутренних точек, не больше чем $3^n\varepsilon$, где n — размерность пространства $\mathbb{R}^n$. Это следует из определения множества C_3 и свойств меры промежутка (лемма 1).

Отметим также, что любое подмножество промежутка I, диаметр которого меньше d, либо содержится в множестве C_3, либо лежит в компакте $K = I \setminus (C_2 \setminus \partial C_2)$, где ∂C_2 — граница C_2 (и, следовательно, $C_2 \setminus \partial C_2$ — совокупность внутренних точек множества C_2).

По построению $E_\varepsilon \subset I \setminus K$, поэтому в любой точке $x \in K$ должно быть $\omega(f; x) < \varepsilon$. По лемме 4 найдется число $\delta > 0$ такое, что для любой пары точек $x_1, x_2 \in K$, удаленных друг от друга не больше чем на δ, имеет место неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < 2\varepsilon$.

Сделанные построения позволяют теперь следующим образом провести доказательство достаточности условий интегрируемости. Берем любые два разбиения P', P'' промежутка I с параметрами $\lambda(P')$, $\lambda(P'')$ меньшими, чем $\lambda = \min\{d, \delta\}$. Пусть P — разбиение, полученное пересечением промежутков разбиений P', P'', т. е. в естественных обозначениях $P = \{I_{ij} = I_i' \cap I_j''\}$. Сравним интегральные суммы $\sigma(f, P, \xi)$ и $\sigma(f, P', \xi')$. Учитывая, что $|I_i'| = \sum\limits_{j} |I_{ij}|$,

можно записать:

$$|\sigma(f,P',\xi')-\sigma(f,P,\xi)| = \Big|\sum_{ij}(f(\xi_i')-f(\xi_{ij}))|I_{ij}|\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum\nolimits_1 |f(\xi_i')-f(\xi_{ij})|\,|I_{ij}| + \sum\nolimits_2 |f(\xi_i')-f(\xi_{ij})|\,|I_{ij}|.$$

Здесь в первую сумму $\sum_1$ вошли те промежутки I_{ij} разбиения P, которые лежат в промежутках I_i' разбиения P', содержащихся в множестве C_3, а остальные промежутки разбиения P отнесены к сумме $\sum_2$, т. е. все они обязательно содержатся в K (ведь $\lambda(P) < d$).

Поскольку $|f| \leqslant M$ на I, заменяя в первой сумме $|f(\xi_i')-f(\xi_{ij})|$ величиной $2M$, заключаем, что первая сумма не превосходит $2M\cdot 3^n\varepsilon$.

Учитывая, что во второй сумме $\xi_i', \xi_{ij} \in I_i' \subset K$, а $\lambda(P') < \delta$, заключаем, что $|f(\xi_i')-f(\xi_{ij})| < 2\varepsilon$, и, следовательно, вторая сумма не превосходит $2\varepsilon|I|$.

Таким образом, $|\sigma(f,P',\xi')-\sigma(f,P,\xi)| < (2M\cdot 3^n + 2|I|)\varepsilon$, откуда (ввиду равноправности P' и P''), используя неравенство треугольника, получаем, что

$$|\sigma(f,P',\xi')-\sigma(f,P'',\xi'')| < 4(3^nM+|I|)\varepsilon$$

для любых разбиений P', P'' с достаточно малыми параметрами. В силу критерия Коши теперь заключаем, что $f \in \mathcal{R}(I)$. ►

Замечание 2. Поскольку критерий Коши существования предела функций имеет силу в любом полном метрическом пространстве, то критерий Лебега в его достаточной (но не в необходимой) части, как видно из доказательства, справедлив для функций со значениями в любом полном линейном нормированном пространстве.

3. Критерий Дарбу. Рассмотрим еще один полезный критерий интегрируемости функции по Риману, применимый уже только к вещественнозначным функциям.

а. Нижние и верхние интегральные суммы. Пусть f — вещественнозначная функция на промежутке I, а $P = \{I_i\}$ — разбиение промежутка I. Положим

$$m_i = \inf_{x\in I_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in I_i} f(x).$$

Определение 10. Величины

$$s(f,P) = \sum_i m_i|I_i|, \quad S(f,P) = \sum_i M_i|I_i|$$

называются соответственно *нижней и верхней интегральной суммой* (Дарбу) *функции f на промежутке I, отвечающей разбиению P этого промежутка*.

Лемма 5. *Между интегральными суммами функции $f\colon I \to \mathbb{R}$ имеют место следующие соотношения:*

а) $s(f,P) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f,P,\xi) \leqslant \sigma(f,P,\xi) \leqslant \sup\limits_{\xi} \sigma(f,P,\xi) = S(f,P)$;

b) *если разбиение P' промежутка I получается измельчением промежутков разбиения P, то* $s(f,P) \leqslant s(f,P') \leqslant S(f,P') \leqslant S(f,P)$;

c) *для любой пары P_1, P_2 разбиений промежутка I справедливо неравенство* $s(f,P_1) \leqslant S(f,P_2)$.

◄ Соотношения a) и b) непосредственно следуют из определений 6 и 10 с учетом, разумеется, определений верхней и нижней граней числового множества.

Для доказательства соотношения c) достаточно рассмотреть вспомогательное разбиение P, получающееся пересечением промежутков разбиений P_1 и P_2. Разбиение P можно рассматривать как измельчение каждого из разбиений P_1, P_2, поэтому из соотношений b) следует, что

$$s(f,P_1) \leqslant s(f,P) \leqslant S(f,P) \leqslant S(f,P_2). \ ►$$

b. Нижний и верхний интегралы

Определение 11. *Нижним и верхним интегралом* (Дарбу) *от функции* $f: I \to \mathbb{R}$ *на промежутке* I называются соответственно величины

$$\underline{\mathcal{J}} = \sup_P s(f,P), \quad \overline{\mathcal{J}} = \inf_P S(f,P),$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всевозможным разбиениям P промежутка I.

Из этого определения и указанного в лемме 3 свойства сумм Дарбу следует, что для любого разбиения P промежутка имеют место неравенства

$$s(f,P) \leqslant \underline{\mathcal{J}} \leqslant \overline{\mathcal{J}} \leqslant S(f,P).$$

Теорема 2 (Дарбу). *Для любой ограниченной функции $f: I \to \mathbb{R}$ имеют место утверждения*

$$\Big(\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P)\Big) \wedge \Big(\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) = \underline{\mathcal{J}}\Big);$$
$$\Big(\exists \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P)\Big) \wedge \Big(\lim_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) = \overline{\mathcal{J}}\Big).$$

◄ Если сопоставить эти утверждения с определением 11, то становится ясно, что в сущности надо лишь доказать существование указанных пределов. Проверим это для нижних интегральных сумм.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и такое разбиение P_ε промежутка I, для которого $s(f,P_\varepsilon) > \underline{\mathcal{J}} - \varepsilon$. Пусть Γ_ε — совокупность точек промежутка I, лежащих на границе промежутков разбиения P_ε. Как следует из примера 2, Γ_ε есть множество меры нуль. Ввиду простоты структуры множества Γ_ε очевидно даже, что найдется число λ_ε такое, что для любого разбиения P, для которого $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$, сумма объемов тех его промежутков, которые имеют общие точки с Γ_ε, меньше чем ε.

Взяв теперь любое разбиение P с параметром $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$, образуем вспомогательное разбиение P', получаемое пересечением промежутков разбиений

P и P_ε. В силу выбора разбиения P_ε и свойств сумм Дарбу (лемма 5), находим

$$\underline{\mathcal{J}} - \varepsilon < s(f, P_\varepsilon) < s(f, P') \leqslant \underline{\mathcal{J}}.$$

Теперь заметим, что в суммах $s(f, P')$ и $s(f, P)$ общими являются все слагаемые, которые отвечают промежуткам разбиения P, не задевающим Γ_ε. Поэтому, если $|f(x)| \leqslant M$ на I, то

$$|s(f, P') - s(f, P)| < 2M\varepsilon$$

и, с учетом предыдущих неравенств, таким образом находим, что при $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$ имеет место соотношение

$$\underline{\mathcal{J}} - s(f, P) < (2M + 1)\varepsilon.$$

Сопоставляя полученное соотношение с определением 11, заключаем, что предел $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f, P)$ действительно существует и равен $\underline{\mathcal{J}}$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для верхних сумм. ►

c. Критерий Дарбу интегрируемости вещественнозначной функции

Теорема 3 (критерий Дарбу). *Определенная на промежутке $I \subset \mathbb{R}^n$ вещественнозначная функция $f: I \to \mathbb{R}$ интегрируема на нем тогда и только тогда, когда она ограничена на I и ее нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают.*

Итак,

$$f \in \mathcal{R}(I) \iff (f \text{ ограничена на } I) \wedge (\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}).$$

◄ *Необходимость.* Если $f \in \mathcal{R}(I)$, то по утверждению 1 функция f ограничена на I. Из определения 7 интеграла, определения 11 величин $\underline{\mathcal{J}}$, $\overline{\mathcal{J}}$ и п. a) леммы 5 следует, что в этом случае также $\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}$.

Достаточность. Поскольку $s(f, P) \leqslant \sigma(f, P, \xi) \leqslant S(f, P)$, то при $\underline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}}$ крайние члены этих неравенств по теореме 2 стремятся к одному и тому же пределу, когда $\lambda(P) \to 0$. Значит, $\sigma(f, P, \xi)$ имеет и притом тот же предел при $\lambda(P) \to 0$. ►

Замечание 3. Из доказательства критерия Дарбу видно, что если функция интегрируема, то ее нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают между собой и равны значению интеграла от этой функции.

Задачи и упражнения

1. a) Покажите, что множество меры нуль не имеет внутренних точек.

b) Покажите, что если множество не имеет внутренних точек, то это вовсе не означает, что это множество меры нуль.

c) Постройте множество, имеющее меру нуль, замыкание которого совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$.

d) Говорят, что множество $E \subset I$ имеет объем нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной системой $I_1, \ldots, I_k$ промежутков так, что $\sum\limits_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$. Всякое ли ограниченное множество меры нуль имеет объем нуль?

e) Покажите, что если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является прямым произведением $\mathbb{R} \times e$ прямой $\mathbb{R}$ и множества $e \subset \mathbb{R}^{n-1}$ $(n-1)$-мерной меры нуль, то E есть множество n-мерной меры нуль.

2. a) Постройте аналог функции Дирихле в $\mathbb{R}^n$ и покажите, что если ограниченная функция $f: I \to \mathbb{R}$ равна нулю почти во всех точках промежутка I, то это еще не означает, что $f \in \mathcal{R}(I)$.

b) Покажите, что если $f \in \mathcal{R}(I)$ и $f(x) = 0$ почти во всех точках промежутка I, то $\int\limits_I f(x)\,dx = 0$.

3. Между прежним определением интеграла Римана на отрезке $I \subset \mathbb{R}$ и определением 7 интеграла на промежутке произвольной размерности имеется маленькое различие, связанное с определением разбиения и меры промежутка разбиения. Уясните для себя этот нюанс и проверьте, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_I f(x)\,dx, \quad \text{если } a < b$$

и

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_I f(x)\,dx, \quad \text{если } a > b,$$

где I — промежуток на прямой $\mathbb{R}$ с концами a, b.

4. a) Докажите, что определенная на промежутке $I \subset \mathbb{R}^n$ вещественнозначная функция $f: I \to \mathbb{R}$ интегрируема на нем тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение P промежутка I, что $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

b) Используя результат a) и считая, что рассматривается вещественнозначная функция $f: I \to \mathbb{R}$, можно несколько упростить доказательство критерия Лебега в разделе, относящемся к достаточности. Постарайтесь самостоятельно сделать эти упрощения.

§ 2. Интеграл по множеству

1. Допустимые множества. В дальнейшем нам предстоит интегрировать функции не только по промежутку, но и по другим не слишком сложным множествам в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *допустимым,* если оно ограничено в $\mathbb{R}^n$ и его граница ∂E есть множество меры нуль (в смысле Лебега).

Пример 1. Куб, тетраэдр, шар в $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^n$) являются допустимыми множествами.

Пример 2. Пусть определенные на $(n-1)$-мерном промежутке $I \in \mathbb{R}^n$ функции $\varphi_i: I \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, таковы, что $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ в любой точке $x \in I$. Если эти функции непрерывны, то на основании примера 2 из § 1 можно утверждать, что область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная графиками этих функций и боковой цилиндрической поверхностью, лежащей над границей ∂I промежутка I, является допустимым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что граница ∂E множества $E \subset \mathbb{R}^n$ состоит из точек, в любой окрестности которых имеются как точки множества E, так и точки дополнения E в $\mathbb{R}^n$. Значит, справедлива

Лемма 1. *Для любых множеств* $E, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$:

a) ∂E — *замкнутое в* $\mathbb{R}^n$ *множество*;

b) $\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;

c) $\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;

d) $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$.

Отсюда и из определения 1 вытекает, что имеет место

Лемма 2. *Объединение или пересечение конечного числа допустимых множеств является допустимым множеством; разность допустимых множеств — тоже допустимое множество.*

Замечание 1. Для бесконечного количества допустимых множеств лемма 2, вообще говоря, неверна, как, впрочем, и соответствующие утверждения b) и c) леммы 1.

Замечание 2. Граница допустимого множества — не только замкнутое, но и ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, т. е. это — компакт в $\mathbb{R}^n$. Значит, по лемме 3 из § 1 ее можно покрыть даже конечной системой промежутков со сколь угодно близкой к нулю суммой объемов.

Рассмотрим теперь характеристическую функцию

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin E \end{cases}$$

допустимого множества E. Как и для любого множества E, функция $\chi_E(x)$ имеет разрывы в граничных и только в граничных точках множества E. Значит, если E — допустимое множество, то функция $\chi_E(x)$ непрерывна почти во всех точках пространства $\mathbb{R}^n$.

2. Интеграл по множеству. Пусть f — определенная на множестве E функция. Условимся, как и прежде, символом $f\chi_E(x)$ обозначать функцию, равную $f(x)$ при $x \in E$ и равную нулю вне E (хотя f вне E не определена).

Определение 2. *Интеграл от функции f по множеству E* определяется соотношением

$$\int\limits_E f(x)\,dx := \int\limits_{I \supset E} f\chi_E(x)\,dx,$$

где I — произвольный промежуток, содержащий множество E.

Если стоящий в правой части равенства интеграл не существует, то говорят, что f *неинтегрируема* (по Риману) *на множестве* E. В противном случае f называется *интегрируемой* (по Риману) *на множестве* E.

Совокупность интегрируемых по Риману на множестве E функций будем обозначать символом $\mathcal{R}(E)$.

Определение 2, разумеется, требует пояснения, которое доставляет

Лемма 3. *Если I_1 и I_2 — два промежутка, содержащие порознь множество E, то интегралы*

$$\int_{I_1} f\chi_E(x)\,dx, \quad \int_{I_2} f\chi_E(x)\,dx$$

существуют или не существуют одновременно, причем в первом случае их значения совпадают.

◄ Рассмотрим промежуток $I = I_1 \cap I_2$. По условию $I \supset E$. Точки разрыва функции $f\chi_E$ либо совпадают с точками разрыва функции f на E, либо проистекают от разрывов функции χ_E и лежат на ∂E. Во всяком случае, все эти точки лежат в $I = I_1 \cap I_2$. По критерию Лебега (теорема 1, § 1) отсюда следует, что интегралы от $f\chi_E$ по промежуткам I, I_1, I_2 существуют или не существуют одновременно. Если они существуют, то мы вправе выбирать разбиения I, I_1, I_2 по своему усмотрению. Будем поэтому брать только те разбиения промежутков I_1, I_2, которые получаются продолжением разбиений промежутка $I = I_1 \cap I_2$. Поскольку вне I рассматриваемая функция равна нулю, интегральные суммы, отвечающие описанным разбиениям I_1 и I_2, сведутся к интегральной сумме соответствующего разбиения промежутка I. После предельного перехода отсюда получается, что интегралы по I_1 и I_2 равны интегралу от рассматриваемой функции по промежутку I. ►

Из критерия Лебега (теорема 1, § 1) существования интеграла на промежутке и определения 2 вытекает

Теорема 1. *Функция $f: E \to \mathbb{R}$ интегрируема на допустимом множестве тогда и только тогда, когда она ограничена и непрерывна почти во всех точках множества E.*

◄ Функция $f\chi_E$ по сравнению с функцией f может иметь дополнительно точки разрыва лишь на границе ∂E множества E, которая по условию является множеством меры нуль. ►

3. Мера (объем) допустимого множества

Определение 3. *Мерой* (Жордана) или *объемом* ограниченного *множества $E \subset \mathbb{R}^n$* назовем величину

$$\mu(E) := \int_E 1 \cdot dx,$$

если указанный интеграл (Римана) существует.

Поскольку

$$\int_E 1 \cdot dx = \int_{I \supset E} \chi_E(x)\,dx,$$

а множество точек разрыва функции χ_E совпадает с ∂E, то по критерию Лебега получаем, что так введенная мера определена только для допустимых множеств.

Таким образом, допустимые множества и только они являются измеримыми в смысле определения 3.

Выясним теперь геометрический смысл величины $\mu(E)$. Если E — допустимое множество, то

$$\mu(E) = \int\limits_{I\supset E} \chi_E(x)\,dx = \underline{\int\limits_{I\supset E}} \chi_E(x)\,dx = \overline{\int\limits_{I\supset E}} \chi_E(x)\,dx,$$

где последние два интеграла суть нижний и верхний интегралы Дарбу соответственно. В силу критерия Дарбу существования интеграла (теорема 3 § 1) мера $\mu(E)$ множества определена тогда и только тогда, когда указанные нижний и верхний интегралы совпадают. По теореме Дарбу (теорема 2 § 1) они являются пределами нижних и верхних интегральных сумм функции χ_E, отвечающих разбиениям P промежутка I. Но в силу определения функции χ_E нижняя интегральная сумма равна сумме объемов промежутков разбиения P, лежащих в E (это объем вписанного в E многогранника), а верхняя сумма равна сумме объемов тех промежутков разбиения P, которые имеют общие точки с множеством E (объем описанного многогранника). Значит, $\mu(E)$ есть общий предел при $\lambda(P)\to 0$ объемов вписанных в E и описанных около E многогранников, что совпадает с принятым представлением об объеме простых тел $E\subset\mathbb{R}^n$.

При $n=1$ объем принято называть *длиной*, а при $n=2$ — *площадью*.

Замечание 3. Поясним теперь, почему вводимая определением 3 мера $\mu(E)$ множества называется иногда мерой Жордана.

Определение 4. Множество $E\subset\mathbb{R}^n$ называется *множеством меры нуль в смысле Жордана* или *множеством объема нуль*, если для любого $\varepsilon>0$ его можно покрыть такой конечной системой промежутков $I_1, \dots, I_k$, что $\sum\limits_{i=1}^{k}|I_i|<\varepsilon$.

По сравнению с мерой нуль в смысле Лебега здесь появилось требование конечности покрытия, которое сужает лебеговский класс множеств меры нуль. Например, множество рациональных точек является множеством меры нуль в смысле Лебега, но не в смысле Жордана.

Для того, чтобы верхняя грань объемов вписанных в ограниченное множество E многогранников совпадала с нижней гранью объемов описанных около E многогранников (и служила мерой $\mu(E)$ или объемом E), очевидно, необходимо и достаточно, чтобы граница ∂E множества E имела меру нуль в смысле Жордана. Именно поэтому принимают

Определение 5. Множество E называется *измеримым в смысле Жордана*, если оно ограничено и его граница имеет меру нуль в смысле Жордана.

Как видно из замечания 2, класс множеств, измеримых по Жордану, это в точности тот класс допустимых множеств, который был введен определением 1. Вот почему определенная выше мера $\mu(E)$ может быть названа (и называется) *мерой Жордана* множеств E (измеримых по Жордану).

Задачи и упражнения

1. a) Покажите, что если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ таково, что $\mu(E) = 0$, то и для замыкания $\overline{E}$ этого множества справедливо равенство $\mu(\overline{E}) = 0$.

b) Приведите пример ограниченного множества E меры нуль в смысле Лебега, замыкание $\overline{E}$ которого уже не является множеством меры нуль в смысле Лебега.

c) Выясните, надо ли понимать утверждение b) леммы 3 из § 1 как то, что для компакта понятия множества меры нуль в смысле Жордана и в смысле Лебега совпадают.

d) Докажите, что если проекция ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ на гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1}$ имеет $(n-1)$-мерный объем нуль, то само множество E имеет n-мерный объем нуль.

e) Покажите, что измеримое по Жордану множество без внутренних точек имеет нулевой объем.

2. a) Может ли существовать введенный определением 2 интеграл от некоторой функции f по ограниченному множеству E, если E не является допустимым множеством (измеримым в смысле Жордана)?

b) Интегрируема ли постоянная функция $f : E \to \mathbb{R}$ на ограниченном, но неизмеримом по Жордану множестве E?

c) Верно ли, что если некоторая функция f интегрируема на множестве E, то ограничение $f|_A$, этой функции на любое подмножество $A \subset E$ множества E является интегрируемой на A функцией?

d) Укажите необходимые и достаточные условия на функцию $f : E \to \mathbb{R}$, определенную на ограниченном (но не обязательно измеримом по Жордану) множестве E, при которых интеграл Римана от нее по множеству E существует.

3. a) Пусть E-множество меры нуль в смысле Лебега, а $f : E \to \mathbb{R}$ — непрерывная и ограниченная функция на E. Всегда ли f интегрируема на E?

b) Ответьте на вопрос a), считая E множеством меры нуль в смысле Жордана.

c) Чему равен интеграл от указанной в a) функции f, если он существует?

4. *Неравенство Брунна—Минковского.*

Непустым множествам $A, B \subset \mathbb{R}^n$ сопоставим их (векторную) сумму (в смысле Минковского) $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Пусть $V(E)$ — обозначение для объема множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

a) Проверьте, что если A и B стандартные n-мерные промежутки (параллелепипеды), то $V^{1/n}(A + B) \geqslant V^{1/n}(A) + V^{1/n}(B)$.

b) Докажите теперь предыдущее неравенство (оно называется *неравенством Брунна—Минковского*) для произвольных измеримых компактов A и B.

c) Покажите, что неравенство Брунна—Минковского переходит в равенство лишь в следующих случаях: когда $V(A + B) = 0$; когда A и B одноточечны; когда A и B выпуклые гомотетичные тела.

§ 3. Общие свойства интеграла

1. Интеграл как линейный функционал

Утверждение 1. a) *Множество $\mathcal{R}(E)$ функций, интегрируемых по Риману на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, является линейным пространством относительно стандартных операций сложения функций и умножения функции на число.*

b) *Интеграл является линейным функционалом*

$$\int\limits_E : \mathcal{R}(E) \to \mathbb{R} \ \ \textit{на пространстве} \ \ \mathcal{R}(E).$$

◄ Если учесть, что объединение множеств меры нуль также является множеством меры нуль, то утверждение а) вытекает непосредственно из определения интеграла и критерия Лебега существования интеграла от функции на промежутке.

Учитывая линейность интегральных сумм, предельным переходом получаем линейность интеграла. ►

Замечание 1. Если вспомнить, что один и тот же предел интегральных сумм должен существовать при $\lambda(P) \to 0$ независимо от выбора отмеченных точек ξ, то можно заключить, что $(f \in \mathcal{R}(E)) \wedge (f(x) = 0$ почти всюду на $E) \Rightarrow$ $\Rightarrow \Big(\int\limits_E f(x)\,dx = 0\Big)$.

Таким образом, если две интегрируемые функции совпадают почти во всех точках множества E, то их интегралы по E тоже совпадают. Значит, если профакторизовать линейное пространство $\mathcal{R}(E)$, относя в один класс эквивалентности функции, совпадающие почти во всех точках множества E, то получится линейное пространство $\widetilde{\mathcal{R}}(E)$, на котором интеграл тоже будет линейным функционалом.

2. Аддитивность интеграла. Хотя мы всегда будем иметь дело с допустимыми множествами $E \subset \mathbb{R}^n$, в п. 1 можно было этого и не предполагать (что мы и сделали). Теперь же речь будет идти только о допустимых множествах.

Утверждение 2. *Пусть E_1, E_2 — допустимые множества в $\mathbb{R}^n$, а f — функция, определенная на $E_1 \cup E_2$.*

а) *Имеют место соотношения*

$$\Big(\exists \int\limits_{E_1 \cup E_2} f(x)\,dx\Big) \Leftrightarrow \Big(\exists \int\limits_{E_1} f(x)\,dx\Big) \wedge \Big(\exists \int\limits_{E_2} f(x)\,dx\Big) \Rightarrow \exists \int\limits_{E_1 \cap E_2} f(x)\,dx.$$

b) *Если еще известно, что $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, то при условии существования интегралов имеет место равенство*

$$\int\limits_{E_1 \cup E_2} f(x)\,dx = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx + \int\limits_{E_2} f(x)\,dx.$$

◄ Утверждение а) следует из критерия Лебега существования интеграла Римана по допустимому множеству (теорема 1, § 2). При этом надо только вспомнить, что объединение и пересечение допустимых множеств также являются допустимыми множествами (лемма 2, § 2).

Для доказательства утверждения b) заметим сначала, что

$$\chi_{E_1 \cup E_2}(x) = \chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x) - \chi_{E_1 \cap E_2}(x).$$

Значит,

$$\int\limits_{E_1\cup E_2} f(x)\,dx = \int\limits_{I\supset E_1\cup E_2} f\chi_{E_1\cup E_2}(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_I f\chi_{E_1}(x)\,dx + \int\limits_I f\chi_{E_2}(x)\,dx - \int\limits_I f\chi_{E_1\cap E_2}(x)\,dx = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx + \int\limits_{E_2} f(x)\,dx.$$

Дело в том, что интеграл

$$\int\limits_I f\chi_{E_1\cap E_2}(x)\,dx = \int\limits_{E_1\cap E_2} f(x)\,dx,$$

как нам известно из a), существует, а поскольку $\mu(E_1\cap E_2)=0$, то он равен нулю (см. замечание 1). ►

3. Оценки интеграла

a. Общая оценка. Начнем с одной общей оценки интеграла, справедливой и для интегралов от функции со значениями в любом полном линейном нормированном пространстве.

Утверждение 3. *Если $f\in\mathcal{R}(E)$, то $|f|\in\mathcal{R}(E)$ и имеет место неравенство*

$$\left|\int\limits_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_E |f|(x)\,dx.$$

◄ То, что $|f|\in\mathcal{R}(E)$, вытекает из определения интеграла по множеству и критерия Лебега интегрируемости функции на промежутке.

Указанное неравенство получается теперь предельным переходом из соответствующего неравенства для интегральных сумм. ►

b. Интеграл от неотрицательной функции. Следующие утверждения относятся уже только к вещественнозначным функциям.

Утверждение 4. *Для функции $f\colon E\to\mathbb{R}$ справедливо следующее предложение*:

$$(f\in\mathcal{R}(E))\wedge(\forall x\in E\,(f(x)\geqslant 0)) \Rightarrow \int\limits_E f(x)\,dx\geqslant 0.$$

◄ Действительно, ведь если $f(x)\geqslant 0$ на E, то $f\chi_E(x)\geqslant 0$ в $\mathbb{R}^n$. Далее, по определению

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_{I\supset E} f\chi_E(x)\,dx.$$

Последний интеграл по условию существует. Но он является пределом неотрицательных интегральных сумм, значит, он неотрицателен. ►

Из доказанного утверждения 4 последовательно получаем

Следствие 1.

$$(f,g\in\mathcal{R}(E))\wedge(f\leqslant g \text{ на } E) \Rightarrow \left(\int\limits_E f(x)\,dx\leqslant\int\limits_E g(x)\,dx\right).$$

Следствие 2. *Если* $f\in\mathcal{R}(E)$ *и в любой точке допустимого множества* E *выполнены неравенства* $m\leqslant f(x)\leqslant M$*, то*

$$m\mu(E)\leqslant\int\limits_E f(x)\,dx\leqslant M\mu(E).$$

Следствие 3. *Если* $f\in\mathcal{R}(E)$*,* $m=\inf\limits_{x\in E}f(x)$*,* $M=\sup\limits_{x\in E}f(x)$*, то найдется такое число* $\theta\in[m,M]$*, что*

$$\int\limits_E f(x)\,dx=\theta\mu(E).$$

Следствие 4. *Если* E *— связное допустимое множество, а функция* $f\in\in\mathcal{R}(E)$ *непрерывна, то найдется такая точка* $\xi\in E$*, что*

$$\int\limits_E f(x)\,dx=f(\xi)\mu(E).$$

Следствие 5. *Если в дополнение к условиям следствия* 2 *имеется функция* $g\in\mathcal{R}(E)$*, неотрицательная на* E*, то*

$$m\int\limits_E g(x)\,dx\leqslant\int\limits_E fg(x)\,dx\leqslant M\int\limits_E g(x)\,dx.$$

Последнее утверждение является обобщающим и обычно называется, как и в случае одномерного интеграла, *теоремой о среднем для интеграла*.

◄ Оно вытекает из неравенств $mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$ с учетом линейности интеграла и следствия 1. Его можно доказать и непосредственно, если перейти от интегралов по E к соответствующим интегралам по промежутку, проверить неравенства для интегральных сумм, а затем перейти к пределу. Поскольку все эти рассуждения уже подробно проводились в одномерном случае, мы на деталях не останавливаемся. Отметим лишь, что интегрируемость произведения $f\cdot g$ функций f и g, очевидно, вытекает из критерия Лебега. ►

Продемонстрируем теперь полученные соотношения в работе, проверив с их помощью, что справедлива следующая полезная

Лемма. a) *Если интеграл от неотрицательной на промежутке* I *функции* $f\colon I\to\mathbb{R}$ *равен нулю, то* $f(x)=0$ *почти во всех точках промежутка* I.

b) *Утверждение* a) *остается в силе, если промежуток* I *в нем заменить любым допустимым (т. е. измеримым по Жордану) множеством* E.

◄ По критерию Лебега функция $f\in\mathcal{R}(E)$ непрерывна почти во всех точках промежутка I, поэтому доказательство утверждения a) будет закончено, если мы покажем, что $f(a)=0$ в любой точке $a\in I$, в которой функция f непрерывна.

Предположим, что $f(a)>0$. Тогда $f(x)\geqslant c>0$ в некоторой окрестности $U_I(a)$ точки a (окрестность $U_I(a)$ можно считать промежутком). Значит, по

доказанным свойствам интеграла

$$\int\limits_I f(x)\,dx = \int\limits_{U_I(a)} f(x)\,dx + \int\limits_{I\setminus U_I(a)} f(x)\,dx \geqslant \int\limits_{U_I(a)} f(x)\,dx \geqslant c\mu(U_I(a)) > 0.$$

Полученное противоречие проверяет справедливость утверждения a). Если применить это утверждение к функции $f\chi_E$ и учесть, что $\mu(\partial E)=0$, то получим утверждение b). ►

Замечание 2. Из доказанной леммы следует, что если E — измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$, а $\widetilde{\mathcal{R}}(E)$ — рассмотренное в замечании 1 линейное пространство классов эквивалентных функций, интегрируемых на E и различающихся лишь на множествах меры нуль в смысле Лебега, то величина $\|f\| = \int\limits_E |f|(x)\,dx$ является нормой на $\widetilde{\mathcal{R}}(E)$.

◄ Действительно, ведь из равенства $\int\limits_E |f|(x)\,dx = 0$, теперь можно заключить, что f лежит в том же классе эквивалентности, что и функция, тождественно равная нулю. ►

Задачи и упражнения

1. Пусть E — измеримое по Жордану множество ненулевой меры, а $f\colon E\to\mathbb{R}$ — непрерывная, неотрицательная интегрируемая функция на E и $M=\sup\limits_{x\in E} f(x)$. Покажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\Bigl(\int\limits_E f^n(x)\,dx\Bigr)^{1/n} = M.$$

2. Докажите, что если $f, g\in\mathcal{R}(E)$, то справедливо

a) *неравенство Гёльдера*

$$\Bigl|\int\limits_E (f\cdot g)(x)\,dx\Bigr| \leqslant \Bigl(\int\limits_E |f|^p(x)\,dx\Bigr)^{1/p}\Bigl(\int\limits_E |g|^q(x)\,dx\Bigr)^{1/q},$$

где $p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$ и $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$;

b) *неравенство Минковского*

$$\Bigl(\int\limits_E |f+g|^p(x)\,dx\Bigr)^{1/p} \leqslant \Bigl(\int\limits_E |f|^p(x)\,dx\Bigr)^{1/p} + \Bigl(\int\limits_E |g|^p(x)\,dx\Bigr)^{1/p}, \quad \text{если } p\geqslant 1.$$

Покажите, что

c) предыдущее неравенство меняется на противоположное, если $0<p<1$;

d) знак равенства в неравенстве Минковского имеет место тогда и только тогда, когда существует число $\lambda\geqslant 0$ такое, что с точностью до множества меры нуль на E выполнено одно из двух соотношений $f=\lambda g$ или $g=\lambda f$;

e) величина $\|f\|_p = \Bigl(\dfrac{1}{\mu(E)}\int\limits_E |f|^p(x)\,dx\Bigr)^{1/p}$, где $\mu(E)>0$, монотонна относительно $p\in\mathbb{R}$ и при $p\geqslant 1$ является нормой в пространстве $\widetilde{\mathcal{R}}(E)$.

Выясните, при каких условиях в неравенстве Гёльдера имеет место знак равенства.

3. Пусть E — измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$, причем $\mu(E) > 0$. Проверьте, что если $\varphi \in C(E, \mathbb{R})$, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, то

$$f\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E \varphi(x)\,dx\right) \leqslant \frac{1}{\mu(E)} \int_E (f \circ \varphi)(x)\,dx.$$

4. a) Покажите, что если E — измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$, а интегрируемая на нем функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в его внутренней точке $a \in E$, то

$$\lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\mu(U_E^\delta(a))} \int_{U_E^\delta(a)} f(x)\,dx = f(a),$$

где, как обычно, $U_E^\delta(a)$ обозначает δ-окрестность точки в множестве E.

b) Проверьте, что предыдущее соотношение остается в силе, если условие «a — внутренняя точка E» заменить условием $\mu(U_E^\delta(a)) > 0$ для любого $\delta > 0$.

§ 4. Сведение кратного интеграла к повторному

1. Теорема Фубини[1]**.** До сих пор мы говорили об определении интеграла, условиях его существования и его общих свойствах. Здесь будет доказана теорема, которая наряду с теоремой о замене переменных является инструментом для вычисления кратных интегралов.

Теорема.[2] *Пусть $X \times Y$ — промежуток в $\mathbb{R}^{m+n}$, являющийся прямым произведением промежутков $X \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$. Если функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ интегрируема на $X \times Y$, то интегралы*

$$\boxed{\int_{X \times Y} f(x, y)\,dx\,dy, \quad \int_X dx \int_Y f(x, y)\,dy, \quad \int_Y dy \int_X f(x, y)\,dx}$$

существуют одновременно и равны между собой.

Прежде чем браться за доказательство теоремы, расшифруем смысл входящих в ее формулировку символов. Интеграл $\int\limits_{X \times Y} f(x, y)\,dx\,dy$ — это записанный в переменных $x \in X$, $y \in Y$ знакомый нам интеграл от функции f по промежутку $X \times Y$.

Символ $\int\limits_X dx \int\limits_Y f(x, y)\,dy$ следует понимать следующим образом: при фиксированном значении $x \in X$ вычисляется интеграл $F(x) = \int\limits_Y f(x, y)\,dy$

[1] Г. Фубини (1870—1943) — итальянский математик. Его основные труды относятся к теории функций и геометрии.

[2] Эта теорема была доказана задолго до появления известной в теории функций теоремы Фубини, частным случаем которой она является. Однако теоремы, позволяющие сводить вычисление кратных интегралов к повторному интегрированию в меньших размерностях, принято называть теоремами типа теоремы Фубини или, для краткости, теоремами Фубини.

по промежутку Y, а затем полученная функция $F: X \to \mathbb{R}$ интегрируется на промежутке X. При этом, если для некоторого $x \in X$ интеграл $\int\limits_Y f(x, y)\,dy$ не существует, то $F(x)$ полагается равным любому числу между $\underline{\mathcal{J}}(x) = \underline{\int\limits_Y} f(x, y)\,dy$ и $\overline{\mathcal{J}}(x) = \overline{\int\limits_Y} f(x, y)\,dy$, не исключая и самих значений $\underline{\mathcal{J}}(x)$, $\overline{\mathcal{J}}(x)$ нижнего и верхнего интегралов. Будет показано, что тогда $F \in \mathcal{R}(X)$.

Аналогичный смысл имеет символ $\int\limits_Y dy \int\limits_X f(x, y)\,dx$.

В процессе доказательства теоремы выяснится, что совокупность тех значений $x \in X$, для которых $\underline{\mathcal{J}}(x) \neq \overline{\mathcal{J}}(x)$, является множеством m-мерной меры нуль в X.

Аналогично и совокупность тех $y \in Y$, при которых интеграл $\int\limits_X f(x, y)\,dx$ может не существовать, окажется множеством n-мерной меры нуль в Y.

Заметим, наконец, что, в отличие от интеграла по $(m+n)$-мерному промежутку $X \times Y$, который мы в свое время условились называть *кратным интегралом*, последовательно вычисляемые интегралы от функции $f(x, y)$ по Y, затем по X, или по X, а затем по Y, принято называть *повторными интегралами* от этой функции.

Если X и Y — отрезки прямой, то сформулированная теорема в принципе сводит вычисление двойного интеграла по промежутку $X \times Y$ к последовательному вычислению двух одномерных интегралов. Ясно, что, применяя эту теорему несколько раз, можно свести вычисление интеграла по k-мерному промежутку к последовательному вычислению k одномерных интегралов.

Сущность сформулированной теоремы очень проста и состоит в следующем. Рассмотрим интегральную сумму $\sum\limits_{i,j} f(x_i, y_j)|X_i| \cdot |Y_j|$, отвечающую разбиению промежутка $X \times Y$ на промежутки $X_i \times Y_j$. Поскольку интеграл от f по промежутку $X \times Y$ существует, то отмеченные точки $\xi_{ij} \in X_i \times Y_j$ можно выбирать по своему усмотрению, и мы их выбрали как «прямое произведение» выборов $x_i \in X_i \subset X$ и $y_i \in Y \subset Y$. Тогда можно записать, что

$$\sum_{i,j} f(x_i, y_j)|X_i| \cdot |Y_j| = \sum_i |X_i| \sum_j f(x_i, y_j)|Y_j| = \sum_j |Y_j| \sum_i f(x_i, y_j)|X_j|,$$

а это и есть допредельный вид нашей теоремы.

Дадим теперь ее формальное доказательство.

◄ Любое разбиение P промежутка $X \times Y$ индуцируется соответствующими разбиениями P_X, P_Y промежутков X и Y. При этом каждый промежуток разбиения P есть прямое произведение $X_i \times Y_j$ некоторых промежутков X_i, Y_j разбиений P_X, P_Y соответственно. По свойствам объема промежутка $|X_i \times Y_j| = |X_i| \cdot |Y_j|$, где каждый из объемов вычисляется в том пространстве $\mathbb{R}^{m+n}$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$, которому принадлежит рассматриваемый промежуток.

Используя свойства нижней и верхней граней, а также определения нижних и верхних интегральных сумм и интегралов, проведем теперь следующие оценки:

$$\begin{aligned}
s(f,P) &= \sum_{i,j} \inf_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)|X_i\times Y_j| \leqslant \\
&\leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i}\Big(\sum_j \inf_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j|\Big)|X_i| \leqslant \\
&\leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i}\Big(\underline{\int_Y} f(x,y)\,dy\Big)|X_i| \leqslant \sum_i \inf_{x\in X_i} F(x)|X_i| \leqslant \\
&\leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i} F(x)|X_i| \leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i}\Big(\overline{\int_Y} f(x,y)\,dy\Big)|X_i| \leqslant \\
&\leqslant \sum_i \sup_{x\in X_i}\Big(\sum_j \sup_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j|\Big)|X_i| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i,j} \sup_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)|X_i\times Y_j| = S(f,P).
\end{aligned}$$

Поскольку $f\in\mathcal{R}(X\times Y)$, то при $\lambda(P)\to 0$ оба крайних члена этих неравенств стремятся к значению интеграла от функции f по промежутку $X\times Y$. Это обстоятельство позволяет из написанных оценок заключить, что $F\in\in\mathcal{R}(X)$ и что имеет место равенство

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_X F(x)\,dx.$$

Мы провели доказательство в случае повторного интегрирования по Y, а затем по X. Ясно, что аналогичные рассуждения можно провести и в случае, когда сначала идет интегрирование по X, а затем по Y. ►

2. Некоторые следствия

Следствие 1. *Если $f\in\mathcal{R}(X\times Y)$, то при почти всех (в смысле Лебега) значениях $x\in X$ интеграл $\int_Y f(x,y)\,dy$ существует и при почти всех значениях $y\in Y$ существует интеграл $\int_X f(x,y)\,dx$.*

◄ По доказанной теореме

$$\int_X\Big(\overline{\int_Y} f(x,y)\,dy - \underline{\int_Y} f(x,y)\,dy\Big)dx = 0.$$

Но стоящая в скобках разность верхнего и нижнего интегралов неотрицательна. На основании леммы из § 3 можно заключить, что эта разность равна нулю почти во всех точках $x\in X$.

Тогда по критерию Дарбу (теорема 3 § 1) интеграл $\int\limits_Y f(x,y)\,dy$ существует почти при всех значениях $x \in X$.

Аналогично доказывается и вторая часть сделанного утверждения. ►

Следствие 2. *Если промежуток $I \subset \mathbb{R}^n$ является прямым произведением отрезков $I_i = [a^i, b^i]$, $i = 1, \ldots, n$, то*

$$\int\limits_I f(x)\,dx = \int\limits_{a^n}^{b^n} dx^n \int\limits_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} dx^{n-1} \ldots \int\limits_{a^1}^{b^1} f(x^1, x^2, \ldots, x^n)\,dx^1.$$

◄ Эта формула, очевидно, получается повторным применением доказанной теоремы. Все внутренние интегралы в правой части понимаются, как и в теореме. Например, всюду можно поставить знак верхнего или нижнего интеграла. ►

Пример 1. Пусть $f(x,y,z) = z\sin(x+y)$. Найдем интеграл от ограничения этой функции на промежуток $I \subset \mathbb{R}^3$, определяемый соотношениями $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $|y| \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

По следствию 2

$$\iiint\limits_I f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \int\limits_0^{\pi} z\sin(x+y)\,dx =$$
$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-z\cos(x+y)\Big|_{x=0}^{\pi}\right) dy = \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2z\cos y\,dy =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(2z\sin y\Big|_{y=-\pi/2}^{\pi/2}\right) dz = \int\limits_0^1 4z\,dz = 2.$$

Доказанную теорему можно использовать и для вычисления интегралов по достаточно общим множествам.

Следствие 3. *Пусть D — ограниченное множество в $\mathbb{R}^{n-1}$, а*

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid (x \in D) \wedge (\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x))\}.$$

Если $f \in \mathcal{R}(E)$, то

$$\int\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_D dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \tag{1}$$

◄ Пусть $E_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$, если $x \in D$, и пусть $E_x = \varnothing$ при $x \notin D$. Заметим, что $\chi_E(x,y) = \chi_D(x) \cdot \chi_{E_x}(y)$. Вспоминая определение

интеграла по множеству и используя теорему Фубини, получаем

$$\int_E f(x, y)\,dx\,dy = \int_{I\supset E} f\chi_E(x, y)\,dx\,dy =$$
$$= \int_{I_x\supset D} dx \int_{I_y\supset E_x} f\chi_E(x, y)\,dy = \int_{I_x}\Bigl(\int_{I_y} f(x, y)\chi_{E_x}(y)\,dy\Bigr)\chi_D(x)\,dx =$$
$$= \int_{I_x}\Biggl(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\Biggr)\chi_D(x)\,dx = \int_D\Biggl(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\Biggr)\,dx.$$

Внутренний интеграл здесь тоже может не существовать на некотором множестве точек $x\in D$ меры нуль в смысле Лебега, и тогда ему приписывается тот же смысл, что и в доказанной теореме Фубини. ►

Замечание. Если в условиях следствия 3 множество D измеримо по Жордану, а функции $\varphi_i\colon D\to\mathbb{R}$, $i=1, 2$, непрерывны и ограничены, то множество $E\subset\mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану.

◄ Граница ∂E множества E состоит из двух графиков непрерывных функций $\varphi_i\colon D\to\mathbb{R}$, $i=1, 2$ (являющихся в силу примера 2 § 1 множествами меры нуль), и части Z прямого произведения границы ∂D множества $D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ на достаточно большой одномерный отрезок длины l. По условию ∂D можно покрыть системой $(n-1)$-мерных промежутков, сумма $(n-1)$-мерных объемов которых будет меньше ε/l. Прямое произведение этих промежутков на выбранный отрезок (длины l) даст покрытие множества Z промежутками, сумма объемов которых меньше ε. ►

На основании этого замечания можно сказать, что на измеримом множестве E такой структуры (как и на любом измеримом множестве E) функция $f\colon E\to 1\in\mathbb{R}$ интегрируема. Опираясь на следствие 3 и на определение меры измеримого множества можно теперь заключить, что справедливо

Следствие 4. *Если в условиях следствия 3 множество D измеримо по Жордану, а функции $\varphi_i\colon D\to\mathbb{R}$, $i=1, 2$, непрерывны, то множество E измеримо и его объем можно вычислять по формуле*

$$\mu(E) = \int_D (\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\,dx. \tag{2}$$

Пример 2. Для круга $E=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$ по этой формуле получаем

$$\mu(E) = \int_{-r}^{r}\bigl(\sqrt{r^2-y^2}-(-\sqrt{r^2-y^2})\bigr)\,dy = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-y^2}\,dy =$$
$$= 4\int_0^r\sqrt{r^2-y^2}\,dy = 4\int_0^{\pi/2} r\cos\varphi\,d(r\sin\varphi) = 4r^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\,d\varphi = \pi r^2.$$

Следствие 5. *Пусть E — измеримое множество, лежащее в промежутке $I\subset\mathbb{R}^n$. Представим I в виде прямого произведения $I=I_x\times I_y$ $(n-1)$-мерного промежутка I_x и отрезка I_y. Тогда при почти всех значениях $y_0\in I_y$ сечение $E_{y_0}=\{(x, y)\in E \mid y=y_0\}$ множества E $(n-1)$-мерной гиперплоскостью $y=y_0$ является измеримым ее подмножеством, причем*

$$\mu(E)=\int\limits_{I_y}\mu(E_y)\,dy, \tag{3}$$

где $\mu(E_y)$ — $(n-1)$-мерная мера множества E_y, если оно измеримо, и любое число между числами $\underline{\int\limits_{E_y}}1\cdot dx$ и $\overline{\int\limits_{E_y}}1\cdot dx$, если E_y оказалось неизмеримым множеством.

◄ Следствие 5 вытекает непосредственно из доказанной теоремы и следствия 1, если положить в них $f=\chi_E$ и учесть, что $\chi_E(x, y)=\chi_{E_y}(x)$. ►

Отсюда, в частности, получается

Следствие 6 (принцип Кавальери[1]). *Пусть A и B — два тела в пространстве $\mathbb{R}^3$, имеющие объем (т. е. измеримые по Жордану). Пусть $A_c=\{(x, y, z)\in A \mid z=c\}$ и $B_c=\{(x, y, z)\in B \mid z=c\}$ — сечения тел A и B плоскостью $z=c$. Если при каждом $c\in\mathbb{R}$ множества A_c, B_c измеримы и имеют одинаковую площадь, то тела A и B имеют одинаковые объемы.*

Ясно, что принцип Кавальери можно сформулировать и для пространства $\mathbb{R}^n$ любой размерности.

Пример 3. Используя формулу (3), вычислим объем V_n шара $B=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\leqslant r\}$ радиуса r в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, $V_1=2r$. В примере 2 мы нашли, что $V_2=\pi r^2$. Покажем, что $V_n=c_n r^n$, где c_n — постоянная (которую мы ниже вычислим). Выберем какой-нибудь диаметр $[-r, r]$ шара и для каждой точки $x\in[-r, r]$ рассмотрим сечение B_x шара B гиперплоскостью, ортогональной выбранному диаметру. Поскольку B_x есть шар размерности $n-1$, радиус которого по теореме Пифагора равен $\sqrt{r^2-x^2}$, то, действуя по индукции и используя формулу (3), можно написать:

$$V_n=\int\limits_{-r}^{r}c_{n-1}(r^2-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx=\left(c_{n-1}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n\varphi\,d\varphi\right)r^n.$$

(При переходе к последнему равенству, как видно, была сделана замена $x=r\sin\varphi$.)

Итак, показано, что $V_n=c_n r^n$, причем

$$c_n=c_{n-1}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n\varphi\,d\varphi. \tag{4}$$

[1] Б. Кавальери (1598—1647) — итальянский математик, автор так называемого метода неделимых для определения площадей и объемов.

Теперь найдем постоянную c_n в явном виде. Заметим, что при $m \geqslant 2$

$$I_m = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^m \varphi \, d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{m-2} \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \, d\varphi =$$

$$= I_{m-2} + \frac{1}{m-1} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \varphi \, d \cos^{m-1} \varphi = I_{m-2} - \frac{1}{m-1} I_m,$$

т. е. имеет место рекуррентное соотношение

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}. \tag{5}$$

В частности, $I_2 = \pi/2$. Непосредственно из определения величины I_m видно, что $I_1 = 2$. Учитывая эти значения I_1 и I_2, из рекуррентной формулы (5) находим, что

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 2, \quad I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pi. \tag{6}$$

Возвращаясь к формуле (4), теперь получаем

$$c_{2k+1} = c_{2k} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 2 = c_{2k-1} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 2 \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pi = \ldots = c_1 \cdot \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}$$

$$c_{2k} = c_{2k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pi = c_{2k-2} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \pi \cdot \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot 2 = \ldots = c_2 \frac{(2\pi)^{k-1}}{(2k)!!} \cdot 2.$$

Но, как мы видели выше, $c_1 = 2$, а $c_2 = \pi$, поэтому окончательные формулы для искомого объема V_n таковы:

$$V_{2k+1} = 2 \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} r^{2k+1}, \quad V_{2k} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} r^{2k}, \tag{7}$$

где $k \in \mathbb{N}$, причем первая из этих формул справедлива и при $k = 0$.

Задачи и упражнения

1. a) Постройте такое подмножество квадрата $I \subset \mathbb{R}^2$, что, с одной стороны, его пересечение с любой вертикальной и любой горизонтальной прямой состоит не более чем из одной точки, а, с другой стороны, замыкание этого множества совпадает с I.

b) Постройте функцию $f : I \to \mathbb{R}$, для которой оба участвующих в теореме Фубини повторных интеграла существуют и равны между собой, в то время как $f \notin \mathcal{R}(I)$.

c) Покажите на примере, что если значения участвующей в теореме Фубини функции $F(x)$, подчиненные там условиям $\underline{\mathcal{J}}(x) \leqslant F(x) \leqslant \overline{\mathcal{J}}(x)$, в точках, где $\underline{\mathcal{J}}(x) < \overline{\mathcal{J}}(x)$, просто положить равными нулю, то функция F может оказаться неинтегрируемой. (Рассмотрите, например, в $\mathbb{R}^2$ функцию $f(x, y)$, равную единице, если точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ не является рациональной, и равную $1 - 1/q$ в рациональной точке $(p/q, m/n)$, где обе дроби несократимы.)

2. a) В связи с формулой (3) покажите, что если все сечения ограниченного множества E семейством параллельных гиперплоскостей измеримы, то это еще не означает, что E измеримо.

b) Пусть в дополнение к условиям a) известно, что функция $\mu(E_y)$ из формулы (3) интегрируема на отрезке I_y. Можно ли в этом случае утверждать, что E — измеримое множество?

3. Используя теорему Фубини и положительность интеграла от положительной функции, дайте простое доказательство равенства $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ смешанных производных в предположении, что они являются непрерывными функциями.

4. Пусть $f: I_{a,b} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, определенная на промежутке $I_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leqslant x^i \leqslant b^i,\ i = 1, \ldots, n\}$, а функция $F: I_{a,b} \to \mathbb{R}$, определена равенством

$$F(x) = \int\limits_{I_{a,x}} f(t)\,dt,$$

где $I_{a,x} \subset I_{a,b}$. Найдите частные производные этой функции по переменным $x^1, \ldots, x^n$.

5. Пусть определенная на прямоугольнике $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ непрерывная функция $f(x, y)$ имеет непрерывную в I частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

a) Пусть $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\,dx$. Исходя из равенства

$$F(y) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t)\,dt + f(x, c) \right) dx,$$

проверьте *правило Лейбница*, согласно которому $F'(y) = \int\limits_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx$.

b) Пусть $G(x, y) = \int\limits_a^x f(t, y)\,dt$. Найдите $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial G}{\partial y}$.

c) Пусть $H(y) = \int\limits_a^{h(y)} f(x, y)\,dx$, где $h \in C^{(1)}[a, b]$. Найдите $H'(y)$.

6. Рассмотрим последовательность интегралов

$$F_0(x) = \int\limits_0^x f(y)\,dy, \quad F_n(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f(y)\,dy, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a) Проверьте, что $F_n'(x) = F_{n-1}(x)$; $F_n^{(k)}(0) = 0$, если $k \leqslant n$; $F_n^{(n+1)}(x) = f(x)$.

b) Покажите, что

$$\int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n = \frac{1}{n!} \int\limits_0^x (x-y)^n f(y)\,dy.$$

7. a) Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ — функция, непрерывная на множестве $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant x\}$. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x, y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x, y)\,dx.$$

b) На примере повторного интеграла $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} 1 \cdot dy$ объясните, почему не каждый повторный интеграл является расписанным по теореме Фубини двойным интегралом.

§ 5. Замена переменных в кратном интеграле

1. Постановка вопроса и эвристический вывод формулы замены переменных. Рассматривая интеграл в одномерном случае, мы получили в свое время важную формулу замены переменной в таком интеграле. Теперь наша задача состоит в том, чтобы найти формулу замены переменных в общем случае. Уточним вопрос.

Пусть D_x — множество в $\mathbb{R}^n$, f — интегрируемая на D_x функция, а $\varphi : D_t \to D_x$ — отображение $t \mapsto \varphi(t)$ множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на D_x. Спрашивается, по какому закону, зная f и φ, находить функцию ψ в D_t так, чтобы иметь равенство

$$\int\limits_{D_x} f(x)\, dx = \int\limits_{D_t} \psi(t)\, dt,$$

позволяющее сводить вычисление интеграла по D_x к вычислению интеграла по D_t?

Предположим сначала, что D_t есть промежуток $I \subset \mathbb{R}^n$, а $\varphi : I \to D_x$ — диффеоморфное отображение этого промежутка на D_x. Любому разбиению P промежутка I на промежутки $I_1, I_2, \ldots, I_k$ соответствует разложение D_x на множества $\varphi(I_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Если все эти множества измеримы и пересекаются попарно лишь по множествам меры нуль, то в силу аддитивности интеграла

$$\int\limits_{D_x} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\varphi(I_i)} f(x)\, dx. \tag{1}$$

Если f непрерывна на D_x, то по теореме о среднем

$$\int\limits_{\varphi(I_i)} f(x)\, dx = f(\xi_i)\mu(\varphi(I_i)),$$

где $\xi_i \in \varphi(I_i)$. Поскольку $f(\xi_i) = f(\varphi(\tau_i))$, где $\tau_i = \varphi^{-1}(\xi_i)$, то нам остается связать $\mu(\varphi(I_i))$ с $\mu(I_i)$.

Если бы φ было линейным преобразованием, то $\varphi(I_i)$ был бы параллелепипед, объем которого, как известно из аналитической геометрии и алгебры, был бы равен $|\det \varphi'|\mu(I_i)$. Но диффеоморфизм локально является почти линейным отображением, поэтому, если размеры промежутков I_i достаточно малы, то с малой относительной погрешностью можно считать, что $\mu(\varphi(I_i)) \approx |\det \varphi'(\tau_i)||I_i|$ (можно показать, что при некотором выборе точки $\tau_i \in I_i$ будет иметь место даже точное равенство). Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\varphi(I_i)} f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{k} f(\varphi(\tau_i))\, |\det \varphi'(\tau_i)|\, |I_i|. \tag{2}$$

Но справа в этом приближенном равенстве стоит интегральная сумма от функции $f(\varphi(t))\,|\det \varphi'(t)|$ по промежутку I, отвечающая разбиению P этого

промежутка с отмеченными точками τ. В пределе при $\lambda(P) \to 0$ из (1) и (2) получаем

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t} f(\varphi(t))\,|\det \varphi'(t)|\,dt.$$

Это и есть искомая формула вместе с ее объяснением. Намеченный путь к ней можно пройти со всеми обоснованиями (и это стоит проделать). Однако, чтобы познакомиться с некоторыми новыми полезными общематематическими приемами и фактами и избежать чисто технической работы, мы в дальнейшем доказательстве кое в чем отклонимся от этого пути.

Перейдем к точным формулировкам. Напомним

Определение 1. *Носителем* заданной в области $D \subset \mathbb{R}^n$ *функции* $f : D \to \mathbb{R}$ назовем замыкание в D множества тех точек области D, в которых $f(x) \neq 0$.

В этом параграфе мы рассмотрим ситуацию, когда интегрируемая функция $f : D_x \to \mathbb{R}$ равна нулю в окрестности границы области D_x, точнее, когда носитель функции f (обозначаемый $\operatorname{supp} f$) является лежащим в D_x компактом[1] K. Интегралы от f по D_x и по K, если они существуют, очевидно, совпадают, поскольку вне K в D_x функция равна нулю. С точки зрения отображений, условие $\operatorname{supp} f = K \subset D_x$ равносильно тому, что замена $x = \varphi(t)$ действует не только на множестве K, по которому в сущности и надо интегрировать, но и в некоторой окрестности D_x этого множества.

Теперь сформулируем, что мы собираемся доказать.

Теорема 1. *Если $\varphi : D_t \to D_x$ — диффеоморфизм ограниченного открытого множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на такое же множество*

$$D_x = \varphi(D_t) \subset \mathbb{R}^n,$$

а $f \in \mathcal{R}(D_x)$ и $\operatorname{supp} f$ — компакт в D_x, то $f \circ \varphi\,|\det \varphi'| \in \mathcal{R}(D_t)$ и справедлива формула

$$\boxed{\int\limits_{D_x = \varphi(D_t)} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t} f \circ \varphi(t)\,|\det \varphi'(t)|\,dt.} \tag{3}$$

2. Измеримые множества и гладкие отображения

Лемма 1. *Пусть $\varphi : D_t \to D_x$ — диффеоморфизм открытого множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на такое же множество $D_x \subset \mathbb{R}^n$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) *Если $E_t \subset D_t$ — множество меры нуль (в смысле Лебега), то его образ $\varphi(E_t) \subset D_x$ также является множеством меры нуль.*

b) *Если множество E_t, содержащееся в D_t вместе со своим замыканием $\overline{E}_t$, имеет объем нуль (в смысле меры Жордана), то его образ $\varphi(E_t) = E_x$ содержится в D_x вместе со своим замыканием и тоже имеет объем нуль.*

---

[1]Такие функции обычно называют *финитными* в рассматриваемой области.

c) *Если измеримое (по Жордану) множество* E_t *содержится в области* D_t *вместе со своим замыканием* $\overline{E}_t$, *то его образ* $E_x = \varphi(E_t)$ *является измеримым множеством и* $\overline{E}_x \subset D_x$.

◄ Заметим, прежде всего, что любое открытое подмножество D пространства $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых промежутков (которые к тому же попарно не имеют общих внутренних точек). Для этого, например, можно разбить координатные оси на отрезки длины Δ и рассмотреть соответствующее разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ на кубики с ребрами длины Δ. Фиксировав $\Delta = 1$, возьмем те кубики этого разбиения, которые содержатся в D. Обозначим через F_1 их объединение. Взяв далее $\Delta = 1/2$, добавим к F_1 те кубики нового разбиения, которые содержатся в $D \setminus F_1$. Получим множество F_2 и т. д. Продолжая процесс, получим последовательность $F_1 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$ множеств, каждое из которых состоит из конечного или счетного числа промежутков, не имеющих общих внутренних точек и, как видно из построения, $\bigcup F_n = D$.

Поскольку объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль является множеством меры нуль, утверждение a), таким образом, достаточно проверить для множества E_t, лежащего в замкнутом промежутке $I \subset D_t$. Это мы и сделаем.

Поскольку $\varphi \in C^{(1)}(I)$ (т. е. $\varphi' \in C(I)$), то существует постоянная M такая, что $\|\varphi'(t)\| \leqslant M$ на I. В силу теоремы о конечном приращении для любой пары точек $t_1, t_2 \in I$ и их образов $x_1 = \varphi(t_1)$, $x_2 = \varphi(t_2)$ должно тогда выполняться соотношение

$$|x_2 - x_1| \leqslant M|t_2 - t_1|.$$

Пусть теперь $\{I_i\}$ — такое покрытие множества E_t промежутками, что $\sum |I_i| < \varepsilon$. Без ограничения общности можно считать, что $I_i = I_i \cap I \subset I$.

Совокупность $\{\varphi(I_i)\}$ множеств $\varphi(I_i)$, очевидно, образует покрытие множества $E_x = \varphi(E_t)$. Если t_i — центр промежутка I_i, то, ввиду установленной выше оценки возможного изменения расстояний при отображении φ, все множество $\varphi(I_i)$ можно накрыть таким промежутком $\tilde{I}_i$ с центром $x_i = \varphi(t_i)$, линейные элементы которого в M раз отличаются от соответствующих элементов промежутка I_i. Поскольку $|\tilde{I}_i| = M^n |I_i|$, а $\varphi(E_t) \subset \bigcup\limits_i \tilde{I}_i$, то мы получили покрытие множества $\varphi(E_t) = E_x$ промежутками, сумма объемов которых меньше, чем $M^n \varepsilon$. Тем самым основное утверждение a) леммы доказано.

Утверждение b) следует из a), если учесть, что $\overline{E}_t$, а значит, по доказанному и $\overline{E}_x = \varphi(\overline{E}_t)$ суть множества меры нуль в смысле Лебега и что $\overline{E}_t$, а значит и $\overline{E}_x$ — компакты. Ведь в силу леммы 3 § 1 всякий компакт, являющийся множеством меры нуль в смысле Лебега, имеет объем нуль.

Наконец, утверждение c) получается непосредственно из b), если вспомнить определение измеримого множества и то, что при диффеоморфизме внутренние точки множества E_t перейдут во внутренние точки его образа $E_x = \varphi(E_t)$, а значит, $\partial E_x = \varphi(\partial E_t)$. ►

Следствие. *При условиях теоремы стоящий в правой части формулы* (3) *интеграл существует.*

◄ Поскольку $|\det \varphi'(t)| \neq 0$ в D_t, то

$$\operatorname{supp} f \circ \varphi \cdot |\det \varphi'| = \operatorname{supp} f \circ \varphi = \varphi^{-1}(\operatorname{supp} f)$$

— компакт в D_t. Значит, точки разрыва функции $f \circ \varphi \cdot |\det \varphi'|\chi_{D_t}$ в $\mathbb{R}^n$ совсем не связаны с функцией χ_{D_t}, а являются прообразами точек разрыва функции f в D_x. Но $f \in \mathcal{R}(D_x)$, поэтому совокупность E_x точек разрыва функции f в D_x является множеством меры нуль по Лебегу. Тогда по утверждению a) доказанной леммы множество $E_t = \varphi^{-1}(E_x)$ имеет меру нуль. На основании критерия Лебега теперь можно заключить, что функция $f \circ \varphi \cdot |\det \varphi'|\chi_{D_t}$ интегрируема на любом промежутке $I_t \supset D_t$. ►

3. Одномерный случай

Лемма 2. a) *Если $\varphi: I_t \to I_x$ — диффеоморфизм отрезка $I_t \subset \mathbb{R}^1$ на отрезок $I_x \subset \mathbb{R}^1$, а $f \in \mathcal{R}(I_x)$, то $f \circ \varphi \cdot |\varphi'| \in \mathcal{R}(I_t)$ и*

$$\int_{I_x} f(x)\,dx = \int_{I_t} (f \circ \varphi \cdot |\varphi'|)(t)\,dt. \tag{4}$$

b) *Формула* (3) *справедлива в $\mathbb{R}^1$.*

◄ Хотя утверждение a) леммы 2 нам, по существу, уже известно, мы дадим здесь независимое от изложенного в части I его короткое доказательство, использующее имеющийся теперь в нашем распоряжении критерий Лебега существования интеграла.

Поскольку $f \in \mathcal{R}(I_x)$, а $\varphi: I_t \to I_x$ — диффеоморфизм, функция $f \circ \varphi\,|\varphi'|$ ограничена на I_t. Точками разрыва этой функции могут быть только прообразы точек разрыва функции f на I_x. Последние по критерию Лебега образуют множество меры нуль. Образ этого множества при диффеоморфизме $\varphi^{-1}: I_x \to I_t$, как мы видели при доказательстве леммы 1, имеет меру нуль. Значит, $f \circ \varphi\,|\varphi'| \in \mathcal{R}(I_t)$.

Пусть P_x — разбиение отрезка I_x. Посредством отображения φ^{-1} оно индуцирует разбиение P_t отрезка I_t, причем из равномерной непрерывности отображений φ и φ^{-1} следует, что $\lambda(P_x) \to 0 \iff \lambda(P_t) \to 0$. Для разбиений P_x, P_t с отмеченными точками $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ запишем интегральные суммы:

$$\sum_i f(\xi_i)\,|x_i - x_{i-1}| = \sum_i f \circ \varphi(\tau_i)\,|\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = \\ = \sum_i f \circ \varphi(\tau_i)\,|\varphi'(\tau_i)|\,|t_i - t_{i-1}|,$$

причем точки ξ_i можно считать выбранными именно так, что $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, где τ_i — точка, получаемая применением теоремы Лагранжа к разности $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$.

Поскольку оба интеграла в соотношении (4) существуют, выбор отмеченных точек в интегральных суммах можно делать по своему усмотрению, не влияя на величину предела. Значит, из написанного равенства интегральных сумм в пределе при $\lambda(P_x) \to 0$ $(\lambda(P_t) \to 0)$ получается равенство (4) для интегралов.

Утверждение b) леммы 2 вытекает из доказанного равенства (4). Прежде всего отметим, что в одномерном случае $|\det \varphi'| = |\varphi'|$. Далее, компакт $\operatorname{supp} f$ легко покрыть конечной системой отрезков, лежащих в D_x и попарно не имеющих общих внутренних точек. Тогда интеграл от f по множеству D_x сведется к сумме интегралов от f по отрезкам указанной системы, а интеграл от $f \circ \varphi\, |\varphi'|$ по D_t сведется к сумме интегралов по отрезкам, являющимся прообразами отрезков этой системы. Применяя к каждой паре соответствующих друг другу при отображении φ отрезков равенство (4), после сложения получаем формулу (3). ►

Замечание 1. Доказанная нами ранее формула замены переменной в одномерном интеграле имела вид

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi \cdot \varphi')(t)\,dt, \tag{5}$$

где φ было любым гладким отображением отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок с концами $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$. В формуле (5) стоит не модуль $|\varphi'|$ производной, а сама производная. Это связано с тем, что в левой части формулы (5) может быть $\varphi(\beta) < \varphi(\alpha)$.

Если, однако, заметить, что для отрезка I с концами a и b имеют место соотношения

$$\int\limits_I f(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx, & \text{если } a \leqslant b, \\ \displaystyle -\int\limits_a^b f(x)\,dx, & \text{если } a > b, \end{cases}$$

то становится ясно, что в случае, когда φ — диффеоморфизм, формулы (4) и (5) отличаются лишь внешним видом, а по существу совпадают.

Замечание 2. Интересно отметить (и этим мы не преминем воспользоваться), что если $\varphi: I_t \to I_x$ — диффеоморфизм отрезков, то всегда справедливы формулы

$$\overline{\int\limits_{I_x}} f(x)\,dx = \overline{\int\limits_{I_t}} (f \circ \varphi\, |\varphi'|)(t)\,dt,$$

$$\underline{\int\limits_{I_x}} f(x)\,dx = \underline{\int\limits_{I_t}} (f \circ \varphi\, |\varphi'|)(t)\,dt,$$

относящиеся к верхним и нижним интегралам от вещественнозначных функций.

А если это так, то, значит, в одномерном случае можно считать установленным, что формула (3) остается в силе для любой ограниченной функции f, если интегралы в ней понимать как верхние или как нижние интегралы Дарбу.

◄ Будем временно считать, что f — неотрицательная функция, ограниченная константой M.

Снова, как и при доказательстве утверждения а) леммы 2, можно взять отвечающие друг другу в силу отображения φ разбиения P_x, P_t отрезков I_x и I_t соответственно и написать следующие оценки, в которых ε — максимальное из колебаний функции φ на промежутках разбиения P_t:

$$\begin{aligned}\sum_i \sup_{x\in\Delta x_i} f(x)|x_i-x_{i-1}| &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} f(\varphi(t)) \sup_{t\in\Delta t_i}|\varphi'(t)||t_i-t_{i-1}| \leqslant\\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i}\Big(f(\varphi(t))\cdot \sup_{t\in\Delta t_i}|\varphi'(t)|\Big)|\Delta t_i| \leqslant\\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i}\Big(f(\varphi(t))(|\varphi'(t)|+\varepsilon)\Big)|\Delta t_i| \leqslant\\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i}\Big(f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\Big)|\Delta t_i| + \varepsilon\sum_i \sup_{t\in\Delta t_i} f(\varphi(t))|\Delta t_i| \leqslant\\ &\leqslant \sum_i \sup_{t\in\Delta t_i}\Big(f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\Big)|\Delta t_i| + \varepsilon M|I_t|.\end{aligned}$$

Учитывая равномерную непрерывность φ, отсюда при $\lambda(P_t)\to 0$ получаем

$$\overline{\int_{I_x}} f(x)\,dx \leqslant \overline{\int_{I_t}} (f\circ\varphi\,|\varphi'|)(t)\,dt.$$

Применяя доказанное к отображению φ^{-1} и функции $f\circ\varphi\,|\varphi'|$, получаем обратное неравенство и устанавливаем тем самым для неотрицательных функций первое из равенств замечания 2. Но поскольку любую функцию можно представить в виде

$$f = \max\{f, 0\} - \max\{-f, 0\}$$

(разности неотрицательных), то это равенство можно считать доказанным и в общем случае. Аналогично проверяется и второе равенство. ►

Из доказанных равенств, конечно, можно вновь получить утверждение а) леммы 2 в случае вещественнозначной функции f.

4. Случай простейшего диффеоморфизма в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\varphi\colon D_t\to D_x$ — диффеоморфизм области $D_t\subset\mathbb{R}^n_t$ на область $D_x\subset\mathbb{R}^n_x$; $(t^1,\ldots,t^n)$, $(x^1,\ldots,x^n)$ — координаты точек $t\in\mathbb{R}^n_t$ и $x\in\mathbb{R}^n_x$ соответственно. Напомним

Определение 2. Диффеоморфизм $\varphi\colon D_t \to D_x$ называется *простейшим*, если его координатная запись имеет вид

$$
\begin{aligned}
&x^1 = \varphi^1(t^1, \ldots, t^n) = t^1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x^{k-1} = \varphi^{k-1}(t^1, \ldots, t^n) = t^{k-1},\\
&x^k = \varphi^k(t^1, \ldots, t^n) = \varphi^k(t^1, \ldots, t^k, \ldots, t^n),\\
&x^{k+1} = \varphi^{k+1}(t^1, \ldots, t^n) = t^{k+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x^n = \varphi^n(t^1, \ldots, t^n) = t^n.
\end{aligned}
$$

Таким образом, при простейшем диффеоморфизме меняется только одна из координат (в данном случае координата с индексом k).

Лемма 3. *Для простейшего диффеоморфизма* $\varphi\colon D_t \to D_x$ *формула* (3) *верна.*

◄ С точностью до перенумерации координат можно считать, что рассматривается диффеоморфизм φ, меняющий только n-ю координату. Введем для удобства записи следующие обозначения:

$$
\begin{gathered}
(x^1, \ldots, x^{n-1}, x^n) =: (\tilde{x}, x^n); \quad (t^1, \ldots, t^{n-1}, t^n) =: (\tilde{t}, t^n);\\
D_{x^n}(\tilde{x}_0) := \{(\tilde{x}, x^n) \in D_x \mid \tilde{x} = \tilde{x}_0\};\\
D_{t^n}(\tilde{t}_0) := \{(\tilde{t}, t^n) \in D_t \mid \tilde{t} = \tilde{t}_0\}.
\end{gathered}
$$

Таким образом, $D_{x^n}(\tilde{x})$, $D_{t^n}(\tilde{t})$ — это просто одномерные сечения множеств D_x и D_t соответственно прямыми, параллельными n-й координатной оси. Пусть I_x — промежуток в $\mathbb{R}^n_x$, содержащий D_x. Представим I_x в виде прямого произведения $I_x = I_{\tilde{x}} \times I_{x^n}$ $(n-1)$-мерного промежутка $I_{\tilde{x}}$ и отрезка I_{x^n} n-й координатной оси. Аналогичное разложение $I_t = I_{\tilde{t}} \times I_{t^n}$ запишем для фиксированного в $\mathbb{R}^n_t$ промежутка I_t, содержащего D_t.

Используя определение интеграла по множеству, теорему Фубини и замечание 2, можно написать, что

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{D_x} f(x)\,dx &= \int\limits_{I_x} f \cdot \chi_{D_x}(x)\,dx = \int\limits_{I_{\tilde{x}}} d\tilde{x} \int\limits_{I_{x^n}} f \cdot \chi_{D_x}(\tilde{x}, x^n)\,dx^n =\\
&= \int\limits_{I_{\tilde{x}}} d\tilde{x} \int\limits_{D_{x^n}(\tilde{x})} f(\tilde{x}, x^n)\,dx^n = \int\limits_{I_{\tilde{t}}} d\tilde{t} \int\limits_{D_{t^n}(\tilde{t})} f(\tilde{t}, \varphi^n(\tilde{t}, t^n)) \left|\frac{\partial \varphi^n}{\partial t^n}\right|(\tilde{t}, t^n)\,dt^n =\\
&= \int\limits_{I_{\tilde{t}}} d\tilde{t} \int\limits_{I_{t^n}} (f \circ \varphi\,|\det \varphi'|\chi_{D_t})(\tilde{t}, t^n)\,dt^n =\\
&= \int\limits_{I_t} (f \circ \varphi\,|\det \varphi'|\chi_{D_t})(t)\,dt = \int\limits_{D_t} (f \circ \varphi\,|\det \varphi'|)(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

В этой выкладке мы учли также то обстоятельство, что для рассматриваемого диффеоморфизма $\det \varphi' = \frac{\partial \varphi^n}{\partial t^n}$. ►

5. Композиция отображений и формула замены переменных

Лемма 4. *Если $D_\tau \xrightarrow{\psi} D_t \xrightarrow{\varphi} D_x$ — два диффеоморфизма, для каждого из которых справедлива формула* (3) *замены переменных в интеграле, то она справедлива и для композиции $\varphi \circ \psi : D_\tau \to D_x$ этих отображений.*

◄ Для доказательства достаточно вспомнить, что $(\varphi \circ \psi)' = \varphi' \circ \psi'$ и что

$$\det(\varphi \circ \psi)'(\tau) = \det \varphi'(t) \det \psi'(\tau),$$

где $t = \varphi(\tau)$. Действительно, тогда получаем, что

$$\int\limits_{D_x} f(x)\, dx = \int\limits_{D_t} (f \circ \varphi\, |\det \varphi'|)(t)\, dt =$$
$$= \int\limits_{D_\tau} \big((f \circ \varphi \circ \psi)\, |\det \varphi' \circ \psi|\, |\det \psi'|\big)(\tau)\, d\tau =$$
$$= \int\limits_{D_\tau} \big((f \circ (\varphi \circ \psi))\, |\det(\varphi \circ \psi)'|\big)(\tau)\, d\tau. ►$$

6. Аддитивность интеграла и завершение доказательства формулы замены переменных в интеграле. Леммы 3 и 4 наводят на мысль воспользоваться возможностью локального разложения любого диффеоморфизма в композицию простейших (см. утверждение 2 из п. 4 § 6 гл. VIII часть I) и на этом пути получить в общем случае формулу (3).

Сводить интеграл по множеству к интегралам по малым окрестностям его точек можно по-разному. Например, можно воспользоваться аддитивностью интеграла. Так мы и поступим. Опираясь на леммы 1, 3, 4, проведем теперь доказательство теоремы 1 о замене переменных в кратном интеграле.

◄ Для каждой точки t компакта $K_t = \operatorname{supp}((f \circ \varphi)|\det \varphi'|) \subset D_t$ построим такую ее $\delta(t)$-окрестность $U(t)$, в которой диффеоморфизм φ раскладывается в композицию простейших. Из $\frac{\delta(t)}{2}$-окрестностей $\widetilde{U}(t) \subset U(t)$ точек $t \in K_t$ выделим конечное покрытие и $\widetilde{U}(t_1), \ldots, \widetilde{U}(t_k)$ компакта K_t. Пусть $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta(t_1), \ldots, \delta(t_k)\}$. Тогда любое множество, диаметр которого меньше чем δ, и которое пересекается с K_t, очевидно, содержится вместе со своим замыканием хотя бы в одной из окрестностей системы $U(t_1), \ldots, U(t_k)$.

Пусть теперь I — промежуток, содержащий множество D_t, а P — такое разбиение промежутка I, что $\lambda(P) < \min\{\delta, d\}$, где число δ найдено выше, а d — расстояние от K_t до границы множества D_t. Пусть $\mathscr{I} := \{I_i\}$ — те промежутки разбиения P, которые имеют с K_t непустое пересечение. Ясно, что если

$I_i \in \mathscr{I}$, то $I_i \subset D_t$ и

$$\int_{D_t} (f \circ \varphi \,|\det \varphi'|)(t)\,dt = \int_I ((f \circ \varphi \,|\det \varphi'|)\chi_{D_t})(t)\,dt =$$
$$= \sum_i \int_{I_i} (f \circ \varphi \,|\det \varphi'|)(t)\,dt. \quad (6)$$

Образ $E_i = \varphi(I_i)$ промежутков I_i по лемме 1 является измеримым множеством. Тогда и множество $E = \bigcup_i E_i$ измеримо, и $\operatorname{supp} f \subset E = \overline{E} \subset D_x$. Используя аддитивность интеграла, отсюда выводим, что

$$\int_{D_x} f(x)\,dx = \int_{I_x \supset D_x} f\chi_{D_x}(x)\,dx = \int_{I_x \setminus E} f\chi_{D_x}(x)\,dx + \int_E f\chi_{D_x}(x)\,dx =$$
$$= \int_E f\chi_{D_x}(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx = \sum_i \int_{E_i} f(x)\,dx. \quad (7)$$

По построению любой промежуток $I_i \in \mathscr{I}$ содержится в некоторой окрестности $U(x_j)$, в пределах которой диффеоморфизм φ раскладывается в композицию простейших. Значит, на основании лемм 3 и 4 можно записать, что

$$\int_{E_i} f(x)\,dx = \int_{I_i} (f \circ \varphi \,|\det \varphi'|)(t)\,dt. \quad (8)$$

Сопоставляя соотношения (6), (7), (8), получаем формулу (3). ►

7. Некоторые следствия и обобщения формулы замены переменных в кратных интегралах

a. Замена переменных при отображениях измеримых множеств

Утверждение 1. *Пусть* $\varphi\colon D_t \to D_x$ — *диффеоморфизм открытого ограниченного множества* $D_t \subset \mathbb{R}^n$ *на такое же множество* $D_x \subset \mathbb{R}^n$; E_t *и* E_x — *подмножества* D_t *и* D_x *соответственно, причем такие, что* $\overline{E}_t \subset D_t$, $\overline{E}_x \subset D_x$ *и* $E_x = \varphi(E_t)$. *Если* $f \in \mathscr{R}(E_x)$, *то* $f \circ \varphi \,|\det \varphi'| \in \mathscr{R}(E_t)$ *и имеет место равенство*

$$\int_{E_x} f(x)\,dx = \int_{E_t} (f \circ \varphi \,|\det \varphi'|)(t)\,dt. \quad (9)$$

◄ Действительно,

$$\int_{E_x} f(x)\,dx = \int_{D_x} (f\chi_{E_x})(x)\,dx = \int_{D_t} \big(((f\chi_{E_x}) \circ \varphi)\,|\det \varphi'|\big)(t)\,dt =$$
$$= \int_{D_t} ((f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|\chi_{E_t})(t)\,dt = \int_{E_t} ((f \circ \varphi)\,|\det \varphi'|)(t)\,dt.$$

В этой выкладке мы использовали определение интеграла по множеству, формулу (3) и то обстоятельство, что $\chi_{E_t} = \chi_{E_x} \circ \varphi$. ►

b. Инвариантность интеграла. Напомним, что интеграл по множеству E от функции $f: E \to \mathbb{R}$ сводится к вычислению интеграла от функции $f\chi_E$ по промежутку $I \supset E$. Но сам промежуток I был по определению связан с системой декартовых координат в $\mathbb{R}^n$. Теперь мы в состоянии доказать

Утверждение 2. *Величина интеграла от функции f по множеству $E \subset \subset \mathbb{R}^n$ не зависит от выбора декартовых координат в $\mathbb{R}^n$.*

◄ Действительно, переход от одной системы декартовых координат в $\mathbb{R}^n$ к другой такой же системе имеет якобиан, по модулю равный единице. В силу утверждения 1 отсюда следует равенство

$$\int\limits_{E_x} f(x)\,dx = \int\limits_{E_t} (f \circ \varphi)(t)\,dt.$$

Но это и означает, что интеграл определен инвариантно: ведь если p — точка множества E, $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — ее координаты в первой системе, $t = (t^1, \ldots, t^n)$ — во второй, а $x = \varphi(t)$ — функция перехода от одних координат к другим, то

$$f(p) = f_x(x^1, \ldots, x^n) = f_t(t^1, \ldots, t^n),$$

где $f_t = f_x \circ \varphi$. Значит, мы показали, что

$$\int\limits_{E_x} f_x(x)\,dx = \int\limits_{E_t} f_t(t)\,dt,$$

где E_x и E_t — запись множества E в системе координат x и t соответственно. ►

Из утверждения 2 и определения 3 § 2 меры (Жордана) множества $E \subset \mathbb{R}^n$ можно заключить, что эта мера не зависит от выбора системы декартовых координат в $\mathbb{R}^n$, или, что то же самое, мера Жордана инвариантна относительно группы движений евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

c. Пренебрежимые множества. Используемые на практике замены переменных или формулы преобразования координат иногда имеют те или иные особенности (например, где-то может быть нарушение взаимной однозначности, обращение в нуль якобиана или отсутствие дифференцируемости). Как правило, эти особенности бывают на множествах меры нуль и потому для потребностей практики весьма полезна следующая

Теорема 2. *Пусть $\varphi: D_t \to D_x$ — отображение измеримого (по Жордану) множества $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ на такое же множество $D_x \subset \mathbb{R}^n_x$. Предположим, что в D_t и D_x можно указать такие множества S_t, S_x меры нуль (в смысле Лебега), что — $D_t \setminus S_t$ и $D_x \setminus S_x$ — открытые множества, а φ отображает диффеоморфно и с ограниченным якобианом первое из них на второе. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{R}(D_x)$ также $(f \circ \varphi)|\det \varphi'| \in \mathcal{R}(D_t \setminus S_t)$ и*

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t \setminus S_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)\,dt. \tag{10}$$

Если, кроме того, величина $|\det\varphi'|$ *определена и ограничена в* D_t, *то*

$$\int_{D_x} f(x)\,dx = \int_{D_t} ((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt. \tag{11}$$

◄ По критерию Лебега функция f может иметь разрывы в D_x, а значит, и в $D_x\setminus S_x$, лишь на множестве меры нуль. Образ этого множества точек разрыва при отображении $\varphi^{-1}\colon D_x\setminus S_x\to D_t\setminus S_t$ по лемме 1 является множеством меры нуль в $D_t\setminus S_t$. Таким образом, соотношение $(f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|\in\mathcal{R}(D_t\setminus S_t)$ будет немедленно следовать из того же критерия Лебега интегрируемости функции, если мы установим, что множество $D_t\setminus S_t$ измеримо. То, что это действительное измеримое по Жордану множество, будет побочным продуктом проводимых ниже рассуждений.

По условию $D_x\setminus S_x$ — открытое множество, поэтому $(D_x\setminus S_x)\cap\partial S_x=\varnothing$, значит, $\partial S_x\subset\partial D_x\cup S_x$ и, следовательно, $\partial D_x\cup S_x=\partial D_x\cup\overline{S}_x$, где $\overline{S}_x=S_x\cup\cup\,\partial S_x$ — замыкание в $\mathbb{R}^n_x$ множества S_x. Получается, что $\partial D_x\cup S_x$ есть замкнутое ограниченное множество, т. е. компакт в $\mathbb{R}^n$, который, как объединение двух множеств меры нуль, сам является множеством меры нуль в смысле Лебега. Из леммы 3 § 1 нам известно, что тогда множество $\partial D_x\cup S_x$ (а вместе с ним и S_x) имеет объем нуль, т. е. для любого $\varepsilon>0$ найдется такое конечное покрытие $I_1,\ldots,I_k$ этого множества промежутками, что $\sum\limits_{i=1}^{k}|I_i|<\varepsilon$. Отсюда, в частности, следует, что множество $D_x\setminus S_x$ (и аналогично множество $D_t\setminus S_t$) измеримо по Жордану: ведь $\partial(D_x\setminus S_x)\subset\partial D_x\cup\partial S_x\subset\partial D_x\cup S_x$.

Покрытие $I_1,\ldots,I_k$, очевидно, можно выбрать еще и так, чтобы любая точка $x\in\partial D_x\setminus S_x$ была внутренней точкой по крайней мере одного из промежутков покрытия. Пусть $U_x=\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i$. Множество U_x измеримо, как и множество $V_x=D_x\setminus U_x$. По построению множество V_x таково, что $\overline{V}_x\subset D_x\setminus S_x$, и для любого измеримого множества $E_x\subset D_x$, которое содержит компакт $\overline{V}_x$, справедлива оценка

$$\left|\int_{D_x} f(x)\,dx-\int_{E_x} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{D_x\setminus E_x} f(x)\,dx\right| \leqslant M\mu(D_x\setminus E_x)<M\cdot\varepsilon, \tag{12}$$

где $M=\sup\limits_{x\in D_x} f(x)$.

Прообраз $\overline{V}_t=\varphi^{-1}(\overline{V}_x)$ компакта $\overline{V}_x$ является компактом в $D_t\setminus S_t$. Рассуждая как и выше, можно построить измеримый компакт W_t, подчиненный условиям $\overline{V}_t\subset W_t\subset D_t\setminus S_t$ и обладающий тем свойством, что для любого измеримого множества E_t такого, что $W_t\subset E_t\subset D_t\setminus S_t$, выполняется оценка

$$\left|\int_{D_t\setminus S_t} ((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt-\int_{E_t}((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt\right|<\varepsilon. \tag{13}$$

Пусть теперь $E_x = \varphi(E_t)$. Для множеств $E_x \subset D_x \setminus S_x$ и $E_t \subset D_t \setminus S_t$ по утверждению 1 имеет место формула (9). Сопоставляя соотношения (9), (12), (13) и учитывая произвольность величины $\varepsilon > 0$, получаем равенство (10).

Докажем теперь последнее утверждение теоремы 2. Если функция $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ определена на всем множестве D_t, то, поскольку $D_t \setminus S_t$ открыто в $\mathbb{R}^n_t$, все множество точек разрыва этой функции на D_t состоит из множества A точек разрыва функции $(f \circ \varphi)|\det \varphi'||_{D_t \setminus S_t}$ (ограничения исходной функции на множество $D_t \setminus S_t$) и, быть может, некоторого подмножества B множества $S_t \cup \partial D_t$.

Множество A, как мы видели, является множеством меры нуль по Лебегу (ведь интеграл в правой части равенства (10) существует), а поскольку $S_t \cup \partial D_t$ имеет объем нуль, то это же можно сказать про множество B. Значит, достаточно знать, что функция $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ ограничена на D_t, как по критерию Лебега получится, что она интегрируема на D_t. Но $|f \circ \varphi|(t) \leqslant \leqslant M$ на D_t, поэтому функция $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ ограничена на S_t, коль скоро функция $|\det \varphi'|$ по условию ограничена на S_t. Что же касается множества $D_t \setminus S_t$, то на нем функция $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ интегрируема и, значит, ограничена. Итак, функция $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ интегрируема на D_t. Но множества D_t и $D_t \setminus S_t$ отличаются лишь на измеримое множество S_t, объем которого, как было показано, равен нулю. Значит, в силу аддитивности интеграла и обращения в нуль интеграла по S_t можно заключить, что правые части равенств (10) и (11) в рассматриваемом случае действительно совпадают. ►

Пример. Отображение прямоугольника $I = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant r \leqslant R \wedge 0 \leqslant \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ на круг $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$, задаваемое формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{14}$$

не является диффеоморфизмом: вся сторона прямоугольника I, на которой $r = 0$, переходит при этом отображении в одну точку $(0, 0)$; образы точек $(r, 0)$ и $(r, 2\pi)$ совпадают. Однако если рассмотреть, например, множества $I \setminus \partial I$ и $K \setminus E$, где E — объединение границы ∂K круга K и радиуса, идущего в точку $(0, R)$, то ограничение отображения (14) на область $I \setminus \partial I$ окажется ее диффеоморфизмом на область $K \setminus E$. Значит, по теореме 2 для любой функции $f \in \mathcal{R}(K)$ можно написать, что

$$\iint_K f(x, y)\,dx\,dy = \iint_I f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

или, применяя теорему Фубини,

$$\iint_K f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr.$$

Соотношения (14) суть хорошо известные формулы перехода от полярных координат к декартовым на плоскости.

Сказанное можно, естественно, развить и применительно к общей полярной (сферической) системе координат в $\mathbb{R}^n$, которую мы рассматривали в части I, где был указан также якобиан перехода от полярных координат к декартовым в пространстве $\mathbb{R}^n$ любой размерности.

Задачи и упражнения

1. a) Покажите, что лемма 1 справедлива для любого гладкого отображения $\varphi: D_t \to D_x$ (см. в этой связи также задачу 8).

b) Докажите, что если D — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, а $\varphi \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$, то $\varphi(D)$ при $m < n$ является множеством меры нуль в $\mathbb{R}^n$.

2. a) Проверьте, что мера измеримого множества E и мера его образа $\varphi(E)$ при диффеоморфизме φ связаны соотношением $\mu(\varphi(E)) = \theta\mu(E)$, где

$$\theta \in \Big[\inf_{t\in E}|\det \varphi'(t)|, \sup_{t\in E}|\det \varphi'(t)|\Big].$$

b) В частности, если E — связное множество, то найдется такая точка $\tau \in E$, что $\mu(\varphi(E)) = |\det \varphi'(\tau)|\mu(E)$.

3. a) Покажите, что если формула (3) справедлива для функции $f \equiv 1$, то она верна и в общем случае.

b) Проведите вновь доказательство теоремы 1, но для случая $f \equiv 1$, упрощая его в этой специальной ситуации.

4. Не опираясь на замечание 2, проведите доказательство леммы 3, считая известным лемму 2 и равенство интегралов от двух интегрируемых функций, отличающихся лишь на множестве меры нуль.

5. Вместо свойства аддитивности интеграла и сопутствующего его использованию анализа измеримости множеств, при сведении формулы (3) к ее локальному варианту (т. е. к проверке формулы для малой окрестности точек отображаемой области) можно пользоваться другим приемом локализации, основанным на линейности интеграла.

a) Если гладкие функции $e_1, \ldots, e_k$ таковы, что $0 \leqslant e_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, k$, а $\sum\limits_i^k e_i(x) \equiv 1$ на D_x, то $\int\limits_{D_x}\Big(\sum\limits_{i=1}^k e_i f\Big)(x)\,dx = \int\limits_{D_x} f(x)\,dx$ для любой функции $f \in \mathscr{R}(D_x)$.

b) Если $\operatorname{supp} e_i$ лежит в множестве $U \subset D_x$, то $\int\limits_{D_x}(e_i f)(x)\,dx = \int\limits_U (e_i f)(x)\,dx$.

c) С учетом лемм 3 и 4 и свойства линейности интеграла из a) и b) можно вывести формулу (3), если для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ компакта $K = \operatorname{supp} f \subset D_x$ построить такой набор гладких в D_x функций $e_1, \ldots, e_k$, что $0 \leqslant e_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, k$; $\sum\limits_{i=1}^k e_i \equiv 1$ на K; и для любой функции $e_i \in \{e_i\}$ найдется множество $U_{\alpha_i} \in \{U_\alpha\}$ такое, что $\operatorname{supp} e_i \subset U_{\alpha_i}$.

Набор $\{e_i\}$ в этом случае называют *разбиением единицы на компакте K, подчиненным покрытию U_α*.

6. Эта задача содержит план построения того разбиения единицы, о котором шла речь в задаче 5.

a) Постройте функцию $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такую, что $f|_{[-1,1]} \equiv 1$ и $\operatorname{supp} f \subset [-1-\delta, 1+\delta]$, где $\delta > 0$.

b) Постройте функцию $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ с указанными в a) свойствами для единичного кубика в $\mathbb{R}^n$ и его δ-раздутия.

c) Покажите, что для любого открытого покрытия компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существует гладкое разбиение единицы на K, подчиненное этому покрытию.

d) В развитие c) постройте $C^{(\infty)}$-разбиение единицы в $\mathbb{R}^n$, подчиненное локально конечному открытому покрытию всего пространства. (Локальная конечность покрытия означает, что любая точка покрываемого множества, в данном случае $\mathbb{R}^n$, имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов покрытия. Для разбиения единицы, содержащего бесконечное число функций $\{e_i\}$, вводится требование, чтобы любая точка множества, на котором это разбиение строится, принадлежала не более чем конечному числу носителей функций системы $\{e_i\}$. При этом условии не возникает вопросов о том, в каком смысле понимать равенство $\sum\limits_i e_i \equiv 1$, точнее, стоящую в его левой части сумму.)

7. Несколько иное в сравнении с изложенным доказательство теоремы 1, опирающееся на возможность разложения лишь линейного отображения в композицию простейших и более близкое к указанным в п. 1 эвристическим соображениям, можно получить, доказав последовательно следующие утверждения.

a) Проверьте, что при простейших линейных отображениях $L\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ вида $(x^1, \dots, x^k, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^{k-1}, \lambda x^k, x^{k+1}, \dots, x^n)$, $\lambda \neq 0$, и $(x^1, \dots, x^k, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots$ $\dots, x^{k-1}, x^k + x^j, x^{k+1}, \dots, x^n)$ для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ выполнено соотношение $\mu(L(E)) = |\det L'|\mu(E)$ и докажите, что это соотношение справедливо для любого линейного отображения $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. (Используйте теорему Фубини и возможность разложения линейного преобразования в композицию указанных простейших.)

b) Покажите, что если $\varphi\colon D_t \to D_x$ — диффеоморфизм, то для любого измеримого компакта $K \subset D_t$ и его образа $\varphi(K)$ имеет место соотношение $\mu(\varphi(K) \leqslant \int\limits_K |\det \varphi'(t)|\, dt$.

(Если $a \in D_t$, то $\exists(\varphi'(a))^{-1}$ и в представлении $\varphi(t) = (\varphi'(a) \circ (\varphi'(a))^{-1} \circ \varphi)(t)$ отображение $\varphi'(a)$ линейное, а отображение $(\varphi'(a))^{-1} \circ \varphi$ близко к изометрическому в окрестности точки a.)

c) Покажите, что если рассматриваемая в теореме 1 функция f неотрицательна, то $\int\limits_{D_x} f(x)\, dx \leqslant \int\limits_{D_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)\, dt$.

d) Применив предыдущее неравенство к функции $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ и отображению $\varphi^{-1}\colon D_x \to D_t$, покажите, что для неотрицательной функции f формула (3) верна.

e) Представив функцию f из теоремы 1 в виде разности интегрируемых неотрицательных функций, докажите справедливость формулы (3).

8. Лемма Сарда. *Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$ и S — множество критических точек отображения φ. Тогда $\varphi(S)$ является множеством меры нуль (в смысле Лебега).*

Напомним, что *критической точкой гладкого отображения* φ области $D \subset \mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^n$ называлась такая точка $x \in D$, в которой $\operatorname{rang} \varphi'(x) < \min\{m, n\}$. В случае $m = n$ это равносильно условию $\det \varphi'(x) = 0$.

a) Проверьте лемму Сарда для линейного отображения.

b) Пусть I — промежуток в области D, а $\varphi \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$. Покажите, что существует такая функция $\alpha(h)$, $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$ и $|\varphi(x+h) - \varphi(x) - \varphi'(x)h| \leqslant$ $\leqslant \alpha(h)|h|$ при любых x, $x + h \in I$.

c) Используя b), оцените уклонение образа $\varphi(I)$ промежутка I при отображении φ от его же образа при линейном отображении $L(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x - a)$, где $a \in I$.

d) Опираясь на a), b), c), покажите, что если S — множество критических точек отображения φ в промежутке I, то $\varphi(S)$ есть множество меры нуль.

e) Закончите теперь доказательство леммы Сарда.

f) Используя лемму Сарда, покажите, что в теореме 1 достаточно потребовать, чтобы отображение φ было взаимно однозначным отображением класса $C^{(1)}(D_t, D_x)$.

Отметим, что приведенная лемма Сарда является простым частным случаем теоремы Сарда и Морса, по которой утверждение леммы справедливо, даже если $D \subset \mathbb{R}^m$, а $\varphi \in C^{(k)}(D, \mathbb{R}^n)$, где $k = \max\{m-n+1, 1\}$. Величина k здесь, как показал на примере Уитни, не может быть уменьшена, каково бы ни было сочетание чисел m и n.

В геометрии лемма Сарда известна как утверждение о том, что если $\varphi: D \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение открытого множества $D \subset \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, то для почти всех точек $x \in \varphi(D)$ их полный прообраз $\varphi^{-1}(x) = M_x$ в D есть поверхность (многообразие) коразмерности n в $\mathbb{R}^m$ (т. е. $m - \dim M_x = n$ для почти всех $x \in D$).

9. Пусть вместо диффеоморфизма φ в теореме 1 рассматривается произвольное отображение $\varphi \in C^{(1)}(D_t, D_x)$ такое, что $\det \varphi'(t) \neq 0$ в D_t. Пусть $n(x) = \operatorname{card}\{t \in \operatorname{supp}(f \circ \varphi) \mid \varphi(t) = x\}$, т. е. $n(x)$ — число точек носителя функции $f \circ \varphi$, которые при отображении $\varphi: D_t \to D_x$ переходят в точку $x \in D_x$. Имеет место следующая формула:

$$\int_{D_x} (f \cdot n)(x)\, dx = \int_{D_t} ((f \circ \varphi)|\det \varphi'|)(t)\, dt.$$

a) Какой геометрический смысл этой формулы при $f \equiv 1$?

b) Докажите эту формулу для специального отображения кольца $D_t = \{t \in \mathbb{R}^2_t \mid 1 < |t| < 2\}$ на кольцо $D_x = \{x \in \mathbb{R}^2_x \mid 1 < |x| < 2\}$, если в полярных координатах (r, φ) и (ρ, θ) плоскостей $\mathbb{R}^2_x$ и $\mathbb{R}^2_t$ соответственно это отображение записывается формулами $r = \rho$, $\varphi = 2\theta$.

c) Попробуйте теперь доказать формулу в общем виде.

§ 6. Несобственные кратные интегралы

1. Основные определения

Определение 1. *Исчерпанием множества* $E \subset \mathbb{R}^m$ будем называть такую последовательность измеримых множеств $\{E_n\}$, что $E_n \subset E_{n+1} \subset E$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Лемма. *Если* $\{E_n\}$ — *исчерпание измеримого множества* E, *то*:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$;

b) *для любой функции* $f \in \mathcal{R}(E)$ *также* $f|_{E_n} \in \mathcal{R}(E_n)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx.$$

◄ a) Поскольку $E_n \subset E_{n+1} \subset E$, то $\mu(E_n) \leqslant \mu(E_{n+1}) \leqslant \mu(E)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) \leqslant \mu(E)$. Для доказательства равенства a) покажем, что выполняется также неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) \geqslant \mu(E)$.

Граница ∂E множества E имеет объем нуль, поэтому ее можно покрыть конечным числом открытых промежутков, сумма объемов которых меньше наперед заданной величины $\varepsilon > 0$. Пусть Δ — объединение всех этих откры-

тых промежутков. Тогда множество $E \cup \Delta =: \widetilde{E}$ открыто в $\mathbb{R}^m$, причем по построению $\widetilde{E}$ содержит замыкание $\overline{E}$ множества E и $\mu(\widetilde{E}) \leqslant \mu(E) + \mu(\Delta) < \mu(E) + \varepsilon$.

Для каждого множества E_n исчерпания $\{E_n\}$ можно повторить описанное построение со значением $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$. Тогда получим последовательность открытых множеств $\widetilde{E}_n = E_n \cup \Delta_n$ таких, что $E_n \subset \widetilde{E}_n$, $\mu(\widetilde{E}_n) \leqslant \mu(E_n) + \mu(\Delta_n) < \mu(E_n) + \varepsilon_n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \supset E$.

Система открытых множеств $\Delta, \widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \ldots$ образует открытое покрытие компакта $\overline{E}$.

Пусть $\Delta, \widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \ldots, \widetilde{E}_k$ — извлеченное из него конечное покрытие компакта $\overline{E}$. Поскольку $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k$, то множества $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_k, E_k$ тоже образуют покрытие $\overline{E}$ и, значит,

$$\mu(E) \leqslant \mu(\overline{E}) \leqslant \mu(E_k) + \mu(\Delta) + \mu(\Delta_1) + \ldots + \mu(\Delta_k) < \mu(E_k) + 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\mu(E) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

b) То, что $f|_{E_n} \in \mathcal{R}(E_n)$, нам хорошо известно и следует из критерия Лебега существование интеграла по измеримому множеству. По условию $f \in \mathcal{R}(E)$, значит, существует постоянная M такая, что $|f(x)| \leqslant M$ на E. Из аддитивности интеграла и общей оценки интеграла получаем

$$\left| \int\limits_E f(x)\,dx - \int\limits_{E_n} f(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_{E\setminus E_n} f(x)\,dx \right| \leqslant M\mu(E \setminus E_n).$$

Отсюда с учетом доказанного в a) заключаем, что утверждение b) действительно имеет место. ►

Определение 2. Пусть $\{E_n\}$ — исчерпание множества E, а функция $f: E \to \mathbb{R}$ интегрируема на множествах $E_n \in \{E_n\}$. Тогда величина

$$\int\limits_E f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f(x)\,dx,$$

если указанный предел существует и его величина не зависит от выбора любого такого исчерпания множества E, называется *несобственным интегралом от функции f по множеству E*.

Стоящий в левой части последнего равенства символ интеграла обычно пишут для любой заданной на E функции, но говорят, что этот *интеграл существует* или *сходится*, если существует указанный в определении 2 предел. Если же такого общего для всех указанных исчерпаний предела не существует, то говорят, что интеграл от функции f по множеству E не существует или что *интеграл расходится*.

Цель определения 2 состоит в том, чтобы распространить понятие интеграла на случай неограниченной подынтегральной функции или неограниченной области интегрирования.

Введенный символ несобственного интеграла совпадает с символом обычного — собственного интеграла, поэтому необходимо

Замечание 1. Если E — измеримое множество и $f \in \mathcal{R}(E)$, то интеграл от f по E в смысле определения 2 существует и совпадает с собственным интегралом от функции f по множеству E.

◄ Именно об этом говорит утверждение b) доказанной выше леммы. ►

Совокупность всех исчерпаний любого сколь-нибудь обильного множества практически необозрима, да всеми исчерпаниями и не пользуются. Проверку сходимости несобственного интеграла часто облегчает

Утверждение 1. *Если функция $f: E \to \mathbb{R}$ неотрицательна и хотя бы для одного исчерпания $\{E_n\}$ множества E указанный в определении 2 предел существует, то несобственный интеграл от функции f по множеству E сходится.*

◄ Пусть $\{E'_k\}$ — другое исчерпание множества E, на элементах которого функция f интегрируема. Множества $E^k_n := E'_k \cap E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют исчерпание измеримого множества E'_k, поэтому из утверждения b) леммы следует, что

$$\int\limits_{E'_k} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E^k_n} f(x)\,dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f(x)\,dx = A.$$

Поскольку $f \geqslant 0$, а $E'_k \subset E'_{k+1} \subset E$, то

$$\exists \lim_{k\to\infty} \int\limits_{E'_k} f(x)\,dx = B \leqslant A.$$

Но теперь исчерпания $\{E_n\}$, $\{E'_k\}$ равноправны, поэтому $A \leqslant B$ и, значит, $A = B$. ►

Пример 1. Найдем несобственный интеграл $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

Будем исчерпывать плоскость $\mathbb{R}^2$ последовательностью кругов $E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < n^2\}$. После перехода к полярным координатам легко получаем, что

$$\iint\limits_{E_n} e^{(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^n e^{-r^2} r\,dr = \pi(1 - e^{-n^2}) \to \pi \quad \text{при } n \to \infty.$$

В силу утверждения 1 уже можно заключить, что рассматриваемый интеграл сходится и равен π.

Из полученного результата можно извлечь полезное следствие, если рассмотреть теперь исчерпание плоскости квадратами $E'_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < n \wedge |y| < n\}$. По теореме Фубини

$$\iint\limits_{E'_n} e^{(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_{-n}^{n} dy \int\limits_{-n}^{n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx = \left(\int\limits_{-n}^{n} e^{-t^2}\,dt\right)^2.$$

В силу утверждения 1 последняя величина при $n \to \infty$ должна стремиться к π. Таким образом, мы вслед за Эйлером и Пуассоном получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Некоторые дополнительные не вполне очевидные на первый взгляд особенности определения 2 несобственного кратного интеграла будут указаны ниже в замечании 3.

2. Мажорантный признак сходимости несобственного интеграла

Утверждение 2. *Пусть f и g — определенные на множестве E и интегрируемые на одних и тех же его измеримых подмножествах функции, причем $|f(x)| \leqslant g(x)$ на E. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_E g(x)\,dx$ вытекает сходимость интегралов $\int\limits_E |f|(x)\,dx$ и $\int\limits_E f(x)\,dx$.*

◄ Пусть $\{E_n\}$ — исчерпание множества E, на элементах которого обе функции g и f интегрируемы. Из критерия Лебега вытекает интегрируемость функции $|f|$ на множествах E_n, $n \in \mathbb{N}$, поэтому можно записать, что

$$\int\limits_{E_{n+k}} |f|(x)\,dx - \int\limits_{E_n} |f|(x)\,dx = \int\limits_{E_{n+k}\setminus E_n} |f|(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{E_{n+k}\setminus E_n} g(x)\,dx = \int\limits_{E_{n+k}} g(x)\,dx - \int\limits_{E_n} g(x)\,dx,$$

где k и n — любые натуральные числа. Эти неравенства с учетом утверждения 1 и критерия Коши существования предела последовательности позволяют заключить, что интеграл $\int\limits_E |f|(x)\,dx$ сходится.

Рассмотрим теперь функции $f_+ := \frac{1}{2}(|f| + f)$, $f_- := \frac{1}{2}(|f| - f)$. Очевидно, $0 \leqslant f_+ \leqslant |f|$ и $0 \leqslant f_- \leqslant |f|$. В силу уже доказанного несобственные интегралы от функций f_+ и f_- по множеству E сходятся. Но $f = f_+ - f_-$, значит, сходится и несобственный интеграл от функции f по этому же множеству (и он равен разности интегралов от функций f_+ и f_-). ►

Для того, чтобы утверждением 2 можно было эффективно пользоваться при исследовании сходимости несобственных интегралов, полезно иметь некоторый набор эталонных функций для сравнения. Рассмотрим в этой связи

Пример 2. В n-мерном единичном шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ с выколотым центром 0 рассматривается функция $1/r^\alpha$, где $r = d(0, x)$ — расстояние от точки $x \in B \setminus 0$ до точки 0. Выясним, при каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ интеграл от этой функции по области $B \setminus 0$ сходится. Для этого построим исчерпание области кольцевыми областями $B(\varepsilon) = \{x \in B \mid \varepsilon < d(0, x) < 1\}$.

Переходя к полярным координатам с центром 0, по теореме Фубини получаем

$$\int\limits_{B(\varepsilon)} \frac{dx}{r^\alpha(x)} = \int\limits_S f(\varphi)\,d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 \frac{r^{n-1}\,dr}{r^\alpha} = c\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{\alpha-n+1}},$$

где $d\varphi = d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1}$, $f(\varphi)$ — некоторое произведение синусов углов $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_{n-2}$, появляющееся в якобиане перехода к полярным координатам в $\mathbb{R}^n$, а c — величина интеграла по S, которая зависит только от n и не зависит от r и ε.

При $\varepsilon \to +0$ полученная величина интеграла по $B(\varepsilon)$ будет иметь конечный предел, если $\alpha < n$. В остальных случаях последний интеграл стремится к бесконечности, когда $\varepsilon \to +0$.

Итак, мы показали, что функция $\frac{1}{d^\alpha(0, x)}$, где d — расстояние до точки 0, интегрируется в проколотой окрестности этой точки лишь при $\alpha < n$, где n — размерность пространства.

Аналогично показывается, что вне шара B, т. е. в окрестности бесконечности, эта же функция интегрируется в несобственном смысле, лишь когда $\alpha > n$.

Пример 3. Пусть $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x^i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ — n-мерный куб, а I_k — его k-мерная грань, задаваемая условиями $x^{k+1} = \ldots = x^n = 0$. На множестве $I \setminus I_k$ рассмотрим функцию $\frac{1}{d^\alpha(x)}$, где $d(x)$ — расстояние от точки $x \in$ $\in I \setminus I_k$ до грани I_k. Выясним, при каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ интеграл от этой функции по множеству $I \setminus I_k$ сходится.

Заметим, что если $x = (x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n)$, то

$$d(x) = \sqrt{(x^{k+1})^2 + \ldots + (x^n)^2}.$$

Пусть $I(\varepsilon)$ — это куб I, из которого удалена ε-окрестность грани I_k. По теореме Фубини

$$\int\limits_{I(\varepsilon)} \frac{dx}{d^\alpha(x)} = \int\limits_{I_k} dx^1 \ldots dx^k \int\limits_{I_{n-k}(\varepsilon)} \frac{dx^{k+1} \ldots dx^n}{((x^{k+1})^2 + \ldots + (x^n)^2)^{\alpha/2}} = \int\limits_{I_{n-k}(\varepsilon)} \frac{du}{|u|^\alpha},$$

где $u = (x^{k+1}, \ldots, x^n)$, $I_{n-k}(\varepsilon)$ — грань $I_{n-k} \subset \mathbb{R}^{n-k}$, из которой удалена ε-окрестность точки $u = 0$.

Но на базе приобретенного в примере 1 опыта ясно, что последний интеграл сходится лишь при $\alpha < n - k$. Значит, рассматриваемый нами несобственный интеграл сходится лишь при $\alpha < n - k$, где k — размерность грани, около которой функция может неограниченно возрастать.

Замечание 2. При доказательстве утверждения 2 было проверено, что сходимость интеграла от функции $|f|$ влечет сходимость интеграла от функции f. Оказывается, для несобственного в смысле определения 2 интеграла верно и обратное утверждение, чего не было в рассматривавшемся нами прежде случае несобственного интеграла на прямой, где мы различали абсо-

лютную и неабсолютную (условную) сходимости несобственного интеграла. Чтобы сразу понять суть возникшего нового явления, связанного с определением 2, рассмотрим следующий

Пример 4. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ определена на множестве $\mathbb{R}_+$ неотрицательных чисел следующими условиями:

$$f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

если $n-1 \leqslant x < n$, $n \in \mathbb{N}$.

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится, то, как легко видеть, предел при $A \to \infty$ интеграла $\int\limits_0^A f(x)\,dx$ существует и равен сумме указанного ряда. Однако этот ряд не сходится абсолютно, и перестановкой его членов можно получить ряд, например, расходящийся к $+\infty$. Частичные суммы нового ряда можно интерпретировать как интегралы от функции f по объединению E_n соответствующих членам ряда отрезков вещественной оси. Множества E_n в совокупности, очевидно, образуют исчерпание области $\mathbb{R}_+$ задания функции f.

Таким образом, несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx$ от предъявленной функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ в прежнем его понимании существует, а в смысле определения 2 не существует.

Мы видим, что требуемая в определении 2 независимость предела от выбора исчерпания эквивалентна независимости суммы ряда от порядка суммирования его членов. Последнее, как нам известно, в точности равносильно абсолютной сходимости.

На самом-то деле практически всегда приходится рассматривать лишь специальные исчерпания следующего вида. Пусть определенная в области D функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ неограничена в окрестности некоторого множества $E \subset \partial D$. Тогда мы удаляем из D точки, лежащие в ε-окрестности множества E, и получаем область $D(\varepsilon) \subset D$. При $\varepsilon \to 0$ эти области порождают исчерпание D. Если же область неограниченная, то ее исчерпание можно получить, взяв дополнения в D к окрестностям бесконечности. Именно такие специальные исчерпания мы в свое время и рассматривали в одномерном случае, и именно эти специальные исчерпания непосредственно ведут к обобщению на случай пространства любой размерности понятия главного (в смысле Коши) значения несобственного интеграла, о котором мы в свое время уже говорили, изучая несобственные интегралы на прямой.

3. Замена переменных в несобственном интеграле. В заключение получим формулу замены переменных в несобственных интегралах и тем самым сделаем весьма ценное, хотя и очень простое дополнение к теоремам 1 и 2 из § 5.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi\colon D_t \to D_x$ — *диффеоморфное отображение открытого множества* $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ *на такое же множество* $D_x \subset \mathbb{R}^n_x$, *а функция* $f\colon D_x \to \mathbb{R}$ *интегрируема на измеримых компактных подмножествах множества* D_x. *Если несобственный интеграл* $\int\limits_{D_x} f(x)\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int\limits_{D_t} ((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt$ *также сходится и их значения совпадают.*

◄ Открытое множество $D_t \subset \mathbb{R}^n_t$ можно исчерпать последовательностью лежащих в D_t компактов E^k_t, $k\in\mathbb{N}$, каждый из которых является объединением конечного числа промежутков пространства $\mathbb{R}^n_t$ (см. в этой связи начало доказательства леммы 1 из § 5). Поскольку $\varphi\colon D_t \to D_x$ — диффеоморфизм, исчерпанию $\{E^k_t\}$ множества D_t отвечает исчерпание E^k_x множества D_x, где $E^k_x = \varphi(E^k_t)$ — измеримые компакты в D_x (измеримость множеств E^k_x следует из леммы 1, § 5). В силу утверждения 1 из § 5 можно записать, что

$$\int\limits_{E^k_x} f(x)\,dx = \int\limits_{E^k_t} ((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt.$$

Левая часть этого равенства при $k\to\infty$ по условию имеет предел. Значит, правая часть при $k\to\infty$ тоже имеет, и притом тот же, предел. ►

Замечание 3. Приведенным рассуждением проверено, что стоящий в правой части последнего равенства интеграл имеет один и тот же предел при любом исчерпании D_t указанного специального вида. В дальнейшем мы будем использовать именно эту доказанную часть теоремы. Но формально для завершения доказательства сформулированного утверждения необходимо в соответствии с определением 2 проверить, что найденный предел существует для любого исчерпания области D_t. Эту (не вполне элементарную) проверку мы оставляем читателю в качестве хорошего упражнения. Заметим только, что из доказанного уже можно извлечь сходимость несобственного интеграла от функции $|f\circ\varphi|\,|\det\varphi'|$ по множеству D_t (см. задачу 7).

Теорема 2. *Пусть* $\varphi\colon D_t \to D_x$ — *отображение открытых множеств* D_t *и* D_x. *Предположим, что в* D_t *и* D_x *можно указать такие множества* S_t, S_x *меры нуль, что* $D_t \setminus S_t$, $D_x \setminus S_x$ — *открытые множества, а* φ *диффеоморфно отображает первое из них на второе. Если при этих условиях несобственный интеграл* $\int\limits_{D_x} f(x)\,dx$ *сходится, то сходится также интеграл* $\int\limits_{D_t\setminus S_t} ((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt$ *и их значения совпадают. Если к тому же величина* $|\det\varphi'|$ *определена и ограничена на компактных подмножествах множества* D_t, *то функция* $(f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|$ *интегрируема в несобственном смысле по множеству* D_t *и имеет место равенство*

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t\setminus S_t} ((f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|)(t)\,dt.$$

◄ Сформулированное утверждение является прямым следствием теоремы 1 настоящего параграфа и теоремы 2 из § 5, если учесть, что при отыскании несобственного интеграла по открытому множеству можно ограничиться рассмотрением исчерпаний, состоящих из измеримых компактов (см. замечание 3). ►

Пример 5. Вычислим интеграл $\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$, который при $\alpha > 0$ является несобственным, поскольку тогда подынтегральная функция неограничена в окрестности окружности $x^2+y^2=1$.

Переходя к полярным координатам, по теореме 2 получаем

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha} = \iint\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\0<r<1}} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(1-r^2)^\alpha}.$$

При $\alpha > 0$ последний интеграл тоже несобственный, но, поскольку подынтегральная функция неотрицательна, его можно вычислять как предел по специальному исчерпанию прямоугольника $I = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \varphi < 2\pi \wedge \wedge\, 0 < r < 1\}$ прямоугольниками $I_n = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \varphi < 2\pi \wedge 0 < r < 1 - \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Используя теорему Фубини, находим, что при $\alpha < 1$

$$\iint\limits_{\substack{0<\varphi<2\pi\\0<r<1}} \frac{r\,dr\,d\varphi}{(1-r^2)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1-1/n} \frac{r\,dr}{(1-r^2)^\alpha} = \frac{\pi}{1-\alpha}.$$

На основе этих же соображений можно сделать вывод, что исходный интеграл при $\alpha \geqslant 1$ расходится.

Пример 6. Покажем, что интеграл $\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$ сходится лишь при условии $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$.

◄ Ввиду очевидной симметрии достаточно рассмотреть интеграл только по области D, в которой $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $x+y \geqslant 1$.

Ясно, что для сходимости интеграла необходимо одновременное выполнение условий $p>0$ и $q>0$. Действительно, если бы, например, было $p \leqslant 0$, то уже для интеграла по прямоугольнику $I_A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant A \wedge 0 \leqslant y \leqslant \leqslant 1\}$, лежащему в D, мы бы получили оценку

$$\iint\limits_{I_A} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q} = \int\limits_1^A dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{|x|^p+|y|^q} \geqslant \int\limits_1^A dx \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+|y|^q} = (A-1)\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+|y|^q},$$

которая показывает, что при $A \to \infty$ этот интеграл неограниченно возрастает. Таким образом, в дальнейших рассмотрениях можно считать, что $p>0$ и $q>0$.

В ограниченной части области D подынтегральная функция не имеет особенностей, поэтому исследование сходимости нашего интеграла равносиль-

но исследованию сходимости интеграла от той же функции, но, например, по той части G области D, где $x^p + y^q \geqslant a > 0$. Число a предполагается достаточно большим, чтобы кривая $x^p + y^q = a$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ лежала в D.

Переходя к обобщенным полярным координатам φ по формулам

$$x = (r\cos^2\varphi)^{1/p}, \quad y = (r\sin^2\varphi)^{1/q},$$

на основании теоремы 2 получаем

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{|x|^p + |y|^q} = \frac{2}{p\cdot q} \iint\limits_{\substack{0<\varphi<\pi/2\\ a\leqslant r<\infty}} \left(r^{1/p+1/q-2}\cos^{2/p-1}\varphi\,\sin^{2/q-1}\varphi\right) dr\,d\varphi.$$

Используя исчерпание области $\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<\varphi<\pi/2 \wedge a\leqslant r<\infty\}$ промежутками $I_{\varepsilon A} = \{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\pi/2-\varepsilon \wedge a\leqslant r\leqslant A\}$ и применяя теорему Фубини, получаем

$$\iint\limits_{\substack{0<\varphi<\pi/2\\ a\leqslant r<\infty}} \left(r^{1/p+1/q-2}\cos^{2/p-1}\varphi\,\sin^{2/q-1}\varphi\right) dr\,d\varphi =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon} \cos^{2/p-1}\varphi\,\sin^{2/q-1}\varphi\,d\varphi\ \lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A r^{1/p+1/q-2}dr.$$

Поскольку $p>0$ и $q>0$, первый из этих пределов заведомо конечен, а второй конечен, лишь когда $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$. ►

Задачи и упражнения

1. Укажите условие на p и q, при котором интеграл $\iint\limits_{0<|x|+|y|\leqslant 1} \frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$ сходится.

2. a) Существует ли $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_0^A \cos x^2\,dx$?

b) Сходится ли интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^1}\cos x^2\,dx$ в смысле определения 2?

c) Проверив, что

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{|x|\leqslant n}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \pi \quad\text{и}\quad \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = 0,$$

убедитесь, что интеграл от $\sin(x^2+y^2)$ по плоскости $\mathbb{R}^2$ расходится.

3. a) Вычислите интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$.

b) Следует быть осторожным, применяя теорему Фубини к несобственным (как, впрочем, и к собственным) интегралам. Покажите, что интеграл

$$\iint\limits_{x\geqslant 1,\,y\geqslant 1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

расходится, в то время как оба повторных интеграла

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \quad \text{и} \quad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

сходятся.

c) Докажите, что если $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ и $f \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^2$, то из существования любого из двух повторных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx$ вытекает, что интеграл $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dx\,dy$ сходится и равен значению этого повторного интеграла.

4. Покажите, что если $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\,dx = f(0).$$

5. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, а S — гладкая k-мерная поверхность, лежащая на границе области D. Покажите, что если функция $f \in C(D, \mathbb{R})$ допускает оценку $|f| < \frac{1}{d^{n-k-\varepsilon}}$, где $d = d(S, x)$ — расстояние от точки $x \in D$ до S, а $\varepsilon > 0$, то интеграл от функции f по области D сходится.

6. В дополнение к замечанию 1 покажите, что оно остается в силе даже без предположения об измеримости множества E.

7. Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а функция $f : D \to \mathbb{R}$ интегрируема на любом измеримом компакте, лежащем в D.

a) Покажите, что если несобственный интеграл от функции $|f|$ по D расходится, то найдется такое исчерпание $\{E_n\}$ множества D, что каждое из множеств E_n является *элементарным компактом* в D, состоящим из конечного числа n-мерных промежутков и $\iint\limits_{E_n} |f|(x)\,dx \to +\infty$ при $n \to \infty$.

b) Проверьте, что если интеграл от f по некоторому множеству сходится, а от $|f|$ расходится, то должны расходиться также интегралы от $f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ и $f_- = \frac{1}{2}(|f| - f)$.

c) Покажите, что полученное в a) исчерпание $\{E_n\}$ можно разрядить так, что для любого $n \in \mathbb{N}$ будет выполняться соотношение $\int\limits_{E_{n+1}\setminus E_n} f_+(x)\,dx > \int\limits_{E_n} |f|(x)\,dx + n$.

d) С использованием нижних интегральных сумм покажите, что если $\int\limits_E f_+(x)\,dx > A$, то найдется такой элементарный компакт $F \subset E$, состоящий из конечного числа промежутков, что $\int\limits_F f(x)\,dx > A$.

e) Выведите из c) и d), что существует такой элементарный компакт $F_n \subset E_{n+1} \setminus E_n$, для которого $\int\limits_{F_n} f(x)\,dx > \int\limits_{E_n} |f|(x)\,dx + n$.

f) Покажите, используя e), что множества $G_n = F_n \cap E_n$ являются лежащими в D элементарными компактами (т. е. состоят из конечного числа промежутков), которые в совокупности образуют исчерпание множества D и для которых имеет место соотношение $\int\limits_{G_n} f(x)\,dx \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Таким образом, если интеграл от $|f|$ расходится, то расходится (в смысле определения 2) и интеграл от функции f.

8. Проведите подробно доказательство теоремы 2.

9. Напомним, что если $x=(x^1, \ldots, x^n)$, а $\xi=(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, то $\langle x, \xi\rangle = x^1\xi^1+\ldots+x^n\xi^n$ есть стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Пусть $A=(a_{ij})$ — комплексная симметричная $(n\times n)$-матрица. Обозначим через $\operatorname{Re} A$ матрицу с элементами $\operatorname{Re} a_{ij}$; запись $\operatorname{Re} A\geqslant 0$ ($\operatorname{Re} A>0$) означает, что $\langle(\operatorname{Re} A)x, x\rangle\geqslant 0$ (соответственно >0) для любого $x\in\mathbb{R}^n$, $x\neq 0$.

a) Покажите, что если $\operatorname{Re} A\geqslant 0$, то при $\lambda>0$, $\xi\in\mathbb{R}^n$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Bigl(-\frac{\lambda}{2}\langle Ax, x\rangle - i\langle x, \xi\rangle\Bigr)\,dx = \Bigl(\frac{2\pi}{\lambda}\Bigr)^{n/2}(\det A)^{-1/2}\exp\Bigl(-\frac{1}{2\lambda}\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle\Bigr).$$

При этом ветвь $\sqrt{\det A}$ выбрана следующим образом:

$$(\det A)^{-1/2} = |\det A|^{-1/2}\exp(-i \operatorname{Ind} A),$$
$$\operatorname{Ind} A = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\arg\mu_j(A), \quad |\arg\mu_j(A)|\leqslant\frac{\pi}{2},$$

где $\mu_j(A)$ — собственные значения матрицы A.

b) Пусть A — вещественная симметричная невырожденная $(n\times n)$-матрица. Тогда при $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $\lambda>0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\Bigl(i\frac{\lambda}{2}\langle Ax, x\rangle - i\langle x, \xi\rangle\Bigr)\,dx = \Bigl(\frac{2\pi}{\lambda}\Bigr)^{n/2}|\det A|^{-1/2}\exp\Bigl(-\frac{i}{2\lambda}\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle\Bigr)\exp\Bigl(\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn} A\Bigr).$$

Здесь $\operatorname{sgn} A$ — сигнатура матрицы A, т. е.

$$\operatorname{sgn} A = \nu_+(A) - \nu_-(A),$$

где $\nu_+(A)$ — число положительных, $\nu_-(A)$ — число отрицательных собственных значений матрицы A.

Глава XII

Поверхности и дифференциальные формы в $\mathbb{R}^n$

В этой главе разобраны понятия поверхности, края поверхности, согласованной ориентации поверхности и ее края, выведена формула для вычисления площади поверхности, лежащей в $\mathbb{R}^n$, а также даны начальные представления о дифференциальных формах. Владение перечисленными понятиями весьма важно при работе с криволинейными и поверхностными интегралами, которым посвящена следующая глава.

§ 1. Поверхность в $\mathbb{R}^n$

Эталоном k-мерной поверхности является $\mathbb{R}^k$.

Определение 1. *Поверхностью размерности k (k-мерной поверхностью или k-мерным многообразием)* в $\mathbb{R}^n$ называется такое множество $S \subset \mathbb{R}^n$, каждая точка которого имеет в S окрестность[1], гомеоморфную[2] $\mathbb{R}^k$.

Определение 2. Отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to U \subset S$, осуществляющее указанный в определении поверхности гомеоморфизм, называется *картой* или *локальной картой поверхности S*; $\mathbb{R}^k$ — *областью параметров*, а U — *районом* или *областью действия карты* на поверхности S.

Локальная карта вводит в U криволинейные координаты, сопоставляя точке $x = \varphi(t) \in U$ числовой набор $t = (t^1, \ldots, t^k) \in \mathbb{R}^k$. Из определения поверхности видно, что совокупность описываемых им объектов S не изменится, если в нем $\mathbb{R}^k$ заменить любым гомеоморфным $\mathbb{R}^k$ топологическим пространством. Чаще всего вместо $\mathbb{R}^k$ за стандартную область параметров локальных карт принимают открытый куб I^k или открытый шар B^k в $\mathbb{R}^k$. Но это чистая условность.

Для проведения некоторых аналогий и в целях большей наглядности ряда последующих построений мы, как правило, в качестве канонической

---

[1] Под окрестностью точки $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ в множестве S, как и прежде, понимается множество $U_S(x) = S \cap U(x)$, где $U(x)$ окрестность x в $\mathbb{R}^n$. Поскольку в дальнейшем речь будет только об окрестностях точки на поверхности, для упрощения обозначений, если не возникает недоразумений, мы пишем U или $U(x)$ вместо $U_S(x)$.

[2] На $S \subset \mathbb{R}^n$, а значит, и на $U \subset S$ имеется естественная, индуцированная из $\mathbb{R}^n$ метрика, поэтому можно говорить о топологическом отображении U в $\mathbb{R}^k$.

области параметров локальных карт поверхности будем брать куб I^k. Итак, карта

$$\varphi\colon I^k \to U \subset S \tag{1}$$

локально дает параметрическое уравнение $x=\varphi(t)$ поверхности $S\subset\mathbb{R}^n$, а сама k-мерная поверхность, таким образом, локально устроена как продеформированный стандартный k-мерный промежуток $I^k\subset\mathbb{R}^n$.

Для вычислительных целей, как будет видно из дальнейшего, параметрическое задание поверхности особенно важно. Иногда всю поверхность можно задать всего лишь одной картой. Такую поверхность обычно называют *элементарной*. Например, график в $\mathbb{R}^{k+1}$ непрерывной функции $f\colon I^k\to\mathbb{R}$ является элементарной поверхностью. Однако элементарность поверхности скорее исключение, чем правило. Например, обычную нашу двумерную земную сферу уже нельзя задать только одной картой. В атласе поверхности Земли должны быть по крайней мере две карты (см. задачу 3 в конце параграфа).

В соответствии с возникшей аналогией примем

Определение 3. Набор $A(S):=\{\varphi_i\colon I^k_i\to U_i,\, i\in\mathbb{N}\}$ локальных карт поверхности S, районы действия которых в совокупности покрывают всю поверхность (т. е. $S=\bigcup\limits_i U_i$), называется *атласом поверхности S*.

Объединение двух атласов одной и той же поверхности, очевидно, тоже является атласом этой поверхности.

Если на отображения (1) — локальные параметрические уравнения поверхности — не накладывать других ограничений, кроме того, что это должны быть гомеоморфизмы, то поверхность в $\mathbb{R}^n$ может оказаться расположенной весьма странно. Например, может случиться, что гомеоморфная двумерной сфере поверхность, т. е. топологически — сфера, лежит в $\mathbb{R}^3$, но ограничиваемая ею область не гомеоморфна шару (так называемая рогатая сфера[1]).

Чтобы избавиться от подобных затруднений, не связанных с существом рассматриваемых в анализе вопросов, мы в гл. VIII, § 7 определили *гладкую k-мерную поверхность*, лежащую в $\mathbb{R}^n$, как такое множество $S\subset\mathbb{R}^n$, что для каждой точки $x_0\in S$ найдутся ее окрестность $U(x_0)$ в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\psi\colon U(x_0)\to I^n=\{t\in\mathbb{R}^n \mid |t^i|<1,\, i=1,\ldots,n\}$, при котором множество $U_S(x_0):=S\cap U(x_0)$ преобразуется в куб $I^k=I^n\cap\{t\in\mathbb{R}^n \mid t^{k+1}=\ldots=t^n=0\}$.

Ясно, что гладкая в этом смысле поверхность является поверхностью в смысле определения 1, поскольку отображения $x=\psi^{-1}(t^1,\ldots,t^k,0,\ldots,0)=\varphi(t^1,\ldots,t^k)$, очевидно, задают локальную параметризацию поверхности. Обратное, как следует из упомянутого выше примера рогатой сферы, вообще говоря, не имеет места, если φ просто гомеоморфизмы. Однако если отображения (1) достаточно регулярны, то понятие поверхности в прежнем и новом определении на самом-то деле совпадают.

[1]Пример поверхности, о которой идет речь, был построен Александером. Дж. У. Александер (1888—1977) — американский математик-тополог.

По существу, это уже было показано в примере 8 из § 7 гл. VIII, но учитывая важность вопроса, сформулируем утверждение точно и напомним, как получается ответ.

Утверждение. *Если отображение* (1) *принадлежит классу* $C^{(1)}(I^k, \mathbb{R}^n)$ *и в каждой точке куба* I^k *имеет максимально возможный ранг* k, *то найдутся число* $\varepsilon > 0$ *и такой диффеоморфизм* $\varphi_\varepsilon\colon I^n_\varepsilon \to \mathbb{R}^n$ *куба* $I^n_\varepsilon := \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t^i| \leqslant \varepsilon,$ $i = 1, \ldots, n\}$ *размерности* n *в пространство* $\mathbb{R}^n$, *что* $\varphi|_{I^k \cap I^n_\varepsilon} = \varphi_\varepsilon|_{I^k \cap I^n_\varepsilon}$.

Иными словами, утверждается, что при указанных условиях отображения (1) локально являются ограничениями на k-мерные кубы $I^k_\varepsilon = I^k \cap I^n_\varepsilon$ диффеоморфизмов полномерных кубов I^n_ε.

◄ Положим для определенности, что уже первые k из n координатных функций $x^i = \varphi^i(t^i, \ldots, t^k)$, $i = 1, \ldots, n$, отображения $x = \varphi(t)$ таковы, что $\det\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial t^j}\right)(0) \neq 0$, $i, j = 1, \ldots, k$. Тогда в силу теоремы о неявной функции соотношения

$$\begin{cases} x^1 = \varphi^1(t^1, \ldots, t^k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^k = \varphi^k(t^1, \ldots, t^k), \\ x^{k+1} = \varphi^{k+1}(t^1, \ldots, t^k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = \varphi^n(t^1, \ldots, t^k) \end{cases}$$

около точки $(t_0, x_0) = (0, \varphi(0))$ эквивалентны соотношениям

$$\begin{aligned} t^1 &= f^1(x^1, \ldots, x^k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t^k &= f^k(x^1, \ldots, x^k), \\ x^{k+1} &= f^{k+1}(x^1, \ldots, x^k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n &= f^n(x^1, \ldots, x^k). \end{aligned}$$

В таком случае отображение

$$\begin{aligned} t^1 &= f^1(x^1, \ldots, x^k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t^k &= f^k(x^1, \ldots, x^k), \\ t^{k+1} &= x^{k+1} - f^{k+1}(x^1, \ldots, x^k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t^n &= x^n - f^n(x^1, \ldots, x^k) \end{aligned}$$

является диффеоморфизмом полномерной окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. В качестве φ_ε можно теперь взять ограничение обратного к нему диффеоморфизма на некоторый куб I^n_ε. ►

Изменением масштаба, разумеется, можно сделать так, чтобы в последнем диффеоморфизме было $\varepsilon = 1$, а куб I^n_ε был единичным.

Итак, показано, что для гладкой поверхности в $\mathbb{R}^n$ можно принять следующее эквивалентное прежнему

Определение 4. Поверхность размерности k в $\mathbb{R}^n$ (введенная определением 1) называется *гладкой* (*класса* $C^{(m)}$, $m \geqslant 1$), если она обладает атласом, локальные карты которого являются гладкими (класса $C^{(m)}$, $m \geqslant 1$) отображениями и в каждой точке области своего определения имеют ранг k.

Заметим, что условие на ранг отображений (1) существенно. Например, аналитическое отображение $\mathbb{R} \ni t \mapsto (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$, задаваемое формулами $x^1 = t^2$, $x^2 = t^3$, определяет кривую в плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющую острие в точке $(0, 0)$. Ясно, что эта кривая не является гладкой 1-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^2$, ибо последняя должна иметь касательную (1-мерную касательную плоскость) в любой точке[1].

Таким образом, в частности, не следует смешивать понятие гладкого пути класса $C^{(m)}$ и понятие гладкой кривой класса $C^{(m)}$.

В анализе, как правило, имеют дело с достаточно гладкими параметризациями (1) ранга k. Мы убедились, что в этом случае принятое здесь определение 4 гладкой поверхности совпадает с уже рассмотренным в гл. VIII, § 7. Однако если прежнее определение было наглядным и сразу избавляло от некоторых лишних хлопот, то известное преимущество определения 4, согласованного с определением 1 поверхности, состоит в том, что оно с легкостью может быть доведено до определения абстрактного многообразия, не обязательно лежащего в $\mathbb{R}^n$. Здесь же нас будут интересовать пока только поверхности в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим некоторые примеры таких поверхностей.

Пример 1. Напомним, что если $F^i \in C^{(m)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n-k$ — такой набор гладких функций, что система уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

в любой точке множества S своих решений имеет ранг $n-k$, то эта система либо вовсе не имеет решений, либо в качестве множества решений имеет k-мерную $C^{(m)}$-гладкую поверхность S в $\mathbb{R}^n$.

◄ Проверим, что если $S \neq \varnothing$, то S действительно удовлетворяет определению 4. Это вытекает из теоремы о неявной функции, в силу которой в некоторой окрестности любой точки $x_0 \in S$ система (2), с точностью до переобо-

[1] О касательной плоскости см. в гл. VIII, § 7.

значения переменных, эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^{k+1} = f^{k+1}(x^1, \dots, x^k), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n = f^n(x^1, \dots, x^k), \end{cases}$$

где $f^{k+1}, \dots, f^n \in C^{(m)}$. Записывая последнюю систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = t^1, \\ \dots\dots \\ x^k = t^k, \\ x^{k+1} = f^{k+1}(t^1, \dots, t^k), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n = f^n(t^1, \dots, t^k), \end{cases}$$

приходим к параметрическому уравнению окрестности точки $x_0 \in S$ на S. Дополнительным преобразованием область параметров, очевидно, можно превратить в каноническую, например в I^k, и получить стандартную локальную карту (1). ►

Пример 2. В частности, задаваемая в $\mathbb{R}^n$ уравнением

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = r^2 \quad (r > 0) \tag{3}$$

сфера есть $(n-1)$-мерная гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, поскольку множество S решений уравнения (3), очевидно, непусто и в любой точке S градиент левой части уравнения (3) отличен от нуля.

При $n = 2$ получаем в $\mathbb{R}^2$ окружность

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2,$$

которую легко локально параметризовать полярным углом θ, используя полярные координаты

$$\begin{cases} x^1 = r\cos\theta, \\ x^2 = r\sin\theta. \end{cases}$$

Отображение $\theta \mapsto (x^1, x^2)(\theta)$ при фиксированном значении $r > 0$ является диффеоморфизмом на любом промежутке вида $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$, и двух карт (например, отвечающих значениям $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = -\pi$) достаточно, чтобы составить атлас окружности. Одной канонической картой (1) здесь обойтись нельзя хотя бы потому, что окружность — компакт, в отличие от $\mathbb{R}^1$ или $I^1 = B^1$, а свойство топологического пространства быть компактом инвариантно относительно топологических преобразований.

Полярные (сферические) координаты могут быть использованы и для параметризации двумерной сферы

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2$$

в $\mathbb{R}^3$. Обозначая через ψ угол между направлением вектора (x^1, x^2, x^3) и направлением оси Ox^3 (т. е. $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$), а через φ — полярный угол проекции радиус-вектора (x^1, x^2, x^3) на плоскость (x^1, x^2), получаем

$$\begin{aligned} x^3 &= r\cos\psi, \\ x^2 &= r\sin\psi\sin\varphi, \\ x^1 &= r\sin\psi\cos\varphi. \end{aligned}$$

В общем случае полярные координаты $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ в $\mathbb{R}^n$ вводятся соотношениями

$$\begin{aligned} x^1 &= r\cos\theta_1, \\ x^2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x^n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Напомним якобиан

$$J = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdot\ldots\cdot\sin\theta_{n-2} \tag{5}$$

перехода (4) от общих полярных координат $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ к декартовым координатам $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n$. Из выражения якобиана видно, что он отличен от нуля, если, например, $0<\theta_i<\pi$, $i=1, \ldots, n-2$, и $r>0$. Значит, даже не ссылаясь на простой геометрический смысл параметров $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$, можно гарантировать, что при фиксированном $r>0$ отображение $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) \mapsto (x^1, \ldots, x^n)$ как ограничение локального диффеоморфизма $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) \mapsto (x^1, \ldots, x^n)$ само локально диффеоморфно. Но сфера однородна относительно группы ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n$, поэтому отсюда уже следует возможность построения локальной карты для окрестности любой точки сферы.

Пример 3. Цилиндр

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 = r^2 \quad (r > 0),$$

при $k < n$ есть $(n-1)$-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, являющаяся прямым произведением $(k-1)$-мерной сферы плоскости переменных $(x^1, \ldots, x^k)$ и $(n-k)$-мерной плоскости переменных $(x^{k+1}, \ldots, x^n)$.

Локальная параметризация этой поверхности, очевидно, может быть получена, если в качестве первых $k-1$ из $(n-1)$ параметров $(t^1, \ldots, t^{n-1})$ взять полярные координаты $\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}$ точки $(k-1)$-мерной сферы в $\mathbb{R}^k$, а $t^k, \ldots, t^{n-1}$ положить равными $x^{k+1}, \ldots, x^n$ соответственно.

Пример 4. Если в плоскости $x=0$ пространства $\mathbb{R}^3$, наделенного декартовыми координатами (x, y, z), взять кривую (1-мерную поверхность), не пересекающую ось Oz, и вращать ее относительно оси Oz, то получится 2-мерная поверхность, в качестве локальных координат которой можно принять

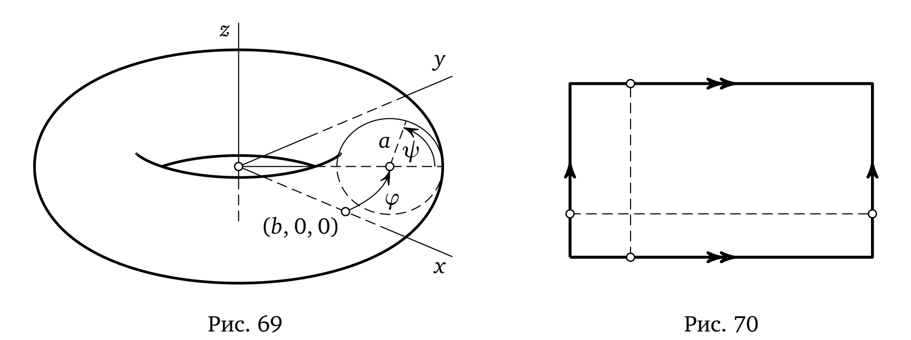


Рис. 69 Рис. 70

локальные координаты исходной кривой (меридиана) и, например, угол поворота (локальная координата на параллели).

В частности, если в качестве исходной кривой взять окружность радиуса a с центром в точке $(b, 0, 0)$, то при $a < b$ получим двумерный тор (рис. 69). Его параметрическое уравнение может быть представлено в виде

$$\begin{cases} x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z = a\sin\psi, \end{cases}$$

где ψ — угловой параметр на исходной окружности — меридиане, а φ — угловой параметр на параллели.

Любую поверхность, гомеоморфную построенному тору вращения, в топологии принято называть *тором* (точнее, *двумерным тором*). Как видно, двумерный тор есть прямое произведение двух окружностей. Поскольку окружность получается из отрезка склеиванием (отождествлением) его концов, тор можно получить из прямого произведения отрезков, т. е. из прямоугольника, склеиванием противоположных сторон прямоугольника по соответствующим точкам (рис. 70).

В сущности, этим мы уже в свое время пользовались, когда установили, что конфигурационное пространство двойного маятника является двумерным тором, а движению маятника соответствует путь на торе.

Пример 5. Если гибкую ленту (прямоугольник) склеить по стрелкам, указанным на рис. 71, a, то можно получить кольцо (рис. 71, c) или цилин-

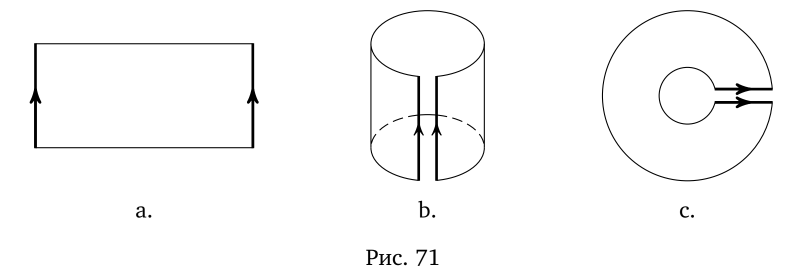
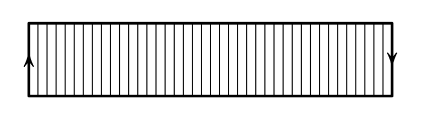
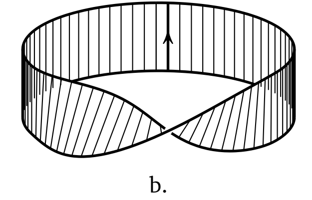


Рис. 71



a.



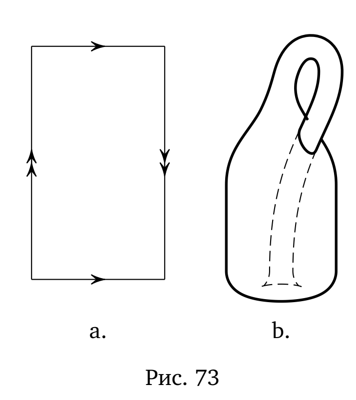
b.

Рис. 72

дрическую поверхность (рис. 71, b), что с топологической точки зрения одно и то же (эти поверхности гомеоморфны). Если же ленту склеить по стрелкам, изображенным на рис. 72, a, то получим в $\mathbb{R}^3$ поверхность (рис. 72, b), называемую в математике *листом Мёбиуса*[1].

Локальные координаты на этой поверхности естественно вводятся посредством координат на плоскости, в которой лежит исходный прямоугольник.

Пример 6. Сопоставляя изложенное в примерах 4 и 5, поддавшись естественной аналогии, можно теперь предписать склейку прямоугольника (рис. 73, a), объединяющую в себе и элементы тора, и элементы листа Мёбиуса. Но подобно тому, как лист Мёбиуса нельзя было склеить без разрывов или самопересечений, не выходя за пределы плоскости $\mathbb{R}^2$, так и предписанную склейку не удастся выполнить в $\mathbb{R}^3$. Однако в $\mathbb{R}^4$ это уже можно сделать и в результате получить в $\mathbb{R}^4$ поверхность, которую принято называть *бутылкой Клейна*[2]. Попытка изобразить эту поверхность предпринята на рис. 73, b.



a. b.

Рис. 73

Последний пример дает некоторое представление о том, что поверхность порой легче описать саму по себе, нежели ее же, лежащую в определенном пространстве $\mathbb{R}^n$. Более того, многие важные поверхности (различной размерности) первоначально возникают не как подмножества $\mathbb{R}^n$, а, например, как фазовые пространства механических систем, как геометрический образ непрерывных групп преобразований, как фактор-пространства относительно групп автоморфизмов исходного пространства, и так далее, и тому подобное. Мы ограничимся пока этими первоначальными замечаниями, оставляя их уточнение до гл. XV, где будет дано общее определение поверхности, не обязательно лежащей в $\mathbb{R}^n$. Но уже здесь, еще не дав этого общего опреде-

[1] А. Ф. Мёбиус (1790—1868) — немецкий математик и астроном.

[2] Ф. Х. Клейн (1849—1925) — крупный немецкий математик, впервые строго обосновавший непротиворечивость неевклидовой геометрии. Знаток истории математики, один из организаторов издания «Энциклопедии математических наук».

ления, сообщим, что, согласно известной теореме Уитни[1], любую k-мерную поверхность можно гомеоморфно отобразить на некоторую поверхность, лежащую в пространстве $\mathbb{R}^{2k+1}$. Значит, рассматривая поверхности в $\mathbb{R}^n$, мы на самом-то деле ничего не теряем с точки зрения их топологического разнообразия и классификации. Эти вопросы, однако, лежат уже в стороне от наших скромных потребностей в геометрии.

Задачи и упражнения

1. Для каждого из множеств E_α, задаваемых условиями

$$\begin{aligned} &E_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = \alpha\},\\ &E_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = \alpha\},\\ &E_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = \alpha\},\\ &E_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| = \alpha\}, \end{aligned}$$

в зависимости от значения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ выясните:

a) является ли E_α поверхностью;

b) если да, то какова размерность E_α;

c) связно ли E_α.

2. Пусть $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, удовлетворяющее условию $f \circ f = f$.

a) Покажите, что множество $f(\mathbb{R}^n)$ является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$.

b) Какой характеристикой отображения f определяется размерность этой поверхности?

3. Пусть $e_0, e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $x = x^0 e_0 + x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n$, $\{x\}$ — точка $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $\mathbb{R}^n \subset \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Формулы

$$\psi_1 = \frac{x - x^0 e_0}{1 - x^0} \quad \text{при } x \neq e_0, \qquad \psi_2 = \frac{x - x^0 e_0}{1 + x^0} \quad \text{при } x \neq -e_0$$

задают стереографические проекции

$$\psi_1 : S^n \setminus \{e_0\} \to \mathbb{R}^n, \qquad \psi_2 : S^n \setminus \{-e_0\} \to \mathbb{R}^n$$

из точек $\{e_0\}$ и $\{-e_0\}$ соответственно.

a) Выясните геометрический смысл этих отображений.

b) Проверьте, что если $t \in \mathbb{R}^n$ и $t \neq 0$, то $(\psi_2 \circ \psi_1^{-1})(t) = \dfrac{t}{|t|^2}$, где $\psi_1^{-1} = (\psi_1|_{S_n \setminus \{e_0\}})^{-1}$.

c) Покажите, что две карты $\psi_1^{-1} = \varphi_1 : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{e_0\}$, $\psi_2^{-1} = \varphi_2 : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{-e_0\}$ образуют атлас сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

d) Докажите, что любой атлас сферы должен иметь не менее двух карт.

---

[1] Х. Уитни (1907—1989) — американский математик-тополог, один из создателей теории расслоенных пространств.

§ 2. Ориентация поверхности

Напомним, прежде всего, что переход от одного репера $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ к другому $\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n$ осуществляется посредством квадратной матрицы (a^i_j), возникающей из разложений $\tilde{\boldsymbol{e}}_j = a^i_j \boldsymbol{e}_i$. Определитель этой матрицы всегда отличен от нуля и все реперы пространства разбиваются на два класса эквивалентности, если в один класс отнести реперы, для которых определитель матрицы взаимного перехода положителен. Такие классы эквивалентности называют *классами ориентации реперов* пространства $\mathbb{R}^n$.

Задать ориентацию $\mathbb{R}^n$ значит по определению фиксировать один из этих классов ориентации реперов $\mathbb{R}^n$. Таким образом, *ориентированное пространство* $\mathbb{R}^n$ — это само пространство $\mathbb{R}^n$ плюс фиксированный класс ориентации его реперов. Чтобы указать класс ориентации, достаточно предъявить любой его репер, поэтому можно сказать, что ориентированное пространство $\mathbb{R}^n$ — это $\mathbb{R}^n$ вместе с фиксированным в нем репером.

Репер в $\mathbb{R}^n$ порождает в $\mathbb{R}^n$ систему координат, и переход от одной такой системы координат к другой осуществляется матрицей (a^j_i), транспонированной по отношению к матрице (a^i_j) связи реперов. Поскольку определители этих матриц одинаковы, можно было бы все сказанное выше об ориентации повторить на уровне *классов ориентации систем координат в* $\mathbb{R}^n$, относя в один класс те координатные системы, взаимный переход между которыми осуществляется матрицей с положительным якобианом.

Оба эти, по существу, совпадающие подхода к описанию понятия ориентации пространства $\mathbb{R}^n$ проявятся и при описании понятия ориентации поверхности, к которому мы переходим. Напомним, однако, еще полезную для дальнейшего связь между координатами и реперами в случае, когда речь идет о системе криволинейных координат.

Пусть G и D — диффеоморфные области, лежащие в двух экземплярах пространства $\mathbb{R}^n$, наделенных декартовыми координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(t^1, \ldots, t^n)$ соответственно. Диффеоморфизм $\varphi: D \to G$ можно рассматривать как введение в области G криволинейных координат $(t^1, \ldots, t^n)$ по закону $x = \varphi(t)$, т. е. точка $x \in G$ наделяется декартовыми координатами $(t^1, \ldots, t^n)$ точки $t = \varphi^{-1}(x) \in D$. Если в каждой точке $t \in D$ рассмотреть репер $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ касательного пространства $T\mathbb{R}^n_t$, составленный из ортов координатных направлений, то в D возникнет поле реперов, которое можно рассматривать как разнесение по точкам D параллельно самому себе орторепера исходного пространства $\mathbb{R}^n$, содержащего область D. Поскольку $\varphi: D \to G$ — диффеоморфизм, отображение $\varphi'(t): TD_t \to TG_{x=\varphi(t)}$ касательных пространств, осуществляемое по закону $TD_t \ni \boldsymbol{e} \to \varphi'(t)\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\xi} \in TG_x$, в каждой точке t является изоморфизмом касательных пространств. Значит, из репера $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ в TD_t при этом получится репер $\boldsymbol{\xi}_1 = \varphi'(t)\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n = \varphi'(t)\boldsymbol{e}_n$ в TG_x, а поле реперов на D преобразуется в поле реперов на G (рис. 74). Поскольку $\varphi \in C^{(1)}(D, G)$, то векторное поле $\boldsymbol{\xi}(x) = \boldsymbol{\xi}(\varphi(t)) = \varphi'(t)\boldsymbol{e}(t)$ непрерывно в G, если векторное

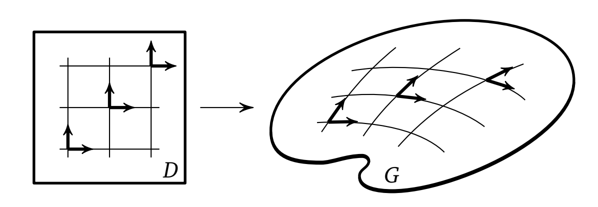


Рис. 74

поле $\boldsymbol{e}(t)$ непрерывно в D. Таким образом, любое непрерывное поле реперов (состоящее из n непрерывных векторных полей) при диффеоморфизме преобразуется в непрерывное поле реперов.

Рассмотрим теперь пару диффеоморфизмов $\varphi_i : D_i \to G$, $i = 1, 2$, которые по закону $x = \varphi_i(t_i)$ вводят в одной и той же области G две системы криволинейных координат $(t_1^1, \ldots, t_1^n)$ и $(t_2^1, \ldots, t_2^n)$. Взаимно обратные диффеоморфизмы $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : D_1 \to D_2$, $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : D_2 \to D_1$ осуществляют взаимные переходы между этими системами координат. Якобианы этих отображений в соответствующих друг другу точках областей D_1, D_2 взаимно обратны и, следовательно, имеют один и тот же знак. Если область G (а вместе с нею D_1 и D_2) связна, то ввиду непрерывности и необращения в нуль рассматриваемых якобианов они имеют один и тот же знак во всех точках областей D_1 и D_2, соответственно.

Значит, все вводимые указанным способом в связной области G системы криволинейных координат распадаются точно на два класса эквивалентности, если в один класс отнести те системы, взаимные преобразования которых осуществляются с положительным якобианом. Такие классы эквивалентности называют *классами ориентации систем криволинейных координат* в области G.

Задать ориентацию в области G по определению означает фиксировать в G класс ориентации систем ее криволинейных координат.

Нетрудно проверить, что принадлежащие одному классу ориентации системы криволинейных координат области G порождают в G (как это описано выше) такие непрерывные поля реперов, которые в каждой точке $x \in G$ лежат в одном классе ориентации реперов касательного пространства TG_x. Можно показать, что вообще непрерывные поля реперов области G в случае ее связности разбиваются точно на два класса эквивалентности, если в один класс относить поля, реперы которых в каждой точке $x \in G$ принадлежат одному классу ориентации реперов пространства TG_x (см. в этой связи задачи 3, 4 в конце параграфа).

Таким образом, одну и ту же ориентацию области G можно задать двумя совершенно равносильными способами: указанием некоторой системы криволинейных координат в G или заданием любого непрерывного поля реперов в G, принадлежащего тому же классу ориентации, что и поле реперов, порожденное этой системой координат.

Теперь ясно, что ориентация связной области G вполне определится, если хотя бы в одной точке $x \in G$ будет указан репер, ориентирующий TG_x. Это обстоятельство широко используется на практике. Если такой *ориентирующий репер* в некоторой точке $x_0 \in G$ задан, и взята какая-то система криволинейных координат $\varphi : D \to G$ в области G, то, построив в TG_{x_0} репер, индуцированный этой системой координат, сравниваем его с заданным в TG_{x_0} ориентирующим репером. В случае, когда оба репера принадлежат одному классу ориентации TG_{x_0}, считают, что криволинейные координаты задают на G ту же ориентацию, которая предписывается ориентирующим репером. В противном случае — противоположную ориентацию.

Если G открытое, но не обязательно связное множество, то, поскольку все изложенное применимо к любой связной компоненте множества G, для того, чтобы ориентировать G, надо задать свой ориентирующий репер в каждой связной компоненте G. Значит, если таких компонент m, то множество G допускает 2^m различных ориентаций.

Сказанное об ориентации области $G \subset \mathbb{R}^n$ можно дословно повторить, если вместо области G рассмотреть задаваемую одной картой гладкую k-мерную поверхность S в $\mathbb{R}^n$ (рис. 75). В этом случае системы криволинейных координат S тоже разбиваются естественным образом на два класса ориентации в соответствии со знаком якобиана преобразований их взаимного перехода; тоже возникают поля реперов на S; тоже задание ориентации может быть осуществлено ориентирующим репером, лежащим в некоторой касательной к S плоскости TS_{x_0}.

Единственный новый элемент, который тут возникает и требует проверки, это неявно присутствующее

Утверждение 1. *Взаимные переходы от одной системы криволинейных координат на гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ к другой являются диффеоморфизмами той же степени гладкости, что и карты поверхности.*

◄ В самом деле, в силу утверждения из § 1 любую карту $I^k \to U \subset S$ локально можно рассматривать как ограничение на $I^k \cap O(t)$ диффеоморфизма $\mathscr{F} : O(t) \to O(x)$ некоторой n-мерой окрестности $O(t)$ точки $t \in I^k \subset \mathbb{R}^n$ на n-мерную окрестность $O(x)$ точки $x \in S \subset \mathbb{R}^n$, причем $\mathscr{F}$ того же класса гладкости, что и φ. Если теперь $\varphi_1 : I_1^k \to U_1$ и $\varphi_2 : I_2^k \to U_2$ — две такие карты, то возникающее в их общей области действия отображение $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ (переход от первой системы координат ко второй) локально представляется в виде $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(t^1, \ldots, t^k) = \mathscr{F}_2^{-1} \circ \mathscr{F}_1(t^1, \ldots, t^k, 0, \ldots, 0)$, где $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ — соответствующие диффеоморфизмы n-мерных окрестностей. ►

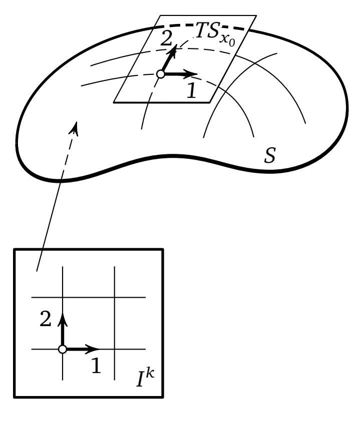


Рис. 75

На примере элементарной поверхности, задаваемой одной картой, мы разобрали все существенные компоненты понятия ориентации поверхности. Теперь мы завершим дело окончательными определениями, относящимися к случаю произвольной гладкой поверхности в $\mathbb{R}^n$.

Пусть S — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\varphi_i : I_i^k \to U_i$, $\varphi_j : I_j^k \to \to U_j$ — две локальные карты поверхности S, районы действия которых пересекаются, т. е. $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Тогда между множествами $I_{ij}^k = \varphi_i^{-1}(U_j)$, $I_{ji}^k = \varphi_j^{-1}(U_i)$, как было только что доказано, естественно устанавливаются взаимно обратные диффеоморфизмы $\varphi_{ij} : I_{ij}^k \to I_{ji}^k$, $\varphi_{ji} : I_{ji}^k \to I_{ij}^k$, осуществляющие переход от одной локальной системы криволинейных координат на S к другой.

Определение 1. Две локальные карты поверхности называют *согласованными*, либо когда районы их действия не пересекаются, либо когда это пересечение непусто и взаимные переходы в общей области действия этих локальных карт осуществляются диффеоморфизмами с положительным якобианом.

Определение 2. Атлас поверхности называется *ориентирующим атласом поверхности*, если он состоит из попарно согласованных карт.

Определение 3. Поверхность называется *ориентируемой*, если она обладает ориентирующим атласом. В противном случае поверхность называется *неориентируемой*.

В отличие от областей пространства $\mathbb{R}^n$ или элементарных поверхностей, задаваемых одной картой, произвольная поверхность может оказаться и неориентируемой.

Пример 1. Лист Мёбиуса, как можно проверить (см. задачи 2, 3 в конце параграфа), — неориентируемая поверхность.

Пример 2. Бутылка Клейна в таком случае — тоже неориентируемая поверхность, поскольку она содержит в качестве своей части лист Мёбиуса. Последнее видно непосредственно из конструкции бутылки Клейна, изображенной на рис. 73.

Пример 3. Окружность и вообще k-мерная сфера — ориентируемые поверхности, что доказывается непосредственным предъявлением атласа сферы, состоящего из согласованных карт (см. пример 2 из § 1).

Пример 4. Рассмотренный в примере 4 из § 1 двумерный тор также является ориентируемой поверхностью. Действительно, используя указанные в примере 4, § 1 параметрические уравнения тора, легко предъявить его ориентирующий атлас.

Мы не останавливаемся на деталях, поскольку ниже будет указан другой более наглядный способ контроля ориентируемости достаточно простых поверхностей, который с легкостью позволит проверить сказанное в примерах 1—4.

Формальное описание понятия ориентации поверхности будет завершено, если к определениям 1, 2, 3 добавить еще приведенные ниже определения 4, 5.

Два ориентирующих атласа поверхности будем считать *эквивалентными*, если их объединение также является ориентирующим атласом этой поверхности.

Указанное отношение действительно является отношением эквивалентности между ориентирующими атласами ориентируемой поверхности.

Определение 4. Класс эквивалентности ориентирующих атласов поверхности по указанному отношению эквивалентности называется *классом ориентации атласов поверхности* или просто *ориентацией поверхности*.

Определение 5. *Ориентированной поверхностью* называется поверхность с фиксированным классом ориентации ее атласов (т. е. с фиксированной на ней ориентацией).

Таким образом, *ориентировать поверхность* — значит тем или иным способом указать определенный класс ориентации ориентирующих атласов этой поверхности.

Имеет место уже знакомое нам в его частных проявлениях

Утверждение 2. *На ориентируемой связной поверхности существует точно две ориентации.*

Обычно их называют *взаимно противоположными ориентациями*.

Доказательство утверждения 2 см. в гл. XV, § 2, п. 3.

Если ориентируемая поверхность связна, то для задания ее ориентации вполне достаточно указать какую-нибудь локальную карту этой поверхности или ориентирующий репер в какой-нибудь из ее касательных плоскостей. Этим широко пользуются на практике.

Когда поверхность имеет несколько связных компонент, то такое указание локальной карты или репера естественно делается в каждой компоненте связности.

Очень широко на практике применяется также следующий способ задания ориентации поверхности, лежащей в уже ориентированном пространстве. Пусть S — ориентируемая $(n-1)$-мерная поверхность, лежащая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, с фиксированным в $\mathbb{R}^n$ ориентирующим репером $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Пусть TS_x — $(n-1)$-мерная плоскость, касательная к S в точке $x \in S$, а $\boldsymbol{n}$ — вектор, ортогональный TS_x, т. е. вектор нормали к поверхности S в точке x. Если при заданном векторе $\boldsymbol{n}$ условиться в TS_x репер $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ выбирать так, чтобы реперы $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ и $(\boldsymbol{n}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = (\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_n)$ принадлежали одному классу ориентации пространства $\mathbb{R}^n$, то, как легко видеть, такие реперы $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ плоскости TS_x сами окажутся принадлежащими одному классу ориентации этой плоскости. Значит, указание класса ориентации плоскости TS_x, а вместе с ним и задание ориентации на связной ориентируемой поверхности, в этом случае можно осуществить, задав нормальный вектор $\boldsymbol{n}$ (рис. 76).

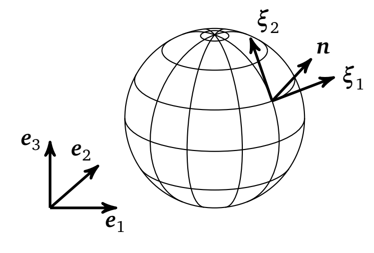


Рис. 76

Нетрудно проверить (см. задачу 4), что ориентируемость $(n-1)$-мерной поверхности, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, равносильна наличию на ней непрерывного поля ненулевых нормальных векторов.

Отсюда, в частности, с очевидностью следует ориентируемость сферы, тора и неориентируемость листа Мёбиуса, о чем говорилось в примерах 7—10.

Связные $(n-1)$-мерные поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, на которых существует (однозначное) непрерывное поле единичных нормальных векторов, в геометрии называют *двусторонними*.

Таким образом, например, сфера, тор, плоскость в $\mathbb{R}^3$ — двусторонние поверхности, в отличие от листа Мёбиуса, являющегося в этом смысле *односторонней поверхностью*. Заканчивая обсуждение понятия ориентации поверхности, сделаем несколько замечаний, относящихся к практике использования этого понятия в анализе.

В вычислениях, связанных в анализе с ориентированными поверхностями в $\mathbb{R}^n$, обычно сначала находят какую-то локальную параметризацию поверхности S, не заботясь об ориентации. Затем строят в некоторой касательной плоскости TS_x к поверхности репер $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ из векторов (скорости), касательных к линиям выбранной системы криволинейных координат, т. е. строят ориентирующий репер, индуцированный этой системой координат.

Если пространство $\mathbb{R}^n$ было ориентировано, а ориентация S задавалась полем нормальных векторов, то берут вектор $\boldsymbol{n}$ данного поля в точке x и сравнивают репер $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$ с репером $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, ориентирующим пространство. Если эти реперы одного класса ориентации, то локальная карта по принятому выше соглашению задает нужную ориентацию поверхности, а когда эти реперы не согласованы, выбранная карта задает ориентацию поверхности, противоположную предписанной нормалью $\boldsymbol{n}$.

Ясно, что при наличии какой-то локальной карты $(n-1)$-мерной поверхности простым изменением порядка координат можно получить локальную карту нужной ориентации (ориентации, предписанной фиксированным нормальным вектором $\boldsymbol{n}$ к двусторонней гиперповерхности, лежащей в ориентированном пространстве $\mathbb{R}^n$).

В одномерном случае, когда поверхность сводится к кривой, ориентацию чаще задают касательным вектором к кривой в некоторой ее точке, и в этом случае часто вместо «ориентация кривой» говорят *направление движения вдоль кривой*.

Если на плоскости $\mathbb{R}^2$ выбран ориентирующий $\mathbb{R}^2$ репер и задана замкнутая кривая, то *положительным направлением обхода* (вдоль кривой) ограниченной этой кривой *области* D принято считать такое, при котором репер $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор внешней по отношению к D нормали к кривой, а $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости обхода, согласован с ориентирующим репером $\mathbb{R}^2$.

Это означает, что, например, при традиционно рисуемом на плоскости (правом) репере, положительным обходом будет движение «против часовой стрелки», при котором область, ограниченная кривой, остается «слева».

В этой связи саму ориентацию плоскости или плоской области часто задают, отмечая не репер в $\mathbb{R}^2$, а положительное направление движения вдоль какой-нибудь замкнутой кривой, обычно окружности.

Задание такого направления по существу есть указание направления кратчайшего поворота первого вектора репера до его совмещения со вторым, что равносильно заданию класса ориентации реперов на плоскости.

Задачи и упражнения

1. Является ли указанный в задаче 3 с) из § 1 атлас сферы ориентирующим атласом этой сферы?

2. a) Воспользовавшись примером 4 из § 1, предъявите ориентирующий атлас двумерного тора.

b) Докажите, что не существует ориентирующего атласа листа Мёбиуса.

c) Покажите, что при диффеоморфизме $f: D \to \widetilde{D}$ ориентируемая поверхность $S \subset \subset D$ переходит в ориентируемую поверхность $\widetilde{S} \subset \widetilde{D}$.

3. a) Проверьте, что принадлежащие одному классу ориентации системы криволинейных координат области $G \subset \mathbb{R}^n$ порождают такие непрерывные поля реперов в G, которые в каждой точке $x \in G$ задают реперы одного класса ориентации пространства TG_x.

b) Покажите, что в связной области $G \subset \mathbb{R}^n$ непрерывные поля реперов разбиваются точно на два класса ориентации.

c) На примере сферы покажите, что гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ может быть ориентируемой, хотя на S не существует непрерывного поля реперов касательных к S пространств.

d) Докажите, что на связной ориентируемой поверхности можно задать точно две различные ориентации.

4. a) В пространстве $\mathbb{R}^n$ фиксировано подпространство $\mathbb{R}^{n-1}$, взят вектор $\boldsymbol{v} \in \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$ и два репера

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \ (\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_{n-1})$$

подпространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Проверьте, что эти реперы принадлежат одному классу ориентации реперов пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ тогда и только тогда, когда реперы

$$(\boldsymbol{v}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \ (\boldsymbol{v}, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_{n-1})$$

задают одинаковую ориентацию пространства $\mathbb{R}^n$.

b) Покажите, что гладкая гиперповерхность $S \subset \mathbb{R}^n$ ориентируема тогда и только тогда, когда на S существует непрерывное поле единичных нормальных к S векторов. Отсюда, в частности, вытекает ориентируемость двусторонних поверхностей.

c) Покажите, что если $\operatorname{grad} F \neq 0$, то задаваемая уравнением $F(x^1, \ldots, x^n) = 0$ поверхность ориентируема (предполагается, что уравнение имеет решение).

d) Обобщите предыдущий результат на случай поверхности, задаваемой системой уравнений.

e) Объясните, почему не каждую гладкую двумерную поверхность в $\mathbb{R}^3$ можно задать уравнением $F(x, y, z) = 0$, где F — гладкая функция без критических точек (т. е. $\operatorname{grad} F \neq 0$).

§ 3. Край поверхности и его ориентация

1. Поверхность с краем. Пусть $\mathbb{R}^k$ — евклидово пространство размерности k, наделенное декартовыми координатами $t^1, \ldots, t^k$. Рассмотрим полупространство $H^k := \{t \in \mathbb{R}^k \mid t^1 \leqslant 0\}$ пространства $\mathbb{R}^k$. Гиперплоскость $\partial H^k := \{t \in \mathbb{R}^k \mid t^1 = 0\}$ будем называть *краем* полупространства H^k.

Заметим, что множество $\mathring{H}^k := H^k \setminus \partial H^k$, т. е. открытая часть H^k, является простейшей k-мерной поверхностью. Само же полупространство H^k формально не удовлетворяет определению поверхности ввиду наличия в H^k точек края ∂H^k. Множество H^k является эталоном поверхностей с краем, которые мы сейчас опишем.

Определение 1. Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называют *поверхностью* (размерности k) *с краем*, если любая точка $x \in S$ имеет окрестность U в S, гомеоморфную либо $\mathbb{R}^k$, либо H^k.

Определение 2. Если при указанном в определении 1 гомеоморфизме U на H^k точке $x \in U$ соответствует точка края ∂H^k, то x называется *точкой края* поверхности (с краем) S и своей окрестности U. Совокупность всех точек края называется *краем поверхности* S.

Край поверхности S, как правило, будет обозначаться символом ∂S. Отметим, что ∂H^k при $k = 1$ состоит из одной точки, поэтому, сохраняя соотношение $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}$, мы в дальнейшем будем понимать $\mathbb{R}^0$ как одну точку, а $\partial \mathbb{R}^0$ будем считать пустым множеством.

Напомним, что при гомеоморфном отображении $\varphi_{ij}: G_i \to G_j$ области $G_i \subset \mathbb{R}^k$ на область $G_j \subset \mathbb{R}^k$ внутренние точки области G_i переходят во внутренние точки образа $\varphi_{ij}(G_i)$ (это — теорема Брауэра). Следовательно, понятие точки края поверхности не зависит от выбора локальной карты, т. е. определено корректно.

Определение 1 формально включает в себя и случай поверхности, описанный в определении 1, § 1. Сопоставляя эти определения, видим, что если на S нет точек края, то мы возвращаемся к прежнему определению поверхности, которое теперь можно было бы считать определением поверхности без края. Отметим в этой связи, что термин «поверхность с краем» обычно употребляется тогда, когда множество точек края непусто.

Понятие гладкой (класса $C^{(m)}$) поверхности S с краем вводится, как и для поверхностей без края, требованием, чтобы S обладала атласом карт данного класса гладкости. При этом мы подразумеваем, что для карт вида $\varphi: H^k \to U$ и частные производные от φ в точках края ∂H^k вычисляются только по области H^k определения отображения φ, т. е. иногда это односторонние производные, а якобиан отображения φ отличен от нуля всюду в H^k.

Поскольку $\mathbb{R}^k$ можно диффеоморфизмом класса $C^{(\infty)}$ преобразовать в куб $I^k = \{t \in \mathbb{R}^k \mid |t^i| < 1,\ i = 1, \ldots, k\}$, причем так, что H^k преобразуется в часть I_H куба I^k, определяемую дополнительным условием $t^1 \leqslant 0$, то ясно, что в определении поверхности с краем (даже в случае ее гладкости) можно было бы

заменить $\mathbb{R}^k$ на I^k, а H^k на I^k_H или на куб $\tilde{I}^k$ с одной присоединенной гранью $I^{k-1} := \{t \in \mathbb{R}^k \mid t^1 = 1,\ |t^i| < 1,\ i = 2, \ldots, k\}$, являющейся, очевидно, кубом на единицу меньшей размерности.

С учетом этой всегда присутствующей свободы в выборе канонических локальных карт поверхности, сопоставляя определения 1, 2 и определение 1 из § 1 видим, что справедливо следующее

Утверждение 1. *Край k-мерной поверхности класса $C^{(m)}$ сам является поверхностью того же класса гладкости, причем поверхностью без края и на единицу меньшей размерности в сравнении с размерностью исходной поверхности с краем.*

◄ Действительно, если $A(S) = \{(H^k, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^k, \varphi_j, U_j)\}$ — атлас поверхности S с краем, то $A(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_i|_{\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}}, \partial U_i)\}$, очевидно, является атласом того же класса гладкости для края ∂S. ►

Укажем некоторые простые примеры поверхностей с краем.

Пример 1. Замкнутый n-мерный шар $\overline{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$ есть n-мерная поверхность с краем. Ее край $\partial\overline{B}^n$ есть $(n-1)$-мерная сфера (см. рис. 76 и рис. 77, a).

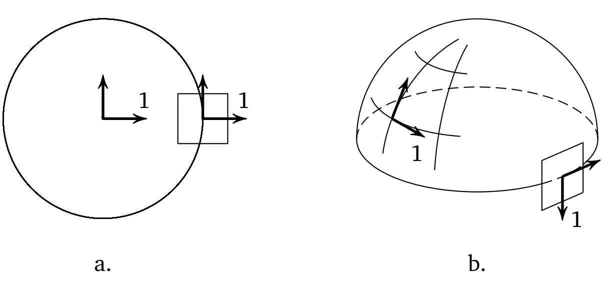


Рис. 77

Шар $\overline{B}^n$, называемый часто по аналогии с двумерным случаем *n-мерным диском*, можно гомеоморфно преобразовать в половину n-мерной сферы, краем которой является экваториальная $(n-1)$-мерная сфера (рис. 77, b).

Пример 2. Замкнутый куб $\overline{I}^n$ в $\mathbb{R}^n$ по лучам, исходящим из его центра, можно гомеоморфно преобразовать в замкнутый шар $\overline{B}^n$. Следовательно, $\overline{I}^n$, как и $\overline{B}^n$, есть n-мерная поверхность с краем, который в данном случае образован гранями куба (рис. 78). Отметим, что на ребрах, являющихся пересечениями граней, никакое отображение куба на шар, очевидно, не может быть регулярным (т. е. гладким и ранга n).

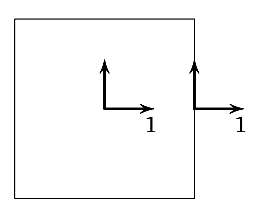


Рис. 78

Пример 3. Если лист Мёбиуса получать описанным в примере 5, § 1 склеиванием двух противоположных сторон теперь уже замкнутого прямоугольника, то, очевидно, в $\mathbb{R}^3$ получится поверхность с краем, причем ее край гомеоморфен окружности.

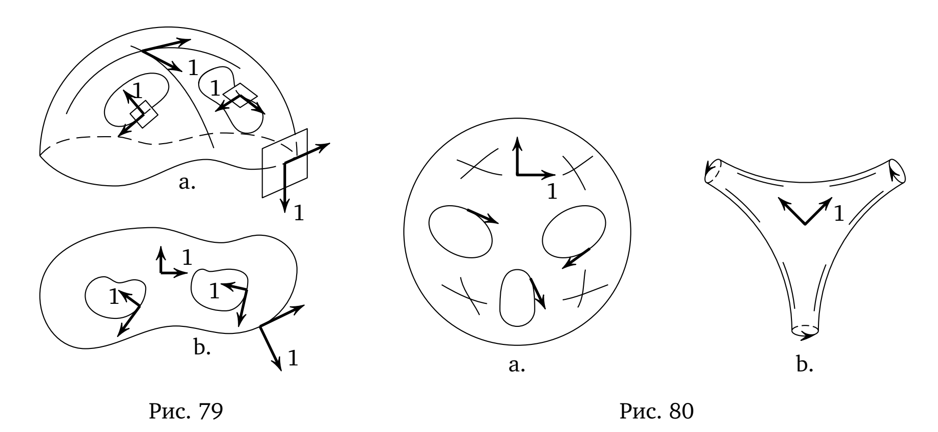


Рис. 79 Рис. 80

При другой возможной склейке этих же сторон получится цилиндрическая поверхность, край которой состоит из двух окружностей. Эта поверхность гомеоморфна обычному плоскому кольцу (см. рис. 71 к примеру 5, § 1). На рис. 79, 80, 81, которые мы используем в дальнейшем, изображены попарно гомеоморфные поверхности с краем, лежащие в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Как видно, край поверхности может оказаться несвязным, даже если сама поверхность была связной.

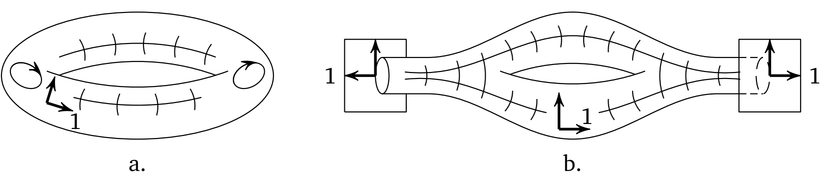


Рис. 81

2. Согласование ориентации поверхности и края. Если в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ фиксирован ориентирующий орторепер $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, который индуцирует в $\mathbb{R}^k$ декартовы координаты $x^1, \ldots, x^k$, то векторы $\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ на краю $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}$ полупространства $H^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \leqslant 0\}$ задают ориентацию, которую считают согласованной с заданной репером $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ ориентацией полупространства H^k.

В случае, когда $k = 1$ и $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1} = \mathbb{R}^0$ есть точка, следует особо договориться о том, как ориентировать точку. По определению точку ориентируют, приписывая ей знак + или −. В случае $\partial H^1 = \mathbb{R}^0$ берется $(\mathbb{R}^0, +)$ или короче $+\mathbb{R}^0$.

Мы хотим теперь в общем случае определить, что значит согласованность ориентации поверхности и края. Это весьма важно для практики вычислений, связанных с поверхностными интегралами, о которых будет речь ниже.

Прежде всего убедимся в том, что имеет место следующее общее

Утверждение 2. *Край ∂S гладкой ориентируемой поверхности S сам является гладкой ориентируемой поверхностью (быть может, и несвязной).*

◄ С учетом утверждения 1 нам остается только проверить ориентируемость ∂S. Покажем, что если $A(S)=\{(H^k,\varphi_i,U_i)\}\cup\{(\mathbb{R}^k,\varphi_j,U_j)\}$ — ориентирующий атлас поверхности с краем S, то атлас $A(\partial S)=\{(\mathbb{R}^{k-1},\varphi_i|_{\partial H^k=\mathbb{R}^{k-1}},\partial U_i)\}$ края тоже состоит из попарно согласованных карт. Для этого, очевидно, достаточно проверить, что если $\tilde{t}=\psi(t)$ есть диффеоморфизм с положительным якобианом окрестности $U_{H^k}(t_0)$ в H^k точки $t_0\in\partial H^k$ на окрестность $\widetilde{U}_{H^k}(\tilde{t}_0)$ в H^k точки $\tilde{t}_0\in\partial H^k$, то положительный якобиан имеет также отображение $\psi|_{\partial U_{H^k}(t_0)}$ окрестности $U_{\partial H^k}(t_0)=\partial U_{H^k}(t_0)$ в ∂H^k точки t_0 на окрестность $\widetilde{U}_{\partial H^k}(\tilde{t}_0)=\partial\widetilde{U}_{H^k}(\tilde{t}_0)$ в ∂H^k точки $\tilde{t}_0=\psi(t_0)$.

Заметим, что в любой точке $t_0=(0,t_0^2,\ldots,t_0^k)\in\partial H^k$ якобиан J отображения ψ имеет вид

$$J(t_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi^1}{\partial t^1} & 0 & \ldots & 0\\ \frac{\partial\psi^2}{\partial t^1} & \frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} & \ldots & \frac{\partial\psi^2}{\partial t^k}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\psi^k}{\partial t^1} & \frac{\partial\psi^k}{\partial t^2} & \ldots & \frac{\partial\psi^k}{\partial t^k}\end{vmatrix}=\frac{\partial\psi^1}{\partial t^1}\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi^2}{\partial t^2} & \ldots & \frac{\partial\psi^2}{\partial t^k}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\psi^k}{\partial t^2} & \ldots & \frac{\partial\psi^k}{\partial t^k}\end{vmatrix},$$

поскольку при $t^1=0$ должно быть также $\tilde{t}^1=\psi^1(0,t^2,\ldots,t^k)\equiv 0$ (граничные точки переходят при диффеоморфизме в граничные). Остается заметить, что при $t^1<0$ должно быть также $\tilde{t}^1=\psi^1(t^1,t^2,\ldots,t^k)<0$ (ведь $\tilde{t}=\psi(t)\in$ $\in H^k$), поэтому значение $\frac{\partial\psi^1}{\partial t^1}(0,t^2,\ldots,t^k)$ не может быть отрицательным. По условию $J(t_0)>0$ и раз $\frac{\partial\psi^1}{\partial t^1}(0,t^2,\ldots,t^k)>0$, то из указанного равенства определителей следует, что якобиан отображения $\psi|_{\partial U_{H^k}}=\psi(0,t^2,\ldots,t^k)$ положителен. ►

Отметим, что случай одномерной поверхности ($k=1$) в утверждении 2 и следующем определении 3, очевидно, надо оговорить особо в соответствии с принятым по этому случаю в начале пункта соглашением.

Определение 3. Если $A(S)=\{(H^k,\varphi_i,U_i)\}\cup\{(\mathbb{R}^k,\varphi_j,U_j)\}$ — ориентирующий атлас стандартных локальных карт поверхности S с краем ∂S, то $A(\partial S)=\{(\mathbb{R}^{k-1},\varphi|_{\partial H^k=\mathbb{R}^{k-1}},\partial U_i)\}$ есть ориентирующий атлас края. Задаваемая им ориентация края ∂S называется *ориентацией края, согласованной с ориентацией поверхности*.

Заканчивая рассмотрение ориентации края ориентируемой поверхности, сделаем два полезных замечания.

Замечание 1. На практике, как уже отмечалось выше, ориентацию лежащей в $\mathbb{R}^n$ поверхности часто задают репером касательных к поверхности векторов, поэтому проверку согласованности ориентации поверхности и ее

края в этом случае осуществляют следующим образом. Берут k-мерную плоскость TS_{x_0}, касательную к гладкой поверхности S в точке x_0 края ∂S. Поскольку локально структура поверхности S около точки x_0 такая же, как и структура полупространства H^k около точки $0 \in \partial H^k$, то, направив первый вектор ориентирующего S орторепера $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \in TS_{x_0}$ по нормали к ∂S и в сторону внешнюю по отношению к локальной проекции S на TS_{x_0}, получают в $(k-1)$-мерной плоскости $T\partial S_{x_0}$, касательной к ∂S в точке x_0, репер $\xi_2, \ldots, \xi_k$, который и задает ориентацию $T\partial S_{x_0}$, а значит, и ∂S, согласованную с заданной репером $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ ориентацией поверхности S.

На рис. 77—80 на простых примерах показаны процесс и результат согласования ориентаций поверхности и ее края.

Отметим, что описанная схема предполагает возможность переносить задающий ориентацию S репер в разные точки поверхности и ее края, который, как видно из примеров, может быть и несвязным.

Замечание 2. В ориентированном пространстве $\mathbb{R}^k$ рассмотрим полупространства $H^k_- = H^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \leqslant 0\}$ и $H^k_+ = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 \geqslant 0\}$ с индуцированной из $\mathbb{R}^k$ ориентацией. Гиперплоскость $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x^1 = 0\}$ является общим краем H^k_- и H^k_+. Легко видеть, что ориентации гиперплоскости Γ, согласованные с ориентациями H^k_- и H^k_+, противоположны. Это относится и к случаю $k = 1$, в котором это постулируется.

Аналогично, если ориентированную k-мерную поверхность разрезать некоторой $(k-1)$-мерной поверхностью (например, сферу — экватором), то на указанном разрезе возникнут две противоположные ориентации, индуцированные ориентациями примыкающих к разрезу частей исходной поверхности.

Этим наблюдением часто пользуются в теории поверхностных интегралов.

Кроме того, им можно воспользоваться, чтобы следующим образом определить ориентируемость кусочно гладкой поверхности.

Дадим прежде всего определение такой поверхности.

Определение 4 (индуктивное определение кусочно гладкой поверхности). Точку условимся относить к *нульмерным* поверхностям любого класса гладкости.

Кусочно гладкой одномерной поверхностью (кусочно гладкой кривой) назовем такую кривую в $\mathbb{R}^n$, которая после удаления из нее конечного или счетного числа некоторых нульмерных поверхностей (точек) распадается на гладкие одномерные поверхности (кривые).

Поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ размерности k назовем *кусочно гладкой*, если из нее можно так удалить конечное или счетное число кусочно гладких поверхностей размерности не выше $k-1$, что остаток распадется на гладкие k-мерные поверхности S_i (с краем или без края).

Пример 4. Граница плоского угла и граница квадрата суть кусочно гладкие кривые.

Граница куба или граница прямого кругового конуса в $\mathbb{R}^3$ суть двумерные кусочно гладкие поверхности.

Вернемся теперь к ориентации кусочно гладкой поверхности.

Точку (нульмерную поверхность), как это уже отмечалось, принято ориентировать, приписывая ей знак + или −. В частности, край отрезка $[a, b] \subset \subset \mathbb{R}$, состоящий из двух точек a, b, если отрезок ориентирован направлением от a к b, принято согласованно (с этой ориентацией отрезка) ориентировать так: $(a, -)$, $(b, +)$ или в иной записи $-a$, $+b$.

Рассмотрим теперь k-мерную ($k > 0$) кусочно гладкую поверхность $S \subset \subset \mathbb{R}^n$.

Предположим, что две гладкие поверхности S_{i_1}, S_{i_2} из определения 4 кусочно гладкой поверхности S ориентированы и примыкают друг к другу вдоль гладкого куска Γ $(k-1)$-мерной поверхности (ребра). Тогда на Γ, как на краю, возникают ориентации, согласованные с ориентациями S_{i_1} и S_{i_2} соответственно. Если эти две ориентации на любом таком ребре $\Gamma \subset \overline{S}_{i_1} \cap \overline{S}_{i_2}$ противоположны, то исходные ориентации S_{i_1} и S_{i_2} считаются *согласованными*. В случае, если $\overline{S}_{i_1} \cap \overline{S}_{i_2}$ пусто или имеет размерность, меньшую чем $(k-1)$, любые ориентации S_{i_1}, S_{i_2} считаются согласованными.

Определение 5. Кусочно гладкую k-мерную ($k > 0$) поверхность будем считать *ориентируемой*, если с точностью до конечного или счетного числа кусочно гладких поверхностей размерности не выше $(k-1)$ она является объединением гладких ориентируемых поверхностей S_i, допускающих их одновременную взаимно согласованную ориентацию.

Пример 5. Поверхность трехмерного куба, как легко проверить, является ориентируемой кусочно гладкой поверхностью. И вообще, все указанные в примере 4 кусочно гладкие поверхности ориентируемы.

Пример 6. Лист Мёбиуса легко представить в виде объединения двух ориентируемых гладких поверхностей, примыкающих по части края, однако эти поверхности нельзя ориентировать согласованно. Можно проверить, что лист Мёбиуса не является ориентируемой поверхностью даже с точки зрения определения 5.

Задачи и упражнения

1. a) Верно ли, что край поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ есть множество $\overline{S} \setminus S$, где $\overline{S}$ — замыкание S в $\mathbb{R}^n$?

b) Имеют ли поверхности $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$, $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < < x^2 + y^2\}$ край?

c) Укажите край поверхностей

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 < 2\}, \quad S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2\}.$$

2. Приведите пример неориентируемой поверхности с ориентируемым краем.

3. a) Каждая грань куба $I^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid |x^i| < 1,\ i = 1, \ldots, k\}$ параллельна соответствующей $(k-1)$-мерной координатной гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^k$, поэтому

в грани можно рассмотреть тот же репер и ту же систему координат, что и в этой гиперплоскости. Укажите, в каких гранях получающаяся при этом ориентация согласуется с ориентацией куба I^k, индуцированной ориентацией $\mathbb{R}^k$, а в каких не согласуется. Разберите последовательно случаи $k=2$, $k=3$ и $k=n$.

b) В некоторой области полусферы $S=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1 \wedge z\geqslant 0\}$ действует локальная карта $(t^1, t^2)\mapsto(\sin t^1\cos t^2, \sin t^1\sin t^2, \cos t^1)$, а в некоторой области края ∂S этой полусферы действует локальная карта $t\mapsto(\cos t, \sin t, 0)$. Выясните, задают ли эти карты согласованные ориентации поверхности S и ее края ∂S.

c) Постройте на полусфере S и ее крае ∂S поля реперов, индуцированные указанными в b) локальными картами.

d) На крае ∂S полусферы S укажите репер, задающий ориентацию края, согласованную с полученной в c) ориентацией полусферы.

e) Задайте полученную в c) ориентацию полусферы S с помощью вектора, нормального к $S\subset\mathbb{R}^3$.

4. a) Проверьте, что лист Мёбиуса не является ориентируемой поверхностью даже с точки зрения определения 5.

b) Покажите, что если S — гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, то определения ее ориентируемости как гладкой и как кусочно гладкой поверхности равносильны.

5. a) Будем говорить, что множество $S\subset\mathbb{R}^n$ есть k-мерная поверхность с краем, если для каждой точки $x\in S$ найдутся ее окрестность $U(x)$ в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\psi: U(x)\to I^n$ этой окрестности на стандартный куб $I^n\subset\mathbb{R}^n$, при котором $\psi(S\cap U(x))$ совпадает либо с кубом $I^k=\{t\in I^n \mid t^{k+1}=\ldots=t^n=0\}$, либо с его частью $I^k\cap\{t\in\in\mathbb{R}^n \mid t^k\leqslant 0\}$, которая является k-мерным промежутком с одной присоединенной к нему гранью.

Исходя из сказанного в § 1 при обсуждении понятия поверхности, покажите, что это определение поверхности с краем не эквивалентно определению 1.

b) Верно ли, что если $f\in C^{(l)}(H^k, \mathbb{R})$, где $H^k=\{x\in\mathbb{R}^k \mid x^1\leqslant 0\}$, то для любой точки $x\in\partial H^k$ можно найти ее окрестность $U(x)$ в $\mathbb{R}^k$ и функцию $\mathscr{F}\in C^{(l)}(U(x), \mathbb{R})$ так, что $\mathscr{F}|_{H^k\cap U(x)}=f|_{H^k\cap U(x)}$?

c) Если указанное в a) определение использовать для описания гладкой поверхности с краем, т. е. считать ψ гладким отображением максимального ранга, то будет ли такое определение гладкой поверхности с краем совпадать с принятым в § 3?

§ 4. Площадь поверхности в евклидовом пространстве

Перейдем теперь к определению площади k-мерной кусочно гладкой поверхности, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant k$.

Напомним сначала, что если $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k$ — k векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^k$, то объем $V(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k)$ параллелепипеда, натянутого на эти векторы как на ребра, может быть вычислен посредством определителя

$$V(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k)=\det(\xi_i^j) \tag{1}$$

матрицы $J=(\xi_i^j)$, строки которой образованы координатами данных векторов в некотором ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ пространства $\mathbb{R}^k$. Отметим, однако, что на самом-то деле формула (1) дает не просто объем, а так называемый *ориентированный объем параллелепипеда*. Если $V\neq 0$, то

определяемое формулой (1) значение V положительно или отрицательно в соответствии с тем, принадлежат ли реперы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, $\xi_1, \ldots, \xi_k$ одному или разным классам ориентации пространства $\mathbb{R}^k$.

Заметим теперь, что произведение JJ^* матрицы J на ее транспонированную J^* есть не что иное, как матрица $G=(g_{ij})$ попарных скалярных произведений $g_{ij}=\langle\xi_i, \xi_j\rangle$ данных векторов, т. е. *матрица Грама*[1] системы векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Таким образом,

$$\det G = \det(JJ^*) = \det J \det J^* = (\det J)^2, \tag{2}$$

и, значит, неотрицательное значение объема $V(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ можно получить в виде

$$V(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \sqrt{\det(\langle\xi_i, \xi_j\rangle)}. \tag{3}$$

Последняя формула удобна тем, что в ней, по существу, уже нет координат, а есть только набор геометрических величин, характеризующих рассматриваемый параллелепипед. В частности, если эти же векторы $\xi_1, \ldots, \xi_k$ считать лежащими в n-мерном ($n \geqslant k$) евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, то формула (3) k-мерного объема (или k-мерной площади) натянутого на них параллелепипеда останется без изменений.

Пусть теперь $\boldsymbol{r}\colon D \to S \subset \mathbb{R}^n$ — k-мерная гладкая поверхность S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, заданная в параметрическом виде $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t^1, \ldots, t^k)$, т. е. в виде гладкой вектор-функции $\boldsymbol{r}(t) = (x^1, \ldots, x^n)(t)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^k$. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^k$, порождающий координатную систему $(t^1, \ldots, t^k)$. Фиксировав точку $t_0 = (t_0^1, \ldots, t_0^k) \in D$, возьмем положительные числа $h^1, \ldots, h^k$ столь малыми, чтобы параллелепипед I, натянутый на векторы $h^i\boldsymbol{e}_i \in TD_{t_0}$, $i = 1, \ldots, k$, приложенные к точке t_0, лежал в области D.

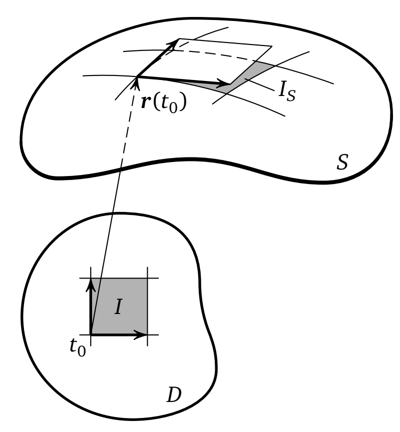


Рис. 82

На поверхности S в силу отображения $D \to S$ параллелепипеду I соответствует фигура I_S, которую условно можно назвать криволинейным параллелепипедом (см. рис. 82, отвечающий случаю $k=2$, $n=3$). Поскольку

$$\boldsymbol{r}(t_0^1, \ldots, t_0^{i-1}, t_0^i + h^i, t_0^{i+1}, \ldots, t_0^k) - \boldsymbol{r}(t_0^1, \ldots, t_0^{i-1}, t_0^i, t_0^{i+1}, \ldots, t_0^k) = \\ = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t^i}(t_0)h^i + o(h^i),$$

[1] См. сноску на стр. 468.

смещению от t_0 на вектор $h^i\boldsymbol{e}_i$ отвечает в $\mathbb{R}^n$ такое смещение от точки $\boldsymbol{r}(t_0)$, которое при $h^i \to 0$ можно с точностью до $o(h^i)$ заменить частным дифференциалом $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t^i}(t_0)h^i =: \dot{\boldsymbol{r}}_i h^i$. Таким образом, при малых значениях h^i, $i = 1, \ldots, k$, криволинейный параллелепипед I_S мало отличается от параллелепипеда, натянутого на векторы $h^1\dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, h^k\dot{\boldsymbol{r}}_k$, касательные к поверхности S в точке $\boldsymbol{r}(t_0)$. Считая по этой причине, что объем ΔV криволинейного параллелепипеда I_S должен тогда быть близок к объему указанного стандартного параллелепипеда, находим приближенную формулу

$$\Delta V \approx \sqrt{\det(g_{ij})(t_0)}\, \Delta t^1 \cdot \ldots \cdot \Delta t^k, \tag{4}$$

где положено $g_{ij}(t_0) = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_j\rangle(t_0)$, $\Delta t^i = h^i$, $i, j = 1, \ldots, k$.

Если теперь все пространство $\mathbb{R}^k$, в котором лежит область параметров D, стандартным образом замостить k-мерными параллелепипедами малого диаметра d, взять среди них те, которые лежат в D, вычислить по формуле (4) приближенное значение k-мерного объема их образов и взять сумму полученных так значений, то мы придем к величине

$$\sum_\alpha \sqrt{\det(g_{ij})(t_\alpha)}\, \Delta t^1 \cdot \ldots \cdot \Delta t^k,$$

которую можно считать приближенным значением k-мерного объема или площади рассматриваемой поверхности S, причем это приближение должно становиться более точным при $d \to 0$. Таким образом, мы принимаем

Определение 1. *Площадью* (или *k-мерным объемом*) заданной в параметрическом виде $D \ni t \mapsto \boldsymbol{r}(t) \in S$ гладкой k-мерной поверхности S, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, называется величина

$$V_k(S) := \int_D \sqrt{\det(\langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_j\rangle)(t)}\, dt^1 \ldots dt^k. \tag{5}$$

Посмотрим, как выглядит формула (5) в уже знакомых нам частных случаях.

При $k = 1$ область $D \subset \mathbb{R}^1$ есть промежуток с некоторыми концами a, b ($a < b$) на прямой $\mathbb{R}^1$, а S в этом случае — кривая в $\mathbb{R}^n$. Формула (5), таким образом, при $k = 1$ превращается в формулу

$$V_1(S) = \int_a^b |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + \ldots + (\dot{x}^n)^2}(t)\, dt$$

для вычисления длины гладкой кривой.

Если $k = n$, то S — диффеоморфная области D n-мерная область в $\mathbb{R}^n$. В этом случае матрица Якоби $J = x'(t)$ отображения $D \ni (t^1, \ldots, t^n) = t \mapsto \boldsymbol{r}(t) = (x^1, \ldots, x^n)(t) \in S$ квадратная. Воспользовавшись теперь соотношением (2)

и формулой замены переменных в кратном интеграле, можно написать, что

$$V_n(S) = \int\limits_D \sqrt{\det G(t)}\, dt = \int\limits_D |\det x'(t)|\, dt = \int\limits_S dx = V(S),$$

т. е., как и следовало ожидать, мы пришли к объему области S в $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что при $k=2$ и $n=3$, т. е. когда S — двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$, часто вместо стандартных обозначений $g_{ij} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_j \rangle$ используют следующие: $\sigma := V_2(S)$, $E := g_{11} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_1 \rangle$, $F := g_{12} = g_{21} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2 \rangle$, $G := g_{22} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_2, \dot{\boldsymbol{r}}_2 \rangle$, а вместо t^1, t^2 пишут соответственно u, v. В этих обозначениях формула (5) приобретает вид

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

В частности, если $u = x$, $v = y$, а поверхность S — есть график гладкой вещественнозначной функции $z = f(x, y)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^2$, то, как легко подсчитать,

$$\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx\, dy.$$

Вернемся теперь вновь к определению 1 и сделаем несколько полезных для дальнейшего замечаний.

Замечание 1. Определение 1 корректно лишь в том случае, когда стоящий в формуле (5) интеграл существует. Он заведомо существует, например, если D — измеримая по Жордану область, а $\boldsymbol{r} \in C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$.

Замечание 2. Если поверхность S, участвующую в определении 1, разбить на конечное число поверхностей $S_1, \ldots, S_m$ с кусочно гладкими краями, то этому разбиению S будет отвечать такое же разбиение области D на соответствующие $S_1, \ldots, S_m$ области $D_1, \ldots, D_m$. Если поверхность S имела площадь в смысле равенства (5), то при каждом значении $\alpha = 1, \ldots, m$ определены величины

$$V_k(S_\alpha) = \int\limits_{D_\alpha} \sqrt{\det \langle \dot{\boldsymbol{r}}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_j \rangle (t)}\, dt.$$

В силу аддитивности интеграла отсюда следует, что

$$V_k(S) = \sum_\alpha V_k(S_\alpha).$$

Мы установили таким образом, что площадь k-мерной поверхности аддитивна в том же смысле, что и обычный кратный интеграл.

Замечание 3. Последнее замечание позволяет переходить, если нужно, к исчерпанию области D, а значит, оно позволяет расширить смысл формулы (5), в которой теперь интеграл можно понимать и как несобственный.

Замечание 4. Более существенно аддитивность площади можно использовать для определения площади произвольной (а не только заданной одной картой) гладкой или даже кусочно гладкой поверхности.

Определение 2. Пусть S — произвольная кусочно гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$. Если после удаления из S конечного или счетного числа кусочно гладких поверхностей размерности не выше чем $k-1$ она распадается на конечное или счетное число гладких параметризуемых поверхностей $S_1, \ldots, S_m, \ldots$, то полагаем

$$V_k(S) := \sum_\alpha V_k(S_\alpha).$$

Аддитивность кратного интеграла позволяет проверить, что так определенная величина $V_k(S)$ не зависит от способа описанного разбиения поверхности S на гладкие куски $S_1, \ldots, S_m, \ldots$, каждый из которых лежит в районе действия какой-то локальной карты поверхности S.

Отметим также, что из определений гладкой и кусочно гладкой поверхностей легко следует, что описанное в определении 2 разбиение S на гладкие параметризуемые куски $S_1, \ldots, S_m$ всегда возможно и даже с соблюдением естественного дополнительного требования *локальной конечности разбиения*. Последнее означает, что любой компакт $K \subset S$ может иметь общие точки лишь с конечным числом поверхностей $S_1, \ldots, S_m, \ldots$ Нагляднее это можно выразить иначе, сказав, что любая точка поверхности S должна обладать окрестностью, которая пересекается не более чем с конечным числом множеств $S_1, \ldots, S_m, \ldots$

Замечание 5. В основной формуле (5) участвует система криволинейных координат $t^1, \ldots, t^k$. Естественно поэтому проверить, что определяемая равенством (5) величина $V_k(S)$ (а тем самым и величина $V_k(S)$ из определения 2) инвариантна при диффеоморфном переходе $\widetilde{D} \ni (\tilde{t}^1, \ldots, \tilde{t}^k) = \tilde{t} \mapsto t = (t^1, \ldots, t^k) \in D$ к новым криволинейным координатам $\tilde{t}^1, \ldots, \tilde{t}^k$, меняющимся в соответствующей области $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^k$.

◄ Для проверки достаточно заметить, что матрицы

$$G = (g_{ij}) = \left(\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t^j} \right\rangle\right) \quad \text{и} \quad \widetilde{G} = (\tilde{g}_{ij}) = \left(\left\langle \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{t}^i}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{t}^j} \right\rangle\right)$$

в соответствующих друг другу точках областей D и $\widetilde{D}$ связаны соотношением $\widetilde{G} = J^* G J$, где $J = \left(\frac{\partial t^j}{\partial \tilde{t}^i}\right)$ — матрица Якоби отображения $\widetilde{D} \ni \tilde{t} \mapsto t \in D$, а J^* — транспонированная по отношению к J матрица. Таким образом, $\det \widetilde{G}(\tilde{t}) = \det G(t)(\det J)^2(\tilde{t})$, откуда следует, что

$$\int\limits_D \sqrt{\det G(t)}\, dt = \int\limits_{\widetilde{D}} \sqrt{\det G(t(\tilde{t}))}\, |J(\tilde{t})|\, d\tilde{t} = \int\limits_{\widetilde{D}} \sqrt{\det \widetilde{G}(\tilde{t})}\, d\tilde{t}. \ ►$$

Итак, мы дали инвариантное по отношению к выбору системы координат определение k-мерного объема или площади k-мерной кусочно гладкой поверхности.

Замечание 6. Этому замечанию мы предпошлем

Определение 3. Про множество E, лежащее на k-мерной кусочно гладкой поверхности, будем говорить, что оно является *множеством k-мерной меры нуль* или имеет *площадь нуль* в смысле Лебега, если при любом $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной или счетной системой $S_1, \ldots, S_m, \ldots$ (возможно пересекающихся) поверхностей $S_\alpha \subset S$ так, что $\sum\limits_\alpha V_k(S_\alpha) < \varepsilon$.

Как видно, это дословное повторение определения множества меры нуль, лежащего в $\mathbb{R}^k$.

Легко видеть, что в области D параметров любой локальной карты $\varphi\colon D \to S$ кусочно гладкой поверхности S такому множеству E отвечает множество $\varphi^{-1}(E) \subset D \subset \mathbb{R}^k$ k-мерной меры нуль. Можно даже проверить, что это характеристическое свойство множеств $E \subset S$ площади нуль.

На практике при вычислении площадей, а также вводимых ниже поверхностных интегралов полезно иметь в виду, что если кусочно гладкая поверхность $\widetilde{S}$ получена из кусочно гладкой поверхности S удалением из S множества E площади нуль, то площади поверхностей $\widetilde{S}$ и S одинаковы.

Польза этого замечания в том, что из кусочно гладкой поверхности часто легко так удалить множество площади нуль, что в результате получится гладкая поверхность $\widetilde{S}$, задаваемая всего лишь одной картой. Но тогда площадь $\widetilde{S}$, а значит, и площадь S можно вычислить прямо по формуле (5).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Отображение $]0, 2\pi[\ni t \mapsto (R\cos t, R\sin t) \in \mathbb{R}^2$ есть карта дуги $\widetilde{S}$ окружности $x^2 + y^2 = R^2$, получаемой удалением из этой окружности S единственной точки $E = (R, 0)$. Поскольку E — множество длины нуль на S, можно писать, что

$$V_1(S) = V_1(\widetilde{S}) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = 2\pi R.$$

Пример 2. В примере 4 § 1 было указано следующее параметрическое представление двумерного тора S в $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{r}(\varphi, \psi) = ((b + a\cos\psi)\cos\varphi, (b + a\cos\psi)\sin\varphi, a\sin\psi).$$

В области $D = \{(\varphi, \psi) \mid 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \psi < 2\pi\}$ отображение $(\varphi, \psi) \mapsto \boldsymbol{r}(\varphi, \psi)$ диффеоморфно. Образ $\widetilde{S}$ области D при этом диффеоморфизме отличается от тора S на множество E, состоящее из координатной линии $\varphi = 2\pi$ и линии $\psi = 2\pi$. Множество E состоит, таким образом, из одной параллели и одного меридиана тора и, как легко видеть, имеет площадь нуль. Значит, площадь тора можно найти по формуле (5), исходя из приведенного параметрического представления, рассматриваемого в пределах области D.

Проведем необходимые выкладки:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\varphi = (-(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\ (b+a\cos\psi)\cos\varphi,\ 0),$$
$$\dot{\boldsymbol{r}}_\psi = (-a\sin\psi)\cos\varphi,\ -a\sin\psi\sin\varphi,\ a\cos\psi),$$
$$g_{11} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_\varphi, \dot{\boldsymbol{r}}_\varphi\rangle = (b+a\cos\psi)^2,$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_\varphi, \dot{\boldsymbol{r}}_\psi\rangle = 0,$$
$$g_{22} = \langle \dot{\boldsymbol{r}}_\psi, \dot{\boldsymbol{r}}_\psi\rangle = a^2,$$
$$\det G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix} = a^2(b+a\cos\psi)^2.$$

Следовательно,

$$V_2(S) = V_2(\widetilde{S}) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} a(b+a\cos\psi)\,d\psi = 4\pi^2 ab.$$

Отметим в заключение, что указанным в определении 2 способом можно теперь вычислять также длины и площади кусочно гладких кривых и поверхностей.

Задачи и упражнения

1. a) Пусть P и $\widetilde{P}$ — две гиперплоскости евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, D — подобласть P, а $\widetilde{D}$ — ортогональная проекция D на гиперплоскость $\widetilde{P}$. Покажите, что $(n-1)$-мерные площади D и $\widetilde{D}$ связаны соотношением $\sigma(\widetilde{D}) = \sigma(D)\cos\alpha$, где α — угол между гиперплоскостями P, $\widetilde{P}$.

b) Учитывая результат a), укажите геометрический смысл формулы

$$d\sigma = \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}\,dx\,dy$$

для элемента площади графика гладкой функции $z = f(x, y)$ в трехмерном евклидовом пространстве.

c) Покажите, что если поверхность S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ задана в форме гладкой вектор-функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^2$, то площадь поверхности S можно найти по формуле

$$\sigma(S) = \iint\limits_D |[\boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_v]|\,du\,dv,$$

где $[\boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_v]$ — векторное произведение векторов $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$.

d) Проверьте, что если поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, а область U поверхности S взаимно однозначно ортогонально проектируется на область D плоскости (x, y), то имеет место формула

$$\sigma(U) = \iint\limits_D \frac{|\operatorname{grad} F|}{|F'_z|}\,dx\,dy.$$

2. Найдите площадь сферического прямоугольника, образованного двумя параллелями и двумя меридианами сферы $S \subset \mathbb{R}^3$.

3. a) Пусть (r, φ, h) — цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$. Гладкая кривая, расположенная в плоскости $\varphi = \varphi_0$ и заданная там уравнением $r = r(s)$, где s — натуральный параметр, вращается вокруг оси h. Покажите, что площадь поверхности, полученной вращением куска этой кривой, отвечающего отрезку $[s_1, s_2]$ изменения параметра s, может быть найдена по формуле

$$\sigma = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} r(s)\, ds.$$

b) График гладкой неотрицательной функции $y = f(x)$, определенной на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, вращается сначала вокруг оси Ox, затем вокруг оси Oy. В каждом из этих случаев напишите формулу для площади соответствующей поверхности вращения в виде интеграла по отрезку $[a, b]$.

4. a) Центр шара радиуса 1 скользит вдоль гладкой плоской замкнутой кривой, имеющей длину L. Покажите, что площадь поверхности образованного при этом трубчатого тела равна $2\pi \cdot 1 \cdot L$.

b) Исходя из результата a), найдите площадь двумерного тора, полученного вращением окружности радиуса a вокруг оси, лежащей в плоскости окружности и удаленной от ее центра на расстояние $b > a$.

5. Изобразите заданную в декартовых координатах (x, y, z) пространства $\mathbb{R}^3$ винтовую поверхность

$$y - x \operatorname{tg} \frac{z}{h} = 0, \quad |z| \leqslant \frac{\pi}{2} h$$

и найдите площадь той ее части, для которой $r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

6. a) Покажите, что площадь Ω_{n-1} единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ равна $\dfrac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, где $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$. (В частности, если n четно, то $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n-2}{2}\right)!$, а если n нечетно, то $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-2)!!}{2^{(n-1)/2}} \sqrt{\pi}$.)

b) Проверив, что объем $V_n(r)$ шара радиуса r в $\mathbb{R}^n$ равен $\dfrac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} r^n$, покажите, что $\dfrac{dV_n}{dr}\Big|_{r=1} = \Omega_{n-1}$.

c) Найдите предел при $n \to \infty$ отношения площади полусферы $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \wedge \wedge x^n > 0\}$ к площади ее ортогональной проекции на плоскость $x^n = 0$.

d) Покажите, что при $n \to \infty$ основная часть объема n-мерного шара сосредоточивается в сколь угодно малой окрестности его граничной сферы, а основная часть площади сферы — в сколько угодно малой окрестности ее экватора.

e) Покажите, что из сделанного в d) наблюдения, часто называемого *явлением концентрации*, вытекает красивое следствие:

Регулярная функция, непрерывная на сфере большой размерности, почти постоянна на ней (вспомните, например, давление в термодинамике).

Поконкретнее:

Рассмотрим, например, функции, удовлетворяющие условию Липшица с фиксированной константой. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется такое N, что при $n > N$ у любой такой функции $f: S^n \to \mathbb{R}$ имеется значение c со следующими свойствами: площадь того множества, где значения f отличаются от c больше чем на ε, составляет не более чем δ-долю от площади всей сферы.

7. a) Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — система векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant k$. Покажите, что определитель Грама этой системы может быть представлен в виде

$$\det(\langle x_i, x_j \rangle) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} P^2_{i_1 \ldots i_k},$$

где

$$P_{i_1 \ldots i_k} = \det \begin{pmatrix} x_1^{i_1} & \ldots & x_1^{i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_k^{i_1} & \ldots & x_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

b) Выясните геометрический смысл величин $P_{i_1 \ldots i_k}$ из a) и сформулируйте результат задачи a) как *теорему Пифагора для мер произвольной размерности* k, $1 \leqslant k \leqslant n$.

c) Объясните теперь формулу

$$\sigma = \int_D \sqrt{\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \det{}^2 \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^1} & \ldots & \dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x^{i_k}}{\partial t^1} & \ldots & \dfrac{\partial x^{i_k}}{\partial t^k} \end{pmatrix}} \, dt^1 \ldots dt^k$$

для площади, заданной в параметрическом виде $x = x(t^1, \ldots, t^k)$, $t \in D \subset \mathbb{R}^k$ k-мерной гладкой поверхности.

8. a) Проверьте, что в определении 2 величина $V_k(S)$ действительно не зависит от указанного там способа разбиения S на гладкие куски $S_1, \ldots, S_m, \ldots$

b) Покажите, что кусочно гладкая поверхность S допускает локально конечное разбиение на куски $S_1, \ldots, S_m, \ldots$, описанные в определении 2.

c) Докажите, что из гладкой поверхности S всегда можно так удалить множество E площади нуль, что останется гладкая поверхность $\widetilde{S} = S \setminus E$, которая уже может быть описана одной стандартной локальной картой $\varphi: I \to S$.

9. Длину кривой, подобно школьному определению длины окружности, часто определяют как предел длин соответствующим образом вписанных в кривую ломаных. Предел берется при стремлении к нулю длин звеньев вписанных ломаных. Следующий простой пример, принадлежащий Г. Шварцу, показывает, что аналогичные действия при попытке определить площадь даже очень гладкой поверхности через площади «вписанных» в нее многогранных поверхностей могут привести к абсурду.

В цилиндр радиуса R и высоты H впишем многогранник следующим образом. Рассечем цилиндр горизонтальными плоскостями на m равных цилиндров высоты H/m каждый. Каждую из $m+1$ окружностей сечения (включая окружности верхнего и нижнего оснований исходного цилиндра) разобьем на n равных частей так, чтобы точки деления на каждой окружности находились под серединами дуг ближайшей верхней окружности. Теперь берем пару точек деления любой окружности и точку, лежащую непосредственно над или под серединой дуги, заключенной между этой парой точек.

Указанные три точки порождают треугольник, а совокупность всех таких треугольников образует многогранную поверхность, вписанную в исходную цилиндрическую поверхность (боковую поверхность прямого кругового цилиндра). На вид этот многогранник похож на примятое и собравшееся в гармошку голенище сапога, поэтому его часто называют *сапогом Шварца*.

a) Покажите, что если m и n устремить к бесконечности, но так, чтобы при этом отношение n^2/m стремилось к нулю, площадь построенной многогранной поверхно-

сти будет неограниченно расти, хотя размеры каждой ее грани (треугольника) при этом стремятся к нулю.

b) Если же n и m стремятся к бесконечности так, что отношение m/n^2 стремится к некоторому конечному пределу p, то площади многогранных поверхностей будут стремиться к конечному пределу, который в зависимости от величины p может быть больше, меньше или (при $p=0$) равен площади исходной цилиндрической поверхности.

c) Сравните описанный здесь способ введения площади гладкой поверхности с тем, который изложен в § 4, и объясните, почему в одномерном случае результаты совпадают, а в двумерном уже, вообще говоря, не совпадают. Каковы условия на последовательность вписанных многогранных поверхностей, гарантирующие совпадение результатов?

10. *Изопериметрическое неравенство.*

Пусть $V(E)$ — обозначение для объема множества $E\subset\mathbb{R}^n$, а $A+B$ — сумма (векторная) множеств $A, B\subset\mathbb{R}^n$ (сумма в смысле Минковского; см. задачу 4 к § 2 главы XI).

Пусть B — шар радиуса h. Тогда $A+B=:A_h$ есть h-окрестность множества A.

Величина

$$\lim_{h\to 0}\frac{V(A_h)-V(A)}{h}=:\mu_+(\partial A)$$

называется *внешней площадью по Минковскому границы ∂A множества A.*

a) Покажите, что если ∂A — гладкая или достаточно регулярная граница области A, то $\mu_+(\partial A)$ совпадает с обычной площадью поверхности ∂A.

b) Используя неравенство Брунна — Минковского (см. задачу 4 к § 2 главы XI), получите теперь классическое *изопериметрическое неравенство* в $\mathbb{R}^n$

$$\mu_+(\partial A)\geqslant nv^{\frac{1}{n}}V^{\frac{n-1}{n}}(A)=:\mu(S_A);$$

здесь v — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, а $\mu(S_A)$ — площадь ($(n-1)$-мерная) поверхности шара, имеющего тот же объем, что и множество A.

Изопериметрическое неравенство означает, что тело $A\subset\mathbb{R}^n$ имеет площадь границы $\mu_+(\partial A)$, не меньшую, чем шар того же объема.

§ 5. Начальные сведения о дифференциальных формах

Дадим теперь первоначальные представления об удобном математическом аппарате дифференциальных форм, обращая здесь основное внимание на его алгоритмические возможности, а не на подробности теоретических конструкций, которые будут изложены в гл. XV.

1. Дифференциальная форма, определение и примеры. Из курса алгебры читателю хорошо известно понятие линейной формы, и мы этим понятием уже широко пользовались при построении дифференциального исчисления. Там главным образом встречались симметрические формы. Здесь же речь будет о кососимметрических (антисимметрических) формах.

Напомним, что форма $L\colon X^k\to Y$ степени или порядка k, определенная на упорядоченных наборах $\xi_1, \dots, \xi_k$ векторов линейного пространства X и

принимающая значения в линейном пространстве Y, называется *кососимметрической* (антисимметрической), если значение формы меняет знак при перестановке местами любой пары ее аргументов, т. е.

$$L(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_k) = -L(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k).$$

В частности, если $\xi_i = \xi_j$, то независимо от остальных векторов значение формы будет равно нулю.

Пример 1. Векторное произведение $[\xi_1, \xi_2]$ векторов пространства $\mathbb{R}^3$ есть билинейная кососимметрическая форма со значениями в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пример 2. Определенный формулой (1) § 4 ориентированный объем $V(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ параллелепипеда, натянутого на векторы $\xi_1, \ldots, \xi_k$ пространства $\mathbb{R}^k$, является кососимметрической вещественнозначной k-формой в $\mathbb{R}^k$.

Нас будут пока интересовать вещественнозначные формы (случай $Y = \mathbb{R}$), хотя все излагаемое ниже применимо и в более общей ситуации, например, когда Y есть поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Линейная комбинация кососимметрических форм одной степени в свою очередь является кососимметрической формой, т. е. кососимметрические формы одной степени образуют линейное пространство.

В алгебре вводится, кроме того, операция $\wedge$ *внешнего умножения* кососимметрических форм, которая упорядоченной паре A^p, B^q, таких форм (степени p и q соответственно) сопоставляет кососимметрическую форму $A^p \wedge B^q$ степени $p+q$. Эта операция

ассоциативна: $(A^p \wedge B^q) \wedge C^r = A^p \wedge (B^q \wedge C^r)$,

дистрибутивна: $(A^p + B^p) \wedge C^q = A^p \wedge C^q + B^p \wedge C^q$,

кософкоммутативна: $A^p \wedge B^q = (-1)^{pq} B^q \wedge A^p$.

В частности, если речь идет об 1-формах A и B, то имеет место антикоммутативность $A \wedge B = -B \wedge A$ операции, подобная антикоммутативности упомянутого в примере 1 векторного произведения, обобщением которого и является внешнее умножение форм.

Не вникая в детали общего определения внешнего произведения, примем пока к сведению перечисленные свойства этой операции и отметим, что в случае внешнего произведения 1-форм $L_1, \ldots, L_k \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ результат $L_1 \wedge \ldots \wedge L_k$ есть k-форма, которая на наборе векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathbb{R}^n$ принимает значение

$$L_1 \wedge \ldots \wedge L_k(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \begin{vmatrix} L_1(\xi_1) & \ldots & L_k(\xi_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_1(\xi_k) & \ldots & L_k(\xi_k) \end{vmatrix} = \det(L_j(\xi_i)). \qquad (1)$$

Если соотношение (1) принять в качестве определения его левой части, то из свойств определителей легко следует, что в случае линейных 1-форм A, B, C действительно: $A \wedge B = -B \wedge A$ и $(A+B) \wedge C = A \wedge C + B \wedge C$.

Рассмотрим несколько полезных для дальнейшего примеров.

Пример 3. Пусть $\pi^i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$ — проекторы. Точнее, линейная функция $\pi^i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такова, что на любом векторе $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ она принимает значение $\pi^i(\boldsymbol{\xi}) = \xi^i$ проекции этого вектора на соответствующую координатную ось. Тогда в соответствии с формулой (1) получаем

$$\pi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{i_k}(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \ldots & \xi_1^{i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_k^{i_1} & \ldots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Пример 4. Декартовы координаты векторного произведения $[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2]$ векторов $\boldsymbol{\xi}_1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3)$, $\boldsymbol{\xi}_2 = (\xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, как известно, определяются из равенства

$$[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2] = \left(\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_1^3 & \xi_1^1 \\ \xi_2^3 & \xi_2^1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix} \right).$$

Таким образом, в соответствии с результатом примера 3 можно записать, что

$$\begin{aligned} \pi^1([\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2]) &= \pi^2 \wedge \pi^3(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2), \\ \pi^2([\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2]) &= \pi^3 \wedge \pi^1(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2), \\ \pi^3([\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2]) &= \pi^1 \wedge \pi^2(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2). \end{aligned}$$

Пример 5. Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$ — определенная в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и дифференцируемая в точке $x_0 \in D$ функция. Как известно, дифференциал $df(x_0)$ функции в точке является линейной функцией, определенной на векторах $\boldsymbol{\xi}$ смещения от этой точки, точнее, на векторах пространства TD_{x_0}, касательного к D (к $\mathbb{R}^n$) в рассматриваемой точке. Напомним, что если $x^1, \ldots, x^n$ — координаты в $\mathbb{R}^n$, а $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, то

$$df(x_0)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\xi^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\xi^n = D_{\boldsymbol{\xi}} f(x_0).$$

В частности, $dx^i(\boldsymbol{\xi}) = \xi^i$, или, более формально, $dx^i(x_0)(\boldsymbol{\xi}) = \xi^i$. Если $f_1, \ldots, f_k$ — определенные в D и дифференцируемые в точке $x_0 \in D$ вещественнозначные функции, то в соответствии с формулой (1) в точке x_0 на наборе $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k$ векторов пространства TG_{x_0} получаем

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_k(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k) = \begin{vmatrix} df_1(\boldsymbol{\xi}_1) & \ldots & df_k(\boldsymbol{\xi}_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ df_1(\boldsymbol{\xi}_k) & \ldots & df_k(\boldsymbol{\xi}_k) \end{vmatrix}, \tag{3}$$

и, в частности,

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \ldots & \xi_1^{i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_k^{i_1} & \ldots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Таким образом, из линейных форм $df_1, \ldots, df_k$, определенных на линейном пространстве $TD_{x_0} \approx T\mathbb{R}^n_{x_0} \approx \mathbb{R}^n$, получились определенные на этом же пространстве кососимметрические формы степени k.

Пример 6. Если $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$, где D — область в $\mathbb{R}^n$, то в любой точке $x \in D$ определен дифференциал $df(x)$ функции f, который, как было сказано, является линейной функцией $df(x)\colon TD_x \to T\mathbb{R}_{f(x)} \approx \mathbb{R}$ на линейном пространстве TD_x, касательном к D в точке x. При переходе от точки к точке в области D форма $df(x) = f'(x)\,dx$, вообще говоря, меняется. Итак, гладкая скалярная функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ порождает в каждой точке области D линейную форму $df(x)$, или, как говорят, порождает в D *поле* линейных *форм*, определенных на соответствующих касательных пространствах TD_x.

Определение 1. Будем говорить, что в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана вещественнозначная *дифференциальная p-форма ω,* если в каждой точке $x \in D$ определена кососимметрическая форма $\omega(x)\colon (TD_x)^p \to \mathbb{R}$.

Число p обычно называют *степенью* или *порядком* дифференциальной p-формы ω. В этой связи p-форму ω часто обозначают через ω^p.

Таким образом, рассмотренное в примере 6 поле дифференциала df гладкой функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ есть дифференциальная 1-форма в области D, а $\omega = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ есть простейший пример дифференциальной формы степени p.

Пример 7. Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле, т. е. с каждой точкой $x \in D$ связан вектор $\boldsymbol{F}(x)$. При наличии евклидовой структуры в $\mathbb{R}^n$ это векторное поле порождает следующую дифференциальную 1-форму $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$ в D.

Если $\boldsymbol{\xi}$ — вектор, приложенный к точке $x \in D$, т. е. $\boldsymbol{\xi} \in TD_x$, то положим

$$\omega^1_{\boldsymbol{F}}(x)(\boldsymbol{\xi}) = \langle \boldsymbol{F}(x), \boldsymbol{\xi} \rangle.$$

Из свойств скалярного произведения вытекает, что $\omega^1_{\boldsymbol{F}}(x) = \langle \boldsymbol{F}(x), \cdot \rangle$ действительно является линейной формой в каждой точке $x \in D$

Такие дифференциальные формы возникают очень часто. Например, если $\boldsymbol{F}$ — непрерывное силовое поле в области D, а $\boldsymbol{\xi}$ — вектор малого смещения от точки $x \in D$, то элементарная работа поля, отвечающая такому смещению, как известно из физики, определяется именно величиной $\langle \boldsymbol{F}(x), \boldsymbol{\xi} \rangle$.

Итак, поле сил $\boldsymbol{F}$ в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ естественным образом порождает в D дифференциальную 1-форму $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$, которую в этом случае естественно назвать *формой работы поля $\boldsymbol{F}$*.

Заметим, что в евклидовом пространстве дифференциал df гладкой в области $D \subset \mathbb{R}^n$ функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ тоже можно считать 1-формой, порожденной векторным полем, которым в данном случае является поле $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f$. В самом деле, ведь по определению вектор $\operatorname{grad} f(x)$ таков, что для любого вектора $\boldsymbol{\xi} \in TD_x$ имеет место равенство $df(x)(\boldsymbol{\xi}) = \langle \operatorname{grad} f(x), \boldsymbol{\xi} \rangle$.

Пример 8. Заданное в области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ векторное поле $\boldsymbol{V}$ может также следующим образом порождать дифференциальную форму $\omega^{n-1}_{\boldsymbol{V}}$ степени $n-1$. Если в точке $x \in D$ взять соответствующий ей вектор поля $\boldsymbol{V}(x)$ и еще $n-1$ векторов $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-1} \in TD_x$, приложенных к точке x, то ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на

векторы $\boldsymbol{V}(x), \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$, равный определителю матрицы, строки которой состоят из координат этих векторов, очевидно, будет кососимметрической $(n-1)$-формой по переменным $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_{n-1}$.

При $n=3$ форма ω_V^2 есть обычное смешанное произведение $(\boldsymbol{V}(x), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ векторов, из которых один $\boldsymbol{V}(x)$ задан, а тогда по двум оставшимся аргументам получается кососимметрическая 2-форма $\omega_V^2 = (\boldsymbol{V}, \cdot, \cdot)$.

Например, если в области D имеется установившееся течение жидкости и $\boldsymbol{V}(x)$ — вектор скорости течения в точке $x \in D$, то величина $(\boldsymbol{V}(x), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ есть элементарный объем жидкости, которая протекает за единицу времени через натянутую на малые векторы $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in TD_x$ площадку (параллелограмм). Выбирая по разному векторы $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$, мы будем получать различные по конфигурации и расположению в пространстве площадки (параллелограммы), одной из вершин которых является точка x. Для каждой такой площадки будет, вообще говоря, свое значение $(\boldsymbol{V}(x), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ формы $\omega_V^2(x)$. Как было сказано, оно показывает, сколько жидкости протекло за единицу времени через данную площадку, т. е. характеризует расход жидкости или поток через выбранную элементарную площадку. По этой причине форму ω_V^2, как, впрочем, и ее многомерный аналог ω_V^{n-1}, часто называют *формой потока векторного поля* $\boldsymbol{V}$ *в области* D.

2. Координатная запись дифференциальной формы. Остановимся теперь на координатной записи кососимметрических алгебраических и дифференциальных форм и покажем, в частности, что любая дифференциальная k-форма в некотором смысле является линейной комбинацией стандартных дифференциальных форм вида (4).

Для сокращения записи будем (как мы это делали в аналогичных случаях и прежде) по повторяющимся сверху и снизу индексам подразумевать суммирование в пределах области допустимых значений этих индексов.

Пусть L — k-линейная форма в $\mathbb{R}^n$. Если в $\mathbb{R}^n$ фиксирован базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то каждый вектор $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ получает координатное представление $\boldsymbol{\xi} = \xi^i \boldsymbol{e}_i$ в этом базисе, а форма L приобретает координатную запись

$$L(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k) = L(\xi_1^{i_1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \xi_k^{i_k}\boldsymbol{e}_{i_k}) = L(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k})\xi_1^{i_1} \ldots \xi_k^{i_k}. \tag{5}$$

Числа $a_{i_1, \ldots, i_k} = L(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k})$ вполне характеризуют форму L, если известно, в каком базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ они получены. Эти числа, очевидно, симметричны или кососимметричны по их индексам тогда и только тогда, когда соответствующим видом симметрии обладает форма L.

В случае кососимметрической формы L координатное представление (5) можно несколько преобразовать. Чтобы направление этого преобразования стало ясным и естественным, рассмотрим частный случай соотношения (5), когда L — кососимметрическая 2-форма в $\mathbb{R}^3$. Тогда для векторов $\boldsymbol{\xi}_1 = \xi_1^{i_1}\boldsymbol{e}_{i_1}$,

$\boldsymbol{\xi}_2 = \xi_2^{i_2}\boldsymbol{e}_{i_2}$, где $i_1, i_2 = 1, 2, 3$, получаем

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) &= L(\xi_1^{i_1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \xi_2^{i_2}\boldsymbol{e}_{i_2}) = L(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2})\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2} = \\ &= L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1)\xi_1^1\xi_2^1 + L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\xi_1^1\xi_2^2 + L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)\xi_1^1\xi_2^3 + \\ &\quad + L(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)\xi_1^2\xi_2^1 + L(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)\xi_1^2\xi_2^2 + L(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\xi_1^2\xi_2^3 + \\ &\quad + L(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1)\xi_1^3\xi_2^1 + L(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)\xi_1^3\xi_2^2 + L(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3)\xi_1^3\xi_2^3 = \\ &= L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)(\xi_1^1\xi_2^2 - \xi_1^2\xi_2^1) + L(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)(\xi_1^1\xi_2^3 - \xi_1^3\xi_2^1) + \\ &\quad + L(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)(\xi_1^2\xi_2^3 - \xi_1^3\xi_2^2) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3} L(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}) \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2} \\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем возможным комбинациям индексов i_1, i_2, которые удовлетворяют указанным под знаком суммы неравенствам.

Аналогично и в общем случае для кососимметрической формы L можно получить следующее представление:

$$L(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} L(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}) \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \ldots & \xi_1^{i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_k^{i_1} & \ldots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Тогда в соответствии с формулой (2) последнее равенство можно переписать в виде

$$L(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} L(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}) \pi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{i_k}(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k).$$

Таким образом, любую кососимметрическую форму L можно представить в виде линейной комбинации

$$L = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k} \pi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{i_k} \tag{7}$$

k-форм $\pi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \pi^{i_k}$, являющихся внешним произведением, составленным из простейших 1-форм $\pi^1, \ldots, \pi^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Пусть теперь в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана дифференциальная k-форма ω и некоторая система криволинейных координат $x^1, \ldots, x^n$. В каждой точке $x \in D$ фиксируем базис $\boldsymbol{e}_1(x), \ldots, \boldsymbol{e}_n(x)$ пространства TD_x, составленный из единичных векторов координатных направлений. (Например, если $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, то $\boldsymbol{e}_1(x), \ldots, \boldsymbol{e}_n(x)$ есть просто репер $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathbb{R}^n$, параллельно перенесенный из начала координат в точку x.) Тогда в каждой точке $x \in D$ на основании формул (4) и (6) получаем, что

$$\omega(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \omega(\boldsymbol{e}_{i_1}(x), \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}(x))\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k)$$

или

$$\omega(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{8}$$

Таким образом, любая дифференциальная k-форма является комбинацией простейших k-форм $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, составленных из дифференциалов координат. Отсюда, собственно, и название «дифференциальная форма».

Коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_k}(x)$ линейной комбинации (8), вообще говоря, зависят от точки x, т. е. это какие-то функции, определенные в области, где задана форма ω_k.

В частности, нам уже давно известно разложение дифференциала

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)\,dx^n, \tag{9}$$

а, как видно из равенств

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi}\rangle = \langle F^{i_1}(x)\boldsymbol{e}_{i_1}(x), \xi^{i_2}\boldsymbol{e}_{i_2}(x)\rangle = \langle \boldsymbol{e}_{i_1}(x), \boldsymbol{e}_{i_2}(x)\rangle F^{i_1}(x)\xi^{i_2} = \\ = g_{i_1 i_2}(x)F^{i_1}(x)\xi^{i_2} = g_{i_1 i_2}(x)F^{i_1}(x)\,dx^{i_2}(\boldsymbol{\xi}),\end{aligned}$$

имеет также место разложение

$$\omega^1_{\boldsymbol{F}}(x) = \langle \boldsymbol{F}(x), \cdot\rangle = (g_{i_1 i}(x)F^{i_1}(x))dx^i = a_i(x)\,dx^i, \tag{10}$$

которое в декартовых координатах выглядит особенно просто:

$$\omega^1_{\boldsymbol{F}}(x) = \langle \boldsymbol{F}(x), \cdot\rangle = \sum_{i=1}^{n} F^i(x)\,dx^i. \tag{11}$$

Далее, в $\mathbb{R}^3$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}\omega^2_{\boldsymbol{V}}(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \begin{vmatrix} V^1(x) & V^2(x) & V^3(x) \\ \xi^1_1 & \xi^2_1 & \xi^3_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \xi^3_2 \end{vmatrix} = \\ = V^1(x)\begin{vmatrix} \xi^2_1 & \xi^3_1 \\ \xi^2_2 & \xi^3_2 \end{vmatrix} + V^2(x)\begin{vmatrix} \xi^3_1 & \xi^1_1 \\ \xi^3_2 & \xi^1_2 \end{vmatrix} + V^3(x)\begin{vmatrix} \xi^1_1 & \xi^2_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\omega^2_{\boldsymbol{V}}(x) = V^1(x)\,dx^2 \wedge dx^3 + V^2(x)\,dx^3 \wedge dx^1 + V^3(x)\,dx^1 \wedge dx^2. \tag{12}$$

Аналогично, из разложения по строке определителя n-го порядка для формы $\omega^{n-1}_{\boldsymbol{V}}$ получаем следующее разложение:

$$\omega^{n-1}_{\boldsymbol{V}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} V^i(x)\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{13}$$

где знак $\widehat{\ }$ стоит над дифференциалом, который следует опустить в указанном слагаемом.

3. Внешний дифференциал формы. Все, что было до сих пор сказано о дифференциальных формах, пока в сущности относилось к каждой точке x области задания формы в отдельности и имело чисто алгебраический характер. Специфической для анализа операцией над дифференциальными формами является операция их (внешнего) дифференцирования.

Условимся в дальнейшем под *дифференциальными формами нулевого порядка* в области $D \subset \mathbb{R}^n$ понимать функции $f : D \to \mathbb{R}$, определенные в этой области.

Определение 2. (*Внешним*) *дифференциалом* от 0-формы f в случае, если f — дифференцируемая функция, называется обычный дифференциал df от этой функции.

Если заданная в области $D \subset \mathbb{R}^n$ дифференциальная p-форма ($p \geqslant 1$)

$$\omega(x) = a_{i_1 \dots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

имеет дифференцируемые коэффициенты $a_{i_1 \dots i_p}(x)$, то ее *(внешний) дифференциал* есть форма

$$d\omega(x) = da_{i_1 \dots i_p}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Используя разложение (9) дифференциала функции и опираясь на вытекающую из соотношения (1) дистрибутивность внешнего произведения 1-форм, заключаем, что

$$d\omega(x) = \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^i}(x)\, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = \alpha_{i i_1 \dots i_p}(x)\, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

т. е. (внешний) дифференциал от p-формы ($p \geqslant 0$) всегда есть форма степени $p+1$.

Отметим, что данное выше определение 1 дифференциальной p-формы в области $D \subset \mathbb{R}^n$, как теперь можно понять, слишком общо, поскольку никак не связывает формы $\omega(x)$, соответствующие различным точкам области D. Реально в анализе используются лишь формы, коэффициенты $a_{i_1 \dots i_p}(x)$ координатного представления которых являются достаточно регулярными (чаще всего бесконечно дифференцируемыми) функциями в области D. *Порядок гладкости формы* ω в области $D \subset \mathbb{R}^n$ принято характеризовать низшим из порядков гладкости ее коэффициентов. Совокупность всех форм степени $p \geqslant 0$ с коэффициентами класса $C^{(\infty)}(D, \mathbb{R})$ чаще всего обозначают символом $\Omega^p(D, \mathbb{R})$ или Ω^p.

Таким образом, определенная нами операция дифференцирования форм осуществляет отображение $d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}$.

Рассмотрим несколько полезных конкретных примеров.

Пример 9. Для 0-формы $\omega = f(x, y, z)$ — дифференцируемой функции, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^3$, — получаем

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Пример 10. Пусть

$$\omega(x, y) = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

— дифференциальная 1-форма в области D пространства $\mathbb{R}^2$, наделенного координатами (x, y). Считая P и Q дифференцируемыми в D функциями, в соответствии с определением 2 получаем

$$\begin{aligned} d\omega(x, y) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy = \\ &= \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y)\, dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Пример 11. Для 1-формы

$$\omega = P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

заданной в области D пространства $\mathbb{R}^3$, получаем

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Пример 12. Подсчет дифференциала 2-формы

$$\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy,$$

где P, Q, R — дифференцируемые в области $D \subset \mathbb{R}^3$ функции, приводит к соотношению

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Если (x^1, x^2, x^3) — декартовы координаты в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, а $x \mapsto f(x)$, $x \mapsto \boldsymbol{F}(x) = (F^1, F^2, F^3)(x)$, $x \mapsto \boldsymbol{V} = (V^1, V^2, V^3)(x)$ — гладкие скалярное и векторные поля в области $D \subset \mathbb{R}^3$, то вместе с ними (особенно в физических задачах) часто рассматривают соответственно векторные поля

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) \text{— \textit{градиент} скалярного поля } f, \tag{14}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}, \frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1}, \frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right) \text{— \textit{ротор} векторного поля } \boldsymbol{F} \tag{15}$$

и скалярное поле

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3} \text{ — \textit{дивергенция} векторного поля } \boldsymbol{V}. \tag{16}$$

О градиенте скалярного поля мы в свое время уже говорили. Не останавливаясь пока на физическом содержании ротора и дивергенции векторного поля, отметим лишь связь этих классических операторов теории поля с операцией дифференцирования форм.

В евклидовом ориентированном пространстве $\mathbb{R}^3$ между векторными полями и один- и два-формами имеется взаимно однозначное соответствие

$$\boldsymbol{F} \longleftrightarrow \omega^1_{\boldsymbol{F}} = \langle \boldsymbol{F}, \cdot \rangle, \quad \boldsymbol{V} \longleftrightarrow \omega^2_{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{V}, \cdot, \cdot).$$

Заметим также, что любая 3-форма в области $D\subset\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\rho(x^1,x^2,x^3)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3.$$

Учитывая эти обстоятельства, можно ввести следующие определения для $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$:

$$f\mapsto\omega^0(=f)\mapsto d\omega^0(=df)=\omega^1_{\boldsymbol{g}}\mapsto\boldsymbol{g}:=\operatorname{grad} f, \qquad (1')$$

$$\boldsymbol{F}\mapsto\omega^1_{\boldsymbol{F}}\mapsto d\omega^1_{\boldsymbol{F}}=\omega^2_{\boldsymbol{r}}\mapsto\boldsymbol{r}:=\operatorname{rot}\boldsymbol{F}, \qquad (2')$$

$$\boldsymbol{V}\mapsto\omega^2_{\boldsymbol{V}}\mapsto d\omega^2_{\boldsymbol{V}}=\omega^3_{\rho}\mapsto\rho:=\operatorname{div}\boldsymbol{V}. \qquad (3')$$

Примеры 9, 11, 12 показывают, что при этом в декартовых координатах мы приходим к выписанным выше выражениям (14), (15), (16) для $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{V}$. Таким образом, перечисленные операторы теории поля можно рассматривать как конкретные проявления операции дифференцирования внешних форм, которая выполняется единообразно на формах любой степени. Подробнее о градиенте, роторе и дивергенции будет сказано в гл. XIV.

4. Перенос векторов и форм при отображениях. Посмотрим внимательнее на то, что происходит с функциями (0-формами) при отображении областей.

Пусть $\varphi\colon U\to V$ — отображение области $U\subset\mathbb{R}^m$ в область $V\subset\mathbb{R}^n$. Под действием отображения φ каждая точка $t\in U$ переходит в определенную точку $x=\varphi(t)$ области V.

Если на V определена функция f, то благодаря отображению $\varphi\colon U\to V$ на области U естественно возникает полученная из f функция φ^*f, которая определяется равенством

$$(\varphi^*f)(t):=f(\varphi(t)),$$

т. е. чтобы найти значение φ^*f в точке $t\in U$, надо отправить t в точку $x=\varphi(t)\in V$ и вычислить там значение функции f.

Таким образом, если при отображении $\varphi\colon U\to V$ точки области U переходят в точки области V, то множество определенных на V функций под действием построенного соответствия $f\mapsto\varphi^*f$ отображается (в обратную сторону) в множество функций, определенных на U.

Иными словами, мы показали, что при отображении $\varphi\colon U\to V$ естественно возникает отображение $\varphi^*\colon\Omega^0(V)\to\Omega^0(U)$, которое преобразует заданные на V нуль-формы в нуль-формы, определенные на U.

Рассмотрим теперь общий случай переноса форм любой степени.

Пусть $\varphi\colon U\to V$ — гладкое отображение области $U\subset\mathbb{R}^m_t$ в область $V\subset\mathbb{R}^n_x$, $\varphi'(t)\colon TU_t\to TV_{x=\varphi(t)}$ — соответствующее φ отображение касательных пространств, и пусть ω — некоторая p-форма в области V. Тогда форме ω можно сопоставить p-форму $\varphi^*\omega$ в области U, которая в точке $t\in U$ на наборе векторов $\boldsymbol{\tau}_1,\ldots,\boldsymbol{\tau}_p\in TU_t$ определяется равенством

$$\varphi^*\omega(t)(\boldsymbol{\tau}_1,\ldots,\boldsymbol{\tau}_p):=\omega(\varphi(t))(\varphi'_1\boldsymbol{\tau}_1,\ldots,\varphi'_p\boldsymbol{\tau}_p). \qquad (17)$$

Таким образом, каждому гладкому отображению $\varphi: U \to V$ соответствует отображение $\varphi^*: \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$, которое переносит заданные на V формы в область U. Из соотношения (17), очевидно, следует, что

$$\varphi^*(\omega' + \omega'') = \varphi^*(\omega') + \varphi^*(\omega''), \tag{18}$$

$$\varphi^*(\lambda\omega) = \lambda\varphi^*\omega, \quad \text{если } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Вспомнив закон $(\psi \circ \varphi)' = \psi' \circ \varphi'$ дифференцирования композиции отображений $\varphi: U \to V$, $\psi: V \to W$, из (17) заключаем дополнительно, что

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \tag{20}$$

(естественный обратный ход: композиция отображений

$$\psi^*: \Omega^p(W) \to \Omega^p(V), \quad \varphi^*: \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)).$$

Посмотрим теперь, как практически осуществляется перенос форм.

Пример 13. В области $V \subset \mathbb{R}^n_x$ возьмем 2-форму $\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$. Пусть $x^i = x^i(t^1, \ldots, t^m)$, $i = 1, \ldots, n$ — координатная запись отображения $\varphi: U \to V$ области $U \subset \mathbb{R}^m_t$ в V.

Мы хотим найти координатное представление формы $\varphi^*\omega$ в U. Берем точку $t \in U$ и векторы $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \in TU_t$. В пространстве $TV_{x=\varphi(t)}$ им отвечают векторы $\boldsymbol{\xi}_1 = \varphi'(t)\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2 = \varphi'(t)\boldsymbol{\tau}_2$, координаты $(\xi^1_1, \ldots, \xi^m_1)$, $(\xi^1_2, \ldots, \xi^m_2)$ которых выражаются через координаты $(\tau^1_1, \ldots, \tau^m_1)$, $(\tau^1_2, \ldots, \tau^m_2)$ векторов $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ с помощью матрицы Якоби по формулам

$$\xi^i_1 = \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\tau^j_1, \quad \xi^i_2 = \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\tau^j_2, \quad i = 1, \ldots, n$$

(по j суммирование от 1 до m).

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\varphi^*\omega(t)(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) &:= \omega(\varphi(t))(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \\
&= \begin{vmatrix} \xi^{i_1}_1 & \xi^{i_2}_1 \\ \xi^{i_1}_2 & \xi^{i_2}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau^{j_1}_1 & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\tau^{j_2}_1 \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau^{j_1}_2 & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\tau^{j_2}_2 \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2 = 1}^{m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \begin{vmatrix} \tau^{j_1}_1 & \tau^{j_2}_1 \\ \tau^{j_1}_2 & \tau^{j_2}_2 \end{vmatrix} = \\
&= \sum_{j_1, j_2 = 1}^{m} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \, dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = \\
&= \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} - \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}} \right) dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = \\
&= \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}} \\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}} \end{vmatrix} (t) \, dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2).
\end{aligned}$$

Следовательно, мы показали, что

$$\varphi^*(dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}) = \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m} \frac{\partial(x^{i_1}, x^{i_2})}{\partial(t^{j_1}, t^{j_2})}(t)\, dt^{j_1} \wedge dt^{j_2}.$$

Если воспользоваться свойствами (18) и (19) операции переноса форм[1] и повторить проведенную в последнем примере выкладку в общем виде, то получим следующее равенство:

$$\varphi^*\Bigg(\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} a_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\Bigg) = \\ = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant m}} a_{i_1,\ldots,i_p}(x(t))\, \frac{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_p})}{\partial(t^{j_1}, \ldots, t^{j_p})} dt^{j_1} \wedge \ldots \wedge dt^{j_p}. \quad (21)$$

Заметим, что если в форме, стоящей здесь под знаком φ^*, формально сделать замену $x = x(t)$, выразить дифференциалы $dx^1, \ldots, dx^n$ через дифференциалы $dt^1, \ldots, dt^m$ и упростить полученное выражение, пользуясь свойствами внешнего произведения, то мы как раз и получим правую часть равенства (21).

Действительно, для каждого фиксированного набора индексов $i_1, \ldots, i_p$

$$a_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = a_{i_1,\ldots,i_p}(x(t))\bigg(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\, dt^{j_1}\bigg) \wedge \ldots \wedge \bigg(\frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}\, dt^{j_p}\bigg) = \\ = a_{i_1,\ldots,i_p}(x(t))\, \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}\, dt^{j_1} \wedge \ldots \wedge dt^{j_p} = \\ = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant m} a_{i_1,\ldots,i_p}(x(t))\, \frac{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_p})}{\partial(t^{j_1}, \ldots, t^{j_p})}\, dt^{j_1} \wedge \ldots \wedge dt^{j_p}.$$

Суммируя такие равенства по всем упорядоченным наборам $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, получаем правую часть соотношения (21).

Таким образом, мы доказали следующее важное в техническом отношении

Утверждение. *Если в области $V \subset \mathbb{R}^n$ задана дифференциальная форма ω, а $\varphi\colon U \to V$ — гладкое отображение области $U \subset \mathbb{R}^m$ в V, то координатная запись формы $\varphi^*\omega$ может быть получена из координатной записи*

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} a_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

формы ω прямой заменой переменных $x = \varphi(t)$ (с последующим преобразованием в соответствии со свойствами внешнего произведения).

[1] Если (19) использовать поточечно, то видно, что

$$\varphi^*(a(x)\omega) = a(\varphi(t))\varphi^*\omega.$$

Пример 14. В частности, если $m=n=p$, то соотношение (21) сводится к равенству
$$\varphi^*(dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)=\det\varphi'(t)\,dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n. \tag{22}$$

Значит, если под знаком кратного интеграла вместо $f(x)\,dx^1\ldots dx^n$ писать $f(x)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$, то формула
$$\int\limits_{V=\varphi(U)} f(x)\,dx=\int\limits_{U} f(\varphi(t))\det\varphi'(t)\,dt$$
замены переменных в кратном интеграле при сохраняющих ориентацию диффеоморфизмах (т. е. при $\det\varphi'(t)>0$) получалась бы автоматически формальной подстановкой $x=\varphi(t)$, подобно тому, как это имело место в одномерном случае, и ей можно было бы придать следующий вид:
$$\int\limits_{\varphi(U)}\omega=\int\limits_{U}\varphi^*\omega. \tag{23}$$

Заметим в заключение, что если степень p взятой в области $V\subset\mathbb{R}^n_x$ формы ω больше, чем размерность m области $U\subset\mathbb{R}^m$, которая отображается посредством $\varphi\colon U\to V$ в область V, то соответствующая ω на U форма $\varphi^*\omega$, очевидно, окажется нулевой. Таким образом, отображение $\varphi^*\colon\Omega^p(V)\to\to\Omega^p(U)$, вообще говоря, не обязано быть инъективным.

С другой стороны, если $\varphi\colon U\to V$ имеет гладкое обратное отображение $\varphi^{-1}\colon V\to U$, то в силу соотношения (20) и равенств $\varphi^{-1}\circ\varphi=e_U$, $\varphi\circ\varphi^{-1}=e_V$ получаем, что $(\varphi)^*\circ(\varphi^{-1})^*=e_U^*$, $(\varphi^{-1})^*\circ(\varphi)^*=e_V^*$, и поскольку e_U^* и e_V^* — тождественные отображения $\Omega^p(U)$ и $\Omega^p(V)$ соответственно, то отображения $\varphi^*\colon\Omega^p(V)\to\Omega^p(U)$, $(\varphi^{-1})^*\colon\Omega^p(U)\to\Omega^p(V)$, как и следовало ожидать, оказываются взаимно обратными. То есть в этом случае отображение $\varphi^*\colon\Omega^p(V)\to\to\Omega^p(U)$ биективно.

Отметим, наконец, что наряду с уже указанными выше свойствами (18)—(20) отображение φ^* переноса форм, как можно проверить, удовлетворяет также соотношению
$$\varphi^*(d\omega)=d(\varphi^*\omega). \tag{24}$$

Это принципиально важное равенство показывает, в частности, что определенная нами в координатном виде операция дифференцирования форм на самом деле не зависит от выбора системы координат, в которой записана дифференцируемая форма ω. Подробнее это будет обсуждаться в гл. XV.

5. Формы на поверхностях

Определение 3. Говорят, что *на гладкой поверхности* $S\subset\mathbb{R}^n$ задана *дифференциальная p-форма* ω, если в каждой точке $x\in S$ на векторах касательной к S плоскости TS_x определена p-форма $\omega(x)$.

Пример 15. Если гладкая поверхность S лежит в области $D\subset\mathbb{R}^n$, в которой определена форма ω, то поскольку в любой точке $x\in S$ имеет место включение $TS_x\subset TD_x$, можно рассмотреть ограничение формы $\omega(x)$ на TS_x.

Так на S возникает форма $\omega|_S$, которую естественно назвать *ограничением формы ω на поверхность S*.

Как мы знаем, поверхность локально или в целом задается параметрически. Пусть $\varphi: U \to S = \varphi(U) \subset D$ — параметризованная гладкая поверхность в области D, а ω — форма в D. Тогда форму ω можно перенести в область U параметров и записать $\varphi^*\omega$ в координатном виде в соответствии с установленным выше алгоритмом. Ясно, что получаемая при этом в U форма $\varphi^*\omega$ совпадает с формой $\varphi^*(\omega|_S)$.

Заметим, что коль скоро $\varphi'(t): TU_t \to TS_x$ в любой точке $t \in U$ есть изоморфизм между TU_t и TS_x, то можно переносить формы как с S на U, так и с U на S, поэтому как сами гладкие поверхности обычно задают локально или в целом параметрически, так и формы на них в конечном счете обычно задают в областях изменения параметров локальных карт.

Пример 16. Пусть ω_V^2 — рассмотренная в примере 8 форма потока, порожденная векторным полем скоростей течения $\boldsymbol{V}$ в области D ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Если S — гладкая ориентированная поверхность в D, то можно рассмотреть ограничение $\omega_V^2|_S$ формы ω_V^2 на S. Получаемая при этом форма $\omega_V^2|_S$ характеризует поток через каждый элемент поверхности S.

Если $\varphi: I \to S$ локальная карта поверхности S, то, сделав замену переменных $x = \varphi(t)$ в координатном выражении (12) формы ω_V^2, получим координатное выражение определенной на квадрате I формы $\varphi^*\omega_V^2 = \varphi^*(\omega_V^2|_S)$ в данных локальных координатах поверхности.

Пример 17. Пусть ω_F^1 — рассмотренная в примере 7 форма работы, порожденная действующим в области D евклидова пространства полем сил $\boldsymbol{F}$. Пусть $\varphi: I \to \varphi(I) \subset D$ — гладкий путь (φ — не обязательно гомеоморфизм). Тогда в соответствии с общим принципом ограничения и переноса форм на отрезке I возникает форма $\varphi^*\omega_F^1$, координатное представление $a(t)\,dt$ которой можно получить, выполнив замену переменных $x = \varphi(t)$ в координатном выражении (11) формы ω_F^1.

Задачи и упражнения

1. Вычислите значения приведенных ниже дифференциальных форм ω в $\mathbb{R}^n$ на указанных наборах векторов:

a) $\omega = x^2\,dx^1$ на векторе $\xi = (1, 2, 3) \in T\mathbb{R}^3_{(3,2,1)}$.

b) $\omega = dx^1 \wedge dx^3 + x^1\,dx^2 \wedge dx^4$ на упорядоченной паре векторов $\xi_1, \xi_2 \in T\mathbb{R}^4_{(1,0,0,0)}$.

c) $\omega = df$, где $f = x^1 + 2x^2 + \ldots + nx^n$, а $\xi = (1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}) \in T\mathbb{R}^n_{(1,1,\ldots,1)}$.

2. a) Проверьте, что форма $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ тождественно равна нулю, если не все индексы $i_1, \ldots, i_k$ различны.

b) Объясните, почему на n-мерном векторном пространстве нет отличных от нуля кососимметрических форм степени $p > n$.

c) Упростите запись формы, заданной в виде

$$2\,dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 + 3\,dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1.$$

d) Раскройте скобки и приведите подобные члены

$$(x^1\,dx^2 + x^2\,dx^1) \wedge (x^3\,dx^1 \wedge dx^2 + x^2\,dx^1 \wedge dx^3 + x^1\,dx^2 \wedge dx^3).$$

e) Форму $df \wedge dg$, где $f = \ln(1+|x|^2)$, $g = \sin|x|$, $x = (x^1, x^2, x^3)$, запишите в виде комбинации форм $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3$.

f) Проверьте, что в $\mathbb{R}^n$

$$df^1 \wedge \ldots \wedge df^n(x) = \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)(x)\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

g) Проведите все выкладки и покажите, что при $1 \leqslant k \leqslant n$

$$df^1 \wedge \ldots \wedge df^k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{i_k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^{i_1}} & \cdots & \frac{\partial f^k}{\partial x^{i_k}} \end{pmatrix} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

3. a) Покажите, что форма α четной степени коммутирует с любой формой β, т. е. $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$.

b) Пусть $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i$ и $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n раз). Проверьте, что

$$\omega^n = n!\,dp_1 \wedge dq^1 \wedge \ldots \wedge dp_n \wedge dq^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!\,dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n \wedge dq^1 \wedge \ldots \wedge dq^n.$$

4. a) Форму $\omega = df$, где $f(x) = (x^1) + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^n$, запишите в виде комбинации форм $dx^1, \ldots, dx^n$ и найдите дифференциал $d\omega$ формы ω.

b) Проверьте, что для любой функции $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, $d^2 f \equiv 0$, где $d^2 = d \circ d$, а d — оператор внешнего дифференцирования.

c) Покажите, что если коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_k}$ формы $\omega = a_{i_1 \ldots i_k}(x)\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ принадлежат классу $C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, то $d^2\omega \equiv 0$ в области D.

d) Найдите внешний дифференциал формы $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$ в области ее определения.

5. Если под знаком кратного интеграла $\int\limits_D f(x)\,dx^1 \ldots dx^n$ произведение $dx^1 \ldots dx^n$ понимать как форму $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, то, согласно результату примера 14, у нас будет возможность формально получать подынтегральные выражения формулы замены переменных в кратном интеграле. Выполните, согласно этой рекомендации, переход от декартовых координат:

a) к полярным координатам в $\mathbb{R}^2$,

b) к цилиндрическим координатам в $\mathbb{R}^3$,

c) к сферическим координатам в $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите ограничение формы:

a) dx^i на гиперплоскость $x^i = 1$.

b) $dx \wedge dy$ на кривую $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a < t < b$.

c) $dx \wedge dy$ на плоскость в $\mathbb{R}^3$, задаваемую уравнением $x = c$.

d) $dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$ на грани стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^3$.

e) $\omega_i = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge \widehat{dx^i} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$ на грани стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^n$; знак $\frown$ стоит над дифференциалом dx^i, который выбрасывается из написанного произведения.

7. Выразите в сферических координатах $\mathbb{R}^3$ ограничение следующих форм на сферу радиуса R с центром в начале координат:

a) dx,
b) dy,
c) $dy \wedge dz$.

8. Отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задано в виде $(u, v) \mapsto (u \cdot v, 1) = (x, y)$. Найдите:
a) $\varphi^*(dx)$,
b) $\varphi^*(dy)$,
c) $\varphi^*(y\,dx)$.

9. Проверьте, что внешний дифференциал $d : \Omega^p(D) \to \Omega^{p+1}(D)$ обладает следующими свойствами:
a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.
b) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$, где $\deg \omega_1$ — степень формы ω_1.
c) $\forall \omega \in \Omega^p \quad d(d\omega) = 0$.
d) $\forall f \in \Omega^0 \quad df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Покажите, что отображение $d : \Omega^p(D) \to \Omega^{p+1}(D)$, обладающее свойствами a—d, единственно.

10. Проверьте, что отображение $\varphi^* : \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$, отвечающее отображению $\varphi : U \to V$, обладает следующими свойствами:
a) $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$,
b) $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2$,
c) $d\varphi^*\omega = \varphi^* d\omega$.
d) Если еще имеется отображение $\psi : V \to W$, то $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

11. Покажите, что гладкая k-мерная поверхность ориентируема тогда и только тогда, когда на ней существует нигде не вырождающаяся k-форма.

Глава XIII

Криволинейные и поверхностные интегралы

§ 1. Интеграл от дифференциальной формы

1. Исходные задачи, наводящие соображения, примеры.

а. Работа поля Пусть $\boldsymbol{F}(x)$ — непрерывное векторное поле сил, действующих в области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Перемещение пробной частицы в поле связано с совершением работы. Требуется вычислить работу, совершаемую полем, при перемещении единичной пробной частицы по заданной траектории, точнее, вдоль гладкого пути $\gamma: I \to \gamma(I) \subset G$.

Мы уже касались этого вопроса, рассматривая приложения определенного интеграла, поэтому здесь можно лишь напомнить решение задачи, отмечая некоторые характерные и полезные для дальнейшего элементы конструкции.

Известно, что в постоянном поле $\boldsymbol{F}$ перемещение на вектор $\boldsymbol{\xi}$ связано с работой, равной $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\xi} \rangle$.

Пусть $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ — определенное на отрезке $I = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leqslant t \leqslant b\}$ гладкое отображение $\gamma: I \to G$.

Возьмем достаточно мелкое разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда на каждом промежутке $I_i = \{t \in I \mid t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}\}$ разбиения с точностью до бесконечно малых более высокого порядка выполняется равенство $\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_i) \approx \boldsymbol{x}'(t_i)(t - t_i)$. Вектору $\boldsymbol{\tau}_i = t_{i+1} - t_i$ смещения из t_i в t_{i+1} (рис. 83) в пространстве $\mathbb{R}^n$ отвечает перемещение из точки $\boldsymbol{x}(t_i)$ на вектор $\Delta \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_i$, который с указанной погрешностью можно считать совпадающим с вектором $\boldsymbol{\xi}_i = \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\boldsymbol{\tau}_i$, касательным к траектории в точке $\boldsymbol{x}(t_i)$. Ввиду непрерывности поля $\boldsymbol{F}(x)$, его можно считать локально постоянным, и потому работу ΔA_i, отвечающую промежутку (времени) I_i, можно с малой относительной погрешностью вычислять в виде

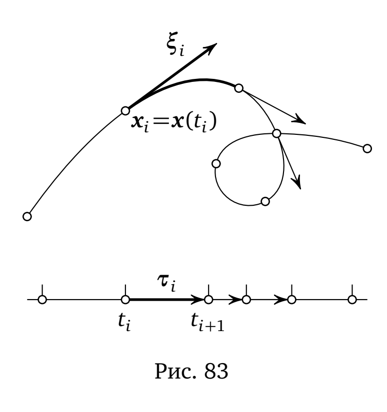


Рис. 83

$$\Delta A_i \approx \langle \boldsymbol{F}(x_i), \boldsymbol{\xi}_i \rangle$$

или

$$\Delta A_i \approx \langle \boldsymbol{F}(x(t_i)), \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\boldsymbol{\tau}_i \rangle.$$

Значит,

$$A=\sum_i \Delta A_i \approx \sum_i \langle \boldsymbol{F}(x(t_i)), \dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\rangle \Delta t_i,$$

откуда, переходя к пределу при измельчении разбиения отрезка I, получаем, что

$$A=\int_a^b \langle \boldsymbol{F}(x(t)), \dot{\boldsymbol{x}}(t)\rangle\, dt. \tag{1}$$

Если выражение $\langle \boldsymbol{F}(x(t)), \dot{\boldsymbol{x}}(t)\rangle\, dt$ переписать в виде $\langle \boldsymbol{F}(x), d\boldsymbol{x}\rangle$, то, считая координаты в $\mathbb{R}^n$ декартовыми, ему можно придать вид $F^1\, dx^1+\ldots+F^n\, dx^n$, после чего формулу (1) можно записать как

$$A=\int_\gamma F^1\, dx^1+\ldots+F^n\, dx^n \tag{2}$$

или как

$$A=\int_\gamma \omega^1_{\boldsymbol{F}}. \tag{2$'$}$$

Точный смысл написанным в (2) и (2′) интегралам от 1-формы работы вдоль пути γ придает формула (1).

Пример 1. Рассмотрим поле сил $\boldsymbol{F}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, определенное во всех точках плоскости $\mathbb{R}^2$, кроме начала координат. Вычислим работу этого поля вдоль кривой γ_1, заданной в виде $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, и вдоль кривой γ_2, заданной соотношениями $x=2+\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. В соответствии с формулами (1), (2), (2′) находим

$$\int_{\gamma_1}\omega^1_{\boldsymbol{F}}=\int_{\gamma_1}-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sin t\cdot(-\sin t)}{\cos^2 t+\sin^2 t}+\frac{\cos t\cdot\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\right)dt=2\pi$$

и

$$\int_{\gamma_2}\omega^1_{\boldsymbol{F}}=\int_{\gamma_2}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t(-\sin t)+(2+\cos t)\cos t}{(2+\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{1+2\cos t}{5+4\cos t}\,dt=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin t}{2+\cos t}\right)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

Потом мы покажем, что в таком поле сил $\boldsymbol{F}$ интеграл по любой кривой, не охватывающей начало координат, равен нулю, а интеграл по любой кривой, обегающей начало координат один раз против часовой стрелки, равен 2π.

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, а $r = |\boldsymbol{r}|$. Пусть всюду в $\mathbb{R}^3$ вне начала координат задано поле сил вида $\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r}$. Это — так называемое *центральное поле*. Найдем работу поля $\boldsymbol{F}$ на пути $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \setminus 0$. Используя (2), находим

$$\int\limits_\gamma f(r)(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = \frac{1}{2}\int\limits_\gamma f(r)\,d(x^2+y^2+z^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(r(t))\,dr^2(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 f(\sqrt{u(t)})\,du(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{r_0^2}^{r_1^2} f(\sqrt{u})\,du = \Phi(r_0, r_1).$$

Здесь мы, как видно, положили $x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = r^2(t)$, $r^2(t) = u(t)$, $r_0 = r(0)$, $r_1 = r(1)$.

Итак, в любом центральном поле работа на пути γ оказалась зависящей только от расстояний r_0, r_1 начала и конца пути до центра 0 поля.

В частности, для гравитационного поля $\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}$ единичной точечной массы, помещенной в начало координат, получаем

$$\Phi(r_0, r_1) = \frac{1}{2}\int\limits_{r_0^2}^{r_1^2} \frac{1}{u^{3/2}}\,du = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}.$$

b. Поток через поверхность Пусть в области G ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ имеется установившееся течение жидкости (или газа) и $x \mapsto \boldsymbol{V}(x)$ — поле скоростей этого течения в области G. Пусть, кроме того, в G взята гладкая ориентированная поверхность S. Для определенности будем считать, что ориентация S задана полем нормалей. Требуется определить (объемный) расход или поток жидкости через поверхность S, точнее, требуется найти, какой объем жидкости протекает в единицу времени через поверхность S в указанную ориентирующим полем нормалей сторону этой поверхности.

Для решения задачи заметим, что если поле скоростей течения постоянно и равно $\boldsymbol{V}$, то поток в единицу времени через натянутый на пару векторов $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ параллелограмм П равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$. Если $\boldsymbol{\eta}$ — нормаль к П и ищется поток через П в сторону, указываемую нормалью $\boldsymbol{\eta}$, то он равен смешанному произведению $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$, если $\boldsymbol{\eta}$ и репер $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ задают одинаковую ориентацию П (т. е. если $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ — репер заданной в $\mathbb{R}^3$ ориентации). Если же репер $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ задает в П ориентацию, противоположную определяемой нормалью $\boldsymbol{\eta}$, то поток в сторону, указанную нормалью $\boldsymbol{\eta}$, равен $-(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$.

Вернемся теперь к исходной постановке. Предположим для простоты, что поверхность S в целом допускает гладкую параметризацию $\varphi\colon I \to S \subset G$, где I — двумерный промежуток плоскости $\mathbb{R}^2$. Разобьем I на маленькие про-

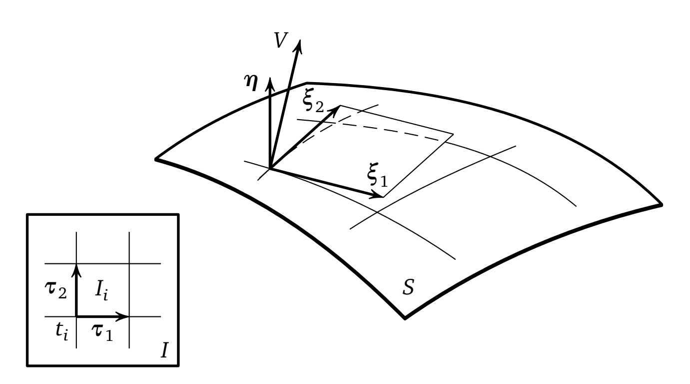


Рис. 84

межутки I_i (рис. 84). Образ $\varphi(I_i)$ каждого такого промежутка аппроксимируем параллелограммом, натянутым на образы $\boldsymbol{\xi}_1=\varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2=\varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_2$ векторов $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ смещения вдоль координатных направлений. Считая, что $\boldsymbol{V}(x)$ мало меняется в пределах куска $\varphi(I_i)$ поверхности, и заменяя $\varphi(I_i)$ указанным параллелограммом, можем считать, что поток $\Delta\mathscr{F}_i$ через кусок $\varphi(I_i)$ поверхности с малой относительной погрешностью совпадает с потоком постоянного поля скоростей $\boldsymbol{V}(x_i)=\boldsymbol{V}(\varphi(t_i))$ через параллелограмм, порожденный векторами $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$.

Считая, что репер $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ задает на S ту же ориентацию, что и $\boldsymbol{\eta}$, находим

$$\Delta\mathscr{F}_i\approx(\boldsymbol{V}(x_i),\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2).$$

Суммируя элементарные потоки, получаем

$$\mathscr{F}=\sum_i\Delta\mathscr{F}_i\approx\sum_i\omega^2_{\boldsymbol{V}}(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2),$$

где $\omega^2_{\boldsymbol{V}}(x)=(\boldsymbol{V}(x),\cdot,\cdot)$ (рассмотренная в примере 8 § 5 гл. XII) 2-форма потока. Если перейти к пределу (беря все более мелкие разбиения P промежутка I), то естественно считать, что

$$\mathscr{F}:=\lim_{\lambda(P)\to0}\sum\omega^2_{\boldsymbol{V}}(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=:\int\limits_S\omega^2_{\boldsymbol{V}}. \tag{3}$$

Последний символ есть интеграл от 2-формы $\omega^2_{\boldsymbol{V}}$ по ориентированной поверхности S.

Вспомнив (см. формулу (12) § 5 гл. XII) координатное выражение формы потока $\omega^2_{\boldsymbol{V}}$ в декартовых координатах, мы вправе записать также, что

$$\mathscr{F}=\int\limits_S V^1\,dx^2\wedge dx^3+V^2\,dx^3\wedge dx^1+V^3\,dx^1\wedge dx^2. \tag{4}$$

Мы обсудили лишь общий принцип решения поставленной задачи. В сущности, мы дали только точное определение (3) потока $\mathscr{F}$ и ввели некоторые

обозначения (3), (4), но не получили пока эффективной вычислительной формулы, подобной формуле (1) для работы.

Заметим, что формула (1) получается из выражения (2), если вместо $x^1, \ldots, x^n$ в него подставить функции $(x^1, \ldots, x^n)(t) = x(t)$, задающие путь γ. Напомним (см. § 5 гл. XII), что такая замена интерпретируется как перенос заданной в G формы ω на отрезок $I = [a, b]$.

Совершенно аналогично и вычислительная формула для потока может быть получена прямой подстановкой в (4) параметрических уравнений поверхности.

В самом деле,

$$\omega_V^2(x_i)(\xi_1, \xi_2) = \omega_V(\varphi(t_i))(\varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_1, \varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_2) = (\varphi^*\omega_V^2)(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)$$

и

$$\sum_i \omega_V^2(x_i)(\xi_1, \xi_2) = \sum_i (\varphi^*\omega_V^2)(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2).$$

Форма $\varphi^*\omega_V^2$ определена на двумерном промежутке $I \subset \mathbb{R}^2$. В I любая 2-форма имеет вид $f(t)\, dt^1 \wedge dt^2$, где f — зависящая от формы функция на I, поэтому

$$\varphi^*\omega_V^2(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = f(t_i)\, dt^1 \wedge dt^2(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2).$$

Но $dt^1 \wedge dt^2(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = \tau_1^1 \cdot \tau_2^2$ есть площадь определяемого ортогональными векторами $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ прямоугольника I_i.

Таким образом,

$$\sum_i f(t_i)\, dt^1 \wedge dt^2(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2) = \sum_i f(t_i)|I_i|.$$

При измельчении разбиения в пределе получим

$$\int_I f(t)\, dt^1 \wedge dt^2 = \int_I f(t)\, dt^1\, dt^2, \tag{5}$$

где в левой части, согласно (3), стоит интеграл от 2-формы $\omega^2 = f(t)\, dt^1 \wedge dt^2$ по простейшей ориентированной поверхности I, а в правой части — интеграл от функции f по прямоугольнику I.

Остается вспомнить, что координатное представление $f(t)\, dt^1 \wedge dt^2$ формы $\varphi^*\omega_V^2$ получается из координатного выражения формы ω_V^2 прямой заменой переменных $x = \varphi(t)$, где $\varphi: I \to G$ — карта поверхности S.

Выполнив эту замену, из (4) получим

$$\mathscr{F} = \int\limits_{S=\varphi(I)} \omega_V^2 = \int_I \varphi^*\omega_V^2 = \int_I \left(V^1(\varphi(t)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial t^1} & \frac{\partial x^3}{\partial t^1} \\ \frac{\partial x^2}{\partial t^2} & \frac{\partial x^3}{\partial t^2} \end{vmatrix} + V^2(\varphi(t)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x^3}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^1} \\ \frac{\partial x^3}{\partial t^2} & \frac{\partial x^1}{\partial t^2} \end{vmatrix} + \right.$$
$$\left. + V^3(\varphi(t)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial t^1} & \frac{\partial x^2}{\partial t^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial t^2} & \frac{\partial x^2}{\partial t^2} \end{vmatrix} \right) dt^1 \wedge dt^2.$$

Последний интеграл, как показывает равенство (5), есть обычный интеграл Римана по прямоугольнику I.

Таким образом, мы нашли, что

$$\mathscr{F} = \int\limits_I \begin{vmatrix} V^1(\varphi(t)) & V^1(\varphi(t)) & V^3(\varphi(t)) \\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial t^1}(t) & \frac{\partial\varphi^2}{\partial t^1}(t) & \frac{\partial\varphi^3}{\partial t^1}(t) \\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial t^2}(t) & \frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}(t) & \frac{\partial\varphi^3}{\partial t^2}(t) \end{vmatrix} dt^1\, dt^2, \tag{6}$$

где $x = \varphi(t) = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)(t^1, t^2)$ — карта поверхности S, задающая ту же ориентацию S, что и указанное нам поле нормалей к S. Если карта $\varphi\colon I \to S$ задает на S противоположную ориентацию, то равенство (6), вообще говоря, нарушится, но, как следует из приведенных в начале пункта соображений, в этом случае его левая и правые части будут отличаться только знаком.

Окончательная формула (6), очевидно, есть просто-напросто аккуратно записанный в координатах t^1, t^2 предел сумм знакомых нам элементарных потоков $\Delta\mathscr{F}_i \approx (\boldsymbol{V}(x_i), \xi_1, \xi_2)$.

Мы рассмотрели случай поверхности, задаваемой одной картой. В общем случае гладкую поверхность S можно разбить на гладкие куски S_i, не имеющие между собой существенных пересечений, и найти поток через S как сумму потоков через куски S_i.

Пример 3. Пусть среда движется поступательно с постоянной скоростью $\boldsymbol{V} = (1, 0, 0)$. Если в области течения взять любую замкнутую поверхность, то, поскольку плотность среды не меняется, количество вещества в объеме, ограниченном взятой поверхностью, должно оставаться неизменным. Значит, суммарный поток среды через такую поверхность должен быть равен нулю.

Проконтролируем в этом случае формулу (6), взяв в качестве S сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Сферу S с точностью до множества, имеющего площадь нуль и потому пренебрежимого в рассматриваемом вопросе, можно задать параметрически

$$\begin{aligned} x &= R\cos\psi\cos\varphi, \\ y &= R\cos\psi\sin\varphi, \\ z &= R\sin\psi, \end{aligned}$$

где $0 < \varphi < 2\pi$, $-\pi/2 < \psi < \pi/2$.

После подстановки в (6) этих соотношений и $\boldsymbol{V} = (1, 0, 0)$, получим

$$\mathscr{F} = \int\limits_I \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial t^1} & \frac{\partial x^2}{\partial t^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial t^2} & \frac{\partial x^2}{\partial t^2} \end{vmatrix} d\varphi\, d\psi = R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\psi\, d\psi \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0.$$

Поскольку интеграл равен нулю, мы даже не интересовались, в какую сторону (внутрь или наружу) ведется расчет потока.

Пример 4. Пусть поле скоростей движущейся в пространстве $\mathbb{R}^3$ среды в декартовых координатах x, y, z определяется равенством $\boldsymbol{V}(x, y, z) = (V^1, V^2, V^3)(x, y, z) = (x, y, z)$. Найдем в этом случае поток через сферу $x^2+y^2+z^2=R^2$ внутрь ограниченного ею шара (т. е. в сторону внутренней нормали).

Взяв параметризацию сферы из предыдущего примера и выполнив подстановку в правую часть формулы (6), найдем, что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \begin{vmatrix} R\cos\psi\cos\varphi & R\cos\psi\sin\varphi & R\sin\psi \\ -R\cos\psi\sin\varphi & R\cos\psi\cos\varphi & 0 \\ R\sin\psi\cos\varphi & -R\sin\psi\sin\varphi & R\cos\psi \end{vmatrix} d\psi = \\ = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^3\cos\psi\, d\psi = 4\pi R^3.$$

Теперь проверим, согласуется ли задаваемая криволинейными координатами (φ, ψ) ориентация сферы с ориентацией, задаваемой внутренней нормалью. Легко убедиться, что не согласуется. Поэтому искомый поток $\mathscr{F} = -4\pi R^3$.

В данном случае полученный результат легко проверить: вектор $\boldsymbol{V}$ скорости течения в каждой точке сферы равен по величине R, ортогонален сфере и направлен наружу, поэтому поток изнутри вовне равен площади сферы $4\pi R^2$, умноженной на R. Поток в противоположную сторону получается равным $-4\pi R^3$.

2. Определение интеграла от формы по ориентированной поверхности. Решение рассмотренных в п. 1 задач приводит к определению интеграла от k-формы по ориентированной k-мерной поверхности.

Пусть сначала S — гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, заданная одной стандартной картой $\varphi\colon I \to S$. Пусть на S задана k-форма ω. Интеграл от формы ω по параметризованной поверхности $\varphi\colon I \to S$ строится следующим образом.

Берем разбиение P k-мерного стандартного промежутка $I \subset \mathbb{R}^n$, индуцированное разбиениями (отрезков) проекций на координатные оси. В каждом промежутке I_i разбиения P берем вершину t_i, имеющую минимальные значения координат, и связываем с ней k векторов $\boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_k$, идущих в направлении координатных осей в k соседних с t_i вершин промежутка I_i (см. рис. 84). Находим векторы $\boldsymbol{\xi}_1 = \varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k = \varphi'(t_i)\boldsymbol{\tau}_k$ касательного пространства $TS_{x_i=\varphi(t_i)}$, вычисляем $\omega(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k) =: (\varphi^*\omega)(t_i)(\boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_k)$, составляем интегральную сумму $\sum\limits_i \omega(x_i)(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k)$ и переходим к пределу, когда параметр $\lambda(P)$ разбиения стремится к нулю.

Таким образом, мы принимаем

Определение 1 (*интеграла от k-формы ω по заданной картой $\varphi: I \to S$ гладкой k-мерной поверхности*).

$$\int_S \omega := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_i \omega(x_i)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_i (\varphi^*\omega)(t_i)(\tau_1, \dots, \tau_k). \qquad (7)$$

Если применить это определение к k-форме $f(t)\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k$ на I (когда φ — тождественное отображение), то, очевидно, получим, что

$$\int_I f(t)\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k = \int_I f(t)\, dt^1 \ldots dt^k. \qquad (8)$$

Таким образом, из (7) следует, что

$$\int_{S=\varphi(I)} \omega = \int_I \varphi^*\omega, \qquad (9)$$

а последний интеграл, как видно из равенства (8), сводится к обычному кратному интегралу от соответствующей форме $\varphi^*\omega$ функции f на промежутке I.

Важнейшие соотношения (8) и (9) мы вывели из определения 1, но они сами могли бы быть приняты в качестве исходных определений. В частности, если D — произвольная область в $\mathbb{R}^n$ (не обязательно промежуток), то, чтобы не повторять процедуру суммирования, положим

$$\int_D f(t)\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k := \int_D f(t)\, dt^1 \ldots dt^k. \qquad (8')$$

а для гладкой поверхности, заданной в виде $\varphi: D \to S$ и k-формы ω на ней, положим

$$\int_{S=\varphi(D)} \omega := \int_D \varphi^*\omega. \qquad (9')$$

Если S — произвольная кусочно гладкая k-мерная поверхность, а ω — определенная на гладких кусках S k-форма, то, представив S как объединение $\bigcup\limits_i S_i$ гладких параметризованных поверхностей, пересекающихся, быть может, лишь по множествам меньшей размерности, полагаем

$$\int_S \omega := \sum_i \int_{S_i} \omega. \qquad (10)$$

В отсутствие содержательной физической или иной решаемой соотношением (10) задачи, такое определение вызывает вопрос о независимости полученной величины интеграла от разбиения $\bigcup\limits_i S_i$ и от выбора параметризации отдельных его кусков.

Проверим корректность данного определения.

◄ Рассмотрим сначала простейший случай, когда S есть область D_x в $\mathbb{R}^n$, а $\varphi: D_t \to D_x$ — диффеоморфизм области $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на область D_x. В $D_x = S$ k-форма ω имеет вид $f(x)\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$. Тогда, с одной стороны, в силу (8)

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \int\limits_{D_x} f(x)\,dx^1 \ldots dx^k.$$

С другой стороны, по (9′) и (8′)

$$\int\limits_{D_x} \omega := \int\limits_{D_t} \varphi^*\omega = \int\limits_{D_t} f(\varphi(t)) \det \varphi'(t)\,dt^1 \ldots dt^k.$$

Но если $\det \varphi'(t) > 0$ в D_t, то по теореме о замене переменных в кратном интеграле имеет место равенство

$$\int\limits_{D_x = \varphi(D_t)} f(x)\,dx^1 \ldots dx^k = \int\limits_{D_t} f(\varphi(t)) \det \varphi'(t)\,dt^1 \ldots dt^k.$$

Значит, считая, что на $S = D_x$ имелись координаты $x^1, \ldots, x^k$ и криволинейные координаты $t^1, \ldots, t^k$ одного класса ориентации, мы показали, что величина интеграла $\int\limits_S \omega$ не зависит от того, в какой из этих двух систем координат проводить его вычисление.

Отметим, что если бы криволинейные координаты $t^1, \ldots, t^k$ задавали на S другую ориентацию, т. е. при $\det \varphi'(t) < 0$, очевидно, правая и левая части последнего равенства отличались бы знаком. Таким образом, о корректности определения интеграла можно говорить только в случае ориентированной поверхности интегрирования.

Пусть теперь $\varphi_x: D_x \to S$ и $\varphi_t: D_t \to S$ — две параметризации одной и той же гладкой k-мерной поверхности S и ω — k-форма на S. Сравним интегралы

$$\int\limits_{D_x} \varphi_x^*\omega \quad \text{и} \quad \int\limits_{D_t} \varphi_t^*\omega. \tag{11}$$

Поскольку $\varphi_t = \varphi_x \circ (\varphi_x^{-1} \circ \varphi_t) = \varphi_x \circ \varphi$, где $\varphi = \varphi_x^{-1} \circ \varphi_t: D_t \to D_x$ — диффеоморфизм D_t на D_x, то $\varphi_t^*\omega = \varphi^*(\varphi_x^*\omega)$ (см. равенство (20) § 5 гл. XII). Значит, форму $\varphi_t^*\omega$ в D_t можно получить заменой $x = \varphi(t)$ переменных в форме $\varphi_x^*\omega$. А как мы только что проверили, в этом случае интегралы (11) совпадают, если $\det \varphi'(t) > 0$ и отличаются знаком, если $\det \varphi'(t) < 0$.

Итак, показано, что если $\varphi_t: D_t \to S$, $\varphi_x: D_x \to S$ — параметризации одного класса ориентации поверхности S, то интегралы (11) совпадают. Независимость интеграла от выбора любой из согласованных систем криволинейных координат на поверхности S проверена.

Независимость интеграла (10) по ориентированной кусочно гладкой поверхности S от способа ее разбиения $\bigcup\limits_i S_i$ на гладкие куски вытекает из аддитивности обычного кратного интеграла (достаточно рассмотреть более

мелкое разбиение, получающееся наложением двух разбиений и проверить, что значение интеграла по нему совпадает со значением на каждом из двух исходных разбиений). ►

На основе проведенных рассмотрений теперь разумно принять следующую цепочку формальных определений, соответствующих изложенной в определении 1 конструкции интеграла от формы.

Определение $1'$ (*интеграла от формы по ориентированной поверхности* $S \subset \mathbb{R}^n$).

a) Если в области $D \subset \mathbb{R}^k$ задана форма $f(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$, то

$$\int_D f(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k := \int_D f(x)\, dx^1 \ldots dx^k.$$

b) Если $S \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая k-мерная ориентированная поверхность и $\varphi: D \to \to S$ — ее параметризация, а ω — k-форма на S, то

$$\int_S \omega := \pm \int_D \varphi^* \omega,$$

причем знак $+$ берется, если параметризация φ согласуется с заданной ориентацией S, а знак $-$ берется в противоположном случае.

c) Если S — кусочно гладкая k-мерная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^n$, ω — k-форма на S (определенная там, где S имеет касательную плоскость), то

$$\int_S \omega := \sum_i \int_{S_i} \omega,$$

где $S_1, \ldots, S_m, \ldots$ — разложение S на гладкие параметризуемые k-мерные куски, пересекающиеся разве лишь по кусочно гладким поверхностям меньшей размерности.

Мы видим, в частности, что изменение ориентации поверхности влечет за собой изменение знака интеграла.

Задачи и упражнения

1. a) Пусть x, y — декартовы координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$. Укажите, для какого векторного поля форма $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$ является его формой работы.

b) Найдите интеграл от указанной в a) формы ω по следующим путям γ_i:

$$[0, \pi] \ni t \overset{\gamma_1}{\longmapsto} (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2; \quad [0, \pi] \ni t \overset{\gamma_2}{\longmapsto} (\cos t, -\sin t) \in \mathbb{R}^2;$$

путь γ_3 состоит в движении по отрезкам, соединяющим последовательно точки $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 0)$; путь γ_4 состоит в движении по отрезкам, соединяющим последовательно точки $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$, $(-1, 0)$.

2. Пусть f — гладкая функция в области $D \subset \mathbb{R}^n$, а γ — гладкий путь в D с началом $p_0 \in D$ и концом $p_1 \in D$. Найдите интеграл от формы $\omega = df$ по пути γ.

3. a) Найдите интеграл от формы $\omega = dy \wedge dz + dz \wedge dx$ по границе стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^3$, ориентированной внешней нормалью.

b) Укажите поле скоростей, для которого рассмотренная в a) форма ω является его формой потока.

4. a) Пусть x, y, z — декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$. Укажите поле скоростей, для которого форма

$$\omega = \frac{x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

была бы его формой потока.

b) Найдите интеграл от указанной в a) формы ω по сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$, ориентированной внешней нормалью.

c) Покажите, что поток поля $\dfrac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ через сферу $(x-2)^2+y^2+z^2=1$ равен нулю.

d) Проверьте, что поток указанного в c) поля через тор, параметрические уравнения которого даны в примере 4 § 1 гл. XII, также равен нулю.

5. Известно, что между давлением P, объемом V и температурой T данного количества вещества имеется связь $f(P, V, T)=0$, называемая в термодинамике *уравнением состояния*. Например, для одного моля идеального газа уравнение состояния выражается формулой Клапейрона $\dfrac{PV}{T}-R=0$, где R — универсальная газовая постоянная.

Поскольку величины P, V, T связаны уравнением состояния, зная любую пару из них, в принципе можно определить и остающуюся величину. Значит, состояние любой системы можно характеризовать, например, точками (V, P) плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами V, P, тогда эволюции состояния системы как функции времени t будет отвечать некоторый путь γ в этой плоскости.

Пусть газ помещен в цилиндр, в котором без трения может перемещаться поршень. Меняя положение поршня, за счет механической работы мы можем изменить состояние газа, заключенного между поршнем и стенками цилиндра. Наоборот, меняя состояние газа (например, подогревая его), можно заставить газ совершать механическую работу (например, за счет расширения поднимать груз). В этой задаче и следующих задачах 6, 7, 8 все процессы считаются проходящими столь медленно, что в каждый конкретный момент давление и температура успевают усредниться во всем объеме вещества и, таким образом, в каждый момент времени система удовлетворяет уравнению состояния. Это так называемые *квазистатические процессы*.

a) Пусть γ — путь в плоскости V, P, отвечающий квазистатическому переходу заключенного между стенками цилиндра и поршнем газа из состояния V_0, P_0 в состояние V_1, P_1. Покажите, что величина A совершаемой на этом пути газом механической работы определяется следующим криволинейным интегралом: $A=\int\limits_\gamma P\,dV$.

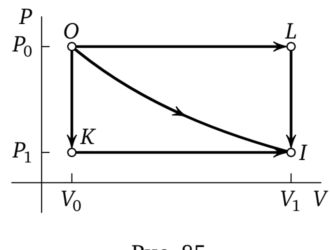


Рис. 85

b) Найдите механическую работу, совершаемую одним молем идеального газа при переходе из состояния V_0, P_0 в состояние V_1, P_1 по каждому из следующих путей (рис. 85): γ_{OLI} — изобара OL $(P=P_0)$, затем изохора LI $(V=V_1)$; γ_{OKI} — изохора OK $(V=V_0)$; затем изобара KI $(P=P_1)$; γ_{OI} — изотерма $T=\text{const}$ (в предположении, что $P_0V_0=P_1V_1$).

c) Покажите, что полученная в a) формула для механической работы, совершаемой заключенным между поршнем и стенками цилиндра газом, на самом деле явля-

ется общей, т. е. она остается в силе для работы газа, заключенного в любой деформируемой оболочке.

6. Количество тепла, получаемого системой в том или ином процессе изменения ее состояний, как и совершаемая системой механическая работа (см. задачу 5), зависит не только от начального и конечного состояний системы, но и от пути перехода. Важной характеристикой вещества и совершаемого им (или над ним) термодинамического процесса является теплоемкость — отношение полученного веществом тепла к изменению его температуры. Точное определение теплоемкости можно дать в следующей форме. Пусть x — точка в плоскости состояний F (с координатами V, P, или V, T, или P, T), а $\boldsymbol{e} \in TF_x$ — вектор, указывающий направление смещения из точки x. Пусть t — малый параметр. Рассматриваем смещение из состояния x в состояние $x + t\boldsymbol{e}$ вдоль отрезка на плоскости F, определяемого этими состояниями. Пусть $\Delta Q(x, t\boldsymbol{e})$ — полученное в этом процессе веществом тепло, а $\Delta T(x, t\boldsymbol{e})$ — изменение температуры вещества.

Теплоемкостью $C = C(x, \boldsymbol{e})$ вещества (системы), отвечающей состоянию x и направлению $\boldsymbol{e}$ смещения из этого состояния, называется величина

$$C(x, \boldsymbol{e}) = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta Q(x, t\boldsymbol{e})}{\Delta T(x, t\boldsymbol{e})}.$$

В частности, если система теплоизолирована, то ее эволюция происходит без обмена теплом с внешней средой. Это так называемый *адиабатический процесс*. Отвечающая такому процессу кривая на плоскости состояний F называется *адиабатой*. Значит, смещению из данного состояния x в направлении адиабаты отвечает нулевая теплоемкость системы.

Смещению по изотерме $T = \mathrm{const}$ отвечает бесконечная теплоемкость.

Особенно часто используются теплоемкости $C_V = C(x, \boldsymbol{e}_V)$, $C_P = C(x, \boldsymbol{e}_P)$, отвечающие смещениям по изохоре $V = \mathrm{const}$ и изобаре $P = \mathrm{const}$ соответственно. Опыт показывает, что в довольно широком диапазоне состояний данной массы вещества каждую из величин C_V, C_P можно считать практически постоянной. Теплоемкости, отвечающие одному молю данного вещества, принято называть *молярными* и обозначать (в отличие от прочих) прописными (а не строчными) буквами. Мы будем считать, что имеем дело с одним молем вещества.

Между количеством ΔQ полученного веществом в данном процессе тепла, изменением ΔU его внутренней энергии и совершенной им механической работой ΔA в силу закона сохранения энергии имеется связь $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$. Таким образом, при малом смещении $t\boldsymbol{e}$ из состояния $x \in F$ полученное веществом тепло можно найти как значение формы $\delta Q := dU + P\,dV$ в точке x на векторе $t\boldsymbol{e} \in TF_x$ (формулу $P\,dV$ работы см. в задаче 5 c)). Значит, если координатами состояния считать T и V, а в качестве параметра при смещении (в неизотермическом направлении) принять T, то можно написать, что

$$C = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dT} + P\frac{dV}{dT}.$$

Производная $\frac{dV}{dT}$ определяет направление смещения из состояния $x \in F$ плоскости состояний с координатами T, V. В частности, если $\frac{dV}{dT} = 0$, то смещение идет в направлении изохоры $V = \mathrm{const}$, и мы получаем, что $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}$. Если $P = \mathrm{const}$, то $\frac{dV}{dT} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P=\mathrm{const}}$ (в общем случае $V = V(P, T)$ — это разрешенное относительно V

уравнение состояния $f(P,V,T)=0$). Значит,

$$C_P=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V+\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+P\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

где индексы P, V, T в правой части указывают параметр состояния, фиксируемый при отыскании соответствующей частной производной. Сопоставляя полученные выражения для C_V и C_P, видим, что

$$C_P-C_V=\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+P\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Экспериментами на газах (опыты Джоуля[1] — Томсона) установлено и затем постулировано в модели идеального газа, что его внутренняя энергия U зависит только от температуры T, т. е. $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=0$. Таким образом, для идеального газа $C_P-C_V=P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$. Учитывая, что для моля идеального газа $PV=RT$, отсюда получаем соотношение $C_P-C_V=R$, называемое в термодинамике *уравнением Майера*[2].

То, что для моля газа внутренняя энергия зависит только от температуры, позволяет записать форму δQ в виде

$$\delta Q=\frac{\partial U}{\partial T}\,dT+P\,dV=C_V\,dT+P\,dV.$$

Чтобы вычислить количество тепла, полученное молем газа на пути γ изменения его состояний, надо, следовательно, найти интеграл от формы $C_V\,dT+P\,dV$ по γ. Эту форму иногда удобно иметь в переменных V, P. Если воспользоваться уравнением состояния $PV=RT$ и соотношением $C_P-C_V=R$, то получим

$$\delta Q=C_P\frac{P}{R}\,dV+C_V\frac{V}{R}\,dP.$$

a) Напишите формулу для количества Q тепла, получаемого молем газа при изменении его состояний вдоль пути γ плоскости состояний F.

b) Считая величины C_P, C_V постоянными, найдите величину Q, отвечающую каждому из путей γ_{OLI}, γ_{OKI}, γ_{OI}, указанных в пункте b) задачи 5.

c) Найдите (вслед за Пуассоном) *уравнение адиабаты*, проходящей через точку (V_0,P_0) плоскости состояний F с координатами V, P (Пуассон нашел, что на адиабате $PV^{C_P/C_V}=\text{const}$. Величина C_P/C_V называется *адиабатической постоянной* данного *газа*. Для воздуха $C_P/C_V\approx 1{,}4$.) Вычислите после этого работу, которую необходимо совершить, чтобы теплоизолированный от внешней среды моль воздуха, находящегося в состоянии (V_0,P_0), поместить в объем $V_1=\frac{1}{2}V_0$.

7. Напомним, что *цикл Карно*[3] изменения состояния рабочего тела тепловой машины (например, газа, находящегося в цилиндре под поршнем) состоит в следую-

[1] Дж. П. Джоуль (1818—1889) — английский физик; открыл закон теплового действия тока, а также определил независимо от Майера механический эквивалент теплоты.

[2] Ю. Р. Майер (1814—1878) — немецкий ученый, врач по образованию; высказал закон сохранения и превращения энергии, нашел механический эквивалент теплоты.

[3] Н. Л. С. Карно (1796—1832) — французский инженер, один из родоначальников термодинамики.

щем (рис. 86). Имеются два энергоемких тела, нагреватель и холодильник (например, паровой котёл и атмосфера), находящиеся при постоянной температуре T_1 и T_2 соответственно ($T_1 > T_2$). Рабочее тело (газ) рассматриваемой тепловой машины, имея в состоянии 1 температуру T_1, приводится в контакт с нагревателем и за счет уменьшения внешнего давления по изотерме квазистатически расширяется и переводится в состояние 2. При этом машина заимствует от нагревателя тепло Q_1 и производит механическую работу A_{12} против внешнего давления. В состоянии 2 газ теплоизолируют и заставляют квазистатически расширяться до состояния 3, пока его температура не достигнет температуры T_2 холодильника. При этом машина также совершит некоторую работу A_{23} против внешнего давления. В состоянии 3 газ приводят в контакт с холодильником и путем увеличения давления изотермически сжимают до состояния 4. При этом над газом совершается работа (сам газ совершает отрицательную работу A_{34}) и газ отдает холодильнику некоторое количество тепла Q_2. Состояние 4 выбирается так, чтобы из него можно было вернуться в исходное состояние 1 квазистатическим сжатием газа по адиабате. Итак, из состояния 4 газ возвращают в состояние 1. При этом над газом придется совершить работу (а сам газ произведет отрицательную работу A_{41}). В результате описанного кругового процесса (цикла Карно) внутренняя энергия газа (рабочего тела машины), очевидно, не изменится (ведь мы вернулись в исходное состояние), поэтому произведенная машиной работа равна $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 - Q_2$.

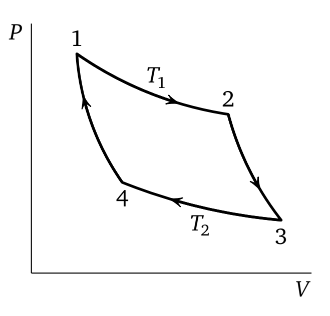


Рис. 86

Полученное от нагревателя тепло Q_1 лишь частично пошло на совершение работы A. Величину $\eta = \dfrac{A}{Q_1} = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ естественно назвать *коэффициентом полезного действия* рассматриваемой *тепловой машины*.

a) Используя результаты, полученные в пп. a) и c) задачи 6, покажите, что для цикла Карно имеет место равенство $\dfrac{Q_1}{T_1} = \dfrac{Q_2}{T_2}$.

b) Докажите теперь следующую первую из двух знаменитых теорем Карно. *Коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу Карно, зависит только от температур T_1 и T_2 нагревателя и холодильника* (но не зависит от устройства машины и вида ее рабочего тела).

8. Пусть γ — замкнутый путь в плоскости F состояний рабочего тела произвольной тепловой машины (см. задачу 7), отвечающий замкнутому циклу ее работы. Количество тепла, которым рабочее тело (например, газ) обменивается с внешней средой, и температура, при которой происходит теплообмен, связаны фундаментальным *неравенством Клаузиуса* $\int\limits_{\gamma} \dfrac{\delta Q}{T} \leqslant 0$. Здесь δQ — форма теплообмена, о которой говорилось в задаче 6.

a) Покажите, что для цикла Карно (см. задачу 7) неравенство Клаузиуса обращается в равенство.

b) Покажите, что если рабочий цикл γ может протекать и в обратном направлении, то для него неравенство Клаузиуса обращается в равенство.

c) Пусть γ_1 и γ_2 — те участки пути γ, на которых рабочее тело тепловой машины соответственно получает тепло извне и отдает его в окружающую среду. Пусть T_1 —

максимальная температура рабочего тела на участке γ_1, а T_2 — (его) минимальная температура на участке γ_2 цикла γ. Наконец, пусть Q_1 — полученное на участке γ_1 тепло, а Q_2 — тепло, отданное на участке γ_2. Исходя из неравенства Клаузиуса, покажите, что $\dfrac{Q_2}{Q_1} \leqslant \dfrac{T_2}{T_1}$.

d) Получите оценку $\eta \leqslant \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$ коэффициента полезного действия (см. задачу 7) любой тепловой машины. Это — *вторая теорема Карно.* (Оцените заодно КПД паровой машины, в которой максимальная температура пара не превышает 150 °C, т. е. $T_1 = 423$ К, а температура холодильника — окружающей среды — порядка 20 °C, т. е. $T_2 = 291$ К).

e) Сравните результаты задач 7 b) и 8 d) и проверьте, что тепловая машина, работающая по циклу Карно, имеет наибольший (в пределах возможного при заданных значениях T_1 и T_2) коэффициент полезного действия.

9. Дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ называют уравнением с разделяющимися переменными. Обычно его переписывают в виде $g(y)\,dy = f(x)\,dx$, в котором «переменные разделены», и затем «решают», приравнивая первообразные

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx.$$

Используя язык дифференциальных форм, дайте теперь развернутую математическую аргументацию этому алгоритму.

§ 2. Форма объема, интегралы первого и второго рода

1. Масса материальной поверхности. Пусть S — материальная поверхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что нам известна (поверхностная) плотность $\rho(x)$ распределения массы на поверхности S. Требуется определить массу всей поверхности S.

Для решения задачи прежде всего надо учесть, что поверхностная плотность $\rho(x)$ в точке $x \in S$ есть предел отношения массы Δm части поверхности, попавшей в окрестность точки x, к площади $\Delta\sigma$ этой же части поверхности, когда окрестность стягивается к точке x.

Разбив поверхность S на мелкие доли S_i и считая ρ непрерывной функцией на S, можно, пренебрегая изменением ρ в пределах каждой малой доли, найти массу S_i из соотношения

$$\Delta m_i \approx \rho(x_i)\Delta\sigma_i,$$

в котором $\Delta\sigma_i$ — площадь поверхности S_i, а $x_i \in S_i$.

Суммируя эти приближенные равенства и переходя к пределу при измельчении разбиения, получим, что

$$m = \int\limits_S \rho\,d\sigma. \tag{1}$$

Символ написанного здесь интеграла по поверхности S, очевидно, требует разъяснений, которые позволили бы довести дело до вычислительных формул.

Отметим, что по самой постановке задачи левая часть равенства (1) никак не зависит от ориентации поверхности S и, значит, этим же свойством должен обладать стоящий справа интеграл. Это на первый взгляд контрастирует с тем понятием интеграла по поверхности, о котором мы подробно говорили в § 1. Ответ на возникший вопрос кроется в определении элемента поверхности $d\sigma$, к анализу которого мы и переходим.

2. Площадь поверхности как интеграл от формы. Сопоставляя определение 1 § 1 интеграла от формы с конструкцией, которая привела нас к определению площади поверхности (§ 4 гл. XII), видим, что площадь заданной в параметрическом виде $\varphi\colon D\to S$ гладкой k-мерной поверхности S, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, является интегралом от некоторой формы Ω, которую мы пока только условно будем называть формой объема или элементом объема на поверхности S. Из соотношения (5) § 4 гл. XII следует, что в криволинейных координатах $\varphi\colon D\to S$ (т. е. будучи снесена в область D) форма Ω (точнее $\varphi^*\Omega$) имеет вид

$$\omega=\sqrt{\det(g_{ij})}(t)\,dt^1\wedge\ldots\wedge dt^k, \tag{2}$$

где $g_{ij}(t)=\left\langle\dfrac{\partial\varphi}{\partial t^i},\dfrac{\partial\varphi}{\partial t^j}\right\rangle$, $i, j=1, \ldots, k$.

При другой параметризации $\widetilde{\varphi}\colon\widetilde{D}\to S$ той же поверхности для вычисления площади S по области $\widetilde{D}$ надо соответственно интегрировать форму

$$\widetilde{\omega}=\sqrt{\det(\widetilde{g}_{ij})}(\tilde{t})\,d\tilde{t}^1\wedge\ldots\wedge d\tilde{t}^k, \tag{3}$$

где $\widetilde{g}_{ij}(t)=\left\langle\dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\tilde{t}^i},\dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\tilde{t}^j}\right\rangle$, $i, j=1, \ldots, k$.

Обозначим через ψ диффеоморфизм $\varphi^{-1}\circ\widetilde{\varphi}\colon\widetilde{D}\to D$, осуществляющий переход от координат $\tilde{t}$ к координатам t поверхности S. В свое время мы уже подсчитали (см. замечание 5 § 4 гл. XII), что

$$\sqrt{\det(\widetilde{g}_{ij})}(\tilde{t})=\sqrt{\det(g_{ij})}(\psi(\tilde{t}))\cdot|\det\psi'(\tilde{t})|. \tag{4}$$

Вместе с тем очевидно, что

$$\psi^*\omega=\sqrt{\det(g_{ij})}(\psi(\tilde{t}))\,\det\psi'(\tilde{t})\,d\tilde{t}^1\wedge\ldots\wedge d\tilde{t}^k. \tag{5}$$

Сопоставляя равенства (2)—(5), видим, что $\psi^*\omega=\widetilde{\omega}$, если $\det\psi'(\tilde{t})>0$, и $\psi^*\omega=-\widetilde{\omega}$, если $\det\psi'(\tilde{t})<0$. Если формы ω и $\widetilde{\omega}$ получались переносом φ^* и соответственно $\widetilde{\varphi}^*$ из одной и той же формы Ω на S, то всегда должно быть выполнено равенство $\psi^*(\varphi^*\Omega)=\widetilde{\varphi}^*\Omega$ или, что то же самое, $\psi^*\omega=\widetilde{\omega}$.

Мы приходим, таким образом, к заключению, что формы на параметризованной поверхности S, которые надо интегрировать, чтобы получить

площадь этой поверхности, различны — отличаются знаком, если параметризации задают на S различные ориентации; эти формы совпадают для параметризаций, принадлежащих одному классу ориентации поверхности S.

Таким образом, форма объема Ω на S должна определяться не только самой поверхностью S, лежащей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, но и ориентацией S.

Это может показаться парадоксальным: площадь поверхности по нашим представлениям не должна зависеть от ориентации!

Но ведь мы пришли к определению площади параметризованной поверхности через интеграл, интеграл от некоторой формы. Значит, если результат наших вычислений не должен зависеть от ориентации поверхности, то, как следует из свойств интеграла, при разных ориентациях поверхности мы должны интегрировать разные формы.

Доведем высказанные соображения до точных определений.

3. Форма объема

Определение 1. Если $\mathbb{R}^k$ — ориентированное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, то формой объема Ω на $\mathbb{R}^k$, соответствующей данной ориентации $\mathbb{R}^k$ и скалярному произведению $\langle\ ,\ \rangle$, называется такая кососимметрическая k-форма, которая на ортонормированном репере данного класса ориентации $\mathbb{R}^k$ принимает значение единицы.

Значение k-формы на репере $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, очевидно, вполне определяет эту форму.

Заметим также, что форма Ω определяется не индивидуальным ортонормированным репером, а только их классом ориентации.

◄ В самом деле, если $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ и $\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_k$ — два таких репера одного класса ориентации, то матрица O перехода от второго базиса к первому является ортогональной матрицей, причем $\det O = 1$. Значит,

$$\Omega(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k) = \det O \cdot \Omega(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) = \Omega(\tilde{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{e}}_k) = 1. \ ►$$

Если в $\mathbb{R}^k$ фиксирован ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, а $\pi^1, \ldots, \pi^k$ — проектирование $\mathbb{R}^k$ на соответствующие координатные оси, то, очевидно, $\pi^1 \wedge \ldots \wedge \pi^k(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k) = 1$ и

$$\Omega = \pi^1 \wedge \ldots \wedge \pi^k.$$

Таким образом,

$$\Omega(\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k) = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \ldots & \xi_1^k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_k^1 & \ldots & \xi_k^k \end{vmatrix}.$$

Это ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на упорядоченные векторы $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_k$.

Определение 2. Если гладкая k-мерная ориентированная поверхность S лежит в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, то в каждой касательной к S плоскости TS_x, имеются ориентация, согласованная с ориентацией S, и скалярное

произведение, индуцированное скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$, а значит, есть и форма объема $\Omega(x)$. Возникающая при этом на S дифференциальная k-форма Ω называется *формой* (или *элементом*) *объема на поверхности* S, индуцированной вложением S в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. Площадь ориентируемой гладкой поверхности есть интеграл по этой поверхности от формы объема, соответствующей выбираемой на поверхности ориентации.

Это сформулированное на языке форм и уточненное до деталей определение площади, конечно, согласуется с определением 1 § 4 гл. XII, к которому мы пришли, рассматривая заданную в параметрическом виде k-мерную гладкую поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$.

◄ Действительно, параметризация ориентирует поверхность и все касательные к ней плоскости TS_x. Если $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — репер в TS_x фиксированного в TS_x класса ориентации, то из определений 2 и 3 формы объема Ω следует, что $\Omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_k) > 0$. Но тогда (см. равенство (2) § 4 гл. XII)

$$\Omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \sqrt{\det(\langle \xi_i, \xi_j \rangle)}. \quad ► \tag{1}$$

Отметим, что сама форма $\Omega(x)$ определена на любом наборе $\xi_1, \ldots, \xi_k$ векторов TS_x, но равенство (6) действует только на реперах заданного в TS_x класса ориентации.

Отметим также, что форма объема определена только на ориентированной поверхности, поэтому, например, бессмысленно говорить о форме объема на лежащем в $\mathbb{R}^3$ листе Мёбиуса, хотя можно говорить о такой форме в пределах каждого ориентируемого куска этой поверхности.

Определение 4. Пусть S — k-мерная кусочно гладкая (ориентируемая или неориентируемая) поверхность в $\mathbb{R}^n$, а $S_1, \ldots, S_m, \ldots$ — конечное или счетное число ее гладких параметризуемых кусков, пересекающихся, быть может, лишь по поверхностям размерности не выше $k-1$ и таких, что $S = \bigcup_i S_i$.

Площадью (или *k-мерным объемом*) *поверхности* S называется сумма площадей поверхностей S_i.

В этом смысле можно говорить о площади, которую имеет лежащий в $\mathbb{R}^3$ лист Мёбиуса, или, что то же самое, искать его массу, если это материальная поверхность с единичной плотностью распределения вещества.

Традиционными рассуждениями проверяется корректность определения 4 (независимость получаемой величины площади от разбиения $S_1, \ldots$ $\ldots, S_m, \ldots$ поверхности S).

4. Выражение формы объема в декартовых координатах. Пусть S — гладкая гиперповерхность (размерности $n-1$) в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, наделенная ориентирующим ее непрерывным полем единичных нормалей $\boldsymbol{\eta}(x)$, $x \in S$. Пусть V — форма (n-мерного) объема в $\mathbb{R}^n$, а Ω — форма ($(n-1)$-мерного) объема на S.

Если в касательном пространстве TS_x взять репер $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ из класса ориентации, задаваемого единичной нормалью $\boldsymbol{\eta}(x)$ к TS_x, то, очевидно, можно записать следующее равенство:

$$V(x)(\boldsymbol{\eta}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \Omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}). \tag{7}$$

◄ Справедливость его следует из того, что при указанных условиях обе его части неотрицательны, а равны они по величине потому, что объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\boldsymbol{\eta}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, равен площади основания $\Omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, умноженной на высоту $|\boldsymbol{\eta}| = 1$. ►

Но

$$V(x)(\boldsymbol{\eta}, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \begin{vmatrix} \eta^1 & \ldots & \eta^n \\ \xi_1^1 & \ldots & \xi_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-1}^1 & \ldots & \xi_{n-1}^n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \eta^i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}).$$

Здесь $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в задающем ориентацию ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а крышка над дифференциалом dx^i означает, что в этом слагаемом он отсутствует.

Таким образом, получается следующее координатное выражение для формы объема на ориентированной гиперповерхности $S \subset \mathbb{R}^n$:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \eta^i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}). \tag{8}$$

Здесь стоит заметить, что при изменении ориентации поверхности направление нормали $\boldsymbol{\eta}(x)$ меняется на противоположное, т. е. форма Ω при этом заменяется новой формой $-\Omega$.

Из тех же геометрических соображений следует, что при фиксированном значении $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\langle \boldsymbol{\eta}(x), \boldsymbol{e}_i \rangle\, \Omega(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = V(x)(\boldsymbol{e}_i, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}). \tag{9}$$

Последнее равенство означает, что

$$\eta^i(x)\Omega(x) = (-1)^{i-1}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}). \tag{10}$$

Для двумерной поверхности S в $\mathbb{R}^n$ элемент объема чаще всего обозначают символами $d\sigma$ или dS. Их не следует воспринимать как дифференциалы неких форм σ и S, это единые символы. Если x, y, z — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, то в этих обозначениях соотношения (8), (10) запишутся так:

$$d\sigma = \cos\alpha_1\, dy \wedge dz + \cos\alpha_2\, dz \wedge dx + \cos\alpha_3\, dx \wedge dy,$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1\, d\sigma &= dy \wedge dz, \\ \cos\alpha_2\, d\sigma &= dz \wedge dx, \\ \cos\alpha_3\, d\sigma &= dx \wedge dy \end{aligned}\right.$$

(ориентированные площади проекций на координатные плоскости).

Здесь $(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)(x)$ — направляющие косинусы (координаты) единичного вектора $\boldsymbol{\eta}(x)$ нормали к S в точке $x \in S$. В этих равенствах, как, впрочем, и в равенствах (8), (10), во избежание недоразумений, конечно, правильнее было бы справа ставить знак $|_S$ ограничения соответствующей формы на поверхность S, но чтобы не загромождать формулы, мы ограничимся этим замечанием.

5. Интегралы первого и второго рода. В ряде задач, типичным представителем которых является рассмотренная выше задача об определении массы поверхности по известной плотности, возникают интегралы типа (1). Их часто называют интегралами от функции по поверхности или интегралами первого рода.

Определение 5. *Интегралом от функции ρ по ориентируемой поверхности S* называют интеграл

$$\int\limits_S \rho\Omega \tag{11}$$

от дифференциальной формы $\rho\Omega$, где Ω — форма объема на S (отвечающая выбираемой при вычислении интеграла ориентации S).

Ясно, что так определенный интеграл (11) не зависит от ориентации S, поскольку изменение ориентации сопровождается соответствующей заменой формы объема.

Подчеркнем, что в сущности здесь речь идет не об интегрировании функции, а об интегрировании формы $\rho\Omega$ специального вида по поверхности S с определенной на ней формой объема.

Определение 6. Если S — кусочно гладкая (ориентируемая или неориентируемая) поверхность и ρ — функция на S, то *интегралом* (11) *от функции ρ по поверхности S* называют сумму $\sum\limits_i \int\limits_{S_i} \rho\Omega$ интегралов от функции ρ по параметризуемым кускам $S_1, \ldots, S_m, \ldots$ описанного в определении 4 разбиения поверхности S.

Интеграл (11) обычно называют *поверхностным интегралом первого рода*.

Например, таковым является интеграл (1), выражающий массу поверхности S через плотность ρ распределения массы по поверхности.

Для выделения интегралов первого рода с их свойством независимости от ориентации, интегралы от форм по ориентированным поверхностям часто называют *поверхностными интегралами второго рода*.

Заметим, что, поскольку на линейном пространстве все кососимметрические формы, степень которых равна размерности пространства, пропорциональны, между любой k-формой ω, заданной на k-мерной ориентируемой поверхности S, и формой объема Ω на S имеется связь $\omega = \rho\Omega$, где ρ — некоторая, зависящая от ω функция на S. Значит,

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_S \rho\Omega,$$

т. е. любой интеграл второго рода может быть записан в виде соответствующего интеграла первого рода.

Пример 1. Интеграл (2′) § 1, выражающий работу на пути $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, можно записать в виде интеграла первого рода

$$\int\limits_{\gamma} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{e} \rangle \, ds, \tag{12}$$

где s — натуральный параметр на γ, ds — элемент (1-форма) длины, а $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор скорости, несущий в себе всю информацию об ориентации γ. С точки зрения физического смысла решаемой интегралом (12) задачи он столь же выразителен, как и интеграл (1) § 1.

Пример 2. Поток (3), § 1 поля скоростей $\boldsymbol{V}$ через ориентированную единичными нормалями $\boldsymbol{n}(x)$ поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ можно записать в виде поверхностного интеграла

$$\int\limits_{S} \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{n} \rangle \, d\sigma \tag{13}$$

первого рода. Информация об ориентации S заключена здесь в направлении поля нормалей $\boldsymbol{n}$.

Геометрическое и физическое содержание подынтегрального выражения в (13) столь же прозрачно, как и соответствующий смысл подынтегрального выражения окончательной вычислительной формулы (6) § 1.

Для сведения читателя отметим, что довольно часто встречаются обозначения $d\boldsymbol{s} := \boldsymbol{e}\, ds$, $d\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{n}\, d\sigma$, вводящие векторный элемент длины и векторный элемент площади соответственно. В этих обозначениях интегралы (12), (13) имеют вид

$$\int\limits_{\gamma} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s} \rangle \quad \text{и} \quad \int\limits_{S} \langle \boldsymbol{V}, d\boldsymbol{\sigma} \rangle,$$

наиболее удобный с точки зрения физической интерпретации. Для краткости скалярное произведение $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle$ векторов $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ часто записывают символом $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Пример 3. *Закон Фарадея*[1] утверждает, что электродвижущая сила, возникающая в замкнутом проводнике Г, находящемся в переменном магнитном поле $\boldsymbol{B}$, пропорциональна скорости изменения потока магнитного поля через ограниченную контуром Г поверхность S. Пусть $\boldsymbol{E}$ — вектор напряженности электрического поля. Точная запись закона Фарадея с учетом ориентации и принятых выше обозначений может быть представлена в виде равенства

$$\oint\limits_{\Gamma} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

[1] М. Фарадей (1791—1867) — выдающийся английский физик, создатель учения об электромагнитном поле.

Кружок в знаке интеграла по Г — дополнительное напоминание о том, что интеграл берется по замкнутому контуру. Работу поля вдоль замкнутого контура часто называют *циркуляцией поля вдоль* этого *контура*. Так что по закону Фарадея циркуляция напряженности электрического поля, порожденного в замкнутом проводнике Г переменным магнитным полем, равна взятой с обратным знаком скорости изменения потока напряженности магнитного поля через натянутую на контур Г поверхность S.

Пример 4. *Закон Ампера*[1]

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

(где $\boldsymbol{B}$ — вектор напряженности магнитного поля, $\boldsymbol{j}$ — вектор плотности тока, ε_0, c — размерные постоянные) утверждает, что циркуляция напряженности, порожденного электрическим током магнитного поля вдоль контура Г, пропорциональна силе тока, протекающего через ограниченную контуром Г поверхность S.

Мы рассмотрели интегралы первого и второго рода. Читатель мог заметить, что это терминологическое различие очень условно. Реально мы умеем интегрировать и интегрируем только дифференциальные формы. Ни от чего другого интеграл и не берется (если интеграл претендует на независимость от выбора системы координат, используемой при его вычислении).

Задачи и упражнения

1. Дайте формальное доказательство равенств (7) и (9).

2. Пусть γ — гладкая кривая, ds — элемент длины на γ.

a) Покажите, что

$$\left|\int_\gamma f(s)\,ds\right| \leqslant \int_\gamma |f(s)|\,ds$$

для любой функции f на γ, для которой оба интеграла определены.

b) Проверьте, что если $|f(s)| \leqslant M$ на γ, а l — длина кривой γ, то

$$\left|\int_\gamma f(s)\,ds\right| \leqslant Ml.$$

c) Сформулируйте и докажите аналогичные a) и b) утверждения в общем случае интеграла первого рода, взятого по k-мерной гладкой поверхности.

3. a) Покажите, что координаты (x_0^1, x_0^2, x_0^3) центра масс, распределенных с линейной плотностью $\rho(x)$ вдоль кривой γ, следует искать из соотношений

$$x_0^i \int_\gamma \rho(x)\,ds = \int_\gamma x^i \rho(x)\,ds, \quad i = 1, 2, 3.$$

[1] А. М. Ампер (1775—1836) — французский физик и математик, один из основоположников современной электродинамики.

b) Запишите уравнение винтовой линии в $\mathbb{R}^3$ и найдите координаты центра масс куска этой линии, считая, что масса распределена вдоль кривой с постоянной плотностью, равной единице.

c) Укажите формулы для центра масс, распределенных по поверхности S с поверхностной плотностью ρ, и найдите центр масс, равномерно распределенных по поверхности полусферы.

d) Укажите формулы для момента инерции массы, распределенной с плотностью ρ по поверхности S.

e) Покрышка колеса имеет массу 30 кг и форму тора, внешний диаметр которого 1 м, а внутренний 0,5 м. При балансировке колеса его устанавливают на балансировочный станок, раскручивают до скорости, отвечающей скорости движения порядка 100 км/час, и затем останавливают тормозными колодками, трущимися о стальной диск, диаметр которого 40 см, а ширина 2 см. Оцените температуру, до которой нагрелся бы этот диск, если бы вся кинетическая энергия раскрученной покрышки при остановке колеса ушла на нагревание диска. Удельную теплоемкость стали считать равной $c = 420$ Дж/(кг·К).

4. a) Покажите, что силу, действующую на точечную массу m_0, расположенную в точке (x_0, y_0, z_0), со стороны материальной кривой γ, имеющей линейную плотность ρ, следует искать по формуле

$$F = Gm_0 \int\limits_\gamma \frac{\rho}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}\, ds,$$

где G — гравитационная постоянная, а $\boldsymbol{r}$ — вектор с координатами $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

b) Напишите соответствующую формулу в случае, когда масса распределена по поверхности S.

c) Найдите гравитационное поле однородной материальной прямой.

d) Найдите гравитационное поле однородной материальной сферы. (Укажите поле как вне шара, ограниченного сферой, так и в самом этом шаре.)

e) Найдите гравитационное поле, создаваемое в пространстве однородным материальным шаром (рассмотрите как внешние, так и внутренние точки шара).

f) Считая Землю жидким шаром, найдите давление в нем как функцию расстояния от центра. (Радиус Земли 6400 км, средняя плотность 6 г/см^3.)

5. Пусть γ_1 и γ_2 — два замкнутых проводника, по которым текут токи J_1 и J_2 соответственно. Пусть $d\boldsymbol{s}_1$ и $d\boldsymbol{s}_2$ — векторные элементы этих проводников, отвечающие направлениям тока в них, вектор $\boldsymbol{R}_{12}$ направлен от $d\boldsymbol{s}_1$ к $d\boldsymbol{s}_2$, а $\boldsymbol{R}_{21} = -\boldsymbol{R}_{12}$.

По *закону Био и Савара*[1] сила $d\boldsymbol{F}_{12}$, испытываемая вторым элементом со стороны первого, равна

$$d\boldsymbol{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c_0^2\,|\boldsymbol{R}_{12}|^2}[d\boldsymbol{s}_2[d\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{R}_{12}]],$$

где квадратными скобками обозначено векторное произведение векторов, а c_0 — размерная постоянная.

a) Покажите, что на уровне искусственной дифференциальной формулы Био и Савара может случиться, что $d\boldsymbol{F}_{12} \neq -d\boldsymbol{F}_{21}$, т. е. «действие не равно противодействию».

---

[1] Ж.-Б. Био (1774—1862), Ф. Савар (1791—1841) — французские физики.

b) Напишите (интегральные) формулы для полных сил $\boldsymbol{F}_{12}$ и $\boldsymbol{F}_{21}$ взаимодействия проводников γ_1, γ_2 и убедитесь, что $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$.

6. *Формула коплощади (формула Кронрода — Федерера).*

Пусть M^m и N^n — гладкие поверхности размерностей m и n соответственно, лежащие в евклидовом пространстве высокой размерности (M^m, N^n могут быть и абстрактными римановыми многообразиями, но сейчас это несущественно). Допустим, что $m \geqslant n$.

Пусть $f: M^m \to N^n$ — гладкое отображение. При $m > n$ отображение $df(x): T_x M^m \to T_{f(x)} N^n$ имеет непустое ядро $\ker df(x)$. Обозначим через $T_x^{\perp} M^m$ ортогональное дополнение к $\ker df(x)$, а через $J(f, x)$ обозначим якобиан отображения

$$df(x)\big|_{T_x^{\perp} M^m} : T_x^{\perp} M^m \to T_{f(x)} N^n.$$

Если $m = n$, то $J(f, x)$ совпадает с обычным якобианом.

Пусть $dv_k(p)$ — обозначение для формы объема на k-мерной поверхности в точке p. Будем считать, что $v_0(E) = \operatorname{card} E$, где $v_k(E)$ — k-объем множества E.

a) Используя, если нужно, теорему Фубини и теорему о ранге (о локальном каноническом виде гладкого отображения), докажите следующую формулу Кронрода — Федерера:

$$\int\limits_{M^m} J(f, x)\, dv_m(x) = \int\limits_{N^n} v_{m-n}(f^{-1}(y))\, dv_n(y).$$

b) Покажите, что если A — измеримое подмножество в M^m, то

$$\int\limits_{A} J(f, x)\, dv_m(x) = \int\limits_{N^n} v_{m-n}(A \cap f^{-1}(y))\, dv_n(y).$$

Это общая формула Кронрода — Федерера.

c) Докажите следующее усиление теоремы Сарда (утверждающей в ее простейшем варианте, что образ множества критических точек гладкого отображения имеет меру нуль). (См. гл. XI, § 5, задача 8.)

Пусть, как и прежде, $f: M^m \to N^n$ — гладкое отображение, а K — компакт в M^m, на котором $\operatorname{rang} df(x) < n$ при всех $x \in K$.

Тогда $\int\limits_{N^n} v_{m-n}(K \cap f^{-1}(y))\, dv_n(y) = 0$. Получите отсюда также сформулированный выше простейший вариант теоремы Сарда.

d) Проверьте, что если $f: D \to \mathbb{R}$ и $u: D \to \mathbb{R}$ — гладкие функции в регулярной области $D \subset \mathbb{R}^n$, причем u не имеет критических точек в D, то

$$\int\limits_{D} f\, dv = \int\limits_{\mathbb{R}} dt \int\limits_{u^{-1}(t)} f\, \frac{d\sigma}{|\nabla u|}.$$

e) Пусть $V_f(t)$ — мера (объем) множества $\{x \in D \mid f(x) > t\}$ и пусть функция f неотрицательна и ограничена в области D.

Покажите, что $\int\limits_{D} f\, dv = -\int\limits_{\mathbb{R}} t\, dV_f(t) = \int\limits_{0}^{\infty} V_f(t)\, dt$.

f) Пусть $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ и $\varphi(0) = 0$, а $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$ и $V_{|f|}(t)$ — мера множества $\{x \in D \mid |f(x)| > t\}$. Проверьте, что $\int\limits_{D} \varphi \circ f\, dv = \int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(t) V_{|f|}(t)\, dt$.

§ 3. Основные интегральные формулы анализа

Важнейшей формулой анализа является уже известная нам формула Ньютона—Лейбница. В этом параграфе будут получены формулы Грина, Гаусса—Остроградского и Стокса, которые, с одной стороны, являются развитием формулы Ньютона—Лейбница, а с другой стороны, в совокупности, образуют наиболее используемую часть аппарата интегрального исчисления.

В первых трех пунктах параграфа, не стремясь к общности формулировок, на наглядном материале мы получим три классические интегральные формулы анализа. Они будут сведены в одну общую формулу Стокса в четвертом пункте, который формально можно читать независимо от первых трех.

1. Формула Грина. Формула Грина[1] — это следующее

Утверждение 1. *Пусть* $\mathbb{R}^2$ *— плоскость с фиксированной в ней системой координат* x, y; $\overline{D}$ *— компактная область в этой плоскости, ограниченная кусочно гладкими кривыми;* P, Q *— функции, гладкие в замкнутой области* $\overline{D}$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\iint\limits_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial\overline{D}} P\,dx + Q\,dy, \tag{1}$$

в котором справа стоит интеграл по границе $\partial\overline{D}$ *области* $\overline{D}$, *ориентированной согласованно с ориентацией самой области* $\overline{D}$.

Рассмотрим сначала простейший вариант формулы (1), когда $\overline{D}$ есть квадрат $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, а $Q \equiv 0$ в I. Тогда формула Грина сводится к равенству

$$\iint\limits_{I} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial I} P\,dx, \tag{2}$$

которое мы и докажем.

◄ Сводя двойной интеграл к повторному и применяя формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\iint\limits_{I} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_0^1 (P(x,1) - P(x,0))\,dx =$$
$$= -\int\limits_0^1 P(x,0)\,dx + \int\limits_0^1 P(x,1)\,dx.$$

---

[1] Дж. Грин (1793—1841) — английский математик и математический физик. Могила Ньютона в Вестминстерском аббатстве обрамлена пятью меньшими плитами с блистательными именами: Фарадей, Томсон (лорд Кельвин), Грин, Максвелл, Дирак.



Доказательство закончено. Остальное — дело определений и интерпретации уже полученного соотношения. Дело в том, что разность двух последних интегралов есть как раз то, что стоит в правой части равенства (2).

Действительно, кусочно гладкая кривая ∂I распадается на четыре куска (рис. 87). Их можно рассматривать как параметризованные кривые

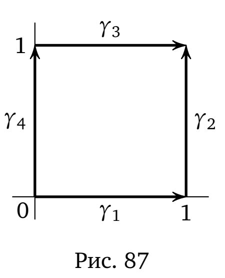


Рис. 87

$$\gamma_1\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad \text{где } x \xmapsto{\gamma_1} (x,0),$$
$$\gamma_2\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad \text{где } y \xmapsto{\gamma_2} (1,y),$$
$$\gamma_3\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad \text{где } x \xmapsto{\gamma_3} (x,1),$$
$$\gamma_4\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad \text{где } y \xmapsto{\gamma_4} (0,y).$$

По определению интеграла от 1-формы $\omega = P\,dx$ по кривой

$$\int\limits_{\gamma_1} P(x,y)\,dx := \int\limits_{[0,1]} \gamma_1^*(P(x,y)\,dx) := \int\limits_0^1 P(x,0)\,dx,$$
$$\int\limits_{\gamma_2} P(x,y)\,dx := \int\limits_{[0,1]} \gamma_2^*(P(x,y)\,dx) := \int\limits_0^1 0\,dy = 0,$$
$$\int\limits_{\gamma_3} P(x,y)\,dx := \int\limits_{[0,1]} \gamma_3^*(P(x,y)\,dx) := \int\limits_0^1 P(x,1)\,dx,$$
$$\int\limits_{\gamma_4} P(x,y)\,dx := \int\limits_{[0,1]} \gamma_4^*(P(x,y)\,dx) := \int\limits_0^1 0\,dy = 0$$

и, кроме того, в силу указанного в утверждении 1 выбора ориентации границы области, с учетом ориентации кривых γ_1, γ_2, γ_3 и γ_4, очевидно,

$$\int\limits_{\partial I}\omega = \int\limits_{\gamma_1}\omega + \int\limits_{\gamma_2}\omega + \int\limits_{-\gamma_3}\omega + \int\limits_{-\gamma_4}\omega = \int\limits_{\gamma_1}\omega + \int\limits_{\gamma_2}\omega - \int\limits_{\gamma_3}\omega - \int\limits_{\gamma_4}\omega,$$

где $-\gamma_i$ есть кривая γ_i, взятая с противоположной задаваемой отображением γ_i ориентацией.

Таким образом, равенство (2) проверено. ►

Аналогично проверяется, что

$$\iint\limits_I \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\partial I} Q\,dy, \tag{3}$$

Складывая равенства (2) и (3), получаем формулу Грина

$$\iint\limits_I \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial I} P\,dx + Q\,dy \tag{1'}$$

для квадрата I.

Заметим, что несимметричность P и Q в формуле Грина (1) и равенствах (2), (3) связана с несимметричностью x и y: ведь x и y упорядочены, и этим в $\mathbb{R}^2$ и в I задана ориентация.

На языке форм доказанное соотношение (1′) можно переписать в виде

$$\int\limits_I d\omega = \int\limits_{\partial I} \omega, \tag{1″}$$

где ω — произвольная гладкая 1-форма на I. Справа здесь стоит интеграл от ограничения формы ω на границу dI квадрата I.

Проведенное доказательство соотношения (2) допускает очевидное обобщение: если D_y — не квадрат, а «криволинейный четырехугольник», боковые стороны которого — вертикальные отрезки (быть может, даже вырождающиеся в точку), а две другие стороны — графики кусочно гладких функций $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ над отрезком $[a, b]$ оси Ox, то

$$\iint\limits_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{\partial D_y} P\, dx. \tag{2′}$$

Аналогично, если имеется такой же «четырехугольник» D_x по отношению к оси Oy, т. е. с двумя горизонтальными сторонами, то для него справедливо равенство

$$\iint\limits_{D_x} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int\limits_{\partial D_x} Q\, dy. \tag{3′}$$

Предположим теперь, что область $\overline{D}$ можно разрезать на конечное число областей типа D_y (рис. 88). Тогда для этой области $\overline{D}$ тоже верна формула вида (2′).

◄ В самом деле, двойной интеграл по области $\overline{D}$ в силу его аддитивности есть сумма интегралов по кускам типа D_y, на которые разрезана область $\overline{D}$. Для каждого такого куска справедлива формула (2′), т. е. двойной интеграл по нему равен интегралу от формы $P\,dx$ по ориентированной границе этого куска.

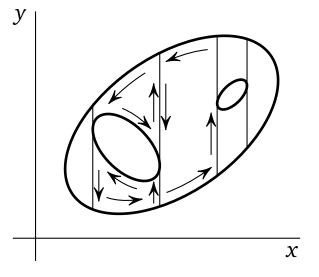


Рис. 88

Но соседние куски на общей части их границ индуцируют противоположные ориентации, поэтому при сложении интегралов по границам всех кусков в результате взаимных уничтожений, очевидно, останется только интеграл по границе $\partial\overline{D}$ самой области $\overline{D}$. ►

Аналогично, если область $\overline{D}$ допускает разбиение на области типа D_x, то для $\overline{D}$ справедливо равенство типа равенства (3′).

Области, которые можно разрезать как на куски вида D_x, так и на куски вида D_y, условимся пока называть *простыми областями*. На самом-то деле это достаточно богатый для всех практических целей класс областей.

Записав для простой области оба соотношения (2′), (3′), после их сложения получим формулу (1).

Итак, для простых областей формула Грина доказана.

Мы не будем здесь заниматься дальнейшими ее уточнениями (см. по этому поводу задачу 2), а продемонстрируем лучше другой весьма плодотворный путь рассуждений, по которому можно было бы пойти, установив равенства (1′), (1″).

Пусть область C получена гладким отображением $\varphi\colon I \to C$ квадрата I. Если ω — гладкая 1-форма на C, то

$$\int\limits_C d\omega := \int\limits_I \varphi^* d\omega = \int\limits_I d\varphi^*\omega \overset{!}{=} \int\limits_{\partial I} \varphi^*\omega =: \int\limits_{\partial C} \omega. \tag{4}$$

Восклицательным знаком здесь отмечено уже доказанное нами равенство (см. (1″)); крайние равенства — определения или их прямые следствия; оставшееся второе слева равенство связано с независимостью внешнего дифференцирования от системы координат.

Значит, для области C тоже справедлива формула Грина.

Наконец, если какую-то ориентированную область $\overline{D}$ удается разрезать на конечное число областей типа области C, то из уже описанных выше соображений о взаимном уничтожении интегралов по тем частям границ областей C_i, которые лежат внутри $\overline{D}$, следует, что

$$\int\limits_{\overline{D}} d\omega = \sum_i \int\limits_{C_i} d\omega = \sum_i \int\limits_{\partial C_i} \omega = \int\limits_{\partial \overline{D}} \omega, \tag{5}$$

т. е. для области $\overline{D}$ формула Грина тоже имеет место.

Можно показать, что любая область с кусочно гладкой границей попадает в описанный класс областей, но мы не будем этого делать, поскольку позже (гл. XV) будет описан полезный технический прием, который позволяет избежать подобных геометрических затруднений, заменяя их сравнительно просто решаемым аналитическим вопросом.

Рассмотрим некоторые примеры использования формулы Грина.

Пример 1. Положим в (1) $P=-y$, $Q=x$. Тогда получим, что

$$\int\limits_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = \int\limits_D 2\,dx\,dy = 2\sigma(D),$$

где $\sigma(D)$ — площадь области D. Используя формулу Грина, можно, таким образом, получить следующие, уже встречавшиеся нам выражения для площади области на плоскости через криволинейные интегралы по ориентированной границе этой области:

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} -y\,dx + x\,dy = -\int\limits_{\partial D} y\,dx = \int\limits_{\partial D} x\,dy.$$

В частости, отсюда следует, что работа $A=\int\limits_{\gamma} P\,dV$, которую тепловая машина совершает при изменении состояния ее рабочего вещества по замкнутому циклу γ, равна площади той области плоскости P, V состояний, которая ограничена кривой γ (см. задачу 5 § 1).

Пример 2. Пусть $\overline{B}=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ — замкнутый круг на плоскости. Покажем, что любое гладкое отображение $f\colon \overline{B}\to\overline{B}$ замкнутого круга в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку (т. е. такую точку $p\in\overline{B}$, что $f(p)=p$).

◄ Предположим, что неподвижных точек у отображения f нет. Тогда для любой точки $p\in\overline{B}$ однозначно определены луч с вершиной $f(p)$, проходящий через точку p, и точка $\varphi(p)\in\partial\overline{B}$ пересечения этого луча с ограничивающей круг $\overline{B}$ окружностью. Таким образом, возникло бы отображение $\varphi\colon \overline{B}\to\to\partial\overline{B}$, которое, как легко видеть, тождественно на границе $\partial\overline{B}$ круга, а в целом той же гладкости, что и исходное отображение f. Покажем, что такого отображения φ не существует.

В области $\mathbb{R}^2\setminus 0$ (плоскость с выброшенным началом координат) рассмотрим уже встречавшуюся нам в § 1 форму $\omega=\dfrac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$. Непосредственно проверяется, что $d\omega=0$. Поскольку $\partial\overline{B}\in\mathbb{R}^2\setminus 0$, то при наличии отображения $\varphi\colon \overline{B}\to\partial\overline{B}$ можно было бы получить форму $\varphi^*\omega$ на $\overline{B}$, причем $d\varphi^*\omega=\varphi^*d\omega=\varphi^*0=0$. Значит, по формуле Грина

$$\int\limits_{\partial\overline{B}}\varphi^*\omega=\int\limits_{\overline{B}}d\varphi^*\omega=0.$$

Но ограничение φ на $\partial\overline{B}$ есть тождественное отображение, поэтому

$$\int\limits_{\partial\overline{B}}\varphi^*\omega=\int\limits_{\partial\overline{B}}\omega.$$

Последний же интеграл, как было проверено в примере 1 § 1, отличен от нуля. Полученное противоречие завершает доказательство сформулированного утверждения. ►

Это утверждение справедливо, конечно, и для шара $\overline{B}$ любой размерности (см. пример 5). Оно справедливо также не только для гладких, но и для любых непрерывных отображений $f\colon \overline{B}\to\overline{B}$. В этом общем виде оно называется *теоремой Брауэра*[1] *о неподвижной точке*.

2. Формула Гаусса—Остроградского. Подобно тому, как формула Грина связывает интеграл по границе плоской области с соответствующим инте-

[1] Л. Э. Я. Брауэр (1881—1966) — известный голландский математик. С его именем связан ряд принципиальных теорем топологии, а также анализ оснований математики, приведший к философско-математическим концепциям, называемым интуиционизмом.

гралом по самой области, приводимая ниже формула Гаусса—Остроградского связывает интеграл по границе пространственной области с интегралом по самой области.

Утверждение 2. *Пусть $\mathbb{R}^3$ — пространство с фиксированной в нем системой координат x, y, z; $\overline{D}$ — компактная область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная кусочно гладкими поверхностями; P, Q, R — функции, гладкие в замкнутой области $\overline{D}$.*

Тогда имеет место соотношение

$$\boxed{\iiint\limits_{\overline{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial \overline{D}} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy.} \tag{6}$$

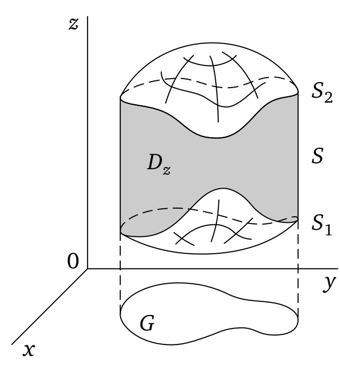


Рис. 89

Вывод формулы (6) Гаусса—Остроградского можно провести, шаг за шагом повторив с очевидными изменениями вывод формулы Грина. Чтобы это повторение не было дословным, рассмотрим сразу не кубик в $\mathbb{R}^3$, а область D_z, изображенную на рис. 89, которая ограничена боковой цилиндрической поверхностью S с образующей, параллельной оси Oz, и двумя шапочками S_1, S_2 — графиками кусочно гладких функций φ_1, φ_2, определенных в одной и той же области $G \subset \mathbb{R}^2_{xOy}$. Проверим, что для области D_z выполнено соотношение

$$\iiint\limits_{D_z} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial D_z} R\, dx \wedge dy. \tag{7}$$

◄ $$\iiint\limits_{D_z} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{G} dx\, dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$$
$$= \iint\limits_{G} \big(R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y))\big)\, dx\, dy =$$
$$= -\iint\limits_{G} R(x, y, \varphi_1(x, y))\, dx\, dy + \iint\limits_{G} R(x, y, \varphi_2(x, y))\, dx\, dy.$$

Поверхности S_1, S_2 имеют соответственно следующее параметрическое представление:

$$S_1 \colon (x, y) \mapsto (x, y, \varphi_1(x, y)),$$
$$S_2 \colon (x, y) \mapsto (x, y, \varphi_2(x, y)).$$

Криволинейные координаты (x, y) на S_1 задают ориентацию, противоположную той, которая индуцируется ориентацией области D_z, а на S_2 —

такую же, как и та, которая индуцируется ориентацией D_z. Значит, если S_1 и S_2 считать частями ориентированной указанным в утверждении 2 образом границы области D_z, то последние два интеграла (с учетом их знаков) можно интерпретировать соответственно как интегралы по S_1 и S_2 от формы $R\,dx \wedge dy$.

Цилиндрическая поверхность S имеет параметрическое представление вида $(t, z) \mapsto (x(t), y(t), z)$, поэтому ограничение формы $R\,dx \wedge dy$ на S равно нулю, как, следовательно, и интеграл от этой формы по S.

Таким образом, для области D_z соотношение (7) действительно имеет место. ►

Если ориентированную область $\overline{D}$ можно разрезать на конечное число областей типа области D_z, то, поскольку на поверхности, по которым примыкают друг к другу две такие области, индуцируются противоположные ориентации, при сложении интегралов по границам произойдут взаимные уничтожения, в результате которых останется лишь интеграл по ориентированной границе $\partial\overline{D}$ исходной области $\overline{D}$.

Следовательно, формула (7) верна и для областей, допускающих указанное разбиение на области типа области D_z.

Аналогично можно ввести области D_y и D_x, цилиндрические поверхности которых имеют образующие, параллельные осям Oy и Ox соответственно, и показать, что если некоторую область $\overline{D}$ можно разрезать на области вида D_y или D_x, то для $\overline{D}$ соответственно имеют место соотношения

$$\iiint\limits_{\overline{D}} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial\overline{D}} Q\,dz \wedge dx, \tag{1}$$

$$\iiint\limits_{\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial\overline{D}} P\,dy \wedge dz. \tag{2}$$

Итак, если $\overline{D}$ — *простая область,* т. е. область, допускающая каждое из трех указанных выше разбиений на области типа D_x, D_y, D_z, то, складывая равенства (7), (8), (9), получаем для $\overline{D}$ равенство (6).

В силу уже указанных при выводе формулы Грина причин мы не будем сейчас заниматься описанием условий простоты области и дальнейшим уточнением доказанного (см. по этому поводу задачу 8 или пример 12 к § 5 гл. XVII).

Отметим, однако, что на языке форм в бескоординатном виде формулу Гаусса—Остроградского можно записать следующим образом:

$$\int\limits_{\overline{D}} d\omega = \int\limits_{\partial\overline{D}} \omega, \tag{6'}$$

где ω — гладкая 2-форма в области $\overline{D}$.

Поскольку для кубика $I = I^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant \leqslant 1\}$ формула (6′), как было показано, верна, то ее распространение на более

общие классы областей, конечно, можно провести с помощью стандартных выкладок (4) и (5).

Пример 3. *Закон Архимеда.* Вычислим результирующую силу давления однородной жидкости на погруженное в нее тело D. Декартовы координаты x, y, z в $\mathbb{R}^3$ выберем так, чтобы плоскость x, y совпадала с поверхностью жидкости, а ось z направим в сторону выхода из жидкости. На элемент $d\sigma$ площади поверхности S тела D, находящейся на глубине z, действует сила давления $\rho g z \boldsymbol{n}\, d\sigma$, где ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, а $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности S в соответствующей элементу $d\sigma$ точке поверхности. Значит, искомая результирующая сила выражается интегралом

$$\boldsymbol{F} = \iint\limits_S \rho g z \boldsymbol{n}\, d\sigma.$$

Если $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x \cos\alpha_x + \boldsymbol{e}_y \cos\alpha_y + \boldsymbol{e}_z \cos\alpha_z$, то $\boldsymbol{n}\, d\sigma = \boldsymbol{e}_x\, dy \wedge dz + \boldsymbol{e}_y\, dz \wedge dx + \boldsymbol{e}_z\, dx \wedge dy$ (см. § 2, п. 4). Используя формулу (6) Гаусса—Остроградского, находим, таким образом, что

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_x \rho g \iint\limits_S z\, dy \wedge dz + \boldsymbol{e}_y \rho g \iint\limits_S z\, dz \wedge dx + \boldsymbol{e}_x \rho g \iint\limits_S z\, dx \wedge dy =$$
$$= \boldsymbol{e}_x \rho g \iiint\limits_D 0\, dx\, dy\, dz + \boldsymbol{e}_y \rho g \iiint\limits_D 0\, dx\, dy\, dz + \boldsymbol{e}_z \rho g \iiint\limits_D dx\, dy\, dz = \rho g V \boldsymbol{e}_z,$$

где V — объем тела D, а значит, $P = \rho g V$ — вес жидкости, вытесненной телом. Мы пришли к закону Архимеда: $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{e}_z$.

Пример 4. Используя формулу (6) Гаусса—Остроградского, можно дать следующие формулы для объема $V(D)$ тела D, ограниченного поверхностью ∂D:

$$V(D) = \frac{1}{3} \iint\limits_{\partial D} x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy =$$
$$= \iint\limits_{\partial D} x\, dy \wedge dz = \iint\limits_{\partial D} y\, dz \wedge dx = \iint\limits_{\partial D} z\, dx \wedge dy.$$

3. Формула Стокса в $\mathbb{R}^3$

Утверждение 3. *Пусть S — ориентированная кусочно гладкая компактная двумерная поверхность с краем ∂S, лежащая в области $G \subset \mathbb{R}^3$, в которой задана гладкая 1-форма $\omega = P\, dx + Q\, dy + R\, dz$. Тогда имеет место соотношение*

$$\boxed{\begin{aligned}\int\limits_{\partial S} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz +\\ + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy,\end{aligned}} \tag{10}$$

где ориентация края ∂S берется согласованной с ориентацией поверхности S.

В иной записи это означает, что

$$\int\limits_S d\omega = \int\limits_{\partial S} \omega. \tag{10'}$$

◄ Если C — стандартная параметризованная поверхность $\varphi: I \to C$ в $\mathbb{R}^3$, где I — квадрат в $\mathbb{R}^2$, то для C соотношение (10) вытекает из равенств (4), с учетом доказанной для квадрата и используемой в них формулы Грина.

Если ориентируемую поверхность S можно разрезать на простейшие поверхности указанного вида, то для такой поверхности соотношение (10) тоже справедливо, что следует из равенств (5) с заменой в них $\overline{D}$ на S. ►

Как и в предыдущих случаях, мы не доказываем здесь, что, например, кусочно гладкая поверхность допускает указанное разбиение.

Покажем, как выглядело бы приведенное доказательство формулы (10) в координатной записи. Чтобы избежать уж слишком громоздких выражений, мы распишем только первую и основную из двух его фраз, да и то с некоторыми упрощениями. А именно, введем обозначения x^1, x^2, x^3 для координат точки $x \in \mathbb{R}^3$ и проверим только, что

$$\int\limits_{\partial S} P(x)\, dx^1 = \iint\limits_S \frac{\partial P}{\partial x^2}\, dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial P}{\partial x^3}\, dx^3 \wedge dx^1,$$

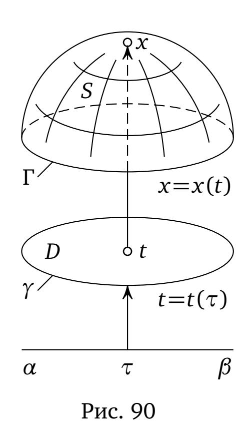


Рис. 90

поскольку остальные два слагаемых левой части формулы (10) можно исследовать аналогично. Будем для простоты считать, что S получается при гладком отображении $x = x(t)$ области D, лежащей в плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных t^1, t^2 и ограниченной одной гладкой кривой $\gamma = \partial D$, параметризованной с помощью отображения $t = t(\tau)$ точками отрезка $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ (рис. 90). Тогда край $\Gamma = \partial S$ поверхности S можно записать в виде $x = x(t(\tau))$, где τ пробегает отрезок $[\alpha, \beta]$. Используя определение интеграла по кривой, формулу Грина для плоской области D и определение интеграла по параметризованной поверхности, последовательно находим

$$\int\limits_\Gamma P(x)\, dx^1 := \int\limits_\alpha^\beta P(x(t(\tau)))\Big(\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\frac{dt^1}{d\tau} + \frac{\partial x^1}{\partial t^2}\frac{dt^2}{d\tau}\Big)\, d\tau =$$
$$= \int\limits_\gamma \Big(P(x(t))\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\Big)\, dt^1 + \Big(P(x(t))\frac{\partial x^1}{\partial t^2}\Big)\, dt^2 \overset{!}{=}$$
$$\overset{!}{=} \iint\limits_D \Big[\frac{\partial}{\partial t^1}\Big(P\frac{\partial x^1}{\partial t^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial t^2}\Big(P\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\Big)\Big]\, dt^1 \wedge dt^2 =$$
$$= \iint\limits_D \Big(\frac{\partial P}{\partial t^1}\frac{\partial x^1}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial t^2}\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\Big)\, dt^1 \wedge dt^2 = \iint\limits_D \sum_{i=1}^3 \Big(\frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t^1}\frac{\partial x^1}{\partial t^2} - \frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t^2}\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\Big)\, dt^1 \wedge dt^2 =$$

$$= \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t^1} + \frac{\partial P}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial t^1}\right)\frac{\partial x^1}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial t^2} + \frac{\partial P}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x^1}{\partial t^1}\right] dt^1 \wedge dt^2 =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial t^1} & \frac{\partial x^2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^2}\end{vmatrix} + \frac{\partial P}{\partial x^3}\begin{vmatrix} \frac{\partial x^3}{\partial t^1} & \frac{\partial x^3}{\partial t^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^2}\end{vmatrix}\right) dt^1 \wedge dt^2 =$$

$$=: \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial P}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1\right).$$

Двоеточием здесь обозначены равенства по определению, а восклицательным знаком — переход, использующий уже доказанную формулу Грина. Остальное — тождественные преобразования.

Используя основную идею доказательства формулы (10′), мы, таким образом, непосредственно проверили (не ссылаясь на то, что $\varphi^* d = d\varphi^*$, но фактически доказав это в рассматриваемом случае), что формула (10) для простой параметризованной поверхности действительно имеет место. Формально мы провели рассуждение только для члена $P\,dx$, но ясно, что это можно сделать и для двух оставшихся слагаемых 1-формы, стоящей под знаком интеграла в левой части равенства (10).

4. Общая формула Стокса. При всем внешнем различии формул (1), (6), (10) их бескоординатная запись (1″), (5), (6′), (10′) оказывается просто идентичной. Это дает основание считать, что мы имели дело с частными проявлениями некоторого общего закона, который теперь легко угадать.

Утверждение 4. *Пусть S — ориентированная кусочно гладкая k-мерная компактная поверхность с краем ∂S, лежащая в области $G \subset \mathbb{R}^n$, в которой задана гладкая $(k-1)$-форма ω.*

Тогда имеет место соотношение

$$\boxed{\int\limits_S d\omega = \int\limits_{\partial S} \omega,} \tag{11}$$

в котором ориентация края ∂S берется согласованной с ориентацией поверхности S.

◄ Формула (11), очевидно, доказывается теми же общими выкладками (4), (5), что и формула Стокса (10′), если только она справедлива для стандартного k-мерного промежутка $I^k = \{x = (x^1, \ldots, x^k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leqslant x^i \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, k\}$. Проверим, что для I^k формула (11) действительно имеет место.

Поскольку на I^k $(k-1)$-форма имеет вид $\omega = \sum\limits_i a_i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots$ $\ldots \wedge dx^k$ (суммирование по $i = 1, \ldots, k$ с пропуском дифференциала dx^i), то (11) достаточно доказать для каждого слагаемого в отдельности. Пусть $\omega =$ $= a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k$. Тогда $d\omega = (-1)^{i-1}\frac{\partial a}{\partial x^i}(x) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^i \wedge \ldots$

$\ldots \wedge dx^k$. Теперь проведем выкладку:

$$\int\limits_{I^k} d\omega = \int\limits_{I^k} (-1)^{i-1} \frac{\partial a}{\partial x^i}(x) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k =$$
$$= (-1)^{i-1} \int\limits_{I^{k-1}} dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^k \int\limits_0^1 \frac{\partial a}{\partial x^i}(x)\, dx^i =$$
$$= (-1)^{i-1} \int\limits_{I^{k-1}} (a(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^k) -$$
$$- a(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^k))\, dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^k =$$
$$= (-1)^{i-1} \int\limits_{I^{k-1}} a(t^1, \ldots, t^{i-1}, 1, t^i, \ldots, t^{k-1})\, dt^1 \ldots dt^{k-1} +$$
$$+ (-1)^i \int\limits_{I^{k-1}} a(t^1, \ldots, t^{i-1}, 0, t^i, \ldots, t^{k-1})\, dt^1 \ldots dt^{k-1}.$$

Здесь I^{k-1} такой же, только $(k-1)$-мерный промежуток в $\mathbb{R}^{k-1}$, как и I^k в $\mathbb{R}^k$; кроме того, мы здесь переобозначили переменные $x^1 = t^1$, …, $x^{i-1} = t^{i-1}$, $x^{i+1} = t^i$, …, $x^k = t^{k-1}$.

Отображения

$$I^{k-1} \ni t = (t^1, \ldots, t^{k-1}) \mapsto (t^1, \ldots, t^{i-1}, 1, t^i, \ldots, t^{k-1}) \in I^k,$$
$$I^{k-1} \ni t = (t^1, \ldots, t^{k-1}) \mapsto (t^1, \ldots, t^{i-1}, 0, t^i, \ldots, t^{k-1}) \in I^k$$

суть параметризации соответственно верхней Γ_{i1} и нижней Γ_{i0} граней промежутка I^k, ортогональных оси Ox^i. Эти координаты на обеих гранях задают один и тот же ориентирующий грань репер $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, отличающийся от репера $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, пространства $\mathbb{R}^k$ отсутствием вектора $\boldsymbol{e}_i$. Вектор $\boldsymbol{e}_i$ на грани Γ_{i1} является внешней по отношению к I^k нормалью, как и вектор $-\boldsymbol{e}_i$ для грани Γ_{i0}. Репер $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{i-1}, \boldsymbol{e}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, переходит в репер $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, пространства $\mathbb{R}^k$ после $i-1$ перестановки соседних векторов, т. е. совпадение или несовпадение ориентации этих реперов определяется знаком числа $(-1)^{i-1}$. Таким образом, указанная параметризация задает на Γ_{i1} ориентацию, которая превращается в ориентацию Γ_{i1}, согласованную с ориентацией I^k, если ее взять с поправочным коэффициентом $(-1)^{i-1}$ (т. е. не менять при нечетном i и менять при четном i).

Аналогичные рассуждения показывают, что для грани Γ_{i0} придется взять поправочный коэффициент $(-1)^i$ к ориентации, заданной предъявленной параметризацией грани Γ_{i0}.

Итак, последние два интеграла (вместе со стоящими при них коэффициентами) можно интерпретировать соответственно как интегралы от формы ω по граням Γ_{i1} и Γ_{i0} промежутка I^k, взятым с ориентацией, индуцированной на них ориентацией промежутка I^k.

Теперь заметим, что на каждой из оставшихся граней промежутка I^k постоянна одна из координат $x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^k$. Значит, соответствующий ей дифференциал тождественно равен нулю на такой грани. Таким образом, форма $d\omega$ тождественно нулевая и интеграл от нее равен нулю по всем граням, отличным от Γ_{i0}, Γ_{i1}.

Значит, найденную выше сумму интегралов по этим двум граням можно интерпретировать как интеграл от формы ω, взятый по всему краю ∂I^k промежутка I^k, ориентированному согласованно с ориентацией самого промежутка I^k.

Формула

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega,$$

а вместе с ней и формула (11) доказаны. ►

Как видно, формула (11) является следствием формулы Ньютона—Лейбница, теоремы о сведении кратного интеграла к повторному и серии определений таких понятий, как поверхность, край поверхности, ориентация, дифференциальная форма, ее дифференцирование и перенос.

Формулы (1), (6), (10) Грина, Гаусса—Остроградского и Стокса являются частными случаями общей формулы (11). Более того, если заданную на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функцию f интерпретировать как 0-форму ω, а интегралом по ориентированной точке от 0-формы считать значение функции в этой точке, взятое со знаком ориентации точки, то саму формулу Ньютона—Лейбница тоже можно рассматривать как простейший (но независимый) вариант формулы (11). Следовательно, фундаментальное соотношение (11) справедливо во всех размерностях $k \geqslant 1$.

Формулу (11) обычно называют *общей формулой Стокса*. В качестве исторической справки процитируем здесь несколько строк из предисловия М. Спивака к его книге, упомянутой в списке литературы.

«Впервые формулировка теоремы[1] появилась в виде приписки к письму сэра Уильяма Томсона (лорда Кельвина) к Стоксу, датированному 2 июля 1850 г. Опубликована она была в качестве восьмого вопроса к экзаменам на смитовскую премию 1854 г. Этот конкурсный экзамен, которому ежегодно подвергались лучшие студенты-математики Кембриджского университета, с 1849 по 1882 г. проводился профессором Стоксом. Ко времени его смерти результат был повсеместно известен как теорема Стокса. Современниками Стокса были даны по крайней мере три доказательства: одно опубликовал Томсон, другое было изложено в «Трактате о натуральной философии» Томсона и Тейта и третье предложил Максвелл в «Электричестве и магнетизме». С тех пор именем Стокса были названы значительно более общие результаты, сыгравшие столь заметную роль в развитии некоторых разделов матема-

[1]Имеется в виду классическая формула Стокса (10).

тики, что теорема Стокса вполне может дать материал для размышлений о ценности обобщений».

Отметим, что современный язык форм восходит к Эли Картану[1], а вид (11) общей формулы Стокса для поверхностей в $\mathbb{R}^n$, по-видимому, впервые предложил Пуанкаре. Для областей n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ формулу знал уже Остроградский, а первые дифференциальные формы написал Лейбниц.

Таким образом, общую формулу Стокса (11) не случайно порой называют формулой Ньютона—Лейбница—Грина—Гаусса—Остроградского—Стокса—Пуанкаре. Из сказанного можно заключить, что это еще далеко не полное ее название.

Замечание к истории общей формулы Стокса. Профессионалам, которые бы пожелали систематически описать научную историю современной формулы Ньютона—Лейбница, как нам представляется, надо будет пройти путь от ранних классиков (Newton—Leibniz—Green—Gauss—Остроградский—Maxwell—Stokes) к следующим или более поздним (Pfaff, Natani, Clebsh, Lie, Frobenius, Grassman, Darboux, Volterra, Élie Cartan, Poincaré, Goursat, Kähler, de Rham).

Используем эту формулу, чтобы обобщить результат, полученный в примере 2.

Пример 5. Покажем, что любое гладкое отображение $f: \overline{B} \to \overline{B}$ замкнутого шара $\overline{B} \subset \mathbb{R}^m$ в себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

◄ Если бы отображение f не имело неподвижных точек, то, как и в примере 2, можно было бы построить гладкое отображение $\varphi: \overline{B} \to \partial\overline{B}$, тождественное на сфере $\partial\overline{B}$. В области $\mathbb{R}^m \setminus 0$ рассмотрим векторное поле $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^m}$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m \setminus 0$, и отвечающую этому полю форму потока

$$\omega = \left\langle \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^m}, \boldsymbol{n} \right\rangle \Omega = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{i-1} x^i \, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^m}{((x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2)^{m/2}}$$

(см. формулу (8) из § 2). Поток такого поля через границу шара $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$ в сторону внешней нормали к сфере $\partial\overline{B}$, очевидно, равен площади сферы $\partial\overline{B}$, т. е. $\int\limits_{\partial\overline{B}} \omega \neq 0$. Но, как легко проверить прямой выкладкой, $d\omega = 0$ в $\mathbb{R}^m \setminus 0$, откуда с использованием общей формулы Стокса, как и в примере 2, следует, что

$$\int\limits_{\partial\overline{B}} \omega = \int\limits_{\partial\overline{B}} \varphi^*\omega = \int\limits_{\overline{B}} d\varphi^*\omega = \int\limits_{\overline{B}} \varphi^* d\omega = \int\limits_{\overline{B}} \varphi^* 0 = 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. ►

[1]Эли Картан (1869—1951) — выдающийся французский геометр.

Задачи и упражнения

1. a) Изменится ли формула (1) Грина, если перейти от системы координат x, y к системе координат y, x?

b) Изменится ли при этом формула $(1'')$?

2. a) Докажите, что формула (1) остается в силе, если функции P, Q непрерывны в замкнутом квадрате I, их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны во внутренних точках квадрата I, а двойной интеграл из формулы $(1')$ существует хотя бы как несобственный.

b) Проверьте, что если граница компактной области D состоит из кусочно гладких кривых, то в аналогичных указанным в a) предположениях формула (1) остается в силе.

3. a) Проведите подробно доказательство равенства $(2')$.

b) Покажите, что если граница компактной области $D\subset\mathbb{R}^2$ состоит из конечного числа гладких кривых, имеющих лишь конечное число точек перегиба, то D — простая область по отношению к любой паре координатных осей.

c) Верно ли, что если граница плоской области состоит из гладких кривых, то в $\mathbb{R}^2$ можно так выбрать оси координат, что по отношению к ним она окажется простой областью?

4. a) Покажите, что если функции P, Q в формуле Грина таковы, что $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$, то площадь $\sigma(D)$ области D можно находить по формуле $\sigma(D)=\int\limits_{\partial D} P\,dx+Q\,dy$.

b) Выясните геометрический смысл интеграла $\int\limits_{\gamma} y\,dx$, взятого по некоторой (быть может, и незамкнутой) кривой на плоскости с декартовыми координатами x, y. Исходя из этого, вновь истолкуйте формулу $\sigma(D)=-\int\limits_{\partial D} y\,dx$.

c) В качестве проверки последней формулы найдите с ее помощью площадь области

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}.$$

5. a) Пусть $x=x(t)$ — диффеоморфизм области $D_t\subset\mathbb{R}^2_t$ на область $D_x\subset\mathbb{R}^2_x$. Используя результаты задачи 4, а также независимость криволинейного интеграла от допустимого изменения параметризации пути, докажите, что

$$\int\limits_{D_x} dx=\int\limits_{D_t}|x'(t)|\,dt,$$

где $dx=dx^1\,dx^2$, $dt=dt^1\,dt^2$, $|x'(t)|=\det x'(t)$.

b) Выведите из a) формулу

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx=\int\limits_{D_t} f(x(t))\,|\det x'(t)|\,dt$$

замены переменных в двойном интеграле.

6. Пусть $f(x,y,t)$ — гладкая функция, удовлетворяющая в области определения условию $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\neq 0$. Тогда при каждом фиксированном значении параметра t уравнение $f(x,y,t)=0$ задает кривую γ_t в плоскости $\mathbb{R}^2$. Так на плоскости воз-

никает семейство $\{\gamma_t\}$ кривых, зависящих от параметра t. Гладкая кривая $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$, задаваемая параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, называется *огибающей семейства кривых* $\{\gamma_t\}$, если при любом значении t_0 из совместной области определения $\{\gamma_t\}$ и функций $x(t)$, $y(t)$, точка $x(t_0)$, $y(t_0)$ лежит на соответствующей кривой γ_{t_0} и кривые Γ и γ_{t_0} касаются в этой точке.

a) Считая, что x, y — декартовы координаты на плоскости, покажите, что задающие огибающую функции $x(t)$, $y(t)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} f(x,y,t)=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,y,t)=0, \end{cases}$$

а сама огибающая с геометрической точки зрения есть граница проекции (тени) поверхности $f(x,y,t)=0$ пространства $\mathbb{R}^3_{(x,y,t)}$ на плоскость $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$.

b) В плоскости с декартовыми координатами x, y дано семейство прямых $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p(\alpha)=0$. Роль параметра здесь играет полярный угол α. Укажите геометрический смысл величины $p(\alpha)$ и найдите огибающую этого семейства, если $p(\alpha)=c+a\cos\alpha+b\sin\alpha$, a, b, c — постоянные.

c) Опишите зону досягаемости снаряда, который может быть выпущен из зенитного орудия под любым углом $\varphi\in[0,\pi/2]$ к горизонту.

d) Покажите, что если функция $p(\alpha)$ из b) 2π-периодическая, то соответствующая огибающая Γ является замкнутой кривой.

e) Используя задачу 4, покажите, что длина L полученной в d) замкнутой кривой Γ может быть найдена по формуле

$$L=\int_0^{2\pi} p(\alpha)\,d\alpha.$$

(Считайте, что $p\in C^{(2)}$).

f) Покажите также, что площадь σ области, ограниченной полученной в d) замкнутой кривой Γ, может быть вычислена по формуле

$$\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2-\dot p^2)(\alpha)\,d\alpha,\quad \dot p(\alpha)=\frac{dp}{d\alpha}(\alpha).$$

7. Рассмотрим интеграл $\int\limits_\gamma \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,ds$, в котором γ — гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $(x,y)\in\gamma$, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\boldsymbol{n}$ — единичный нормальный вектор к γ в точке (x,y), меняющийся непрерывно вдоль γ, ds — элемент длины кривой. Этот интеграл называется *интегралом Гаусса*.

a) Запишите интеграл Гаусса как поток $\int\limits_\gamma\langle\boldsymbol{V},\boldsymbol{n}\rangle\,ds$ плоского векторного поля $\boldsymbol{V}$ через кривую γ.

b) Покажите, что в декартовых координатах x, y интеграл Гаусса имеет знакомый нам по примеру 1 § 1 вид $\pm\int\limits_\gamma\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$, где выбор знака определяется выбором поля нормалей $\boldsymbol{n}$.

c) Вычислите интеграл Гаусса для замкнутой кривой γ, один раз обходящей начало координат, и для кривой γ, ограничивающей область, которая не содержит начала координат.

d) Покажите, что $\dfrac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,ds=d\varphi$, где φ — полярный угол радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, и укажите геометрический смысл значения интеграла Гаусса для замкнутой и для произвольной кривой $\gamma\subset\mathbb{R}^2$.

8. При выводе формулы Гаусса—Остроградского мы считали, что D — простая область, а функции P, Q, R принадлежат классу $C^{(1)}(\overline{D},\mathbb{R})$. Покажите, усовершенствовав рассуждения, что формула (6) верна, если D — компактная область с кусочно гладкой границей; $P,Q,R\in C(\overline{D},\mathbb{R})$; $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}\in C(D,\mathbb{R})$; а тройной интеграл сходится хотя бы как несобственный.

9. a) Если функции P, Q, R в формуле (6) такие, что $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=1$, то объем $V(D)$ области D можно найти по формуле

$$V(D)=\iint\limits_{\partial D}P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy.$$

b) Пусть $f(x,t)$ — гладкая функция переменных $x\in D_x\subset\mathbb{R}^n_x$, $t\in D_t\subset\mathbb{R}^n_t$, причем $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x^1},\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x^n}\right)\neq 0$. Напишите систему уравнений, которой должна удовлетворять $(n-1)$-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n_x$, являющаяся огибающей семейства поверхностей $\{S_t\}$, задаваемых условиями $f(x,t)=0$, $t\in D_t$ (см. задачу 6).

c) Выбирая в качестве параметра t точку на единичной сфере, укажите такое семейство плоскостей в $\mathbb{R}^3$, зависящих от параметра t, огибающей которого был бы эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

d) Покажите, что если замкнутая поверхность S является огибающей семейства плоскостей

$$\cos\alpha_1(t)x+\cos\alpha_2(t)y+\cos\alpha_3(t)z-p(t)=0,$$

где α_1, α_2, α_3 — углы, которые нормаль к плоскости образует с осями координат, а параметром t является переменная точка единичной сферы $S^2\subset\mathbb{R}^3$, то площадь σ поверхности S можно найти по формуле $\sigma=\int\limits_{S^2}p(t)\,d\sigma$.

e) Покажите, что объем тела, ограниченного рассмотренной в d) поверхностью S, можно найти по формуле $V=\dfrac{1}{3}\int\limits_{S}p(t)\,d\sigma$.

f) Опробуйте указанную в e) формулу, отыскав по ней объем эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

g) Как выглядит n-мерный аналог формул, указанных в d) и e)?

10. a) Используя формулу Гаусса—Остроградского, проверьте, что поток поля $\boldsymbol{r}/r^3$ (где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $x\in\mathbb{R}^3$, а $r=|\boldsymbol{r}|$) через гладкую, гомеоморфную сфере поверхность S, охватывающую начало координат, равен потоку этого же поля через поверхность сколь угодно малой сферы $|x|=\varepsilon$.

b) Покажите, что указанный в a) поток равен 4π.

c) Проинтерпретируйте интеграл Гаусса $\int\limits_{S}\dfrac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\,ds$ в $\mathbb{R}^3$ как поток поля $\boldsymbol{r}/r^3$ через поверхность S.

d) Вычислите интеграл Гаусса по границе компактной области $D\subset\mathbb{R}^3$, рассмотрев как случай, когда D содержит внутри себя начало координат, так и случай, когда начало координат лежит вне области D.

e) Сопоставляя задачи 7 и 10 a)—d), укажите n-мерный вариант интеграла Гаусса и соответствующего векторного поля. Дайте n-мерную формулировку задач a)—d) и проверьте ее.

11. a) Покажите, что замкнутая жесткая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ остается в равновесии при действии равномерно по ней распределенного давления. (На основании принципов статики задача сводится к проверке равенств $\iint\limits_S \boldsymbol{n}\,d\sigma = 0$, $\iint\limits_S [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}]\,d\sigma = 0$, где $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}]$ — векторное произведение $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{n}$.)

b) Твердое тело объема V полностью погружено в жидкость, имеющую удельный вес 1. Покажите, что полный статический эффект давления жидкости на тело сводится к одной силе $\boldsymbol{F}$ величины V, направленной вертикально вверх и приложенной к центру массы C объемной области, занимаемой телом.

12. Пусть $\Gamma\colon I^k \to D$ — гладкое (не обязательно гомеоморфное) отображение промежутка $I^k \subset \mathbb{R}^k$ в область D пространства $\mathbb{R}^n$, в которой определена k-форма ω. По аналогии с одномерным случаем отображение Γ будем называть *k-путем* и положим по определению $\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_{I^k} \Gamma^*\omega$. Просмотрите доказательство общей формулы Стокса и убедитесь, что она верна не только для k-мерных поверхностей, но и для k-путей.

13. Используя общую формулу Стокса, докажите по индукции формулу замены переменных в кратном интеграле (принцип доказательства указан в задаче 5 a)).

14. *Интегрирование по частям в кратном интеграле.*

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с регулярной (гладкой или кусочно гладкой) границей ∂D, ориентированной внешней единичной нормалью $\boldsymbol{n} = (n^1, \ldots, n^m)$.

Пусть f, g — гладкие функции в $\overline{D}$.

a) Покажите, что

$$\int\limits_D \partial_i f\,dv = \int\limits_{\partial D} f n^i\,d\sigma.$$

b) Докажите следующую формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_D (\partial_i f) g\,dv = \int\limits_{\partial D} f g n^i\,d\sigma - \int\limits_D f(\partial_i g)\,dv.$$

Глава XIV

Элементы векторного анализа и теории поля

§ 1. Дифференциальные операции векторного анализа

1. Скалярные и векторные поля. В теории поля рассматриваются функции $x \mapsto T(x)$, которые каждой точке x фиксированной области D сопоставляют некоторый специальный объект $T(x)$, называемый *тензором*. Если в области D задана такая функция, то говорят, что в D задано *тензорное поле*. Мы не намерены здесь давать определение тензора — оно будет рассмотрено в алгебре и дифференциальной геометрии. Скажем только, что числовые функции $D \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$, а также вектор-функции $\mathbb{R}^n \supset D \ni x \mapsto V(x) \in T\mathbb{R}^n_x \approx \approx \mathbb{R}^n$ являются частными случаями тензорных полей и называются соответственно *скалярным* и *векторным полем в области* D (эту терминологию мы употребляли и раньше).

Дифференциальная p-форма ω в D есть функция $\mathbb{R}^n \supset D \ni x \mapsto \omega(x) \in \in \mathscr{L}((\mathbb{R}^n)^p, \mathbb{R})$, которую можно назвать *полем форм* степени p в области D. Это тоже частный случай тензорного поля.

Здесь мы прежде всего будем интересоваться скалярными и векторными полями в областях ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Эти поля играют первостепенную роль во многих естественнонаучных приложениях анализа.

2. Векторные поля и формы в $\mathbb{R}^3$. Напомним, что в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$ между линейными функциями $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ и векторами $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^3$ имеется соответствие, состоящее в том, что каждая такая функция имеет вид $A(\xi) = \langle \boldsymbol{A}, \xi \rangle$, где $\boldsymbol{A}$ — вполне определенный вектор из $\mathbb{R}^3$.

Если пространство еще и ориентировано, то каждая билинейная функция $B\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ однозначно записывается в виде $B(\xi_1, \xi_2) = (\boldsymbol{B}, \xi_1, \xi_2)$, где $\boldsymbol{B}$ — некоторый, вполне определенный вектор из $\mathbb{R}^3$, а $(\boldsymbol{B}, \xi_1, \xi_2)$, как всегда, — смешанное произведение векторов $\boldsymbol{B}$, ξ_1, ξ_2 или, что то же самое, значение формы объема на этих векторах.

Таким образом, в ориентированном евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ с каждым его вектором можно указанным способом связать линейную или билинейную форму, а задание линейной или билинейной формы равносильно заданию соответствующего вектора в $\mathbb{R}^3$.

Если в $\mathbb{R}^3$ имеется скалярное произведение, то оно естественным образом возникает и в любом касательном пространстве $T\mathbb{R}^3_x$, состоящем из векторов, приложенных к точке $x \in \mathbb{R}^3$, а ориентация $\mathbb{R}^3$ ориентирует каждое пространство $T\mathbb{R}^3_x$.

Значит, если в $T\mathbb{R}^3_x$ задать 1-форму $\omega^1(x)$ или 2-форму $\omega^2(x)$, то при перечисленных условиях это равносильно заданию в $T\mathbb{R}^3_x$ некоторого вектора $\boldsymbol{A}(x) \in T\mathbb{R}^3_x$, соответствующего форме $\omega^1(x)$, или вектора $\boldsymbol{B}(x) \in T\mathbb{R}^3_x$, отвечающего форме $\omega^2(x)$.

Следовательно, задание в некоторой области D ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ 1-формы ω^1 или 2-формы ω^2 равносильно заданию в D соответствующего форме векторного поля $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$.

В явном виде это соответствие состоит в том, что

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}(x)(\xi) = \langle \boldsymbol{A}(x), \xi \rangle, \tag{1}$$

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}}(x)(\xi_1, \xi_2) = (\boldsymbol{B}(x), \xi_1, \xi_2), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{A}(x)$, $\boldsymbol{B}(x)$, ξ, ξ_1, $\xi_2 \in TD_x$.

Мы видим уже знакомые нам форму работы $\omega^1 = \omega^1_{\boldsymbol{A}}$ векторного поля $\boldsymbol{A}$ и форму потока $\omega^2 = \omega^2_{\boldsymbol{B}}$ векторного поля $\boldsymbol{B}$.

Скалярному полю $f\colon D \to \mathbb{R}$ можно следующим образом сопоставить 0-форму и 3-форму в D:

$$\omega^0_f = f, \tag{3}$$

$$\omega^3_f = f\,dV, \tag{4}$$

где dV — элемент объема (форма объема) в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Ввиду соответствий (1)—(4) операциям над формами отвечают определенные операции над векторными и скалярными полями. Это наблюдение, как мы вскоре убедимся, технически очень полезно.

Утверждение 1. *Линейной комбинации форм одинаковой степени отвечает линейная комбинация соответствующих им векторных или скалярных полей.*

◄ Утверждение 1, конечно, очевидно. Приведем, однако, например, для 1-форм полную запись доказательства:

$$\alpha_1\omega^1_{\boldsymbol{A}_1} + \alpha_2\omega^1_{\boldsymbol{A}_2} = \alpha_1\langle \boldsymbol{A}_1, \cdot\,\rangle + \alpha_2\langle \boldsymbol{A}_2, \cdot\,\rangle = \langle \alpha_1\boldsymbol{A}_1 + \alpha_2\boldsymbol{A}_2, \cdot\,\rangle = \omega^1_{\alpha_1\boldsymbol{A}_1+\alpha_2\boldsymbol{A}_2}. \ ►$$

Из доказательства видно, что α_1 и α_2 можно считать функциями (не обязательно постоянными) в области D задания форм и полей.

Для сокращения записи условимся, наряду с уже используемыми символами $\langle\ ,\ \rangle$, $[\ ,\ ]$, скалярное и векторное произведения векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в $\mathbb{R}^3$, когда это будет удобно, обозначать соответственно через $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$.

Утверждение 2. *Если* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ — *векторные поля в евклидовом ориентированном пространстве* $\mathbb{R}^3$, *то*

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}_1} \wedge \omega^1_{\boldsymbol{A}_2} = \omega^2_{\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2}, \tag{5}$$

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}} \wedge \omega^2_{\boldsymbol{B}} = \omega^3_{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}. \tag{6}$$

Иными словами, внешнему произведению 1-форм, порожденных полями $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, отвечает векторное произведение $\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$ этих полей, поскольку именно оно порождает получаемую в результате 2-форму.

В этом же смысле внешнему произведению 1-формы $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$ и 2-формы $\omega^2_{\boldsymbol{B}}$, порожденных векторными полями $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ соответственно, отвечает скалярное произведение $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ этих полей.

◄ Для доказательства фиксируем в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный базис и отвечающую ему декартову систему координат x^1, x^2, x^3.

В декартовых координатах

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}(x)(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{A}(x)\cdot\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{3} A^i(x)\xi^i = \sum_{i=1}^{3} A^i(x)\,dx^i(\boldsymbol{\xi}),$$

т. е.

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}} = A^1\,dx^1 + A^2\,dx^2 + A^3\,dx^3, \tag{7}$$

и

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}}(x)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) = \begin{vmatrix} B^1(x) & B^2(x) & B^3(x) \\ \xi^1_1 & \xi^2_1 & \xi^3_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \xi^3_2 \end{vmatrix} =$$
$$= B^1(x)\,dx^2\wedge dx^3 + B^2(x)\,dx^3\wedge dx^1 + B^3(x)\,dx^1\wedge dx^2)(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2),$$

т. е.

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}} = B^1\,dx^2\wedge dx^3 + B^2\,dx^3\wedge dx^1 + B^3\,dx^1\wedge dx^2. \tag{8}$$

Поэтому в декартовых координатах, с учетом выражений (7) и (8), получаем

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}_1}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{A}_2} = (A^1_1\,dx^1 + A^2_1\,dx^2 + A^3_1\,dx^3)\wedge(A^1_2\,dx^1 + A^2_2\,dx^2 + A^3_2\,dx^3) =$$
$$= (A^2_1A^3_2 - A^3_1A^2_2)\,dx^2\wedge dx^3 + (A^3_1A^1_2 - A^1_1A^3_2)\,dx^3\wedge dx^1 +$$
$$+ (A^1_1A^2_2 - A^2_1A^1_2)\,dx^1\wedge dx^2 = \omega^2_{\boldsymbol{B}},$$

где $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2$.

Координаты были использованы при доказательстве лишь для того, чтобы проще было найти вектор $\boldsymbol{B}$ соответствующей 2-формы. Само же равенство (5) от координат, разумеется, не зависит.

Аналогично, перемножив равенства (7) и (8), получим

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^2_{\boldsymbol{B}} = (A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 = \omega^3_\rho.$$

В декартовых координатах $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ есть форма объема в $\mathbb{R}^3$, а стоящая в скобке перед формой объема сумма попарных произведений координат векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ есть скалярное произведение этих векторов в соответствующих точках области, откуда следует, что $\rho(x) = \boldsymbol{A}(x) \cdot \boldsymbol{B}(x)$. ►

3. Дифференциальные операторы grad, rot, div и ∇

Определение 1. Внешнему дифференцированию 0-форм (функций), 1-форм и 2-форм в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ отвечают соответственно операции нахождения *градиента* (grad) скалярного поля, *ротора* (rot) и *дивергенции* (div) векторного поля, определенные соотношениями

$$d\omega_f^0 =: \omega^1_{\operatorname{grad} f}, \tag{9}$$

$$d\omega_{\boldsymbol{A}}^1 =: \omega^2_{\operatorname{rot} \boldsymbol{A}}, \tag{10}$$

$$d\omega_{\boldsymbol{B}}^2 =: \omega^3_{\operatorname{div} \boldsymbol{B}}. \tag{11}$$

В силу установленного равенствами (1)—(4) соответствия между формами, скалярными и векторными полями в $\mathbb{R}^3$, соотношения (9)—(11) являются корректным определением операций grad, rot и div, выполняемых соответственно над скалярным полем и векторными полями. Эти операции, или, как говорят, *операторы теории поля*, отвечают одной операции внешнего дифференцирования форм, только применяемой к формам различной степени.

Укажем сразу же явный вид этих операторов в декартовых координатах x^1, x^2, x^3 пространства $\mathbb{R}^3$.

Как мы выяснили, в этом случае

$$\omega_f^0 = f, \tag{3$'$}$$

$$\omega_{\boldsymbol{A}}^1 = A^1\,dx^1 + A^2\,dx^2 + A^3\,dx^3, \tag{7$'$}$$

$$\omega_{\boldsymbol{B}}^2 = B^1\,dx^2 \wedge dx^3 + B^2\,dx^3 \wedge dx^1 + B^3\,dx^1 \wedge dx^2, \tag{8$'$}$$

$$\omega_\rho^3 = \rho\,dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{4$'$}$$

Поскольку

$$\omega^1_{\operatorname{grad} f} := d\omega_f^0 = df = \frac{\partial f}{\partial x^1}\,dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\,dx^3,$$

то из (7$'$) следует, что в этих координатах

$$\operatorname{grad} f = \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \tag{9$'$}$$

где $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — фиксированный в $\mathbb{R}^3$ ортонормированный базис.

Поскольку

$$\omega^2_{\operatorname{rot} \boldsymbol{A}} := d\omega^1_{\boldsymbol{A}} = d(A^1\,dx^1 + A^2\,dx^2 + A^3\,dx^3) = \left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \\ + \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}\right) dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2,$$

то из (8′) следует, что в декартовых координатах

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1\left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}\right) + \boldsymbol{e}_2\left(\frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}\right) + \boldsymbol{e}_3\left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right). \qquad (10')$$

Для запоминания последнее соотношение часто записывают в следующем символическом виде:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix}. \qquad (10'')$$

Далее, поскольку

$$\omega^3_{\operatorname{div} \boldsymbol{B}} := d\omega^2_{\boldsymbol{B}} = d(B^1\, dx^2 \wedge dx^3 + B^2\, dx^3 \wedge dx^1 + B^3\, dx^1 \wedge dx^2) = \\ = \left(\frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

то из (4′) следует, что в декартовых координатах

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3}. \qquad (11')$$

Из полученных формул (9′), (10′), (11′) видно, что grad, rot и div являются линейными дифференциальными операциями (операторами). Оператор grad определен на дифференцируемых скалярных полях и сопоставляет им векторные поля. Оператор rot тоже векторнозначен, но определен на дифференцируемых векторных полях. Оператор div определен на дифференцируемых векторных полях и он ставит им в соответствие скалярные поля.

Отметим, что в других координатах эти операторы будут иметь выражения, вообще говоря, отличные от полученных выше их выражений в декартовых координатах. Об этом мы еще скажем в п. 5 этого параграфа.

Заметим еще, что векторное поле rot $\boldsymbol{A}$ обычно называют *ротором* $\boldsymbol{A}$, *ротацией поля* $\boldsymbol{A}$ или *вихрем поля* $\boldsymbol{A}$. В последнем случае вместо символа rot $\boldsymbol{A}$ иногда пишут символ curl $\boldsymbol{A}$.

В качестве примера использования рассмотренных операторов приведем запись через них знаменитой[1] системы уравнений Максвелла[2], описываю-

---

[1]По этому поводу известный американский физик и математик Р. Фейнман (1918—1988) в своих лекциях по физике (см. русский перевод: М.: Мир, 1966, т. 5, с. 27) с присущим ему темпераментом пишет: «В истории человечества (если посмотреть на нее, скажем, через десять тысяч лет) самым значительным событием XIX столетия, несомненно, будет открытие Максвеллом законов электродинамики. На фоне этого важного научного открытия гражданская война в Америке в том же десятилетии будет выглядеть мелким провинциальным происшествием».

[2]Дж. К. Максвелл (1831—1879) — выдающийся шотландский физик; создал математическую теорию электромагнитного поля, известен также исследованиями по кинетической теории газов, оптике и механике.

щей состояние компонент электромагнитного поля как функций точки $x = (x^1, x^2, x^3)$ пространства и времени t.

Пример 1 (система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме).

$$\begin{array}{ll} 1.\ \operatorname{div}\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}. & 2.\ \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0. \\ 3.\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}. & 4.\ \operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \end{array} \tag{12}$$

Здесь $\rho(x,t)$ — плотность электрического заряда (количество заряда, отнесенное к единице объема), $\boldsymbol{j}(x,t)$ — вектор плотности электрического тока (скорость протекания заряда через единичную площадку), $\boldsymbol{E}(x,t)$ и $\boldsymbol{B}(x,t)$ — векторы напряженности электрического и магнитного поля соответственно, ε_0 и c — размерные постоянные (при этом c — скорость света в вакууме).

В математической и особенно физической литературе наряду с введенными операторами grad, rot, div широко используется предложенный Гамильтоном символический векторный дифференциальный *оператор набла* (*оператор Гамильтона*[1])

$$\nabla = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial x^3}, \tag{13}$$

где $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$, а x^1, x^2, x^3 — соответствующие ему декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$.

По определению применение оператора ∇ к скалярному полю f (т. е. к функции) дает векторное поле

$$\nabla f = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial f}{\partial x^1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial f}{\partial x^2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial f}{\partial x^3},$$

что совпадает с полем (9′), т. е. оператор набла есть попросту записанный в других обозначениях оператор grad.

Используя, однако, векторную структуру записи оператора ∇, Гамильтон предложил систему формальных операций с ним, копирующую соответствующие алгебраические операции с векторами.

Прежде чем демонстрировать эти операции, отметим, что в обращении с оператором ∇ надо придерживаться тех же принципов и соблюдать те же правила предосторожности, что и в обращении с обычным оператором дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$. Например, φDf равно $\varphi\frac{df}{dx}$, а не $\frac{d}{dx}(\varphi f)$ или не $f\frac{d\varphi}{dx}$. Значит, оператор действует на то, что ему подставляют справа; левое умножение в данном случае играет роль коэффициента, т. е. φD есть новый

[1] У. Р. Гамильтон (1805—1865) — знаменитый ирландский математик и механик; сформулировал вариационный принцип (Гамильтона) и построил феноменологическую теорию оптических явлений; создатель теории кватернионов и родоначальник векторного анализа (кстати, ему принадлежит сам термин «вектор»).

дифференциальный оператор $\varphi\dfrac{d}{dx}$, а не функция $\dfrac{d\varphi}{dx}$. Далее $D^2=D\cdot D$, т. е. $D^2f=D(Df)=\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{d}{dx}f\Big)=\dfrac{d^2}{dx^2}f$.

Если теперь, следуя Гамильтону, обращаться с ∇ как с заданным в декартовых координатах векторным полем, то, сопоставляя соотношения (13), (9′), (10″) и (11′), получаем

$$\operatorname{grad} f=\nabla f, \tag{14}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{15}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}=\nabla\cdot\boldsymbol{B}. \tag{16}$$

Так через оператор Гамильтона и векторные операции в $\mathbb{R}^3$ записываются операторы grad, rot и div.

Пример 2. В записи (12) системы уравнений Максвелла участвовали только операторы rot и div. Используя описанные принципы обращения с оператором $\nabla=\operatorname{grad}$, мы в качестве компенсации для оператора grad перепишем систему Максвелла в следующем виде:

$$\begin{array}{ll} 1.\ \nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}. & 2.\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0. \\ 3.\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}. & 4.\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0c^2}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \end{array} \tag{12′}$$

4. Некоторые дифференциальные формулы векторного анализа. В евклидовом ориентированном пространстве $\mathbb{R}^3$ мы установили связь (1)—(4) между формами, с одной стороны, и векторными и скалярными полями — с другой. Это позволило внешнему умножению и дифференцированию форм сопоставить соответствующие операции над полями (см. формулы (5), (6) и (9)—(11)).

Этим соответствием можно пользоваться для получения ряда основных дифференциальных формул векторного анализа.

Например, имеют место следующие соотношения:

$$\operatorname{rot}(f\boldsymbol{A})=f\ \operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\operatorname{grad}f, \tag{17}$$

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad}f+f\ \operatorname{div}\boldsymbol{A}, \tag{18}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}. \tag{19}$$

◄ Проверим последнее равенство:

$$\omega^3_{\operatorname{div}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}=d\omega^2_{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}=d(\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{B}})=d\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{B}}-\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge d\omega^1_{\boldsymbol{B}}=$$
$$=\omega^2_{\operatorname{rot}\boldsymbol{A}}\wedge\omega^1_{\boldsymbol{B}}-\omega^1_{\boldsymbol{A}}\wedge\omega^2_{\operatorname{rot}\boldsymbol{B}}=\omega^3_{\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}}-\omega^3_{\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}}=\omega^3_{\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}}.$$

Аналогично проверяются и первые два соотношения. Разумеется, проверку всех этих равенств можно осуществить и непосредственным дифференцированием в координатах. ►

Если учесть, что $d^2\omega = 0$ для любой формы ω, то можно также утверждать, что справедливы равенства

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0, \tag{20}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0. \tag{21}$$

◄ Действительно:

$$\omega^2_{\operatorname{rot}\operatorname{grad} f} = d\omega^1_{\operatorname{grad} f} = d(d\omega^0_f) = d^2\omega^0_f = 0,$$
$$\omega^3_{\operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{A}} = d\omega^2_{\operatorname{rot} \boldsymbol{A}} = d(d\omega^1_{\boldsymbol{A}}) = d^2\omega^1_{\boldsymbol{A}} = 0. \ ►$$

В формулах (17)—(19) операторы grad, rot, div применяются однократно, в то время как в (20) и (21) рассматриваются операции второго порядка, получающиеся последовательным выполнением каких-то двух из трех исходных операций. Кроме приведенных в (20) и (21), можно рассмотреть также следующие парные комбинации этих операторов:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A}, \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \quad \operatorname{div}\operatorname{grad} f. \tag{22}$$

Оператор div grad применяется, как видно, к скалярному полю. Этот оператор обозначают буквой Δ («дельта») и называют *оператором Лапласа*[1] или *лапласианом*.

Из формул (9′), (11′) следует, что в декартовых координатах

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^3)^2}. \tag{23}$$

Поскольку оператор Δ действует на числовые функции, его можно применять покомпонентно к координатам векторных полей $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1 A^1 + \boldsymbol{e}_2 A^2 + \boldsymbol{e}_3 A^3$, где $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$. В этом случае

$$\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_1 \Delta A^1 + \boldsymbol{e}_2 \Delta A^2 + \boldsymbol{e}_3 \Delta A^3.$$

С учетом последнего равенства, для тройки операторов второго порядка (22) можно выписать следующее соотношение:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A}, \tag{24}$$

на доказательстве которого мы не останавливаемся (см. задачу 2). Равенство (24) может служить определением $\Delta \boldsymbol{A}$ в любой, не обязательно ортогональной системе координат.

---

[1] П. С. Лаплас (1749—1827) — знаменитый французский астроном, математик и физик; внес фундаментальный вклад в развитие небесной механики, математической теории вероятностей, экспериментальной и математической физики.

Используя язык векторной алгебры и формулы (14)—(16), все операторы второго порядка (20)—(22) можно записать через оператор Гамильтона ∇:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{grad} f &= \nabla \times \nabla f = 0, \\ \operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} &= \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0, \\ \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A} &= \nabla\,(\nabla \cdot \boldsymbol{A}), \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} &= \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}), \\ \operatorname{div}\operatorname{grad} f &= \nabla \cdot \nabla f. \end{aligned}$$

С точки зрения векторной алгебры обращение в нуль первых двух из этих операторов представляется вполне естественным.

Последнее равенство означает, что между оператором Гамильтона ∇ и лапласианом Δ имеется простая связь:

$$\Delta = \nabla^2.$$

* 5. Векторные операции в криволинейных координатах

a. Подобно тому, как, например, сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ имеет особенно простое уравнение $R = a$ в сферических координатах, векторные поля $x \mapsto \boldsymbol{A}(x)$ в $\mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^n$) часто приобретают наиболее простую запись в системе координат, отличной от декартовой. Поэтому мы хотим теперь найти явные формулы, по которым можно было бы находить grad, rot и div в достаточно широком классе криволинейных координат.

Но прежде надо уточнить, что понимается под координатной записью поля $\boldsymbol{A}$ в той или иной системе криволинейных координат.

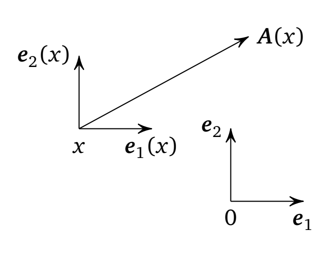


Рис. 91

Начнем с двух наводящих примеров описательного характера.

Пример 3. Пусть на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ фиксированы декартовы координаты x^1, x^2. Когда мы говорим, что в $\mathbb{R}^2$ задано векторное поле $(A^1, A^2)(x)$, то мы имеем в виду, что с каждой точкой $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ связан некоторый вектор $\boldsymbol{A}(x) \in T\mathbb{R}^2_x$, который в базисе пространства $T\mathbb{R}^2_x$, состоящем из ортов $\boldsymbol{e}_1(x)$, $\boldsymbol{e}_2(x)$ координатных направлений, имеет разложение $\boldsymbol{A}(x) = A^1(x)\boldsymbol{e}_1(x) + A^2(x)\boldsymbol{e}_2(x)$ (рис. 91). В данном случае базис $\{\boldsymbol{e}_1(x), \boldsymbol{e}_2(x)\}$ пространства $T\mathbb{R}^2_x$, по существу, не зависит от точки x.

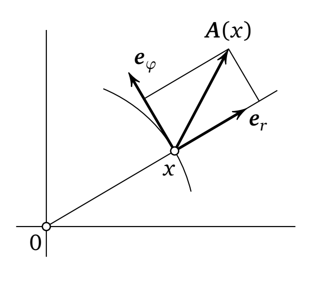


Рис. 92

Пример 4. В случае, когда в той же плоскости $\mathbb{R}^2$ задается полярная система координат (r, φ), с каждой точкой $x \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$ тоже можно связать орты $\boldsymbol{e}_1(x) = \boldsymbol{e}_r(x)$, $\boldsymbol{e}_2(x) = \boldsymbol{e}_\varphi(x)$ (рис. 92)

координатных направлений. Они тоже образуют базис в $T\mathbb{R}^2_x$, по которому можно разложить связанный с точкой x вектор $\boldsymbol{A}(x)$ поля $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A}(x) = A^1(x)\boldsymbol{e}_1(x) + A^2(x)\boldsymbol{e}_2(x)$. Тогда упорядоченную пару функций $(A^1, A^2)(x)$ естественно считать записью поля $\boldsymbol{A}$ в полярной системе координат.

Так, если $(A^1, A^2)(x) \equiv (1, 0)$, то это поле единичных векторов в $\mathbb{R}^2$, идущих в радиальном направлении в сторону от центра 0.

Поле $(A^1, A^2)(x) \equiv (0, 1)$ получается из предыдущего поля поворотом каждого его вектора против часовой стрелки на угол $\pi/2$.

Это не постоянные поля в $\mathbb{R}^2$, хотя компоненты их координатного представления постоянны. Дело все в том, что базис, по которому идет разложение, синхронно с вектором поля меняется при переходе от точки к точке.

Ясно, что компоненты координатного представления этих полей в декартовых координатах вовсе не были бы постоянными. С другой стороны, действительно постоянное поле (состоящее из параллельно разнесенного по точкам плоскости вектора), которое в декартовых координатах имеет постоянные компоненты, в полярных координатах имело бы переменные компоненты.

b. После этих наводящих соображений рассмотрим вопрос о задании векторных полей в криволинейных системах координат более формально.

Прежде всего напомним, что система криволинейных координат t^1, t^2, t^3 в области $D \subset \mathbb{R}^3$ — это диффеоморфизм $\varphi: D_t \to D$ области D_t евклидова пространства параметров $\mathbb{R}^3_t$ на область D, в результате которого каждая точка $x = \varphi(t) \in D$ приобретает декартовы координаты t_1, t_2, t_3 соответствующей точки $t \in D_t$.

Поскольку φ — диффеоморфизм, касательное отображение $\varphi'(t): T\mathbb{R}^3_t \to T\mathbb{R}^3_{x=\varphi(t)}$ является изоморфизмом векторных пространств. Каноническому базису $\xi_1(t) = (1, 0, 0)$, $\xi_2(t) = (0, 1, 0)$, $\xi_3(t) = (0, 0, 1)$ пространства $T\mathbb{R}^3_t$ отвечает базис пространства $T\mathbb{R}^3_{x=\varphi(t)}$, состоящий из векторов $\xi_i(x) = \varphi'(t)\xi_i(t) = \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t^i}$, $i = 1, 2, 3$, координатных направлений. Разложению $\boldsymbol{A}(x) = \alpha_1\xi_1(x) + \alpha_2\xi_2(x) + \alpha_3\xi_3(x)$ любого вектора $\boldsymbol{A}(x) \in T\mathbb{R}^3_x$ по этому базису отвечает такое же разложение

$$\boldsymbol{A}(t) = \alpha_1\xi_1(t) + \alpha_2\xi_2(t) + \alpha_3\xi_3(t)$$

(с теми же компонентами α_1, α_2, α_3!) вектора $\boldsymbol{A}(t) = (\varphi')^{-1}\boldsymbol{A}(x)$ по каноническому базису $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ в $T\mathbb{R}^3_t$. При отсутствии евклидовой структуры в $\mathbb{R}^3$ числа α_1, α_2, α_3 составили бы наиболее естественную координатную запись вектора $\boldsymbol{A}(x)$, связанную с рассматриваемой системой криволинейных координат.

c. Однако принятие такого координатного представления не вполне соответствовало бы тому, о чем мы договорились в примере 4. Дело в том,что базис $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, $\xi_3(x)$ пространства $T\mathbb{R}^3_x$, соответствующий каноническому базису $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ в $T\mathbb{R}^3_t$, хотя и состоит из векторов координатных

направлений, вовсе не обязан состоять из *ортов* этих направлений, т. е., вообще говоря, $\langle \xi_i, \xi_i \rangle(x) \neq 1$.

Теперь мы учтем это обстоятельство, связанное с наличием структуры евклидова пространства в $\mathbb{R}^3$ и, следовательно, в каждом векторном пространстве $T\mathbb{R}^3_x$.

Благодаря изоморфизму $\varphi'(t)\colon T\mathbb{R}^3_t \to T\mathbb{R}^3_{x=\varphi(t)}$ в $T\mathbb{R}^3_t$ можно перенести евклидову структуру пространства $T\mathbb{R}^3_x$, положив для любой пары векторов $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2 \in T\mathbb{R}^3_t$ $\langle \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2 \rangle := \langle \varphi' \boldsymbol{\tau}_1, \varphi' \boldsymbol{\tau}_2 \rangle$. В частности, для квадрата длины вектора отсюда получается следующее выражение:

$$\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau} \rangle = \langle \varphi'(t)\boldsymbol{\tau}, \varphi'(t)\boldsymbol{\tau} \rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t^i}\tau^i, \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t^j}\tau^j \right\rangle =$$
$$= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t^j} \right\rangle(t)\, \tau^i \tau^j = \langle \xi_i, \xi_j \rangle(t) \tau^i \tau^j = g_{ij}(t)\, dt^i(\boldsymbol{\tau})\, dt^j(\boldsymbol{\tau}).$$

Квадратичная форма

$$ds^2 = g_{ij}(t)\, dt^i\, dt^j, \tag{25}$$

коэффициенты которой суть попарные скалярные произведения векторов канонического базиса, вполне определяет скалярное произведение в $T\mathbb{R}^3_t$. Если такая форма задана в каждой точке некоторой области $D_t \subset \mathbb{R}^3_t$, то, как известно из геометрии, говорят, что в этой области задана *риманова метрика*. Риманова метрика позволяет, оставаясь в прямолинейных координатах t^1, t^2, t^3 пространства $\mathbb{R}^3_t$, в каждом касательном пространстве $T\mathbb{R}^3_t$ $(t \in D_t)$ ввести свою евклидову структуру, что соответствует «кривому» вложению $\varphi\colon D_t \to D$ области D_t в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$.

Если векторы $\xi_i(x) = \varphi'(t)\xi_i(t) = \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t^i}(t)$, $i = 1, 2, 3$, ортогональны в $T\mathbb{R}^3_x$, то $g_{ij}(t) = 0$ при $i \neq j$. Это значит, что мы имеем дело с *триортогональной сеткой координат*. В терминах пространства $T\mathbb{R}^3_t$ это означает, что векторы $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, канонического базиса взаимно ортогональны в смысле определяемого квадратичной формой (25) скалярного произведения в $T\mathbb{R}^3_t$. Дальше мы будем рассматривать для простоты только триортогональные системы криволинейных координат. Для них, как было отмечено, квадратичная форма (25) имеет следующий специальный вид:

$$ds^2 = E_1(t)(dt^1)^2 + E_2(t)(dt^2)^2 + E_3(t)(dt^3)^2, \tag{26}$$

где $E_i(t) = g_{ii}(t)$, $i = 1, 2, 3$.

Пример 5. В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ квадратичная форма (25) имеет соответственно вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \tag{26$'$}$$
$$= dr^2 + r^2\, d\varphi^2 + dz^2 = \tag{26$''$}$$
$$= dR^2 + R^2 \cos^2\theta\, d\varphi^2 + R^2\, d\theta^2. \tag{26$'''$}$$

Таким образом, каждая из этих систем является триортогональной системой координат в области своего определения.

Векторы $\boldsymbol{\xi}_1(t)$, $\boldsymbol{\xi}_2(t)$, $\boldsymbol{\xi}_3(t)$ канонического базиса (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) в $T\mathbb{R}^3_t$, как и отвечающие им векторы $\boldsymbol{\xi}_i(x) \in T\mathbb{R}^3_x$, имеют следующую норму[1]: $|\boldsymbol{\xi}_i| = \sqrt{g_{ii}}$. Значит, орты (единичные в смысле скалярного квадрата векторы) координатных направлений имеют для триортогональной системы (26) следующее координатное представление в $T\mathbb{R}^3_t$:

$$\boldsymbol{e}_1(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}, 0, 0\right), \; \boldsymbol{e}_2(t) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{E_2}}, 0\right), \; \boldsymbol{e}_3(t) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{E_3}}\right). \qquad (27)$$

Пример 6. Из формул (27) и результатов примера 5 вытекает, что для декартовых, цилиндрических и сферических координат тройки ортов координатных направлений имеют соответственно следующий вид:

$$\boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{e}_y = (0, 1, 0), \qquad \boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1); \qquad (27')$$

$$\boldsymbol{e}_r = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{e}_\varphi = \left(0, \frac{1}{r}, 0\right), \qquad \boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1); \qquad (27'')$$

$$\boldsymbol{e}_R = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{e}_\varphi = \left(0, \frac{1}{R\cos\theta}, 0\right), \quad \boldsymbol{e}_\theta = \left(0, 0, \frac{1}{R}\right). \qquad (27''')$$

Разобранные выше примеры 3, 4 подразумевали, что вектор поля раскладывается по базису, состоящему из *ортов* координатных направлений. Значит, отвечающий вектору $\boldsymbol{A}(x) \in T\mathbb{R}^3_x$ поля вектор $\boldsymbol{A}(t) \in T\mathbb{R}^3_t$ следует раскладывать не по каноническому базису $\boldsymbol{\xi}_1(t)$, $\boldsymbol{\xi}_2(t)$, $\boldsymbol{\xi}_3(t)$, а по базису $\boldsymbol{e}_1(t)$, $\boldsymbol{e}_2(t)$, $\boldsymbol{e}_3(t)$, состоящему из ортов координатных направлений.

Таким образом, отвлекаясь от исходного пространства $\mathbb{R}^3$, можно считать, что в области $D_t \subset \mathbb{R}^3_t$ задана риманова метрика (25) или (26) и векторное поле $t \to \boldsymbol{A}(t)$, координатное представление $(A^1, A^2, A^3)(t)$ которого в каждой точке $t \in D_t$ получается в результате разложения $\boldsymbol{A}(t) = A^i(t)\boldsymbol{e}_i(t)$ соответствующего этой точке вектора $\boldsymbol{A}(t)$ поля по ортам координатных направлений.

d. Теперь разберемся с формами. Любая форма в D при диффеоморфизме $\varphi\colon D_t \to D$ автоматически переносится в область D_t. Этот перенос, как нам известно, происходит в каждой точке $x \in D$ из пространства $T\mathbb{R}^3_x$ в соответствующее пространство $T\mathbb{R}^3_t$. Поскольку мы перенесли в $T\mathbb{R}^3_t$ евклидову структуру из $T\mathbb{R}^3_x$, то из определения переноса векторов и форм следует, что, например, определенной в $T\mathbb{R}^3_x$ форме $\omega^1_{\boldsymbol{A}}(x) = \langle \boldsymbol{A}(x), \cdot \rangle$ соответствует точно такая же форма $\omega^1_{\boldsymbol{A}}(t) = \langle \boldsymbol{A}(t), \cdot \rangle$ в $T\mathbb{R}^3_t$, где $\boldsymbol{A}(x) = \varphi'(t)\boldsymbol{A}(t)$. Это же можно сказать и о формах вида $\omega^2_{\boldsymbol{B}}$, ω^3_ρ, не говоря уж о формах ω^0_f — функциях.

После сделанных разъяснений все дальнейшие рассмотрения уже можно вести только в области $D_t \subset \mathbb{R}^3_t$, отвлекаясь от исходного пространства $\mathbb{R}^3$,

---

[1]В триортогональной системе (26) $|\boldsymbol{\xi}_i| = \sqrt{E_i} = H_i$, $i = 1, 2, 3$. Величины H_1, H_2, H_3 обычно называют *коэффициентами* или *параметрами Ламе*.

Г. Ламе (1795—1870) — французский инженер, математик и физик.

считая, что в D_t задана риманова метрика (25), заданы скалярные поля f, ρ и векторные поля $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, а также формы ω_f^0, $\omega_{\boldsymbol{A}}^1$, $\omega_{\boldsymbol{B}}^2$, ω_ρ^3, которые в каждой точке $t \in D_t$ определяются в соответствии с евклидовой структурой в $T\mathbb{R}_t^3$, задаваемой римановой метрикой.

Пример 7. Форма объема dV в криволинейных координатах t_1, t_2, t_3, как мы знаем, имеет вид

$$dV = \sqrt{\det g_{ij}}(t)\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3.$$

Для триортогональной системы

$$dV = \sqrt{E_1 E_2 E_3}(t)\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3. \tag{28}$$

В частности, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах соответственно получаем

$$dV = dx \wedge dy \wedge dz = \tag{28'}$$

$$= r\, dr \wedge d\varphi \wedge dz = \tag{28''}$$

$$= R^2 \cos\theta\, dR \wedge d\varphi \wedge d\theta. \tag{28'''}$$

Сказанное позволяет записать форму $\omega_\rho^3 = \rho\, dV$ в различных системах криволинейных координат.

e. Наша основная (и теперь уже легко решаемая) задача состоит в том, чтобы, зная разложение $\boldsymbol{A}(t) = A^i(t)\boldsymbol{e}_i(t)$ вектора $\boldsymbol{A}(t) \in T\mathbb{R}_t^3$ по ортам $\boldsymbol{e}_i(t) \in \in T\mathbb{R}_t^3$, $i = 1, 2, 3$, триортогональной системы координат, определяемой римановой метрикой (26), найти разложение форм $\omega_{\boldsymbol{A}}^1(t)$ и $\omega_{\boldsymbol{A}}^2(t)$ по каноническим 1-формам dt^i и 2-формам $dt^i \wedge dt^j$ соответственно.

Поскольку все рассуждения будут относиться к любой, но фиксированной точке t, для сокращения записи мы позволим себе опускать символ t, отмечающий привязку рассматриваемых векторов и форм к касательному пространству в точке t.

Итак, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — базис в $T\mathbb{R}_t^3$, состоящий из ортов (27) координатных направлений; $\boldsymbol{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$ — разложение вектора $\boldsymbol{A} \in T\mathbb{R}_t^3$ по этому базису.

Заметим, прежде всего, что из формул (27) следует, что

$$dt^j(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{\sqrt{E_i}}\delta_j^i, \qquad \text{где } \delta_j^i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \tag{29}$$

$$dt^i \wedge dt^j(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = \frac{1}{\sqrt{E_i E_j}}\delta_{kl}^{ij}, \quad \text{где } \delta_{kl}^{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } (i, j) \neq (k, l), \\ 1, & \text{если } (i, j) = (k, l). \end{cases} \tag{30}$$

f. Таким образом, если $\omega_{\boldsymbol{A}}^1 := \langle \boldsymbol{A}, \cdot \rangle = a_1\, dt^1 + a_2\, dt^2 + a_3\, dt^3$, то, с одной стороны,

$$\omega_{\boldsymbol{A}}^1(\boldsymbol{e}_i) = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}_i \rangle = A^i,$$

а с другой стороны, как видно из (29),

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{e}_i) = (a_1\,dt^1 + a_2\,dt^2 + a_3\,dt^3)(\boldsymbol{e}_i) = a_i \cdot \frac{1}{\sqrt{E_i}}.$$

Следовательно, $a_i = A^i\sqrt{E_i}$, и мы нашли разложение

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}} = A^1\sqrt{E_1}\,dt^1 + A^2\sqrt{E_2}\,dt^2 + A^3\sqrt{E_3}\,dt^3 \tag{31}$$

формы $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$, отвечающее разложению $\boldsymbol{A} = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$ вектора $\boldsymbol{A}$.

Пример 8. Поскольку в декартовых, сферических и цилиндрических координатах соответственно

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z = \\ &= A_r\boldsymbol{e}_r + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + A_z\boldsymbol{e}_z = \\ &= A_R\boldsymbol{e}_R + A_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + A_\theta\boldsymbol{e}_\theta,\end{aligned}$$

то, как следует из результатов примера 6,

$$\omega^1_{\boldsymbol{A}} = A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz = \tag{31'}$$

$$= A_r\,dr + A_\varphi r\,d\varphi + A_z\,dz = \tag{31''}$$

$$= A_R\,dR + A_\varphi R\cos\varphi\,d\varphi + A_\theta R\,d\theta. \tag{31'''}$$

g. Пусть теперь $\boldsymbol{B} = B^1\boldsymbol{e}_1 + B^2\boldsymbol{e}_2 + B^3\boldsymbol{e}_3$, а $\omega^2_{\boldsymbol{B}} = b_1\,dt^2 \wedge dt^3 + b_2\,dt_3 \wedge dt^1 + b_3\,dt^1 \wedge dt^2$. Тогда, с одной стороны,

$$\omega^2_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) := dV(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \sum_{i=1}^{3} B^i dV(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = B^1 \cdot (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = B^1,$$

где dV — форма объема в $T\mathbb{R}^3_t$ (см. (28) и (27)).

С другой стороны, из (30) получаем

$$\begin{aligned}\omega^2_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) &= (b_1\,dt^2 \wedge dt^3 + b_2\,dt^3 \wedge dt^1 + b_3\,dt^1 \wedge dt^2)(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \\ &= b_1\,dt^2 \wedge dt^3(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \frac{b_1}{\sqrt{E_2E_3}}.\end{aligned}$$

Сравнивая результаты, заключаем, что $b_1 = B^1\sqrt{E_2E_3}$. Аналогично, убеждаемся в том, что $b_2 = B^2\sqrt{E_1E_3}$ и $b_3 = B^3\sqrt{E_1E_2}$.

Таким образом, мы нашли координатное представление

$$\begin{aligned}\omega^2_{\boldsymbol{B}} &= B^1\sqrt{E_2E_3}\,dt^2 \wedge dt^3 + B^2\sqrt{E_3E_1}\,dt^3 \wedge dt^1 + B^3\sqrt{E_1E_2}\,dt^1 \wedge dt^2 = \\ &= \sqrt{E_1E_2E_3}\left(\frac{B^1}{\sqrt{E_1}}\,dt^2 \wedge dt^3 + \frac{B^2}{\sqrt{E_2}}\,dt^3 \wedge dt^1 + \frac{B^3}{\sqrt{E_3}}\,dt^1 \wedge dt^2\right)\end{aligned} \tag{32}$$

формы $\omega^2_{\boldsymbol{B}}$, отвечающей вектору $\boldsymbol{B} = B^1\boldsymbol{e}_1 + B^2\boldsymbol{e}_2 + B^3\boldsymbol{e}_3$.

Пример 9. Используя обозначения, введенные в примере 8, и формулы (26′), (26″), (26‴), в декартовых, цилиндрических и сферических координа-

тах получаем соответственно

$$\omega_{\boldsymbol{B}}^2 = B_x\, dy \wedge dz + B_y\, dz \wedge dx + B_z\, dx \wedge dy = \tag{32'}$$
$$= B_r r\, d\varphi \wedge dz + B_\varphi\, dz \wedge dr + B_z r\, dr \wedge d\varphi = \tag{32''}$$
$$= B_R R^2 \cos\theta\, d\varphi \wedge d\theta + B_\varphi R\, d\theta \wedge dR + B_\theta R \cos\theta\, dR \wedge d\varphi. \tag{32'''}$$

h. Добавим еще, что на основании формулы (28) можно написать, что

$$\omega_\rho^3 = \rho\sqrt{E_1E_2E_3}\, dt^1 \wedge dt^2 \wedge dt^3. \tag{33}$$

Пример 10. В частности, для декартовых, цилиндрических и сферических координат формула (33) имеет соответственно следующий вид:

$$\omega_\rho^3 = \rho\, dx \wedge dy \wedge dz = \tag{33'}$$
$$= \rho r\, dr \wedge d\varphi \wedge dz = \tag{33''}$$
$$= \rho R^2 \cos\theta\, dR \wedge d\varphi \wedge d\theta. \tag{33'''}$$

Теперь, когда получены формулы (31)—(33), легко, исходя из определений (9)—(11) операторов grad, rot и div, найти их координатное представление в триортогональной системе криволинейных координат.

Пусть $\operatorname{grad} f = A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3$. Опираясь на определения, запишем

$$\omega^1_{\operatorname{grad} f} := d\omega_f^0 := df := \frac{\partial f}{\partial t^1}dt^1 + \frac{\partial f}{\partial t^2}dt^2 + \frac{\partial f}{\partial t^3}dt^3.$$

На основании формулы (31) отсюда заключаем, что

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^3}\boldsymbol{e}_3. \tag{34}$$

Пример 11. В декартовых, цилиндрических и сферических координатах соответственно

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = \tag{34'}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = \tag{34''}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial R}\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{R\cos\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{R^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta. \tag{34'''}$$

Пусть задано поле $\boldsymbol{A}(t) = (A^1\boldsymbol{e}_1 + A^2\boldsymbol{e}_2 + A^3\boldsymbol{e}_3)(t)$. Найдем координаты B^1, B^2, B^3 поля $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{B}(t) = (B^1\boldsymbol{e}_1 + B^2\boldsymbol{e}_2 + B^3\boldsymbol{e}_3)(t)$.

Исходя из определения (10) и формулы (31), получаем

$$\omega^2_{\operatorname{rot}\boldsymbol{A}} := d\omega^1_{\boldsymbol{A}} = d(A^1\sqrt{E_1}\, dt^1 + A^2\sqrt{E_2}\, dt^2 + A^3\sqrt{E_3}\, dt^3) =$$
$$= \left(\frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^2} - \frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^3}\right) dt^2 \wedge dt^3 +$$
$$+ \left(\frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^3} - \frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^1}\right) dt^3 \wedge dt^1 + \left(\frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^1} - \frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^2}\right) dt^1 \wedge dt^2.$$

На основании соотношения (32) теперь заключаем, что

$$B^1 = \frac{1}{\sqrt{E_2E_3}}\left(\frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^2} - \frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^3}\right),$$
$$B^2 = \frac{1}{\sqrt{E_3E_1}}\left(\frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^3} - \frac{\partial A^3\sqrt{E_3}}{\partial t^1}\right),$$
$$B^3 = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2}}\left(\frac{\partial A^2\sqrt{E_2}}{\partial t^1} - \frac{\partial A^1\sqrt{E_1}}{\partial t^2}\right),$$

т. е.

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\begin{vmatrix} \sqrt{E_1}\boldsymbol{e}_1 & \sqrt{E_2}\boldsymbol{e}_2 & \sqrt{E_3}\boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t^1} & \frac{\partial}{\partial t^2} & \frac{\partial}{\partial t^3} \\ \sqrt{E_1}A^1 & \sqrt{E_2}A^2 & \sqrt{E_3}A^3 \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Пример 12. В декартовых, цилиндрических и сферических координатах соответственно

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z = \tag{35$'$}$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial rA_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z = \tag{35$''$}$$

$$= \frac{1}{R\cos\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi \cos\theta}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{\partial RA_\theta}{\partial R}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + {}$$
$$+ \frac{1}{R}\left(\frac{\partial RA_\varphi}{\partial R} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_\theta. \tag{35$'''$}$$

i. Пусть теперь задано поле $\boldsymbol{B}(t) = (B^1\boldsymbol{e}_1 + B^2\boldsymbol{e}_2 + B^3\boldsymbol{e}_3)(t)$. Найдем выражение для $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$.

Исходя из определения (11) и формулы (32), получаем

$$\omega^3_{\operatorname{div}\boldsymbol{B}} := d\omega^2_{\boldsymbol{B}} = d\left(B^1\sqrt{E_2E_3}\,dt^2\wedge dt^3 + B^2\sqrt{E_3E_1}\,dt^3\wedge dt^1 + B^3\sqrt{E_1E_2}\,dt^1\wedge dt^1\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial\sqrt{E_2E_3}B^1}{\partial t^1} + \frac{\partial\sqrt{E_3E_1}B^2}{\partial t^2} + \frac{\partial\sqrt{E_1E_2}B^3}{\partial t^3}\right)dt^1\wedge dt^2\wedge dt^3.$$

На основании формулы (33) теперь заключаем, что

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left(\frac{\partial\sqrt{E_2E_3}B^1}{\partial t^1} + \frac{\partial\sqrt{E_3E_1}B^2}{\partial t^2} + \frac{\partial\sqrt{E_1E_2}B^3}{\partial t^3}\right). \tag{36}$$

В декартовых, цилиндрических и сферических координатах отсюда соответственно получаем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \tag{36$'$}$$

$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rB_r}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \tag{36$''$}$$

$$= \frac{1}{R^2\cos\theta}\left(\frac{\partial R^2\cos\theta B_R}{\partial R} + \frac{\partial RB_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial R\cos\theta B_\theta}{\partial \theta}\right). \tag{36$'''$}$$

j. Соотношения (34), (36) можно использовать для получения записи оператора Лапласа $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ в произвольной триортогональной системе координат:

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^3}\boldsymbol{e}_3\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left(\frac{\partial}{\partial t^1}\left(\sqrt{\frac{E_2E_3}{E_1}}\frac{\partial f}{\partial t^1}\right) + \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\sqrt{\frac{E_3E_1}{E_2}}\frac{\partial f}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial t^3}\left(\sqrt{\frac{E_1E_2}{E_3}}\frac{\partial f}{\partial t^3}\right)\right). \quad (37)$$

Пример 13. В частности, для декартовых, полярных и сферических координат из (37) получаем соответственно

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \quad (37')$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \quad (37'')$$
$$= \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial f}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right). \quad (37''')$$

Задачи и упражнения

1. Операторы grad, rot, div и алгебраические операции.

Проверьте следующие соотношения:

для grad:

a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$,

b) $\nabla(f\cdot g) = f\nabla g + g\nabla f$,

c) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$,

d) $\nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$;

для rot:

e) $\nabla\times(f\boldsymbol{A}) = f\nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla f\times\boldsymbol{A}$,

f) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\nabla\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$;

для div:

g) $\nabla\cdot(f\boldsymbol{A}) = \nabla f\cdot\boldsymbol{A} + f\nabla\cdot\boldsymbol{A}$,

h) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

и перепишите их в символах grad, rot, div.

(Указания. $\boldsymbol{A}\cdot\nabla = A^1\frac{\partial}{\partial x^1} + A^2\frac{\partial}{\partial x^2} + A^3\frac{\partial}{\partial x^3}$; $\boldsymbol{B}\cdot\nabla \neq \nabla\cdot\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$.)

2. a) Запишите в декартовых координатах операторы (20)—(22).

b) Проверьте прямым вычислением соотношения (20), (21).

c) Проверьте формулу (24) в декартовых координатах.

d) Запишите формулу (24) через оператор ∇ и докажите ее, используя формулы векторной алгебры.

3. Из рассмотренной в примере 2 системы уравнений Максвелла выведите, что $\nabla\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$.

4. a) Укажите параметры Ламе H_1, H_2, H_3 декартовых, цилиндрических и сферических координат в $\mathbb{R}^3$.

b) Перепишите формулы (28), (34)—(37), используя параметры Ламе.

5. Поле $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} \dfrac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, запишите в

a) декартовых координатах x, y, z;

b) цилиндрических координатах;

c) сферических координатах.

d) Найдите $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$.

6. В цилиндрических координатах (r, φ, z) функция f имеет вид $\ln \dfrac{1}{r}$. Запишите поле $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} f$ в

a) декартовых координатах;

b) цилиндрических координатах;

c) сферических координатах.

d) Найдите $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ и $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$.

7. Напишите формулы преобразования координат в фиксированном касательном пространстве $T\mathbb{R}^3_p$, $p \in \mathbb{R}^3$, при переходе от декартовой системы координат в $\mathbb{R}^3$ к

a) цилиндрическим координатам;

b) сферическим координатам;

c) произвольной триортогональной системе криволинейных координат.

d) Применяя полученные в c) формулы и формулы (34)—(37), проверьте непосредственно инвариантность векторных полей $\operatorname{grad} \boldsymbol{A}$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ и величин $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$, Δf относительно выбора системы координат, в которой происходило их вычисление.

8. Пространство $\mathbb{R}^3$, как твердое тело, вращается вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью ω. Пусть $\boldsymbol{v}$ — поле линейных скоростей точек в фиксированный момент времени.

a) Запишите поле $\boldsymbol{v}$ в соответствующих цилиндрических координатах.

b) Найдите $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$.

c) Укажите, как направлено поле $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ по отношению к оси вращения.

d) Проверьте, что $|\operatorname{rot} \boldsymbol{v}| = 2\omega$ в любой точке пространства.

e) Истолкуйте геометрический смысл $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ и геометрический смысл обнаруженного в d) постоянства этого вектора во всех точках пространства.

§ 2. Интегральные формулы теории поля

1. Классические интегральные формулы в векторных обозначениях

a. Векторная запись форм ω^1_A, ω^2_B. В предыдущей главе мы уже отметили (см. § 2, формулы (12), (13)), что ограничение формы $\omega^1_{\boldsymbol{F}}$ работы поля $\boldsymbol{F}$ на ориентированную гладкую кривую (путь) γ или ограничение формы $\omega^2_{\boldsymbol{V}}$ потока поля $\boldsymbol{V}$ на ориентированную поверхность S можно записать соответственно в следующем виде:

$$\omega^1_{\boldsymbol{F}}\Big|_\gamma = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{e} \rangle \, ds, \quad \omega^2_{\boldsymbol{V}}\Big|_S = \langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{n} \rangle \, d\sigma,$$

где $\boldsymbol{e}$ — ориентирующий γ единичный вектор, сонаправленный с вектором скорости движения вдоль γ, ds — элемент (форма) длины на γ, $\boldsymbol{n}$ — ориентирующий поверхность S вектор единичной нормали к поверхности, а $d\sigma$ — элемент (форма) площади на поверхности S.

В векторном анализе часто используют векторный элемент длины кривой $d\boldsymbol{s} := \boldsymbol{e}\, ds$ и векторный элемент площади поверхности $d\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{n}\, d\sigma$. Ис-

пользуя эти обозначения, можем теперь писать:

$$\omega^1_A\big|_\gamma = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{e}\rangle\, ds = \langle \boldsymbol{A}, d\boldsymbol{s}\rangle = \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}, \tag{1}$$

$$\omega^2_B\big|_S = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{n}\rangle\, d\sigma = \langle \boldsymbol{B}, d\boldsymbol{\sigma}\rangle = \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{2}$$

b. Формула Ньютона—Лейбница. Пусть $f\in C^{(1)}(D,\mathbb{R})$ а $\gamma\colon [a,b]\to D$ — путь в области D.

В применении к 0-форме ω^0_f формула Стокса

$$\int\limits_{\partial\gamma}\omega^0_f = \int\limits_\gamma d\omega^0_f,$$

с одной стороны, означает равенство

$$\int\limits_{\partial\gamma} f = \int\limits_\gamma df,$$

что совпадает с классической формулой

$$f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int\limits_a^b df(\gamma(t))$$

Ньютона—Лейбница, а с другой стороны, по определению градиента она означает, что

$$\int\limits_{\partial\gamma}\omega^0_f = \int\limits_\gamma \omega^1_{\operatorname{grad} f}. \tag{3}$$

Таким образом, используя соотношения (1), формулу Ньютона—Лейбница можно переписать в виде

$$\boxed{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = \int\limits_\gamma (\operatorname{grad} f)\cdot d\boldsymbol{s}.} \tag{3'}$$

В такой записи она означает, что

приращение функции на пути равно работе на этом пути поля градиента этой функции.

Это довольно удобная и информативная запись. Кроме очевидного вывода о том, что работа поля $\operatorname{grad} f$ вдоль пути γ зависит только от начала и конца пути, формула позволяет сделать и несколько более тонкое наблюдение. А именно, движение по поверхности $f = c$ уровня функции f происходит без совершения работы полем $\operatorname{grad} f$, поскольку в этом случае $\operatorname{grad} f\cdot d\boldsymbol{s} = 0$. Далее, как показывает левая часть формулы, работа поля $\operatorname{grad} f$ зависит даже не столько от начала и конца пути, сколько от того, на каких поверхностях уровня функции f лежат эти точки.

c. Формула Стокса. Напомним, что работа поля на замкнутом пути называется *циркуляцией поля на* этом *пути*. Чтобы отметить, что интеграл берется по замкнутому пути, вместо традиционного обозначения $\int\limits_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$ часто пишут $\oint\limits_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$. Если γ — кривая на плоскости, то иногда употребляют еще и символы $\oint\limits_\gamma$ и $\oint\limits_\gamma$ в которых указано направление движения по кривой γ.

Термин циркуляция употребляется и тогда, когда речь идет об интеграле по некоторому конечному набору замкнутых путей. Например, таковым может служить интеграл по краю некоторой компактной поверхности с краем.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — гладкое векторное поле в области D ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, а S — (кусочно) гладкая ориентированная компактная поверхность с краем в области D. В применении к 1-форме $\omega^1_{\boldsymbol{A}}$, с учетом определения ротора векторного поля, формула Стокса означает равенство

$$\int\limits_{\partial S} \omega^1_{\boldsymbol{A}} = \int\limits_S \omega^2_{\operatorname{rot}\boldsymbol{A}}. \tag{4}$$

Используя соотношения (2), формулу (4) можно переписать в виде классической формулы Стокса

$$\boxed{\oint\limits_{\partial S} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{\sigma}.} \tag{4'}$$

В такой записи она означает, что

циркуляция векторного поля на границе поверхности равна потоку ротора этого поля через саму поверхность.

Как всегда, при этом на ∂S выбирается ориентация, согласованная с ориентацией S.

d. Формула Гаусса—Остроградского. Пусть V — компактная область ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, ограниченная (кусочно) гладкой поверхностью ∂V — краем V. Если $\boldsymbol{B}$ — гладкое поле в V, то в соответствии с определением дивергенции поля формула Стокса дает равенство

$$\int\limits_{\partial V} \omega^2_{\boldsymbol{B}} = \int\limits_V \omega^3_{\operatorname{div}\boldsymbol{B}}. \tag{5}$$

Используя соотношение (2) и запись $\rho\, dV$ формы ω^3_ρ через форму объема dV в $\mathbb{R}^3$, равенство (5) можно переписать в виде классической формулы Гаусса—Остроградского

$$\boxed{\iint\limits_{\partial V} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{B}\, dV.} \tag{5'}$$

В такой записи она означает, что

поток векторного поля через границу области равен интегралу от дивергенции этого поля по самой области.

е. Сводка классических интегральных формул. В итоге мы пришли к следующей векторной записи трех классических интегральных формул анализа:

$$\int_{\partial\gamma} f = \int_{\gamma} (\nabla f)\cdot d\boldsymbol{s} \quad \text{(формула Ньютона—Лейбница)}, \tag{3''}$$

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{S} (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad \text{(формула Стокса)}, \tag{4''}$$

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{V} (\nabla\cdot\boldsymbol{B})\, dV \quad \text{(формула Гаусса—Остроградского)}. \tag{5''}$$

2. Физическая интерпретация div, rot, grad

а. Дивергенция. Формулу (5′) можно использовать для выяснения физического смысла величины $\operatorname{div}\boldsymbol{B}(x)$ — дивергенции векторного поля $\boldsymbol{B}$ в некоторой точке x области V задания поля. Пусть $V(x)$ — содержащаяся в V окрестность (например, шаровая) точки x. Объем этой окрестности позволим себе обозначать тем же символом $V(x)$, а ее диаметр буквой d.

Из формулы (5′) по теореме о среднем для тройного интеграла получаем

$$\iint_{\partial V(x)} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div}\boldsymbol{B}(x')V(x),$$

где x' — некоторая точка окрестности $V(x)$. Если $d\to 0$, то $x'\to x$, а коль скоро $\boldsymbol{B}$ — гладкое поле, то и $\operatorname{div}\boldsymbol{B}(x')\to\operatorname{div}\boldsymbol{B}(x)$. Значит,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}(x) = \lim_{d\to 0}\frac{\iint\limits_{\partial V(x)} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma}}{V(x)}. \tag{6}$$

Будем считать $\boldsymbol{B}$ полем скоростей течения (жидкости или газа). Тогда поток поля через границу области $V(x)$ или, что то же самое, объемный расход среды через границу этой области, в силу закона сохранения массы возникает только за счет стоков или источников (в том числе связанных с изменением плотности среды) и равен суммарной интенсивности всех этих факторов, которые мы будем называть одним словом «источники» в области $V(x)$. Значит, дробь в правой части соотношения (6) есть средняя (отнесенная к единице объема) интенсивность источников в области $V(x)$, а предел этой величины, т. е. $\operatorname{div}\boldsymbol{B}(x)$ есть удельная (отнесенная к единице объема) интенсивность источника в точке x. Но предел отношения общего количества некоторой величины в области $V(x)$ к объему этой области, когда $d\to 0$, принято называть *плотностью* этой *величины* в точке x, а плотность как

функцию точки обычно называют *плотностью распределения* данной *величины* в той или иной части пространства.

Таким образом, дивергенцию $\operatorname{div} \boldsymbol{B}$ векторного поля $\boldsymbol{B}$ можно интерпретировать как плотность распределения источников в области течения, т. е. в области задания поля $\boldsymbol{B}$.

Пример 1. Если, в частности, $\operatorname{div} \boldsymbol{B} \equiv 0$, т. е. никаких источников нет, то поток через границу любой области должен бы быть нулевым: сколько втекает в область — столько из нее и вытекает. И, как показывает формула $(5')$, это действительно так.

Пример 2. Точечный электрический заряд величины q создает в пространстве электрическое поле. Пусть этот заряд помещен в начало координат. По *закону Кулона*[1] напряженность $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x)$ поля в точке $x \in \mathbb{R}^3$ (т. е. сила, действующая на пробный единичный заряд в точке x) представляется в виде

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3},$$

где ε_0 — размерная постоянная, а $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки x.

Поле $\boldsymbol{E}$ определено всюду вне начала координат. В сферических координатах $\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2} \boldsymbol{e}_R$, поэтому из формулы $(36''')$ предыдущего параграфа сразу видно, что $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ всюду в области определения поля $\boldsymbol{E}$.

Значит, если взять любую область V, не содержащую начала координат, то в силу формулы $(5')$ поток поля $\boldsymbol{E}$ через границу ∂V области V окажется нулевым.

Возьмем теперь сферу $S_R = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\}$ радиуса R с центром в начале координат и найдем поток поля $\boldsymbol{E}$ через эту поверхность в сторону внешней (по отношению к ограничиваемому сферой шару) нормали. Поскольку вектор $\boldsymbol{e}_R$ как раз и является единичной внешней нормалью к сфере, то

$$\int\limits_{S_R} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int\limits_{S_R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2}\, d\sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Таким образом (с точностью до размерной константы ε_0, зависящей от выбора системы физических единиц), мы получили величину заряда, содержащегося в ограниченном сферой объеме.

Заметим, что в условиях разобранного примера 2 левая часть формулы $(5')$ корректно определена на сфере $\partial V = S_R$, а подынтегральная функция правой части определена и равна нулю всюду в шаре V, кроме всего лишь одной точки — начала координат. И тем не менее проведенные вычисления показывают, что интеграл в правой части формулы $(5')$ нельзя трактовать как интеграл от тождественного нуля.

---

[1] Ш. О. Кулон (1736 — 1806) — французский физик. С помощью изобретенных им же крутильных весов опытным путем открыл закон (Кулона) взаимодействия покоящихся зарядов и магнитных полюсов.

С формальной точки зрения можно было бы отмахнуться от разбора этой ситуации, сказав, что поле $\boldsymbol{E}$ не определено в точке $0 \in V$, и потому мы не имеем права говорить о равенстве (5′), доказанном для гладких, определенных во всей области V интегрирования полей. Однако физическая интерпретация равенства (5′) как закона сохранения массы подсказывает, что при правильной трактовке оно должно быть справедливо всегда.

Посмотрим внимательнее, в чем состояла неопределенность в начале координат величины $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$ из примера 2. Формально в начале координат не определено и исходное поле $\boldsymbol{E}$, но, если искать $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$, исходя из формулы (6), то, как показывает пример 2, надо было бы считать, что $\operatorname{div} \boldsymbol{E}(0) = +\infty$. Значит, под интегралом в правой части (5) оказалась бы «функция», равная нулю всюду, кроме одной точки, где она равна бесконечности. Это соответствует тому, что вне начала координат вообще нет зарядов, а весь заряд q мы умудрились поместить в нулевой объем — в одну точку 0, в которой плотность заряда, естественно, стала бесконечной. Мы сталкиваемся здесь с так называемой δ (дельта)-функцией Дирака[1].

Плотности физических величин в конечном счете нужны, чтобы, взяв от них интеграл, найти значения самих величин. Поэтому нет нужды определять отдельно δ-функцию как функцию точки, важнее определить интеграл от нее. Если считать, что физически «функция» $\delta_{x_0}(x) = \delta(x_0; x)$ должна отвечать плотности такого распределения, например массы в пространстве, при котором вся масса, равная по величине единице, сосредоточена только в одной точке x_0, то естественно положить, что

$$\int\limits_V \delta(x_0; x)\, dV = \begin{cases} 1, & \text{когда } x_0 \in V, \\ 0, & \text{когда } x_0 \notin V. \end{cases}$$

Таким образом, с точки зрения математической идеализации представлений о возможном распределении физической величины (массы, заряда, и т. п.) в пространстве, следует считать, что ее плотность распределения есть сумма обычной конечной функции, отвечающей непрерывному распределению величины в пространстве, и некоторого набора сингулярных «функций» (типа δ-функции Дирака), отвечающих сосредоточению величины в отдельных точках пространства.

Значит, с этих позиций результаты проведенных в примере 2 вычислений можно было бы выразить в виде одного равенства $\operatorname{div} \boldsymbol{E}(x) = \dfrac{q}{\varepsilon_0}\delta(0; x)$. Тогда применительно к полю $\boldsymbol{E}$ интеграл в правой части соотношения (5′) действительно оказывается равным либо q/ε_0, либо 0, в зависимости от того, содержит ли область V начало координат (и сосредоточенный в нем заряд) или не содержит.

---

[1] П. А. М. Дирак (1902—1984) — английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Подробнее о δ-функции Дирака будет сказано в гл. XVII, § 4, п. 4 и § 5, п. 4.

В этом смысле можно (вслед за Гауссом) утверждать, что поток напряженности электрического поля через поверхность тела равен (с точностью до коэффициента, зависящего от системы единиц) сумме электрических зарядов, содержащихся в теле. В этом же смысле надо трактовать плотность ρ распределения электрического заряда в системе уравнений Максвелла, рассмотренной в § 1 (формулы (12)).

b. Ротор. Рассмотрение физического смысла ротора векторного поля начнем со следующего примера.

Пример 3. Пусть все пространство, как твердое тело, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг фиксированной оси (пусть это ось $0z$). Найдем ротор поля $\boldsymbol{v}$ линейных скоростей точек пространства (поле рассматривается в любой, но фиксированный момент времени).

В цилиндрических координатах (r, φ, z) поле $\boldsymbol{v}(r, \varphi, z)$ имеет простую запись: $\boldsymbol{v}(r, \varphi, z) = \omega r \boldsymbol{e}_\varphi$. Тогда по формуле $(35'')$ из § 1 сразу находим, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\omega \boldsymbol{e}_z$. То есть $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ в данном случае является вектором, направленным вдоль оси вращения. Его величина 2ω с точностью до коэффициента совпадает с угловой скоростью вращения, а направление вектора, с учетом ориентации всего пространства $\mathbb{R}^3$, вполне определяет и направление вращения.

Описанное в примере 3 поле в малом напоминает поле скоростей жидкости у воронки (стока) или поле вихреобразного движения воздуха в области смерча (тоже сток, но вверх). Таким образом, ротор векторного поля в точке характеризует степень завихренности поля в окрестности этой точки.

Заметим, что циркуляция поля по замкнутому контуру меняется пропорционально изменению величины векторов поля и, как можно убедиться на том же примере 3, ее можно тоже использовать в качестве характеристики завихренности поля. Только теперь, чтобы вполне описать завихренность поля в окрестность точки, придется считать циркуляцию по контурам, лежащим в трех различных плоскостях. Реализуем сказанное.

Возьмем круг $S_i(x)$ с центром в точке x, лежащей в плоскости, перпендикулярной к направлению i-й координатной оси, $i = 1, 2, 3$. Ориентируем $S_i(x)$ с помощью нормали, в качестве которой возьмем орт $\boldsymbol{e}_i$ этой координатной оси. Пусть d — диаметр $S_i(x)$. Из формулы (4) для гладкого поля $\boldsymbol{A}$ сразу получаем, что

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{e}_i = \lim_{d \to 0} \frac{\oint\limits_{\partial S_i(x)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}}{S_i(x)}, \tag{7}$$

где через $S_i(x)$ обозначена площадь рассматриваемого круга. Таким образом, отнесенная к единице площади циркуляция поля $\boldsymbol{A}$ на окружности ∂S_i в плоскости, ортогональной i-й координатной оси, характеризует i-ю компоненту вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$.

Чтобы полнее уяснить себе смысл ротора векторного поля, вспомним, что любое линейное преобразование пространства есть композиция растя-

жений в трех взаимно ортогональных направлениях, переноса пространства как твердого тела и его вращения как твердого тела. При этом любое вращение можно реализовать как вращение вокруг некоторой оси. Любая гладкая деформация среды (течение жидкости или газа, оползание грунта, изгибание стального стержня) локально линейна. С учетом сказанного и примера 3 можно заключить, что если имеется векторное поле, описывающее движение среды (поле скоростей точек среды), то ротор этого поля в каждой точке дает мгновенную ось вращения окрестности точки, величину мгновенной угловой скорости и направление вращения вокруг мгновенной оси. То есть ротор полностью характеризует вращательную часть движения среды. Это будет несколько уточнено ниже, когда будет выяснено, что ротор следует рассматривать как некоторую плотность распределения локальных вращений среды.

c. Градиент. О градиенте скалярного поля, т. е. попросту о градиенте функции, мы в свое время уже довольно подробно говорили, поэтому здесь остается только напомнить главное.

Поскольку

$$\omega^1_{\operatorname{grad} f}(\xi) = \langle \operatorname{grad} f, \xi \rangle = df(\xi) = D_\xi f,$$

где $D_\xi f$ — производная функции f по вектору ξ, то вектор $\operatorname{grad} f$ ортогонален поверхностям уровня функции f, указывает в каждой точке направление наиболее быстрого роста значений функции, а его величина $|\operatorname{grad} f|$ дает скорость этого роста (относительно единицы длины, которой измеряются смещения в пространстве изменения аргумента).

О градиенте как плотности будет сказано ниже.

3. Некоторые дальнейшие интегральные формулы

a. Векторные варианты формулы Гаусса—Остроградского. Истолкование ротора и градиента как некоторых плотностей, аналогичное истолкованию (6) дивергенции как плотности, можно получить из следующих классических формул векторного анализа, связанных с формулой Гаусса—Остроградского:

$$\int\limits_V \nabla \cdot \boldsymbol{B}\, dV = \int\limits_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} \quad \text{(теорема о дивергенции)}, \tag{8}$$

$$\int\limits_V \nabla \times \boldsymbol{A}\, dV = \int\limits_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{A} \quad \text{(теорема о роторе)}, \tag{9}$$

$$\int\limits_V \nabla f\, dV = \int\limits_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} f \quad \text{(теорема о градиенте)}. \tag{10}$$

Первое из этих трех соотношений с точностью до обозначений совпадает с равенством (5′) и является формулой Гаусса—Остроградского. Векторные равенства (9), (10) вытекают из (8), если применить эту формулу к каждой компоненте соответствующего векторного поля.

Сохраняя те же обозначения $V(x)$, d, что и в равенстве (6), из формул (8)—(10) единообразно получаем

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(x) = \lim_{d\to 0} \frac{\int\limits_{\partial V(x)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}}{V(x)}, \tag{6'}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A}(x) = \lim_{d\to 0} \frac{\int\limits_{\partial V(x)} d\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{A}}{V(x)}, \tag{11}$$

$$\nabla f(x) = \lim_{d\to 0} \frac{\int\limits_{\partial V(x)} d\boldsymbol{\sigma}\, f}{V(x)}. \tag{12}$$

Правые части равенств (8)—(10) можно интерпретировать соответственно как скалярный поток векторного поля $\boldsymbol{B}$, как векторный поток векторного поля $\boldsymbol{A}$ и как векторный поток скалярного поля f через поверхность ∂V, ограничивающую область V. Тогда величины $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, $\operatorname{grad} f$, стоящие в левых частях равенств (6′), (11), (12), можно интерпретировать как соответствующие плотности распределения источников этих полей.

Заметим, что правые части соотношений (6′), (11), (12) не зависят от системы координат. Отсюда вновь можно сделать вывод об инвариантности градиента, ротора и дивергенции.

b. Векторные варианты формулы Стокса. Подобно тому, как формулы (8)—(10) были результатом совмещения формулы Гаусса—Остроградского с алгебраическими операциями над векторными и скалярными полями, следующая тройка формул получается совмещением этих же операций с классической формулой Стокса (которая выступает в качестве первого из этих трех соотношений).

Пусть S — (кусочно) гладкая компактная ориентированная поверхность с согласованно ориентированным краем ∂S, $d\boldsymbol{\sigma}$ — векторный элемент площади на поверхности S, а $d\boldsymbol{s}$ — векторный элемент длины на ∂S. Тогда для гладких полей $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, f имеют место соотношения

$$\int\limits_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \int\limits_{\partial S} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{A}, \tag{13}$$

$$\int\limits_S (d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla) \times \boldsymbol{B} = \int\limits_{\partial S} d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}, \tag{14}$$

$$\int\limits_S d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla f = \int\limits_{\partial S} d\boldsymbol{s}\, f. \tag{15}$$

Формулы (14), (15) вытекают из формулы Стокса (13). На их доказательстве мы здесь не останавливаемся.

c. Формулы Грина. Если S — некоторая поверхность, а $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к S, то производную $D_{\boldsymbol{n}} f$ функции f по вектору $\boldsymbol{n}$ в

теории поля чаще всего записывают символом $\frac{\partial f}{\partial n}$. Например, $\langle \nabla f, d\boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \nabla f, \boldsymbol{n} \rangle\, d\sigma = \langle \operatorname{grad} f, \boldsymbol{n} \rangle\, d\sigma = D_n f\, d\sigma = \frac{\partial f}{\partial n}\, d\sigma$. Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial n} d\sigma$ есть поток поля $\operatorname{grad} f$ через элемент $d\sigma$ поверхности.

В этих обозначениях можно записать следующие достаточно широко используемые в векторном анализе и теории поля формулы Грина:

$$\int_V \nabla f \cdot \nabla g\, dV + \int_V g \nabla^2 f\, dV = \int_{\partial V} (g \nabla f) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad \left(= \int_{\partial V} g \frac{\partial f}{\partial n}\, d\sigma \right), \tag{16}$$

$$\int_V (g \nabla^2 f - f \nabla^2 g)\, dV = \int_{\partial V} (g \nabla f - f \nabla g) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad \left(= \int_{\partial V} \left(g \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g}{\partial n} \right) d\sigma \right). \tag{17}$$

В частности, если в (16) положить $f = g$, а в (17) положить $g \equiv 1$, то соответственно получим

$$\int_V |\nabla f|^2\, dV + \int_V f \Delta f\, dV = \int_{\partial V} f \nabla f \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad \left(= \int_{\partial V} f \frac{\partial f}{\partial n}\, d\sigma \right), \tag{16'}$$

$$\int_V \Delta f\, dV = \int_{\partial V} \nabla f \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad \left(= \int_{\partial V} \frac{\partial f}{\partial n}\, d\sigma \right). \tag{17'}$$

Последнее равенство часто называют *теоремой Гаусса*. Докажем, например, второе из равенств (16), (17):

$$◄ \int_{\partial V} (g \nabla f - f \nabla g) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot (g \nabla f - f \nabla g)\, dV =$$
$$= \int_V (\nabla g \cdot \nabla f + g \nabla^2 f - \nabla f \cdot \nabla g - f \nabla^2 g)\, dV =$$
$$= \int_V (g \nabla^2 f - f \nabla^2 g)\, dV = \int_V (g \Delta f - f \Delta g)\, dV.$$

Мы воспользовались формулой Гаусса—Остроградского и тем, что

$$\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{A} + \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{A}. \ ►$$

Задачи и упражнения

1. Исходя из формулы Гаусса—Остроградского (8), докажите соотношения (9), (10).

2. Исходя из формулы Стокса (13), докажите соотношения (14), (15).

3. a) Проверьте, что формулы (8), (9), (10) остаются в силе и для неограниченной области V, если подынтегральные функции в поверхностных интегралах имеют порядок $O(1/r^3)$ при $r \to \infty$. (Здесь $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точек пространства $\mathbb{R}^3$.)

b) Проверьте, остаются ли в силе формулы (13), (14), (15) для некомпактной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, если подынтегральные функции в криволинейных интегралах имеют порядок $O(1/r^2)$ при $r \to \infty$.

c) Приведите примеры, показывающие, что для неограниченных поверхностей и областей формулы Стокса (4′) и Гаусса—Остроградского (5′), вообще говоря, несправедливы.

4. a) Исходя из интерпретации дивергенции как плотности источников, объясните, что уравнение 2 системы (12) § 1 уравнений Максвелла подразумевает отсутствие у магнитного поля точечных источников (т. е. магнитных зарядов не бывает).

b) Используя формулу Гаусса—Остроградского и систему (12) § 1 уравнений Максвелла, покажите, что никакая жесткая конфигурация пробных зарядов (например, один заряд) не может находиться в состоянии устойчивого равновесия в области электростатического поля, свободной от (других) зарядов, создающих это поле. (Предполагается, что никакие иные силы, кроме создаваемых полем, при этом на систему не действуют.). Этот факт известен как *теорема Ирншоу*.

5. Если электромагнитное поле стационарно, т. е. не зависит от времени, то система (12), § 1 уравнений Максвелла распадается на две независимые части — *систему* $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$, $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ *уравнений электростатики* и *систему* $\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}/\varepsilon_0c^2$, $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ *уравнений магнитостатики*.

Уравнение $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon_0$, где ρ — плотность распределения зарядов, по формуле Гаусса—Остроградского преобразуется в соотношение

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\frac{Q}{\varepsilon_0},$$

где слева стоит поток напряженности электрического поля через замкнутую поверхность S, а справа — сумма Q зарядов, попавших в область, ограниченную поверхностью S, деленная на размерную постоянную ε_0. В электростатике это соотношение обычно называется *законом Гаусса*. Используя закон Гаусса, найдите электрическое поле $\boldsymbol{E}$

a) создаваемое однородно заряженной сферой, и убедитесь, что вне сферы оно совпадает с полем точечного заряда той же величины, помещенного в центре сферы;

b) однородно заряженной прямой;

c) однородно заряженной плоскости;

d) пары параллельных и однородно заряженных зарядами противополож- ного знака плоскостей;

e) однородно заряженного шара.

6. a) Докажите формулу Грина (16).

b) Пусть f — *гармоническая* в ограниченной области V *функция* (т. е. f удовлетворяет в V уравнению Лапласа $\Delta f=0$). Покажите, исходя из равенства (17′), что поток градиента этой функции через границу области V равен нулю.

c) Проверьте, что гармоническая в ограниченной связной области функция определяется с точностью до аддитивной постоянной значениями своей нормальной производной на границе этой области.

d) Исходя из равенства (16′), докажите, что если гармоническая в ограниченной области функция на границе области всюду равна нулю, то она тождественно равна нулю во всей этой области.

e) Покажите, что если на границе ограниченной области значения двух гармонических в этой области функций совпадают, то эти функции совпадают во всей области.

f) Исходя из равенства (16), проверьте следующий принцип Дирихле: *среди всех непрерывно дифференцируемых в области функций, принимающих заданные зна-*

чения на границе области, наименьшее значение интегралу Дирихле (т. е. интегралу от квадрата модуля градиента функции по области) доставляет гармоническая в области функция и только она.

7. a) Пусть $r(p,q)=|p-q|$ — расстояние между точками p, q евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Фиксировав точку p, получим функцию $r_p(q)$ точки $q\in\mathbb{R}^3$. Покажите, что $\Delta r_p^{-1}(q)=4\pi\delta(p;q)$, где δ — дельта-функция.

b) Пусть g — гармоническая в области V функция. Полагая в формуле (17) $f=1/r_p$, с учетом предыдущего результата получаем

$$4\pi g(p)=\int\limits_S\left(g\nabla\frac{1}{r_p}-\frac{1}{r_p}\nabla g\right)\cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Докажите это равенство аккуратно.

c) Выведите из предыдущего равенства, что если S — сфера радиуса R с центром в точке p, то

$$g(p)=\frac{1}{4\pi R^2}\int\limits_S g\,d\sigma.$$

Это так называемая *теорема о среднем для гармонических функций*.

d) Исходя из предыдущего результата, покажите, что если B — шар, ограниченный рассмотренной там сферой S, а $V(B)$ — его объем, то справедливо также равенство

$$g(p)=\frac{1}{V(B)}\int\limits_B g\,dV.$$

e) Если p, q — точки евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, то вместо рассмотренной в a) функции $\dfrac{1}{r_p}$ (отвечающей потенциалу заряда, помещенного в точку p) возьмем теперь функцию $\ln\dfrac{1}{r_p}$ (отвечающую в пространстве потенциалу равномерно заряженной прямой). Покажите, что $\Delta\ln\dfrac{1}{r_p}=2\pi\delta(p;q)$, где $\delta(p;q)$ в данном случае есть дельта-функция в $\mathbb{R}^2$.

f) Повторив проведенные в a), b), c), d) рассуждения, получите теорему о среднем для функций, гармонических в плоских областях.

8. *Многомерная теорема Коши о среднем.*

Классическая теорема о среднем для интеграла («теорема Лагранжа») утверждает, что если функция $f\colon D\to\mathbb{R}$ непрерывна на компактном, измеримом и связном множестве $D\subset\mathbb{R}^n$ (например, в области), то найдется такая точка $\xi\in D$, что

$$\int\limits_D f(x)\,dx=f(\xi)\cdot|D|,$$

где $|D|$ — мера (объем) D.

a) Пусть теперь $f, g\in C(D,\mathbb{R})$, т. е. f, g — непрерывные вещественнозначные в D функции. Покажите, что верна следующая «теорема Коши»: найдется точка $\xi\in D$ такая, что

$$g(\xi)\int\limits_D f(x)\,dx=f(\xi)\int\limits_D g(x)\,dx.$$

b) Пусть D — компактная область с гладкой границей ∂D, а $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ — два гладких векторных поля в D. Покажите, что найдется такая точка $\xi\in D$, что

$$\operatorname{div}\boldsymbol{g}(\xi)\cdot\operatorname*{Flux}_{\partial D}\boldsymbol{f}=\operatorname{div}\boldsymbol{f}(\xi)\cdot\operatorname*{Flux}_{\partial D}\boldsymbol{g},$$

где $\operatorname*{Flux}_{\partial D}$ — поток векторного поля через поверхность ∂D.

§ 3. Потенциальные поля

1. Потенциал векторного поля

Определение 1. Пусть $\boldsymbol{A}$ — векторное поле в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Функция $U: D \to \mathbb{R}$ называется *потенциалом поля* $\boldsymbol{A}$ в области D, если в этой области $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} U$.

Определение 2. Поле, обладающее потенциалом, называется *потенциальным полем*.

Поскольку в связной области частные производные определяют функцию с точностью до константы, то в такой области потенциал поля определен с точностью до аддитивной постоянной.

В первой части курса мы уже вскользь говорили о потенциале. Здесь мы обсудим это важное понятие несколько подробнее. Отметим в связи с данными определениями, что в физике при рассмотрении разного рода силовых полей потенциалом поля $\boldsymbol{F}$ обычно называют такую функцию U, что $\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U$. Такой потенциал отличается от введенного определением 1 только знаком.

Пример 1. Напряженность $\boldsymbol{F}$ гравитационного поля, создаваемого помещенной в начало координат точечной массой M, в точке пространства, имеющей радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, вычисляется по закону Ньютона в виде

$$\boldsymbol{F} = -GM\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{1}$$

где $r = |\boldsymbol{r}|$.

Это сила, с которой поле действует на единичную массу в соответствующей точке пространства. Гравитационное поле (1) потенциально. Его потенциалом в смысле определения 1 является функция

$$U = GM\frac{1}{r}. \tag{2}$$

Пример 2. Напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля точечного заряда q, помещенного в начало координат, в точке пространства, имеющей радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, вычисляется по закону Кулона

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Таким образом, такое электростатическое поле, как и гравитационное поле, потенциально. Его потенциал φ, в смысле физической терминологии, определяется соотношением

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

2. Необходимое условие потенциальности. На языке дифференциальных форм равенство $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} U$ означает, что $\omega_{\boldsymbol{A}}^1 = d\omega_U^0 = dU$, откуда вытека-

ет, что

$$d\omega_A^1 = 0, \tag{3}$$

поскольку $d^2\omega_U^0 = 0$. Это необходимое условие потенциальности поля $\boldsymbol{A}$.

В декартовых координатах оно имеет совсем простое выражение. Если $\boldsymbol{A} = (A^1, \ldots, A^n)$ и $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} U$, то в декартовых координатах $A^i = \frac{\partial U}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, и при достаточной гладкости потенциала U (например, непрерывность вторых частных производных) должно быть

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^j} = \frac{\partial A^j}{\partial x^i}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{3$'$}$$

что попросту означает равенство смешанных производных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^i\,\partial x^j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^j\,\partial x^i}.$$

В декартовых координатах $\omega_A^1 = \sum\limits_{i=1}^{n} A^i\,dx^i$, поэтому равенство (3) и соотношения (3$'$) действительно в этом случае равносильны.

В случае $\mathbb{R}^3$ по определению ротора $d\omega_A^1 = \omega_{\operatorname{rot} A}^2$, поэтому необходимое условие (3) потенциальности поля $\boldsymbol{A}$ для $\mathbb{R}^3$ можно переписать в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0,$$

что соответствует уже знакомому нам соотношению $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$.

Пример 3. Заданное в декартовых координатах пространства $\mathbb{R}^3$ поле $\boldsymbol{A} = (x, xy, xyz)$ не может иметь потенциал, так как, например, $\frac{\partial(xy)}{\partial x} \neq \frac{\partial x}{\partial y}$.

Пример 4. Рассмотрим поле $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y)$ вида

$$\boldsymbol{A} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \tag{4}$$

заданное в декартовых координатах во всех точках плоскости, кроме начала координат. Необходимое условие потенциальности $\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}$ здесь выполнено. Однако, как мы сейчас убедимся, это поле не потенциально в области своего определения.

Таким образом, необходимое условие (3) или, в декартовых координатах, условия (3$'$), вообще говоря, не являются достаточными для потенциальности поля.

3. Критерий потенциальности векторного поля

Утверждение 1. *Непрерывное в области $D \subset \mathbb{R}^n$ векторное поле $\boldsymbol{A}$ потенциально в D тогда и только тогда, когда его циркуляция (работа) на любом лежащем в D замкнутом пути γ равна нулю:*

$$\oint\limits_{\gamma} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = 0. \tag{5}$$

◄ *Необходимость.* Пусть $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} U$. Тогда по формуле Ньютона—Лейбница (§ 2, формула (3′))

$$\oint_\gamma \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)),$$

где $\gamma\colon [a, b] \to D$. Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, т. е. когда путь γ замкнутый, очевидно, правая, а вместе с ней и левая часть последнего равенства обращаются в нуль.

Достаточность. Пусть условие (5) выполнено. Тогда интеграл по любому (не обязательно замкнутому) пути в области D зависит только от его начала и конца, а в остальном от пути не зависит. Действительно, если γ_1 и γ_2 — два пути с общим началом и концом, то, пройдя сначала путь γ_1, а затем путь $-\gamma_2$, (т. е. γ_2 в обратном направлении), мы получим замкнутый путь γ, интеграл по которому, с одной стороны, в силу (5) равен нулю, а с другой стороны, есть разность интегралов по γ_1 и γ_2. Значит, эти интегралы действительно равны.

Фиксируем в D некоторую точку x_0 и положим теперь

$$U(x) = \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}, \tag{6}$$

где справа стоит интеграл по любому пути, идущему в области D из точки x_0 в точку $x \in D$. Проверим, что определенная так функция U является искомым потенциалом поля $\boldsymbol{A}$. Для удобства будем считать, что в $\mathbb{R}^n$ взята декартова система координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = A^1\,dx^1 + \ldots + A^n\,dx^n$. Если от точки x прямолинейно сместиться на вектор $h\boldsymbol{e}_i$, где $\boldsymbol{e}_i$ — орт соответствующей координатной оси, то при этом функция U получит приращение

$$U(x + h\boldsymbol{e}_i) - U(x) = \int_{x^i}^{x^i+h} A^i(x^1, \ldots, x^{i-1}, t, x^{i+1}, \ldots, x^n)\,dt,$$

равное интегралу от формы $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}$ по указанному пути перехода из x в $x + h\boldsymbol{e}_i$. Ввиду непрерывности поля $\boldsymbol{A}$ последнее равенство по теореме о среднем можно записать в виде

$$U(x + h\boldsymbol{e}_i) - U(x) = A^i(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i + \theta h, x^{i+1}, \ldots, x^n)h,$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Поделив это равенство на h и устремив h к нулю, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x^i}(x) = A^i(x),$$

т. е. действительно $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} U$. ►

Замечание 1. Как видно из доказательства, для потенциальности поля $\boldsymbol{A}$ достаточно, чтобы условие (5) выполнялось для гладких путей или, например, хотя бы для ломаных, звенья которых параллельны координатным осям.

Теперь вернемся к примеру 4. В свое время (см. пример 1 § 1 гл. VIII) мы подсчитали, что циркуляция поля (4) на окружности $x^2+y^2=1$, пробегаемой один раз против часовой стрелки, равна 2π ($\neq 0$).

Таким образом, на основании утверждения 1 можно заключить, что поле (4) не потенциально в рассматриваемой области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.

Но ведь, например,

$$\operatorname{grad} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

и, казалось бы, функция $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ является потенциалом поля (4). Что это — противоречие?! Противоречия пока нет, поскольку единственный правильный вывод, который следовало бы в этой ситуации сделать, состоит в том, что функция $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ не определена во всей области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. И это действительно так: возьмите, например, точки оси $0y$. Но тогда, скажете вы, можно рассмотреть функцию $\varphi(x, y)$ — полярный угол точки (x, y). Практически это та же функция $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, но $\varphi(x, y)$ определена и при $x=0$, лишь бы точка (x, y) не совпадала с началом координат. Всюду в области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$

$$d\varphi = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Однако и теперь противоречия никакого нет, хотя сейчас уже ситуация более деликатная. Обратите внимание на то, что φ на самом-то деле не является непрерывной однозначной функцией точки в нашей области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. При обходе точки вокруг начала координат против часовой стрелки ее полярный угол, непрерывно меняясь, увеличится на 2π, когда точка вернется в начальное положение. То есть мы приходим в исходную точку не с тем же, а с новым значением функции. Следовательно, либо надо отказаться от непрерывности φ в области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, либо надо отказаться от однозначности φ.

В малой окрестности (не содержащей начала координат) каждой точки области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ можно выделить непрерывную однозначную ветвь функции φ. Все такие ветви отличаются лишь на аддитивную постоянную, кратную 2π. Именно поэтому все они имеют одинаковый дифференциал и могут служить локальными потенциалами нашего поля (4). Тем не менее во всей области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ поле (4) потенциала не имеет.

Разобранная на примере 4 ситуация оказывается типичной в том смысле, что необходимое условие (3) или (3′) потенциальности поля $\boldsymbol{A}$ локально является и достаточным. Имеет место

Утверждение 2. *Если необходимое условие потенциальности поля выполняется в некотором шаре, то в этом шаре поле имеет потенциал.*

◄ Для наглядности сначала проведем доказательство в случае круга $D = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < r^2\}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. В точку (x, y) круга из начала координат можно прийти по двум различным двузвенным ломаным γ_1, γ_2,

звенья которых параллельны координатным осям (рис. 93). Поскольку D — выпуклая область, весь ограниченный этими ломаными прямоугольник I содержится в D.

По формуле Стокса с учетом условия (3) получаем

$$\int_{\partial I} \omega_A^1 = \int_I d\omega_A^1 = 0.$$

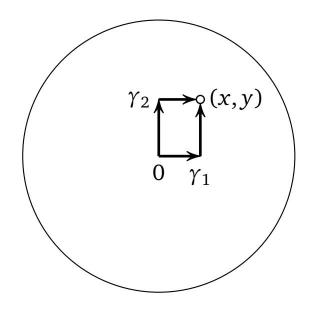


Рис. 93

На основе замечания к утверждению 1 отсюда уже можно сделать вывод о потенциальности поля $\boldsymbol{A}$ в D. Кроме того, на основе доказательства достаточности в утверждении 1 в качестве потенциала вновь можно взять функцию (6), понимая при этом интеграл как интеграл по пути, ведущему из центра в рассматриваемую точку вдоль ломаной, звенья которой параллельны координатным осям. В рассмотренном случае независимость такого интеграла от выбора пути γ_1, γ_2 непосредственно вытекала из формулы Стокса для прямоугольника.

В высших размерностях из формулы Стокса для двумерного прямоугольника следует, что замена двух соседних звеньев ломаного пути на два звена, составляющие параллельные исходным стороны соответствующего прямоугольника, не меняет интеграла по пути. Поскольку такими перестройками последовательно можно перейти от одного ломаного пути к любому другому, ведущему в ту же точку, то и в общем случае потенциал оказывается определенным корректно. ►

4. Топологическая структура области и потенциал. Сопоставляя пример 4 и утверждение 2, можно заключить, что при выполнении необходимого условия (3) потенциальности поля вопрос о том, всегда ли оно потенциально, связан с устройством (топологической структурой) области, в которой поле задано. Следующие рассмотрения (здесь и в п. 5) дают первоначальное представление о том, какие именно характеристики области отвечают за это.

Оказывается, если область D такова, что любой замкнутый путь, лежащий в D, можно, не выходя за пределы области D, стянуть в некоторую точку этой области, то в D необходимое условие (3) потенциальности поля уже будет и достаточным. Ниже мы назовем такие области односвязными. Шар — односвязная область (и потому имеет место утверждение 2), а вот плоскость с проколом $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ не является односвязной, так как охватывающий начало координат путь нельзя стянуть в точку этой же области, не выходя за ее пределы. Именно поэтому не всякое удовлетворяющее условиям (3′) поле в $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, как мы видели в примере 4, обязано быть потенциальным в области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.

Перейдем теперь от описаний к точным формулировкам. Прежде всего поясним, что мы имеем в виду, когда говорим о деформации или стягивании пути.

Определение 3. Говорят, что в области D имеется *гомотопия* (или *деформация*) *замкнутого пути* $\gamma_0\colon [0,1]\to D$ *в замкнутый путь* $\gamma_1\colon [0,1]\to\to D$, если указано такое непрерывное отображение $\Gamma\colon I^2\to D$ квадрата $I^2 = =\{(t^1,t^2)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant t^i\leqslant 1,\ i=1,2\}$ в область D, что $\Gamma(t^1,0)=\gamma_0(t^1)$, $\Gamma(t^1,1)= =\gamma_1(t^1)$ и $\Gamma(0,t^2)=\Gamma(1,t^2)$ при любых $t^1, t^2\in[0,1]$.

Таким образом, гомотопия и есть отображение $\Gamma\colon I^2\to D$ (рис. 94). Если переменную t^2 считать временем t, то согласно определению 3 в каждый момент времени $t=t^2$ мы имеем свой замкнутый путь $\Gamma(t^1,t)=\gamma_t$ (рис. 94)[1]. Изменение этого пути со временем таково, что в начальный момент $t=t^2= =0$ он совпадают с путем γ_0, а в момент $t=t^2=1$ он преобразуется в путь γ_1.

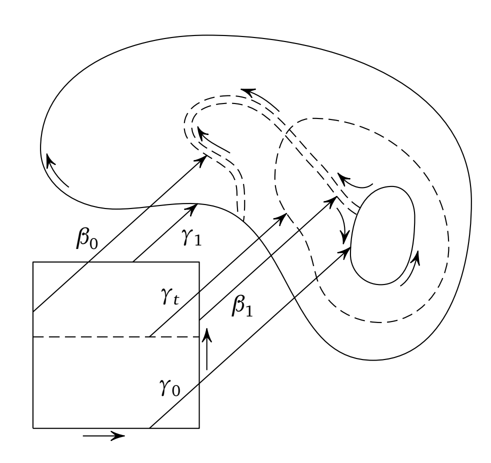


Рис. 94

Поскольку в любой момент $t\in[0,1]$ выполняются условия $\gamma_t(0) = =\Gamma(0,t)=\Gamma(1,t)=\gamma_t(1)$, означающие, что путь γ_t — замкнутый, отображение $\Gamma\colon I^2\to D$ индуцирует на боковых сторонах квадрата I^2 одинаковые отображения $\beta_0(t^1):=\Gamma(t^1,0)=\Gamma(t^1,1)=:\beta_1(t^1)$.

Отображение Γ является формализацией нашего представления о том, как постепенно путь γ_0 деформируется в путь γ_1. Изменение этого пути со временем таково, что в начальный момент $t^2=0$ он совпадает с путем γ_0, а в момент $t^2=1$ он преобразуется в путь γ_1.

Ясно, что время можно пустить в обратную сторону, и тогда мы из пути γ_1 получим путь γ_0.

---

[1]На рис. 94 вдоль некоторых кривых стоят ориентирующие их стрелки, которые будут использованы несколько позже и на которые читатель пока не должен обращать внимания.

Определение 4. Два замкнутых пути называются *гомотопными* в области, если их можно гомотопировать друг в друга в пределах этой области, т. е. построить в этой области гомотопию одного пути в другой.

Замечание 2. Поскольку пути, с которыми нам придется в анализе иметь дело, это, как правило, пути интегрирования, то без дополнительных оговорок мы будем рассматривать только гладкие или кусочно гладкие пути и их гладкие или кусочно гладкие гомотопии.

Для областей, лежащих в $\mathbb{R}^n$, можно проверить, что наличие непрерывной гомотопии (кусочно) гладких путей в них обеспечивает и наличие (кусочно) гладкой гомотопии этих же путей.

Утверждение 3. *Если 1-форма ω_A^1 в области D такова, что $d\omega_A^1 = 0$, а замкнутые пути γ_0 и γ_1 гомотопны в D, то*

$$\int_{\gamma_0} \omega_A^1 = \int_{\gamma_1} \omega_A^1.$$

◄ Пусть $\Gamma\colon I^2 \to D$ — гомотопия γ_0 в γ_1 (см. рис. 94). Если I_0, I_1 — основания квадрата I^2, а J_0, J_1 — его боковые стороны, то, по определению гомотопии замкнутых путей, ограничение Γ на I_0 и I_1 совпадает с γ_0 и γ_1 соответственно, а ограничение Γ на J_0 и J_1 дает некоторые пути β_0 и β_1 в D и, поскольку $\Gamma(0, t^2) = \Gamma(1, t^2)$, пути β_0 и β_1 просто совпадают. В результате замены переменных $x = \Gamma(t)$ форма ω_A^1 перенесется в квадрат I^2 в виде некоторой 1-формы $\omega = \Gamma^*\omega_A^1$. При этом $d\omega = d\Gamma^*\omega_A^1 = \Gamma^* d\omega_A^1 = 0$, так как $d\omega_A^1 = 0$. Значит, по формуле Стокса

$$\int_{\partial I^2} \omega = \int_{I^2} d\omega = 0.$$

Но

$$\int_{\partial I^2} \omega = \int_{I_0} \omega + \int_{J_1} \omega - \int_{I_1} \omega - \int_{J_0} \omega = \\ = \int_{\gamma_0} \omega_A^1 + \int_{\beta_1} \omega_A^1 - \int_{\gamma_1} \omega_A^1 - \int_{\beta_0} \omega_A^1 = \int_{\gamma_0} \omega_A^1 - \int_{\gamma_1} \omega_A^1. \text{ ►}$$

Определение 5. Область называется *односвязной*, если любой замкнутый путь в ней гомотопен точке (т. е. постоянному пути).

Итак, именно в односвязной области любой замкнутый путь можно стянуть в точку.

Утверждение 4. *Если заданное в односвязной области D поле $\boldsymbol{A}$ удовлетворяет необходимому условию* (3) *или* (3′) *потенциальности, то оно потенциально в D.*

◄ В силу утверждения 1 и замечания 1 к нему нам достаточно проверить, что равенство (5) имеет место для любого гладкого пути γ в области D. Путь γ по условию гомотопен постоянному пути, носитель которого состоит

из одной точки. Интеграл по такому одноточечному пути, очевидно, равен нулю. Но в силу утверждения 3 при гомотопии интеграл не меняется, значит, и для пути γ должно быть выполнено равенство (5). ►

Замечание 3. Утверждение 4 включает в себя утверждение 2. Однако, имея в виду некоторые приложения, мы сочли полезным дать независимое конструктивное доказательство утверждения 2.

Замечание 4. Утверждение 2 было доказано без ссылки на возможность гладкой гомотопии гладких путей.

5. Векторный потенциал. Точные и замкнутые формы

Определение 6. Поле $\boldsymbol{A}$ называется *векторным потенциалом поля* $\boldsymbol{B}$ в области $D \subset \mathbb{R}^3$, если в этой области выполняется соотношение $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$.

Если вспомнить связь между векторными полями и формами в евклидовом ориентированном пространстве $\mathbb{R}^3$, а также определение ротора векторного поля, то соотношение $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ можно переписать в виде $\omega^2_{\boldsymbol{B}} = d\omega^1_{\boldsymbol{A}}$. Отсюда следует, что $\omega^3_{\operatorname{div} \boldsymbol{B}} = d\omega^2_{\boldsymbol{B}} = d^2\omega^1_{\boldsymbol{A}} = 0$. Таким образом, мы получаем следующее необходимое условие

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{7}$$

которому в области D должно удовлетворять поле $\boldsymbol{B}$, чтобы оно могло иметь векторный потенциал, т. е. чтобы оно могло быть ротором некоторого векторного поля $\boldsymbol{A}$ в этой области.

Поле, удовлетворяющее условию (7), часто, особенно в физике, называют *соленоидальным полем*.

Пример 5. В § 1 мы выписали систему (12) уравнений Максвелла. Второе из уравнений этой системы как раз совпадает с равенством (7). Таким образом, естественно появляется желание считать магнитное поле $\boldsymbol{B}$ ротором некоторого векторного поля $\boldsymbol{A}$ — векторного потенциала поля $\boldsymbol{B}$. Именно к такому векторному потенциалу и переходят при решении системы уравнений Максвелла.

Как видно из определений 1 и 6, вопросы о скалярном и векторном потенциале векторных полей (последний вопрос при этом мы ставили только в $\mathbb{R}^3$) являются частными случаями общего вопроса о том, когда дифференциальная p-форма ω^p является дифференциалом $d\omega^{p-1}$ некоторой формы ω^{p-1}.

Определение 7. Дифференциальная форма ω^p называется *точной* в области D, если в этой области существует такая форма ω^{p-1}, что $\omega^p = d\omega^{p-1}$.

Если форма ω^p точна в D, то $d\omega^p = d^2\omega^{p-1} = 0$. Таким образом, условие

$$d\omega = 0 \tag{8}$$

является необходимым условием точности формы ω.

Как мы уже видели (пример 4), не всякая форма, удовлетворяющая этому условию, является точной, поэтому вводится

Определение 8. Дифференциальная форма ω называется *замкнутой* в области D, если в этой области она удовлетворяет условию (8).

Имеет место

Теорема (лемма Пуанкаре). *Если форма замкнута в шаре, то она и точна в нем.*

Здесь уже речь идет о шаре в $\mathbb{R}^n$ и о форме любого порядка, поэтому утверждение 2 является простейшим частным случаем этой теоремы.

Лемму Пуанкаре можно истолковать и так: необходимое условие (8) точности формы локально является и достаточным, т. е. для любой точки области, где выполнено условие (8), найдется такая ее окрестность, в которой форма ω точна.

В частности, если векторное поле $\boldsymbol{B}$ удовлетворяет условию (7), то из леммы Пуанкаре следует, что по крайней мере локально оно является ротором некоторого векторного поля $\boldsymbol{A}$.

Мы не останавливаемся здесь на доказательстве этой важной теоремы (желающие прочитают его в гл. XV), а предпочтем в заключение (опираясь на сведения об 1-формах) пояснить в общих чертах связь вопроса о точности замкнутых форм с топологией области их задания.

Пример 6. Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$ с двумя выколотыми точками p_1, p_2 (рис. 95) и изображенные на рисунке их носителями пути γ_0, γ_1 и γ_2. Путь γ_2 в пределах рассматриваемой области D можно стянуть в точку, поэтому если в D задана замкнутая форма ω, то интеграл от нее по γ_2 равен нулю. Путь γ_0 нельзя стянуть в точку, но, не меняя значения интеграла от формы ω, этот путь можно прогомотопировать в путь γ_1. Интеграл по пути γ_1, очевидно, сводится к интегралу по одному циклу, обходящему по часовой стрелке точку p_1, и удвоенному интегралу по циклу, обходящему точку p_2 против часовой стрелки. Если через T_1 и T_2 обозначить интегралы от нашей формы ω по малым окружностям, охватывающим соответственно точки p_1 и p_2 и проходимым, например, против часовой стрелки, то можно понять, что интеграл от формы ω по любому замкнутому пути в области D будет равен $n_1T_1+n_2T_2$, где n_1 и n_2 — некоторые целые числа, указывающие, сколько раз и в каком направлении мы обошли каждую из дырок p_1, p_2 плоскости $\mathbb{R}^2$.

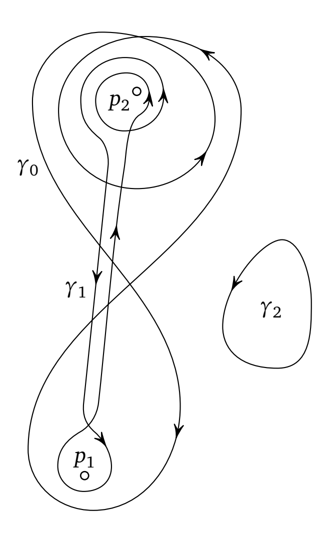


Рис. 95

Окружности c_1, c_2, зацепляющие p_1 и p_2, служат как бы базисом, в котором любой замкнутый путь $\gamma \subset D$, с точностью до не влияющей на интеграл гомотопии, имеет вид $\gamma = n_1c_1 + n_2c_2$. Величины $\int\limits_{c_i} \omega = T_i$ называют *циклическими постоянными* или *периодами интеграла*. Если область более сложная и в ней имеется k штук независимых простейших циклов, то в соответствии

с разложением $\gamma = n_1 c_1 + \ldots + n_k c_k$ получится, что

$$\int_\gamma \omega = n_1 T_1 + \ldots + n_k T_k.$$

Оказывается, для любого набора $T_1, \ldots, T_k$ чисел в такой области можно построить замкнутую 1-форму, которая будет иметь именно такой набор периодов (это частный случай теоремы Де Рама; см. гл. XV).

Для наглядности мы обратились к рассмотрению плоской области, но все сказанное можно повторить и для любой области $D \subset \mathbb{R}^n$.

Пример 7. В полнотории (области, ограниченной в $\mathbb{R}^3$ тором) все замкнутые пути, очевидно, гомотопны сколько-то раз пробегаемой окружности, охватывающей дырку. Эта окружность и составит здесь единственный не точечный базисный цикл c.

Более того, все сказанное можно повторить и для путей высших размерностей. Если вместо одномерных замкнутых путей — отображений окружности или, что то же самое, отображений одномерной сферы, брать отображения k-мерной сферы, ввести для них понятие гомотопии и смотреть, сколько таких негомотопных между собой отображений k-мерной сферы в данную область $D \subset \mathbb{R}^n$ существует, то получится некоторая характеристика области D, которая в топологии оформляется в так называемую k-ю гомотопическую группу области D и обозначается $\pi_k(D)$. Если все отображения k-мерной сферы в D гомотопны постоянному отображению, то считается, что группа $\pi_k(D)$ тривиальна (состоит только из одного элемента). Может так случиться, что $\pi_1(D)$ тривиальна, а $\pi_2(D)$ не тривиальна.

Пример 8. Если в качестве D взять пространство $\mathbb{R}^3$ с выброшенной из него точкой 0, то, очевидно, любой замкнутый путь в такой области стягивается в точку, а сферу, охватывающую выброшенную из $\mathbb{R}^3$ точку 0, нельзя в пределах этой области прогомотопировать в точку.

Оказывается, за периоды замкнутой k-формы ответственна не совсем гомотопическая группа $\pi_k(D)$, а так называемая *группа гомологий* $H_k(D)$ (см. гл. XV).

Пример 9. Из сказанного можно заключить, что, например, в области $D = \mathbb{R}^3 \setminus 0$ всякая замкнутая 1-форма точна ($\mathbb{R}^3 \setminus 0$ — односвязная область), но не всякая замкнутая 2-форма является точной. На языке векторных полей это означает, что любое безвихревое поле $\boldsymbol{A}$ в $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ является градиентом некоторой функции, но не всякое поле $\boldsymbol{B}$ без источников ($\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$) является в этой области ротором некоторого поля.

Пример 10. В противовес примеру 9 возьмем в качестве области D полноторие. Для полнотория группа $\pi_1(D)$ не тривиальна (см. пример 7), а $\pi_2(D)$ тривиальна, поскольку любое отображение $f: S^2 \to D$ двумерной сферы в D в пределах D стягивается в постоянное (образ сферы стягивается в точку). В этой области не всякое безвихревое поле потенциально, но всякое поле без источников является ротором некоторого поля.

Задачи и упражнения

1. Покажите, что любое центральное поле $\boldsymbol{A} = f(r)\boldsymbol{r}$ потенциально.

2. Пусть $\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U$ — потенциальное силовое поле.

Покажите, что положения устойчивого равновесия частицы в таком поле находятся в точках минимума потенциала U этого поля.

3. Для электростатического поля $\boldsymbol{E}$ система уравнений Максвелла (§ 1, (12)), как уже отмечалось, сводится к паре уравнений $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$.

Условие $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$, по крайней мере локально, подразумевает, что $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi$. Поле точечного заряда потенциально, а поскольку любое электростатическое поле есть сумма (или интеграл) таких полей, то оно тоже всегда потенциально. Подставляя $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ в первое из уравнений электростатического поля, получим, что его потенциал φ удовлетворяет *уравнению Пуассона*[1] $\Delta\varphi = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$. Потенциал φ полностью определяет поле $\boldsymbol{E}$, поэтому описание поля $\boldsymbol{E}$ сводится к отысканию функции φ — решения уравнения Пуассона.

Зная потенциал точечного заряда (пример 2), решите следующую задачу.

a) Два заряда $-q$, $+q$ находятся в точках $(0, 0, -d/2)$, $(0, 0, d/2)$ пространства $\mathbb{R}^3$, наделенного декартовыми координатами (x, y, z). Покажите, что на большом по сравнению с величиной d удалении от этих зарядов потенциал создаваемого ими электростатического поля имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}qd + o\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

где r — модуль радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ точки (x, y, z).

b) Удаление от зарядов на большое расстояние равносильно сближению зарядов, т. е. уменьшению величины d. Если теперь величину $qd =: p$ фиксировать и уменьшать d, то в пределе в области $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ получится функция $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{z}{r^3}p$. Удобно ввести вектор $\boldsymbol{p}$, равный по величине p и направленный от $-q$ к $+q$. Пару зарядов $-q$, $+q$ и получаемую описанным предельным переходом конструкцию называют *диполем*, а вектор $\boldsymbol{p}$ — *дипольным моментом*. Полученная в пределе функция φ называется *потенциалом диполя*. Найдите асимптотику потенциала диполя при уходе от диполя по лучу, составляющему угол θ с направлением дипольного момента.

c) Пусть φ_0 — потенциал единичного точечного заряда, а φ_1 — потенциал диполя, имеющего дипольный момент $\boldsymbol{p}_1$. Покажите, что $\varphi_1 = -(\boldsymbol{p}_1 \cdot \nabla)\varphi_0$.

d) Конструкцию с предельным переходом, которую мы провели для пары зарядов при получении диполя, можно повторить для четверки зарядов (точнее, для двух диполей с дипольными моментами $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$) и получить *квадруполь* и соответствующий ему потенциал. В общем случае можно получить *мультиполь порядка* j с потенциалом $\varphi_j = (-1)^j(\boldsymbol{p}_j \cdot \nabla)(\boldsymbol{p}_{j-1} \cdot \nabla)\ldots(\boldsymbol{p}_1 \cdot \nabla)\varphi_0 = \sum\limits_{i+k+l=j} Q^j_{ikl}\dfrac{\partial^j \varphi_0}{\partial x^i \partial y^k \partial z^l}$, где Q^j_{ikl} — так называемые *компоненты момента мультиполя*. Проведите выкладки и проверьте формулу для потенциала мультиполя в случае квадруполя.

[1] С. Д. Пуассон (1781—1840) — французский механик, математик и физик; основные работы по теоретической и небесной механике, математической физике и теории вероятностей. Уравнение Пуассона появилось в его исследованиях гравитационного потенциала и притяжения сфероидами.

e) Покажите, что главный член асимптотики потенциала скопления зарядов при удалении от этого скопления равен $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$, где Q — суммарный заряд скопления.

f) Покажите, что главный член асимптотики потенциала электрически нейтрального тела, состоящего из зарядов противоположного знака (например, молекула), на большом по сравнению с размерами тела расстоянии от него равен $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2}$. Здесь $\boldsymbol{e}_r$ — единичный вектор, направленный из тела на наблюдателя; $\boldsymbol{p}=\sum q_i\boldsymbol{d}_i$, где q_i — величина i-го заряда, а $\boldsymbol{d}_i$ — его радиус-вектор; начало координат выбрано в одной из точек тела.

g) Потенциал любого скопления зарядов на большом расстоянии от скопления раскладывается (в смысле асимптотики) по функциям типа потенциалов мультиполей. Покажите это на примере первых двух членов такого потенциала (см. d), e) и f)).

4. Проверьте, односвязны ли следующие области:

a) круг $\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$;

b) круг с выколотым центром $\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x^2+y^2<1\}$;

c) шар с выколотым центром $\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0<x^2+y^2+z^2<1\}$;

d) кольцо $\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1/2<x^2+y^2<1\}$;

e) шаровое кольцо $\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1/2<x^2+y^2+z^2<1\}$;

f) полнoторие в $\mathbb{R}^3$.

5. a) Дайте определение гомотопии пути с закрепленными концами.

b) Докажите, что область односвязна тогда и только тогда, когда любые два пути в ней, имеющие общее начало и общий конец, гомотопны в смысле определения a).

6. Покажите, что:

a) любое непрерывное отображение $f: S^1\to S^2$ окружности S^1 (одномерной сферы) в двумерную сферу S^2 стягивается по S^2 в точку (в постоянное отображение);

b) любое непрерывное отображение $f: S^2\to S^1$ тоже гомотопно отображению в одну точку;

c) любое отображение $f: S^1\to S^1$ гомотопно при некотором $n\in\mathbb{Z}$ отображению $\varphi\mapsto n\varphi$, где φ — полярный угол точки окружности;

d) любое отображение сферы S^2 в полноторие гомотопно отображению в одну точку;

e) любое отображение окружности S^1 в полноторие гомотопно при некотором $n\in\mathbb{Z}$ замкнутому пути, пробегающему n раз окружность, охватывающую дырку полнотория.

7. В области $\mathbb{R}^3\setminus 0$ (пространство с выброшенной точкой 0) постройте:

a) замкнутую, но не точную 2-форму;

b) векторное поле без источников, которое не является ротором какого-либо векторного поля в этой области.

8. a) Могут ли в области $D=\mathbb{R}^n\setminus 0$ (пространство $\mathbb{R}^n$ с выброшенной точкой 0) быть замкнутые, но не точные формы степени $p<n-1$?

b) Постройте в области $D=\mathbb{R}^n\setminus 0$ замкнутую, но не точную форму степени $p=n-1$.

9. Если 1-форма ω замкнута в области $D\subset\mathbb{R}^n$, то в силу утверждения 2 любая точка $x\in D$ имеет окрестность $U(x)$, в пределах которой форма ω точна. Далее ω — замкнутая форма.

a) Покажите, что если два пути $\gamma_i: [0, 1]\to D$, $i=1, 2$, имеют одинаковые начала и концы и отличаются лишь на промежутке $[\alpha, \beta]\subset[0, 1]$, образ которого при

каждом из отображений γ_i лежит в пределах одной и той же окрестности $U(x)$, то $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$.

b) Покажите, что для любого пути $[0, 1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in D$ можно указать такое число $\delta > 0$, что если путь $\widetilde{\gamma}$ имеет те же начало и конец, что и путь γ, и уклоняется от γ не больше чем на δ, т. е. $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\widetilde{\gamma}(t) - \gamma(t)| \leqslant \delta$, то $\int\limits_{\widetilde{\gamma}} \omega = \int\limits_{\gamma} \omega$.

c) Покажите, что если два пути γ_1, γ_2 с общими началом и концом гомотопны в области D как пути с закрепленными концами, то для замкнутой в D формы ω имеет место равенство $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$.

10. a) Позднее будет доказано, что любое непрерывное отображение $\Gamma\colon I^2 \to D$ квадрата I^2 можно сколь угодно точно равномерно аппроксимировать гладким отображением (даже с полиномиальными компонентами). Выведите отсюда, что если пути γ_1, γ_2 в области D гомотопны, то при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такие гладко гомотопные между собой пути $\widetilde{\gamma}_1$, $\widetilde{\gamma}_2$, что $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |\widetilde{\gamma}_i(t) - \gamma_i(t)| \leqslant \varepsilon$, $i = 1, 2$.

b) Используя результаты задачи 9, покажите теперь, что если интегралы по гладко гомотопным путям от замкнутой в области D формы равны между собой, то они равны и для любых гомотопных в этой области путей (без предположения о гладкости этой гомотопии). Сами пути, разумеется, предполагаются настолько регулярными, насколько это нужно для интегрирования по ним.

11. a) Покажите, что если формы ω^p, ω^{p-1}, $\widetilde{\omega}^{p-1}$ таковы, что $\omega^p = d\omega^{p-1} = d\widetilde{\omega}^{p-1}$, то (по крайней мере локально) можно указать форму ω^{p-2} такую, что $\widetilde{\omega}^{p-1} = \omega^{p-1} + d\omega^{p-2}$. (То, что любые две формы, отличающиеся на дифференциал некоторой формы, имеют одинаковый дифференциал, очевидно, вытекает из равенства $d^2\omega = 0$.)

b) Покажите, что потенциал φ электростатического поля (задача 3) определяется с точностью до аддитивной постоянной, которая фиксируется, если потребовать, чтобы на бесконечности потенциал стремился к нулю.

12. Из системы уравнений Максвелла (§ 1, (12)) получается следующая пара уравнений магнитостатики: $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, $\nabla \times \boldsymbol{B} = -\dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2}$. Первое из этих уравнений показывает, что, по крайней мере локально, поле $\boldsymbol{B}$ имеет векторный потенциал $\boldsymbol{A}$, т. е. $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.

a) Опишите произвол в выборе потенциала $\boldsymbol{A}$ магнитного поля $\boldsymbol{B}$ (см. задачу 11 a)).

b) Пусть x, y, z — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$. Найдите потенциал $\boldsymbol{A}$ однородного магнитного поля $\boldsymbol{B}$, направленного вдоль оси $0z$, при соблюдении каждого (в отдельности) из следующих дополнительных требований: поле $\boldsymbol{A}$ должно иметь вид $(0, A_y, 0)$; поле $\boldsymbol{A}$ должно иметь вид $(A_x, 0, 0)$; поле $\boldsymbol{A}$ должно иметь вид $(A_x, A_y, 0)$; поле $\boldsymbol{A}$ должно быть инвариантно относительно поворотов вокруг оси $0z$.

c) Покажите, что выбор потенциала $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющего дополнительному требованию $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, сводится к решению уравнения Пуассона, точнее к отысканию скалярной функции ψ, которая при заданной скалярной функции f удовлетворяет уравнению $\Delta\psi = f$.

d) Покажите, что если потенциал $\boldsymbol{A}$ статического магнитного поля $\boldsymbol{B}$ выбрать так, что $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, то он будет удовлетворять следующему векторному уравнению Пуассона: $\Delta \boldsymbol{A} = -\dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0 c^2}$. Таким образом, привлечение потенциалов позволяет свести отыскание электростатических (задача 3) и магнитостатических полей к решению уравнения Пуассона.

13. Известна следующая теорема Гельмгольца[1]: *любое гладкое в области D евклидова ориентированного пространства $\mathbb{R}^3$ поле $\boldsymbol{F}$ можно разложить в сумму $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ безвихревого поля $\boldsymbol{F}_1$ и соленоидального поля $\boldsymbol{F}_2$.* Покажите, что построение такого разложения можно свести к решению некоторого уравнения Пуассона.

14. Пусть данная масса некоторого вещества переходит из состояния, характеризуемого термодинамическими параметрами $V_0, P_0, (T_0)$, в состояние $V, P, (T)$. Предположим, что процесс протекает медленно (квазистатически) и идет по пути γ плоскости состояний (с координатами V, P). В термодинамике доказывается, что величина $S = \int\limits_\gamma \frac{\delta Q}{T}$, где δQ — форма теплообмена, зависит только от начала (V_0, P_0) и конца (V, P) пути, т. е. после фиксирования одной из этих точек, например (V_0, P_0), S становится функцией состояния (V, P) рассматриваемой системы. Эта функция называется *энтропией* системы.

a) Выведите отсюда, что форма $\omega = \frac{\delta Q}{T}$ является точной, причем $\omega = dS$.

b) Используя указанный в задаче 6 § 1 гл. XIII вид формы δQ для идеального газа, найдите энтропию идеального газа.

§ 4. Примеры приложений

Чтобы показать введенные выше понятия в работе, а также пояснить физический смысл формулы Гаусса—Остроградского—Стокса как закона сохранения, мы рассмотрим здесь в качестве иллюстрации вывод некоторых важных уравнений математической физики.

1. Уравнение теплопроводности. Изучается скалярное поле $T = T(x, y, z, t)$ температуры наблюдаемого тела как функция точки (x, y, z) тела и времени t. В результате теплообмена между различными частями тела поле T может как-то меняться. Однако это изменение не произвольно, а подчинено определенному закону, который мы и хотим в явном виде выписать.

Пусть D — некоторая объемная часть наблюдаемого тела, ограниченная поверхностью S. Если в D нет источников тепла, то изменение внутренней энергии содержащегося в D вещества может происходить только в результате теплообмена, т. е. в данном случае путем переноса энергии через границу S области D.

Подсчитав отдельно изменение внутренней энергии в объеме D и поток энергии через поверхность S, мы на основе закона сохранения энергии приравняем эти величины и получим нужное соотношение.

Известно, что для увеличения на ΔT температуры однородной массы m требуется тепловая энергия в количестве $cm\Delta T$, где c — удельная теплоемкость рассматриваемого вещества. Значит, если за промежуток времени Δt

[1] Г. Л. Ф. Гельмгольц (1821—1894) — немецкий физик и математик, один из первооткрывателей общего закона сохранения энергии. Кстати, именно он впервые четко разделил понятия силы и энергии.

наше поле T изменилось на величину $\Delta T = T(x, y, z, t + \Delta t) - T(x, y, z, t)$, то внутренняя энергия в области D изменилась на величину

$$\iiint\limits_D c\rho \Delta T \, dV, \tag{1}$$

где $\rho = \rho(x, y, z)$ — плотность вещества.

Из эксперимента известно, что в достаточно большом диапазоне изменения температур количество тепла, протекающее в результате теплообмена через выделенную в теле площадку $d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n}\, d\sigma$ за единицу времени, пропорционально потоку $-\operatorname{grad} T \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ поля $-\operatorname{grad} T$ через эту площадку (grad берется по пространственным переменным x, y, z). Коэффициент k пропорциональности зависит от вещества и называется его *коэффициентом теплопроводности*. Знак минус перед $\operatorname{grad} T$ отвечает тому, что энергия переходит от более нагретых частей тела к менее нагретым. Таким образом, за промежуток времени Δt через границу S области D в сторону внешней нормали пройдет следующая энергия (с точностью до $o(\Delta t)$):

$$\Delta t \iint\limits_S -k \operatorname{grad} T \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{2}$$

Приравнивая величину (1) ко взятой с противоположным знаком величине (2) после деления на Δt и перехода к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем

$$\iiint\limits_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \, dV = \iint\limits_S k \operatorname{grad} T \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{3}$$

Это равенство и является уравнением на функцию T. Считая T достаточно гладкой, преобразуем равенство (3), используя формулу Гаусса—Остроградского:

$$\iiint\limits_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \, dV = \iiint\limits_D \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) \, dV.$$

Отсюда ввиду произвольности области D, очевидно, следует, что

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T). \tag{4}$$

Мы получили дифференциальный вариант интегрального равенства (3).

Если бы в области D были источники (или стоки) тепла, интенсивность которых имела бы плотность $F(x, y, z, t)$, то вместо равенства (3) мы должны были бы написать равенство

$$\iiint\limits_D c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \, dV = \iint\limits_S k \operatorname{grad} T \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \iiint\limits_D F \, dV, \tag{3$'$}$$

и тогда вместо (4) мы получили бы уравнение

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + F. \tag{4$'$}$$

Если тело считать изотропным и однородным в смысле его теплопроводности, то коэффициент k будет постоянной и уравнение (4) преобразуется к следующему каноническому виду:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f, \tag{5}$$

где $f = \frac{F}{c\rho}$, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ — *коэффициент температуропроводности*. Уравнение (5) называется обычно *уравнением теплопроводности*.

В случае установившегося режима теплообмена, когда поле T не зависит от времени, это уравнение превращается в *уравнение Пуассона*

$$\Delta T = \varphi, \tag{6}$$

где $\varphi = -\frac{1}{a^2} f$, а если еще и тепловых источников в теле не было, то получается *уравнение Лапласа*

$$\Delta T = 0. \tag{7}$$

Решения уравнения Лапласа, как уже отмечалось, называют *гармоническими функциями*. В теплофизической интерпретации гармонические функции отвечают установившимся температурным полям в телах, тепловые потоки в которых идут без стоков и источников в самих телах, т. е. источники тепла находятся вне тела. Например, если на границе ∂V тела V поддерживать заданный тепловой режим $T|_{\partial V} = \tau$, то со временем температурное поле в теле V стабилизируется в виде некоторой гармонической функции T. Такая интерпретация решений уравнения Лапласа (7) позволяет предугадать ряд свойств гармонических функций. Например, надо полагать, что гармоническая в области V функция не может иметь внутри этой области локальных максимумов, иначе бы из этих более нагретых участков тепло только утекало и они бы охлаждались вопреки предположению о том, что поле стационарно.

2. Уравнение неразрывности. Пусть $\rho = \rho(x, y, z, t)$ — плотность некоторой материальной среды, заполняющей наблюдаемое пространство, а $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ — поле скоростей движения среды как функция точки (x, y, z) пространства и времени t.

Исходя из закона сохранения количества вещества, пользуясь формулой Гаусса—Остроградского, укажем взаимосвязь этих величин.

Пусть D — область в наблюдаемом пространстве, ограниченная поверхностью S. За промежуток времени Δt количество вещества в области D изменяется на величину

$$\iiint\limits_D (\rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t))\, dV.$$

За малый промежуток времени Δt поток вещества через поверхность S в

сторону внешней нормали к S равен (с точностью до $o(\Delta t)$) величине

$$\Delta t \cdot \iint\limits_S \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Если в области D не было источников и стоков, то в силу закона сохранения количества вещества

$$\iiint\limits_D \Delta\rho \, dV = -\Delta t \iint\limits_S \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

или в пределе при $\Delta t \to 0$

$$\iiint\limits_D \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = -\iint\limits_S \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Применяя к правой части этого равенства формулу Гаусса—Остроградского и учитывая, что D — произвольная область, заключаем, что для достаточно гладких функций ρ, $\boldsymbol{v}$ должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}), \tag{8}$$

называемое *уравнением неразрывности* сплошной среды.

В векторных обозначениях уравнение неразрывности запишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{8$'$}$$

или, в более развернутом виде,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{8$''$}$$

Если среда несжимаема (жидкость), то объемный расход среды через замкнутую поверхность S должен быть нулевым:

$$\iint\limits_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0,$$

откуда (на основании той же формулы Гаусса—Остроградского) следует, что для несжимаемой среды

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{9}$$

Значит, для несжимаемой среды переменной плотности (вода и масло) уравнение (8$''$) приводится к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho = 0. \tag{10}$$

Если среда еще и однородна, то $\nabla \rho = 0$, и потому $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

3. Основные уравнения динамики сплошной среды. Выведем теперь уравнения динамики движущейся в пространстве сплошной среды. Наряду с уже рассмотренными выше функциями ρ, $\boldsymbol{v}$, которые и здесь будут обозначать плотность и скорость среды в данной точке (x, y, z) пространства в момент времени t, рассмотрим давление $p = p(x, y, z, t)$ как функцию точки пространства и времени.

Выделим в пространстве, занятом средой, область D, ограниченную поверхностью S, и рассмотрим силы, действующие на выделенный объем среды в фиксированный момент времени.

На каждый элемент $\rho\, dV$ массы среды могут действовать некоторые силовые поля (например, гравитационное). Эти поля создают так называемые *массовые силы*. Пусть $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z, t)$ — плотность создаваемых внешними полями массовых сил. Тогда со стороны таких полей на элемент массы $\rho\, dV$ действует сила $\boldsymbol{F}\rho\, dV$. Если указанный элемент в рассматриваемый момент времени имеет ускорение $\boldsymbol{a}$, то по закону Ньютона это эквивалентно наличию еще массовой силы инерции, равной $-\boldsymbol{a}\rho\, dV$.

Наконец, на каждый элемент $d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{n}\, d\sigma$ поверхности S со стороны частиц среды, соседних с попавшими в D, действует поверхностная сила $-p\, d\boldsymbol{\sigma}$, вызванная давлением (здесь $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к S).

По принципу Даламбера в каждый момент движения любой материальной системы все силы, приложенные к ней, включая и силы инерции, взаимно уравновешиваются, т. е. их равнодействующая должна быть равна нулю. В нашем случае это означает, что

$$\iiint\limits_D (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{a})\rho\, dV - \iint\limits_S p\, d\boldsymbol{\sigma} = 0. \tag{11}$$

Первый член этой суммы есть равнодействующая массовых сил и сил инерции, а второй дает равнодействующую давления на поверхность S, ограничивающую рассматриваемый объем. Мы для простоты считаем, что имеем дело с идеальной (не вязкой) жидкостью или газом, в которых давление на площадку $d\boldsymbol{\sigma}$ имеет вид $p\, d\boldsymbol{\sigma}$, где число p не зависит от ориентации площадки в пространстве.

Применяя формулу (10) из § 2, на основании равенства (11) получаем

$$\iiint\limits_D (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{a})\rho\, dV - \iiint\limits_D \operatorname{grad} p\, dV = 0,$$

откуда ввиду произвольности области D, очевидно, следует, что

$$\rho\boldsymbol{a} = \rho\boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p. \tag{12}$$

В таком локальном виде уравнение движения среды вполне соответствует уравнению Ньютона движения материальной частицы.

Ускорение $\boldsymbol{a}$ частицы среды есть производная $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ от скорости $\boldsymbol{v}$ этой частицы. Если $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — закон движения частицы в простран-

стве, а $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ — поле скоростей среды, то для любой индивидуальной частицы получаем

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

или

$$\boldsymbol{a}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}.$$

Таким образом, уравнение движения (12) приобретает следующую форму:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \tag{13}$$

или

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{14}$$

Уравнение (14) обычно называют *гидродинамическим уравнением Эйлера*.

Векторное уравнение (14) равносильно системе трех скалярных уравнений на три компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ и еще на пару функций ρ, p.

Таким образом, уравнение Эйлера еще не вполне определяет движение идеальной сплошной среды. К нему, правда, естественно добавить уравнение неразрывности (8), но и тогда система еще будет недоопределена.

Чтобы движение среды стало определенным, к уравнениям (8) и (14) следует добавить еще информацию о термодинамическом состоянии среды (например, уравнение состояния $f(p, \rho, T)=0$ и уравнение на теплообмен). Представление о том, что могут дать эти соотношения, читатель получит из следующего заключительного пункта этого параграфа.

4. Волновое уравнение. Рассмотрим теперь движение среды, соответствующее распространению в ней звуковой волны. Ясно, что такое движение тоже подчиняется уравнению (14), но благодаря специфике явления это уравнение в данном случае можно упростить.

Звук есть чередующиеся состояния разрежения и уплотнения среды, причем отклонения давления от его среднего значения в звуковой волне очень малы — порядка 1 %. Поэтому звуковое движение состоит в малых отклонениях элементов объема среды от положения равновесия, совершаемых с малыми скоростями. Однако скорость распространения возбуждения (волны) по среде соизмерима со средней скоростью движения молекул среды и обычно значительно превышает скорость теплообмена между различными частями рассматриваемой среды. Таким образом, звуковое движение объема газа можно рассматривать как малые колебания около положения равновесия, совершаемые без теплообмена (адиабатический процесс).

Ввиду малости самих макроскопических скоростей $\boldsymbol{v}$, пренебрегая в уравнении движения (14) членом $(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$, получаем равенство

$$\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p.$$

Если по той же причине пренебречь членом вида $\frac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{v}$, то последнее равенство приводится к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v}) = \rho\boldsymbol{F} - \nabla p.$$

Применив к нему оператор ∇ (по координатам x, y, z), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}) = \nabla\cdot\rho\boldsymbol{F} - \Delta p.$$

Используя уравнение неразрывности (8′) и введя обозначение $\nabla\cdot\rho\boldsymbol{F} = -\varphi$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \varphi + \Delta p. \tag{15}$$

Если влиянием внешних полей можно пренебречь, то уравнение (15) сводится к соотношению

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \Delta p \tag{16}$$

между плотностью и давлением в звучащей среде. Поскольку процесс адиабатический, уравнение состояния $f(p,\rho,T)=0$ сводится к некоторому соотношению $\rho=\psi(p)$, из которого следует, что

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = \psi'(p)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \psi''(p)\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2.$$

Ввиду малости колебания давления в звуковой волне можно считать, что $\psi'(p)\equiv\psi'(p_0)$, где p_0 — равновесное давление. Тогда $\psi''=0$ и $\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\approx\psi'(p)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$. Учитывая это, из (16) получаем окончательно

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2\Delta p, \tag{17}$$

где $a=(\psi'(p_0))^{-1/2}$. Это уравнение описывает изменение давления в среде, находящейся в состоянии звукового движения. Уравнение (17) описывает простейший волновой процесс в сплошной среде. Оно называется *однородным волновым уравнением*. Величина a имеет простой физический смысл: это скорость распространения звукового возбуждения в данной среде, т. е. скорость звука в ней (см. задачу 4).

В случае вынужденных колебаний, когда на каждый элемент объема среды действуют некоторые силы, объемная плотность распределения которых задана, уравнение (17) заменяется соответствующим уравнению (15) соотношением

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2\Delta p + f, \tag{18}$$

которое при $f\not\equiv 0$ называют *неоднородным волновым уравнением*.

Задачи и упражнения

1. Пусть поле скоростей $\boldsymbol{v}$ движущейся сплошной среды потенциально. Покажите, что если среда несжимаема, то потенциал φ поля $\boldsymbol{v}$ является гармонической функцией, т. е. $\Delta\varphi = 0$ (см. (9)).

2. a) Покажите, что уравнение Эйлера (14) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\Big(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\Big) - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$$

(см. задачу 1 к § 1).

b) Проверьте, исходя из полученного в a) уравнения, что безвихревое течение ($\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$) однородной несжимаемой жидкости возможно только в потенциальном поле $\boldsymbol{F}$.

c) Оказывается (теорема Лагранжа), если в какой-то момент течение в потенциальном поле $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U$ было безвихревым, то оно было и будет безвихревым всегда. Такое течение, следовательно, по крайней мере локально потенциально, т. е. $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Проверьте, что для потенциального течения однородной несжимаемой жидкости, происходящего в потенциальном поле $\boldsymbol{F}$, в каждый момент времени выполняется соотношение

$$\operatorname{grad}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U\Big) = 0.$$

d) Выведите из полученного равенства так называемый *интеграл Коши*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = \varphi(t)$$

— соотношение, утверждающее независимость левой его части от пространственных координат.

e) Покажите, что если течение к тому же и установившееся, т. е. поле $\boldsymbol{v}$ не зависит от времени, то имеет место соотношение

$$\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = \text{const},$$

называемое *интегралом Бернулли*.

3. Течение, поле скоростей которого имеет вид $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, 0)$, естественно назвать *плоскопараллельным* или просто *плоским течением*.

a) Покажите, что условия $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$ несжимаемости и потенциальности для плоского течения имеют соответственно следующий вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0.$$

b) Покажите, что эти уравнения по крайней мере локально гарантируют существование функций $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ таких, что $(-v_y, v_x) = \operatorname{grad}\psi$ и $(v_x, v_y) = \operatorname{grad}\varphi$.

c) Проверьте, что линии уровня $\varphi = c_1$, $\psi = c_2$ этих функций ортогональны и покажите, что в установившемся потоке линии $\psi = c$ совпадают с траекториями движущихся частиц среды. Именно поэтому функцию ψ называют *функцией тока*, в отличие от функции φ — *потенциала скоростей*.

d) Покажите, в предположении достаточной гладкости функций φ, ψ, что обе они являются гармоническими функциями и удовлетворяют *системе уравнений Коши—Римана*:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Гармонические функции, удовлетворяющие системе Коши—Римана, называют *сопряженными гармоническими функциями*.

e) Проверьте, что функция $f(z) = (\varphi + i\psi)(x, y)$, где $z = x + iy$, является дифференцируемой функцией комплексного переменного z. Это и определяет связь плоских задач гидромеханики с теорией функций комплексного переменного.

4. Рассмотрим простейший вариант $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ волнового уравнения (17). Это случай плоской волны, в которой давление зависит только от координаты x точки (x, y, z) пространства.

a) Сделав замену переменных $u = x - at$, $v = x + at$, приведите это уравнение к виду $\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} = 0$ и покажите, что общий вид решения исходного уравнения таков: $p = f(x + at) + g(x - at)$, где f, g — произвольные функции класса $C^{(2)}$.

b) Истолкуйте полученное решение как две волны $f(x)$ и $g(x)$, распространяющиеся соответственно влево и вправо вдоль оси $0x$ со скоростью a.

c) Считая, что и в общем случае (17) величина a есть скорость распространения возбуждения, и учитывая соотношение $a = (\psi'(p_0))^{-1/2}$, найдите, вслед за Ньютоном, скорость c_N звука в воздухе, полагая, что температура в звуковой волне постоянна, т. е. полагая, что процесс звуковых колебаний является изотермическим. (Уравнение состояния $\rho = \frac{\mu p}{RT}$; $R = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{град}\cdot\text{моль}}$ — универсальная газовая постоянная; $\mu = 28{,}8\ \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ — молекулярный вес воздуха. Расчет проведите для воздуха, находящегося при температуре 0 °C, т. е. $T = 273$ К. Ньютон нашел, что $c_N = 280$ м/с.)

d) Считая процесс звуковых колебаний адиабатическим, найдите, вслед за Лапласом, скорость c_L звука в воздухе и уточните тем самым результат c_N Ньютона. (При адиабатическом процессе $p = c\rho^\gamma$. Это формула Пуассона из задачи 6 к § 1 гл. XIII. Покажите, что если $c_N = \sqrt{p/\rho}$, то $c_L = \sqrt{\gamma \cdot p/\rho}$. Для воздуха $\gamma \approx 1{,}4$. Лаплас нашел $c_L = 330$ м/с, что превосходно согласуется с опытом.)

5. Используя скалярный и векторный потенциалы, систему уравнений Максвелла ((12) § 1) можно свести к волновому уравнению (точнее, к нескольким однотипным волновым уравнениям). Решив эту задачу, вы убедитесь в сказанном.

a) Из уравнения $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ вытекает, что, по крайней мере локально, $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, где поле $\boldsymbol{A}$ — векторный потенциал поля $\boldsymbol{B}$.

b) Зная, что $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, покажите, что из уравнения $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ следует, что, по крайней мере локально, найдется скалярная функция φ такая, что $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$.

c) Проверьте, что поля $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ и $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ не изменятся, если вместо пары φ, $\boldsymbol{A}$ взять другую пару потенциалов $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, такую, что $\widetilde{\varphi} = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$, $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \nabla\psi$, где ψ — произвольная функция класса $C^{(2)}$.

d) Из уравнения $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ вытекает первое соотношение $-\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ между потенциалами φ и $\boldsymbol{A}$.

e) Из уравнения $c^2\nabla\times\boldsymbol{B}-\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\dfrac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}$ вытекает второе соотношение

$$-c^2\nabla^2\boldsymbol{A}+c^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}$$

между потенциалами φ и $\boldsymbol{A}$.

f) Используя c), покажите, что, решив вспомогательное волновое уравнение $\Delta\psi+f=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, не меняя полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, можно выбрать потенциалы φ и $\boldsymbol{A}$ так, чтобы они удовлетворяли дополнительному (так называемому *калибровочному*) условию $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$.

g) Покажите, что если потенциалы φ и $\boldsymbol{A}$ выбраны так, как сказано в f), то из d) и e) получаются искомые неоднородные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c^2\Delta\varphi+\frac{\rho c^2}{\varepsilon_0},\qquad \frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=c^2\Delta\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{j}}{\varepsilon_0}$$

на потенциалы φ и $\boldsymbol{A}$. Найдя φ и $\boldsymbol{A}$, найдем и поля $\boldsymbol{E}=\nabla\varphi$, $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$.

* Глава XV

Интегрирование дифференциальных форм на многообразиях

§ 1. Некоторые напоминания из линейной алгебры

1. Алгебра форм. Пусть X — линейное пространство, а $F^k\colon X^k\to\mathbb{R}$ — вещественнозначная k-форма на X. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в X, а $x_1=x^{i_1}e_{i_1}, \ldots, x_k=x^{i_k}e_{i_k}$ — разложение векторов $x_1, \ldots, x_k\in X$ по этому базису, то в силу линейности F^k по каждому аргументу

$$F^k(x_1, \ldots, x_k)=F^k(x^{i_1}e_{i_1}, \ldots, x^{i_k}e_{i_k})=\\ =F^k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})x^{i_1}\cdot\ldots\cdot x^{i_k}=a_{i_1\ldots i_k}x^{i_1}\cdot\ldots\cdot x^{i_k}. \quad (1)$$

Таким образом, после задания базиса в X, k-форму $F^k\colon X^k\to\mathbb{R}$ можно отождествить с набором чисел $a_{i_1\ldots i_k}=F^k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$.

Если $\tilde e_1, \ldots, \tilde e_n$ — другой базис в X и $\tilde a_{j_1\ldots j_k}=F^k(\tilde e_{j_1}, \ldots, \tilde e_{j_k})$, то, полагая $\tilde e_j= =c^i_je_i$, $j=1, \ldots, n$, находим (тензорный) закон

$$\tilde a_{j_1\ldots j_k}=F^k(c^{i_1}_{j_1}e_{i_1}, \ldots, c^{i_k}_{j_k}e_{i_k})=a_{i_1\ldots i_k}c^{i_1}_{j_1}\cdot\ldots\cdot c^{i_k}_{j_k} \quad (2)$$

преобразования числовых наборов $a_{i_1\ldots i_k}$, $\tilde a_{j_1\ldots j_k}$, отвечающих одной и той же форме F^k.

Множество $\mathscr{F}^k:=\{F^k\colon X^k\to\mathbb{R}\}$ k-форм на линейном пространстве X само является линейным пространством относительно стандартных операций

$$(F^k_1+F^k_2)(x):=F^k_1(x)+F^k_2(x), \quad (3)$$

$$(\lambda F^k)(x):=\lambda F^k(x) \quad (4)$$

сложения k-форм и умножения k-формы на число.

Для форм F^k, F^l произвольных степеней k и l определяется следующая операция $\otimes$ их *тензорного произведения*:

$$(F^k\otimes F^l)(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}):=F^k(x_1, \ldots, x_k)F^l(x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}). \quad (5)$$

Таким образом, $F^k \otimes F^l$ является формой F^{k+l} степени $k+l$. Очевидны соотношения:

$$(\lambda F^k) \otimes F^l = \lambda(F^k \otimes F^l), \tag{6}$$

$$(F_1^k + F_2^k) \otimes F^l = F_1^k \otimes F^l + F_2^k \otimes F^l, \tag{7}$$

$$F^k \otimes (F_1^l + F_2^l) = F^k \otimes F_1^l + F^k \otimes F_2^l, \tag{8}$$

$$(F^k \otimes F^l) \otimes F^m = F^k \otimes (F^l \otimes F^m). \tag{9}$$

Итак, множество $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}^k\}$ форм на линейном пространстве X относительно введенных операций является градуированной алгеброй $\mathscr{F} = \bigoplus\limits_k \mathscr{F}^k$, в которой линейные операции выполняются в пределах каждого входящего в прямую сумму пространства $\mathscr{F}^k$, и если $F^k \in \mathscr{F}^k$, $F^l \in \mathscr{F}^l$, то $F^k \otimes F^l \in \mathscr{F}^{k+l}$.

Пример 1. Пусть X^* — сопряженное к X пространство (состоящее из линейных функций на X) и $e^1, \ldots, e^n$ — базис в X^*, взаимный с базисом $e_1, \ldots, e_n$ в X, т. е. $e^i(e_j) = \delta^i_j$.

Поскольку $e^i(x) = e^i(x^j e_j) = x^j e^i(e_j) = x^j \delta^i_j = x^i$, то, учитывая (1) и (9), любую k-форму $F^k \colon X^k \to \mathbb{R}$ можно записать в виде

$$F^k = a_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}. \tag{10}$$

2. Алгебра кососимметрических форм. Рассмотрим теперь в $\mathscr{F}^k$ подпространство Ω^k кососимметрических k-форм, т. е. $\omega \in \Omega^k$, если для любых различных индексов $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ имеет место равенство

$$\omega(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = -\omega(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k).$$

Из любой формы $F^k \in \mathscr{F}^k$ можно получить кососимметрическую форму с помощью операции $A \colon \mathscr{F}^k \to \Omega^k$ *альтернирования форм*, определяемой соотношением

$$AF^k(x_1, \ldots, x_k) := \frac{1}{k!} F^k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \delta^{i_1 \ldots i_k}_{1 \ldots k}, \tag{11}$$

где

$$\delta^{i_1 \ldots i_k}_{1 \ldots k} = \begin{cases} 1, & \text{если подстановка } \binom{i_1 \ldots i_k}{1 \ldots k} \text{ четная}, \\ -1, & \text{если подстановка } \binom{i_1 \ldots i_k}{1 \ldots k} \text{ нечетная}, \\ 0, & \text{если } \binom{i_1 \ldots i_k}{1 \ldots k} \text{ — не подстановка}. \end{cases}$$

Если F^k — кососимметрическая форма, то, как видно из (11), $AF^k = F^k$. Таким образом, $A(AF^k) = AF^k$ и $A\omega = \omega$, если $\omega \in \Omega^k$. Значит, $A \colon \mathscr{F}^k \to \Omega^k$ является отображением $\mathscr{F}^k$ *на* Ω^k.

Сопоставляя определения (3), (4), (11), получаем

$$A(F_1^k + F_2^k) = AF_1^k + AF_2^k, \tag{12}$$

$$A(\lambda F^k) = \lambda AF^k. \tag{13}$$

Пример 2. С учетом соотношений (12), (13) из разложения (10) получается, что

$$AF^k = a_{i_1\dots i_k} A(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}),$$

поэтому интересно найти $A(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k})$.

Из определения (11) с учетом того, что $e^i(x) = x^i$, находим

$$A(e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_k})(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} e^{j_1}(x_{i_1}) \cdot \ldots \cdot e^{j_k}(x_{i_k}) \delta^{i_1 \dots i_k}_{1 \dots k} =$$

$$= \frac{1}{k!} x^{j_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot x^{j_k}_{i_k} \delta^{i_1 \dots i_k}_{1 \dots k} = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} x^{j_1}_1 & \dots & x^{j_k}_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x^{j_1}_k & \dots & x^{j_k}_k \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Тензорное произведение кососимметрических форм, вообще говоря, уже не является кососимметрической формой, поэтому в классе кососимметрических форм вводится следующая операция $\wedge$ их *внешнего произведения*:

$$\omega^k \wedge \omega^l := \frac{(k+l)!}{k!\, l!} A(\omega^k \otimes \omega^l). \quad (15)$$

Таким образом, $\omega^k \wedge \omega^l$ есть кососимметрическая форма ω^{k+l} степени $k+l$.

Пример 3. Опираясь на результат (14) примера 2, из определения (15) находим

$$e^{i_1} \wedge e^{i_2}(x_1, x_2) = \frac{2!}{1!\, 1!} A(e^{i_1} \otimes e^{i_2})(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} e^{i_1}(x_1) & e^{i_2}(x_1) \\ e^{i_1}(x_2) & e^{i_2}(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{i_1}_1 & x^{i_2}_1 \\ x^{i_1}_2 & x^{i_2}_2 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Пример 4. Используя полученное в примере 3 равенство, соотношение (14) и определения (11), (15), можно написать, что

$$e^{i_1} \wedge (e^{i_2} \wedge e^{i_3})(x_1, x_2, x_3) = \frac{(1+2)!}{1!\, 2!} A(e^{i_1} \otimes (e^{i_2} \wedge e^{i_3}))(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \frac{3!}{1!\, 2!} e^{i_1}(x_{j_1})(e^{i_2} \wedge e^{i_3})(x_{j_2}, x_{j_3}) \delta^{j_1 j_2 j_3}_{1\ 2\ 3} = \frac{1}{2!} x^{i_1}_{j_1} \begin{vmatrix} x^{i_2}_{j_2} & x^{i_3}_{j_2} \\ x^{i_2}_{j_3} & x^{i_3}_{j_2} \end{vmatrix} \delta^{j_1 j_2 j_3}_{1\ 2\ 3} =$$

$$= x^{i_1}_1 \begin{vmatrix} x^{i_2}_2 & x^{i_3}_2 \\ x^{i_2}_3 & x^{i_3}_3 \end{vmatrix} - x^{i_1}_2 \begin{vmatrix} x^{i_2}_1 & x^{i_3}_1 \\ x^{i_2}_3 & x^{i_3}_3 \end{vmatrix} + x^{i_1}_3 \begin{vmatrix} x^{i_2}_1 & x^{i_3}_1 \\ x^{i_2}_2 & x^{i_3}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{i_1}_1 & x^{i_2}_1 & x^{i_3}_1 \\ x^{i_1}_2 & x^{i_2}_2 & x^{i_3}_2 \\ x^{i_1}_3 & x^{i_2}_3 & x^{i_3}_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогичная выкладка показывает, что

$$e^{i_1} \wedge (e^{i_2} \wedge e^{i_3}) = (e^{i_1} \wedge e^{i_2}) \wedge e^{i_3}. \quad (17)$$

Используя разложение определителя по столбцу, на основании принципа индукции заключаем, что

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}(x_1, \dots, x_k) = \begin{vmatrix} e^{i_1}(x_1) & \dots & e^{i_k}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{i_1}(x_k) & \dots & e^{i_k}(x_k) \end{vmatrix}, \quad (18)$$

причем, как видно из проведенных выкладок, формула (18) справедлива для любых 1-форм $e^{i_1}, \ldots, e^{i_k}$ (не обязательно базисных форм пространства X^*).

Учитывая перечисленные выше свойства тензорного произведения и альтернирования форм, получаем следующие свойства внешнего произведения кососимметрических форм:

$$(\omega_1^k + \omega_2^k) \wedge \omega^l = \omega_1^k \wedge \omega^l + \omega_2^k \wedge \omega^l, \tag{19}$$

$$(\lambda\omega^k) \wedge \omega^l = \lambda(\omega^k \wedge \omega^l), \tag{20}$$

$$\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k, \tag{21}$$

$$(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m). \tag{22}$$

◄ Равенства (19), (20), очевидно, следуют из соотношений (6)—(8) и (12), (13).

Из соотношений (10)—(14) и (17) для любой кососимметрической формы $\omega = a_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}$ получаем

$$\omega = A\omega = a_{i_1 \ldots i_k} A(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}) = \frac{1}{k!} a_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}.$$

Используя уже доказанные равенства (19), (20), теперь для доказательства равенств (21), (22) их достаточно проверить лишь для форм вида $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$.

Ассоциативность (22) для таких форм уже установлена равенством (17).

Из равенства (18) и свойств определителей для указанных специальных форм немедленно получаем соотношение (21). ►

Заодно мы показали, что любая форма $\omega \in \Omega^k$ может быть представлена в виде

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}. \tag{23}$$

Итак, множество $\Omega = \{\Omega^k\}$ кососимметрических форм на векторном пространстве X относительно линейных операций (3), (4) и внешнего умножения (15) является градуированной алгеброй $\Omega = \bigoplus\limits_{k=0}^{\dim X} \Omega^k$. Линейные операции на Ω выполняются в пределах каждого линейного пространства Ω^k, и если $\omega^k \in \Omega^k$, $\omega^l \in \Omega^l$, то $\omega^k \wedge \omega^l \in \Omega^{k+l}$.

В прямой сумме $\bigoplus \Omega^k$ суммирование ведется от нуля до размерности пространства X, поскольку кососимметрические формы $\omega^k : X^k \to \mathbb{R}$, степень которых выше размерности линейного пространства X, обязательно тождественно равны нулю, что видно из соотношения (21) (или из соотношений (23) и (18)).

3. Линейные отображения линейных пространств и сопряженные отображения сопряженных пространств. Пусть X и Y — линейные пространства над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел (или над любым иным, но одним и тем же для X и Y полем) и пусть $l : X \to Y$ — линейное отображение

X в Y, т. е. для любых $x, x_1, x_2 \in X$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено

$$l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2) \quad \text{и} \quad l(\lambda x) = \lambda l(x). \tag{24}$$

Линейное отображение $l\colon X \to Y$ естественным образом порождает сопряженное с ним отображение $l^*\colon \mathscr{F}_Y \to \mathscr{F}_X$ множества $\mathscr{F}_Y$ заданных на Y полилинейных форм в аналогичное множество $\mathscr{F}_X$. Если F_Y^k — k-форма на Y, то по определению

$$(l^* F_Y^k)(x_1, \ldots, x_k) := F_Y^k(lx_1, \ldots, lx_k). \tag{25}$$

Из (24) и (25) видно, что $l^* F_Y^k$ есть k-форма F_X^k на пространстве X, т. е. $l^*(\mathscr{F}_Y^k) \subset \mathscr{F}_X^k$. Более того, если форма F_Y^k была кососимметрической, то форма $(l^* F_Y^k) = F_X^k$ тоже кососимметрическая, т. е. $l^*(\Omega_Y^k) \subset \Omega_X^k$. Отображение l^* в пределах каждого линейного пространства $\mathscr{F}_Y^k$ или Ω_Y^k, очевидно, линейно, т. е.

$$l^*(F_1^k + F_2^k) = l^* F_1^k + l^* F_2^k \quad \text{и} \quad l^*(\lambda F^k) = \lambda l^* F^k. \tag{26}$$

Сопоставляя теперь определение (25) с определениями (5), (11), (15) тензорного произведения, альтернирования и внешнего произведения форм, заключаем, что

$$l^*(F^p \otimes F^q) = (l^* F^p) \otimes (l^* F^q), \tag{27}$$

$$l^*(AF^p) = A(l^* F^p), \tag{28}$$

$$l^*(\omega^p \wedge \omega^q) = (l^* \omega^p) \wedge (l^* \omega^q). \tag{29}$$

Пример 5. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — базис в X, $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ — базис в Y, а $l(e_i) = c_i^j \tilde{e}_j$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Если k-форма F_Y^k в базисе $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ имеет координатное представление

$$F_Y^k(y_1, \ldots, y_k) = b_{j_1 \ldots j_k} y_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot y_k^{j_k},$$

где $b_{j_1 \ldots j_k} = F_Y^k(\tilde{e}_{j_1}, \ldots, \tilde{e}_{j_k})$, то

$$(l^* F_Y^k)(x_1, \ldots, x_k) = a_{i_1 \ldots i_k} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k},$$

где $a_{i_1 \ldots i_k} = b_{j_1 \ldots j_k} c_{i_1}^{j_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^{j_k}$, поскольку

$$a_{i_1 \ldots i_k} =: (l^* F_Y^k)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) := F_Y^k(le_{i_1}, \ldots, le_{i_k}) = \\ = F_Y^k(c_{i_1}^{j_1} \tilde{e}_{j_1}, \ldots, c_{i_k}^{j_k} \tilde{e}_{j_k}) = F_Y^k(\tilde{e}_{j_1}, \ldots, \tilde{e}_{j_k}) c_{i_1}^{j_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^{j_k}.$$

Пример 6. Пусть $e^1, \ldots, e^m$ и $\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^n$ — базисы сопряженных пространств X^*, Y^*, взаимные (или сопряженные) с указанными в примере 5 базисами пространств X и Y соответственно. В условиях примера 5 получаем

$$(l^* \tilde{e}^j)(x) = (l^* \tilde{e}^j)(x^i e_i) = \tilde{e}^j(x^i le_i) = x^i \tilde{e}^j(c_i^k \tilde{e}_k) = \\ = x^i c_i^k \tilde{e}^j(\tilde{e}_k) = x^i c_i^k \delta_k^j = c_i^j x^i = c_i^j e^i(x).$$

Пример 7. Сохраняя обозначения примера 6 и учитывая соотношения (22), (29), теперь получаем

$$l^*(\tilde{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{e}^{j_k}) = l^*\tilde{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{e}^{j_k} = (c^{j_1}_{i_1} e^{i_1}) \wedge \ldots \wedge (c^{j_k}_{i_k} e^{i_k}) =$$
$$= c^{j_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot c^{j_k}_{i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} \begin{vmatrix} c^{j_1}_{i_1} & \ldots & c^{j_k}_{i_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c^{j_1}_{i_k} & \ldots & c^{j_k}_{i_k} \end{vmatrix} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}.$$

Принимая во внимание равенства (26), отсюда можно сделать вывод, что вообще

$$l^*\Bigg(\sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} b_{j_1 \ldots j_k} \tilde{e}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{e}^{j_k}\Bigg) =$$
$$= \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m \\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n}} b_{j_1 \ldots j_k} \begin{vmatrix} c^{j_1}_{i_1} & \ldots & c^{j_k}_{i_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c^{j_1}_{i_k} & \ldots & c^{j_k}_{i_k} \end{vmatrix} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} =$$
$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} a_{i_1 \ldots i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}.$$

Задачи и упражнения

1. Покажите на примерах, что, вообще говоря,
a) $F^k \otimes F^l \neq F^l \otimes F^k$;
b) $A(F^k \otimes F^l) \neq AF^k \otimes AF^l$;
c) если $F^k, F^l \in \Omega$, то не всегда $F^k \otimes F^l \in \Omega$.

2. a) Покажите, что если $e_1, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства X, а линейные функции $e^1, \ldots, e^n$ на X (т. е. элементы сопряженного к X пространства X^*) таковы, что $e^j(e_i) = \delta^j_i$, то $e^1, \ldots, e^n$ — базис в X^*.

b) Проверьте, что из k-форм вида $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}$ можно образовать базис пространства $\mathscr{F}^k = \mathscr{F}^k(X)$ и найдите размерность $(\dim \mathscr{F}^k)$ этого пространства, зная, что $\dim X = n$.

c) Проверьте, что из форм вида $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}$ можно образовать базис пространства $\Omega^k = \Omega^k(X)$, и найдите $\dim \Omega^k$, зная, что $\dim X = n$.

d) Покажите, что если $\Omega = \bigoplus\limits_{k=0}^{k=n} \Omega^k$, то $\dim \Omega = 2^n$.

3. *Внешняя* (*грассманова*[1]) *алгебра* G над линейным пространством X и полем P (обозначаемая обычно символом $\bigwedge(X)$ в соответствии с символом $\wedge$ операции умножения в G) определяется как ассоциативная алгебра с единицей 1, обладающая следующими свойствами:

---

[1] Г. Грассман (1809—1877) — немецкий математик, физик и филолог; ему, в частности, принадлежит первое систематическое построение учения о многомерном линейном и евклидовом векторном пространствах, а также само определение скалярного произведения векторов.

1° G порождается единицей 1 и X, т. е. любая подалгебра в G, содержащая 1 и X, совпадает с G;

2° $x \wedge x = 0$ для любого вектора $x \in X$;

3° $\dim G = 2^{\dim X}$.

a) Покажите, что если $e_1, \dots, e_n$ — базис в X, то совокупность $1, e_1, \dots, e_n, e_1 \wedge \wedge e_2, \dots, e_{n-1} \wedge e_n, \dots, e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ элементов G вида $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} =: e_I$, где $I = \{i_1 < \dots \dots < i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, образует базис в G.

b) Исходя из полученного в a) результата, можно провести следующее формальное построение алгебры $G = \bigwedge(X)$.

Для указанных в a) подмножеств $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ образуем формальные элементы e_I, (отождествляя $e_{\{i\}}$ с e_i, а $e_\varnothing$ с 1), которые примем за базис линейного пространства G над полем P. Умножение в G определим формулой

$$\Big(\sum_I a_I e_I\Big)\Big(\sum_J b_J e_J\Big) = \sum_{I,J} a_I b_J \varepsilon(I, J) e_{I \cup J},$$

где $\varepsilon(I, J) = \operatorname{sgn} \prod\limits_{i \in I, j \in J} (j - i)$. Проверьте, что при этом получается грассманова алгебра $\bigwedge(X)$.

c) Докажите единственность (с точностью до изоморфизма) алгебры $\bigwedge(X)$.

d) Покажите, что алгебра $\bigwedge(X)$ градуирована: $\bigwedge(X) = \bigoplus\limits_{k=0}^{k=n} \bigwedge^k(X)$, где $\bigwedge^k(X)$ — линейная оболочка элементов вида $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$; при этом, если $a \in \bigwedge^p(X)$, а $b \in \in \bigwedge^q(X)$, то $a \wedge b \in \bigwedge^{p+q}(X)$. Проверьте, что $a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a$.

4. Пусть $A\colon X \to Y$ — линейное отображение пространства X в пространство Y. Покажите, что существует единственный гомоморфизм $\bigwedge(A)\colon \bigwedge(X) \to \bigwedge(Y)$ из $\bigwedge(X)$ в $\bigwedge(Y)$, совпадающий с A на подпространстве $\bigwedge'(X) \subset \bigwedge(X)$, отождествляемом с X.

b) Покажите, что гомоморфизм $\bigwedge(A)$ переводит $\bigwedge^k(X)$ в $\bigwedge^k(Y)$. Ограничение $\bigwedge(A)$ на $\bigwedge^k(X)$ обозначают через $\bigwedge^k(A)$.

c) Пусть $\{e_i;\ i = 1, \dots, m\}$ — базис в X, а $\{e_j;\ j = 1, \dots, n\}$ — базис в Y, и пусть оператору A в этих базисах отвечает матрица (a_j^i). Покажите, что если $\{e_I;\ I \subset \{1, \dots, m\}\}$, $\{e_J;\ J \subset \{1, \dots, n\}\}$ — соответствующие базисы пространств $\bigwedge(X)$ и $\bigwedge(Y)$, то матрица оператора $\bigwedge^k(A)$ имеет вид $a_J^I = \det(a_j^i)$, $i \in I$, $j \in J$, где $\operatorname{card} I = \operatorname{card} J = k$.

d) Проверьте, что если $A\colon X \to Y$, $B\colon Y \to Z$ — линейные операторы, то справедливо равенство $\bigwedge(B \circ A) = \bigwedge(B) \circ \bigwedge(A)$.

§ 2. Многообразие

1. Определение многообразия

Определение 1. Хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой топологии[1] называется *n-мерным многообразием*, если любая его точка имеет окрестность U, гомеоморфную либо всему пространству $\mathbb{R}^n$, либо полупространству $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leqslant 0\}$.

---

[1]См. гл. IX, § 2, а также замечания 2, 3 настоящего параграфа.

Определение 2. Отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to U \subset M$ (или $\varphi\colon H^n \to U \subset M$), осуществляющее указанный в определении 1 гомеоморфизм, называется *локальной картой многообразия* M, $\mathbb{R}^n(H^n)$ — *областью параметров*, а U — *районом* или *областью действия* карты на многообразии M.

Локальная карта наделяет каждую точку $x \in U$ координатами соответствующей ей точки $t = \varphi^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, в районе U действия карты вводится локальная система координат, и потому отображение φ или, в более развернутой записи, пара (U, φ) в самом привычном смысле слова является картой района U.

Определение 3. Набор карт, районы действия которых в совокупности покрывают все многообразие, называется *атласом многообразия*.

Пример 1. Сфера $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ является двумерным многообразием. Если S^2 интерпретировать как поверхность Земли, то атлас географических карт будет атласом многообразия S^2.

Одномерная сфера $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ — окружность в $\mathbb{R}^2$, очевидно, является одномерным многообразием. Вообще, сфера $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ является n-мерным многообразием. (См. гл. XII, § 1.)

Замечание 1. Вводимый определением 1 объект (многообразие M), очевидно, не изменится, если вместо $\mathbb{R}^n$ и H^n брать любые гомеоморфные $\mathbb{R}^n$ и H^n области параметров в пространстве $\mathbb{R}^n$. Например, это могут быть открытый куб $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x^i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$ и куб с присоединенной к нему гранью $\tilde{I}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x^1 \leqslant 1$ и $0 < x^i < 1,\ i = 2, \ldots, n\}$. Такими стандартными областями параметров довольно часто пользуются.

Нетрудно также проверить, что вводимый определением 1 объект не изменится, если потребовать лишь, чтобы каждая точка $x \in M$ имела в M окрестность U, гомеоморфную некоторому открытому подмножеству полупространства H^n.

Пример 2. Если X — m-мерное многообразие с атласом карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, а Y — n-мерное многообразие с атласом $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$, то $X \times Y$ можно рассматривать как $(m+n)$-мерное многообразие с атласом $\{(W_{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta})\}$, где $W_{\alpha\beta} = U_\alpha \times V_\beta$, а отображение $\chi_{\alpha\beta} = (\varphi_\alpha, \psi_\beta)$ переводит в $W_{\alpha\beta}$ прямое произведение областей определения φ_α и ψ_β.

В частности, двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$ (рис. 69) или n-мерный тор

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ раз}}$$

являются многообразиями соответствующей размерности.

Если районы U_i, U_j действия двух карт (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) многообразия M пересекаются, т. е. $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, то между множествами $I_{ij} = \varphi_i^{-1}(U_j)$, $I_{ji} = \varphi_j^{-1}(U_i)$ естественно устанавливаются взаимно обратные гомеоморфизмы $\varphi_{ij}\colon I_{ij} \to I_{ji}$, $\varphi_{ji}\colon I_{ji} \to I_{ij}$, где $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i|_{I_{ij}}$, $\varphi_{ji} = \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j|_{I_{ji}}$. Эти гомеоморфизмы часто называют *функциями замены координат*, поскольку они осу-

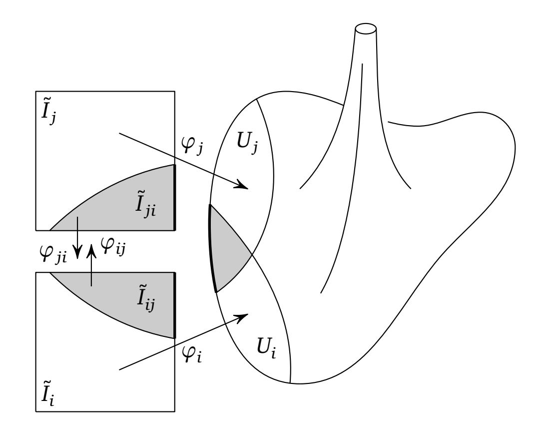


Рис. 96

ществляют переход от одной системы локальных координат к другой такой же системе в общей области $U_i \cap U_j$ их действия (рис. 96).

Определение 4. Число n в определении 1, называется *размерностью многообразия* M и обычно обозначается символом $\dim M$.

Определение 5. Если при указанном в определении 1 гомеоморфизме $\varphi\colon H^n \to U$ точке $x \in U$ соответствует точка $\varphi^{-1}(x)$ на границе ∂H^n полупространства H^n, то x называют *точкой края многообразия* M (и окрестности U). Совокупность всех точек края многообразия M называется *краем* этого *многообразия* и обычно обозначается символом ∂M.

В силу топологической инвариантности внутренних точек (теорема Брауэра[1]) понятия размерности и точки края многообразия определены корректно, т. е. не зависят от используемых в определениях 4 и 5 индивидуальных локальных карт. Теорему Брауэра мы не доказывали, но инвариантность внутренних точек относительно диффеоморфизмов нам хорошо известна (это следствие теоремы об обратной функции). Поскольку в дальнейшем нам придется иметь дело именно с диффеоморфизмами, мы не останавливаемся здесь на теореме Брауэра.

Пример 3. Замкнутый шар $\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant 1\}$ или, как говорят, замкнутый *n-мерный диск* является n-мерным многообразием, краем которого является $(n-1)$-мерная сфера $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$.

Замечание 2. Многообразие M, множество точек края которого непусто, обычно называют *многообразием с краем*, оставляя термин *многообразие* (в собственном смысле слова) за многообразиями без края. В определении 1 эти случаи не разделены.

---

[1]Теорема утверждает, что при гомеоморфном отображении $\varphi\colon E \mapsto \varphi(E)$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ на множество $\varphi(E) \subset \mathbb{R}^n$ внутренние точки множества E преобразуются во внутренние точки множества $\varphi(E)$.

Утверждение 1. *Край ∂M n-мерного многообразия с краем M является $(n-1)$-мерным многообразием без края.*

◄ Действительно, $\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}$, а ограничение на ∂H^n карт атласа многообразия M вида $\varphi_i : H^n \to U_i$ порождает атлас ∂M. ►

Пример 4. Рассмотрим плоский двойной маятник (рис. 97), плечо a которого много меньше плеча b и может вращаться свободно, а размах колебаний плеча b ограничен упорами. Конфигурация такой системы в любой конкретный момент характеризуется двумя углами α, β. Если бы ограничений не было, то конфигурационное пространство двойного маятника, очевидно, можно было бы отождествить с двумерным тором $T^2 = S^1_\alpha \times S^1_\beta$.

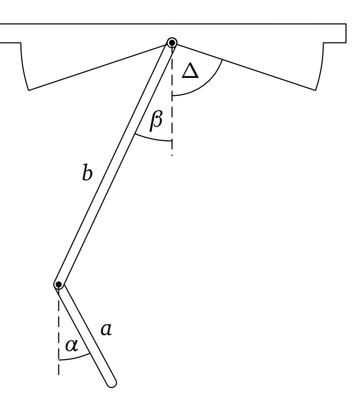


Рис. 97

При наличии указанных ограничений конфигурационное пространство двойного маятника параметризуется точками цилиндра $S^1_\alpha \times I^1_\beta$, где S^1_α — окружность, отвечающая возможным положениям плеча a, а $I^1_\beta = \{\beta \in \mathbb{R} \mid |\beta| \leqslant \Delta\}$ — отрезок, в пределах которого может меняться угол β, характеризующий положение плеча b.

В этом случае мы получаем многообразие с краем. Край этого многообразия состоит из двух окружностей $S^1_\alpha \times \{-\Delta\}$, $S^1_\alpha \times \{\Delta\}$, являющихся произведением окружности S^1_α и концов $\{-\Delta\}$, $\{\Delta\}$ отрезка I^1_β.

Замечание 3. На рассмотренном примере 4 видно, что порой координаты на множестве M (в примере это α, β) возникают естественным образом и они сами вводят на M топологию. Значит, в определении 1 многообразия нет нужды всегда заранее требовать, чтобы на M уже была топология. Суть понятия многообразия в том, что точки некоторого множества M параметризуются точками некоторого набора подобластей пространства $\mathbb{R}^n$. Между появляющимися при этом на частях M системами координат возникает естественная связь, которая выражается в отображениях соответствующих областей пространства $\mathbb{R}^n$. Значит, можно считать, что M получается из набора областей пространства $\mathbb{R}^n$ указанием закона отождествления их точек или, описательно говоря, путем указания закона их подклейки друг к другу. Итак, задать многообразие по существу означает задать набор подобластей $\mathbb{R}^n$ и закон соответствия точек этих подобластей. На дальнейших уточнениях сказанного (формализации понятия склеивания или отождествления точек, введении топологии на M и т. п.) мы не задерживаемся.

Определение 6. Многообразие называется *компактным* (*связным*), если оно является компактом (связно) как топологическое пространство.

Рассмотренные в примерах 1—4 многообразия компактны и связны. Край появившегося в примере 4 цилиндра $S^1_\alpha \times I^1_\beta$ состоит из двух незави-

симых окружностей и является одномерным компактным, но несвязным многообразием. Край $S^{n-1} = \partial \bar{B}^n$ n-мерного диска из примера 3 является компактным многообразием, которое связно при $n > 1$ и несвязно (состоит из двух точек) при $n = 1$.

Пример 5. Само пространство $\mathbb{R}^n$, очевидно, является связным, некомпактным многообразием без края, а полупространство H^n доставляет простейший пример связного некомпактного многообразия с краем. (И в том, и в другом случае атлас можно взять состоящим из единственной карты, отвечающей тождественному отображению.)

Утверждение 2. *Если многообразие M связно, то оно линейно связно.*

◄ Фиксировав точку $x_0 \in M$, рассмотрим множество E_{x_0} тех точек многообразия M, которые можно соединить с x_0 в пределах M некоторым путем. Множество E_{x_0}, как видно из определения многообразия, непусто, открыто и замкнуто в M. Но тогда $E_{x_0} = M$. ►

Пример 6. Если каждой квадратной вещественной матрице порядка n сопоставить точку пространства $\mathbb{R}^{n^2}$, координаты которой получаются выписыванием в определенном порядке всех элементов матрицы, то группа $GL(n, \mathbb{R})$ всех невырожденных матриц порядка n превращается в n^2-мерное многообразие. Это многообразие некомпактно (элементы матриц никак не ограничены) и несвязно. Последнее вытекает из того, что $GL(n, \mathbb{R})$ содержит матрицы как с положительным, так и с отрицательным определителем. Точки $GL(n, \mathbb{R})$, отвечающие двум таким матрицам, нельзя соединить путем (на котором бы тогда появилась точка, соответствующая матрице, имеющей определитель, равный нулю).

Пример 7. Группа $SO(2, \mathbb{R})$ ортогональных преобразований плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющих определитель, равный единице, состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

и, таким образом, может считаться многообразием, которое отождествляется с окружностью — областью изменения углового параметра α. Таким образом, $SO(2, \mathbb{R})$ — одномерное компактное связное многообразие. Если допустить и отражения относительно прямых в плоскости $\mathbb{R}^2$, то мы получим группу $O(2, \mathbb{R})$ всех вещественных ортогональных матриц второго порядка. Ее естественно можно отождествить с двумя различными окружностями, отвечающими матрицам с определителем 1 и -1 соответственно. То есть $O(2, \mathbb{R})$ — одномерное компактное, но несвязное многообразие.

Пример 8. Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор плоскости $\mathbb{R}^2$ и $T_{\boldsymbol{a}}$ — группа движений плоскости, порожденная вектором $\boldsymbol{a}$. Элементами группы $T_{\boldsymbol{a}}$ являются сдвиги на векторы вида $n\boldsymbol{a}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Под действием элементов g группы $T_{\boldsymbol{a}}$ каждая точка x плоскости смещается в точки $g(x)$ вида $x + n\boldsymbol{a}$. Совокупность точек, в которые данная точка $x \in \mathbb{R}^2$ переходит под действием элементов данной группы преобразований, называется *орбитой* этой *точки*. Свойство

точек $\mathbb{R}^2$ принадлежать одной орбите, очевидно, является отношением эквивалентности на $\mathbb{R}^2$, и орбиты являются классами эквивалентных в этом смысле точек. Область в $\mathbb{R}^2$, содержащая по одной точке каждой орбиты, называют *фундаментальной областью* данной группы автоморфизмов (уточнение см. в задаче 5d)).

В нашем случае в качестве фундаментальной области можно взять полосу ширины $|\boldsymbol{a}|$, ограниченную двумя параллельными прямыми, ортогональными вектору $\boldsymbol{a}$. Следует только учесть, что сами эти прямые получаются друг из друга сдвигом на $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{a}$ соответственно. В пределах ортогональной $\boldsymbol{a}$ полосы ширины, меньшей чем $|\boldsymbol{a}|$, нет эквивалентных точек, поэтому все орбиты, имеющие представителей в такой полосе, однозначно наделяются координатами своих представителей. Так фактор-множество $\mathbb{R}^2/T_{\boldsymbol{a}}$ орбит данной группы $T_{\boldsymbol{a}}$ превращается в многообразие. Из сказанного выше о фундаментальной области легко понять, что это многообразие гомеоморфно цилиндру, который получается склеиванием по эквивалентным точкам граничных прямых полосы ширины $|\boldsymbol{a}|$.

Пример 9. Пусть теперь $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — пара ортогональных векторов плоскости $\mathbb{R}^2$ и $T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ — группа сдвигов, порожденная этими векторами. Фундаментальной областью в данном случае будет прямоугольник со сторонами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. В пределах этого прямоугольника эквивалентными будут лишь точки, лежащие на его противоположных сторонах. После соответствующей склейки сторон фундаментального прямоугольника убеждаемся, что возникающее многообразие $\mathbb{R}^2/T_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ гомеоморфно двумерному тору.

Пример 10. Рассмотрим еще группу $G_{a,b}$ движений плоскости $\mathbb{R}^2$, порожденную следующими преобразованиями: $a(x, y) = (x + 1, 1 - y)$, $b(x, y) = (x, y + 1)$.

Фундаментальной областью для группы $G_{a,b}$ будет единичный квадрат, горизонтальные стороны которого отождествляются по точкам, лежащим на одной вертикали, а боковые стороны квадрата отождествляются по точкам, симметричным относительно его центра. Таким образом, возникающее многообразие $\mathbb{R}^2/G_{a,b}$ оказывается гомеоморфно бутылке Клейна (см. гл. XII, § 1).

Мы не останавливались здесь на полезных и важных примерах, которые были разобраны в § 1 гл. XII.

2. Гладкие многообразия и гладкие отображения

Определение 7. Атлас многообразия называется *гладким* (*класса* $C^{(k)}$ или *аналитическим*), если все функции замены координат для карт данного атласа являются гладкими отображениями (диффеоморфизмами) соответствующего класса гладкости.

Два атласа данной (одной и той же) гладкости считаются *эквивалентными*, если их объединение является атласом той же гладкости.

Пример 11. Атлас, состоящий из единственной карты, можно считать сколь угодно гладким. Рассмотрим в этой связи на прямой $\mathbb{R}^1$ один атлас,

порожденный тождественным отображением $\mathbb{R}^1 \ni x \mapsto \varphi(x) = x \in \mathbb{R}^1$, а другой атлас — порожденный любой строго монотонной функцией $\mathbb{R}^1 \ni x \mapsto \widetilde{\varphi}(x) \in \mathbb{R}^1$, отображающей $\mathbb{R}^1$ на $\mathbb{R}^1$. Объединением этих атласов будет атлас, который, очевидно, имеет наименьшую из гладкостей функций $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\varphi}^{-1}$.

В частности, если $\widetilde{\varphi}(x) = x^3$, то атлас из карт $\{x, x^3\}$ не является гладким, так как $\widetilde{\varphi}^{-1}(x) = x^{1/3}$. Используя сказанное, можно построить на $\mathbb{R}^1$ бесконечно гладкие атласы, объединение которых будет атласом наперед заданного класса гладкости $C^{(k)}$.

Определение 8. *Гладким многообразием* (*класса $C^{(k)}$, аналитическим*) называется многообразие M с заданным на M классом эквивалентности атласов данной гладкости.

После этого определения понятна следующая терминология: *топологическое многообразие* (класса $C^{(0)}$), *многообразие класса $C^{(k)}$, аналитическое многообразие*.

Для того, чтобы задать весь класс эквивалентности атласов данной гладкости на многообразии M, достаточно задать любой атлас A из этого класса эквивалентности. Таким образом, можно считать, что гладкое многообразие есть пара (M, A), где M — многообразие, а A — атлас данной гладкости на M.

Совокупность эквивалентных атласов данной гладкости на многообразии часто называют *структурой данной гладкости на* этом *многообразии*. На одном и том же топологическом многообразии могут существовать различные гладкие структуры даже одной и той же гладкости (см. пример 11 и задачу 3).

Рассмотрим еще несколько примеров, в которых мы обратим основное внимание на гладкость функций замены координат.

Пример 12. Одномерное многообразие $\mathbb{RP}^1$, называемое *вещественной проективной прямой*, есть пучок прямых в $\mathbb{R}^2$, проходящих через начало координат, с естественным отношением близости прямых (измеряемой, например, величиной меньшего угла между прямыми). Каждая прямая пучка однозначно определяется ненулевым направляющим вектором (x^1, x^2), причем два таких вектора задают одну и ту же прямую в том и только в том случае, когда они коллинеарны. Значит, $\mathbb{RP}^1$ можно рассматривать как совокупность классов эквивалентных упорядоченных пар (x^1, x^2) вещественных чисел. При этом по крайней мере одно из чисел пары должно быть отлично от нуля, и две пары считаются эквивалентными (отождествляются), если они пропорциональны. Пары (x^1, x^2) обычно называют *однородными координатами* на $\mathbb{RP}^1$. Используя интерпретацию $\mathbb{RP}^1$ в однородных координатах, легко построить атлас из двух карт на $\mathbb{RP}^1$. Пусть U_i, $i = 1, 2$ — те прямые (классы пар (x^1, x^2)) из $\mathbb{RP}^1$, для которых $x^i \neq 0$. Каждой точке (прямой) $p \in U_1$ взаимно однозначно соответствует пара $\left(1, \frac{x^2}{x^1}\right)$, определяемая числом $t_1^2 = \frac{x^2}{x^1}$. Аналогично точки района U_2 находятся во взаимно однозначном соответствии с парами вида $\left(\frac{x^1}{x^2}, 1\right)$ и задаются одним числом $t_2^1 = \frac{x^1}{x^2}$. Таким

образом, в U_1 и U_2 возникают локальные координаты, которые, очевидно, соответствуют введенной выше в $\mathbb{RP}^1$ топологии. В общей области $U_1 \cap U_2$ действия построенных локальных карт вводимые ими координаты связаны соотношениями $t_2^1 = (t_1^2)^{-1}$, $t_1^2 = (t_2^1)^{-1}$, показывающими, что построенный атлас принадлежит не только классу $C^{(\infty)}$, но даже является аналитическим.

Полезно иметь в виду также следующую интерпретацию многообразия $\mathbb{RP}^1$. Каждая прямая исходного пучка прямых вполне определяется точкой пересечения с единичной окружностью. Но таких точек ровно две, причем они являются диаметрально противоположными точками окружности. Близость прямых равносильна близости соответствующих пар точек окружности. Значит, $\mathbb{RP}^1$ можно интерпретировать как окружность с отождествленными (склеенными) диаметрально противоположными точками. Если взять только полуокружность, то на ней окажется лишь одна пара отождествляемых точек — концы полуокружности. Склеив их, мы получим снова топологически окружность. Таким образом, $\mathbb{RP}^1$ как топологическое пространство гомеоморфно окружности.

Пример 13. Если рассмотреть теперь пучок прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^3$, или, что то же самое, совокупность классов пропорциональных упорядоченных троек (x^1, x^2, x^3) вещественных чисел, не обращающихся в нуль одновременно, то мы получим *вещественную проективную плоскость* $\mathbb{RP}^2$. В районах U_1, U_2, U_3, где соответственно $x^1 \neq 0$, $x^2 \neq 0$, $x^3 \neq 0$, вводятся локальные системы координат

$$\left(1, \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}\right) = (1, t_1^2, t_1^3) \sim (t_1^2, t_1^3), \quad \left(\frac{x^1}{x^2}, 1, \frac{x^3}{x^2}\right) = (t_2^1, 1, t_2^3) \sim (t_2^1, t_2^3),$$
$$\left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}, 1\right) = (t_3^1, t_3^2, 1) \sim (t_3^1, t_3^2),$$

которые, очевидно, связаны между собой соотношениями $t_i^j = (t_j^i)^{-1}$, $t_i^j = t_k^j (t_k^i)^{-1}$, относящимися к общим частям районов действия локальных карт.

Например, переход от координат (t_1^2, t_1^3) к координатам (t_2^1, t_2^3) в области $U_1 \cap U_2$ выражается формулами

$$t_2^1 = (t_1^2)^{-1}, \quad t_2^3 = t_1^3 \cdot (t_1^2)^{-1}.$$

Якобиан этого преобразования равен $-(t_1^2)^{-3}$ и, поскольку $t_1^2 = \frac{x^2}{x^1}$, он определен и отличен от нуля в точках, отвечающих точкам рассматриваемого множества $U_1 \cap U_2$.

Итак, $\mathbb{RP}^2$ — двумерное многообразие, обладающее аналитическим атласом из трех карт.

По тем же соображениям, что и в примере 12, где была рассмотрена проективная прямая $\mathbb{RP}^1$, проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ можно интерпретировать как двумерную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ с отождествленными диаметрально противоположными точками или как полусферу с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной окружности. Проектируя по-

лусферу на плоскость, мы получаем возможность интерпретировать $\mathbb{RP}^2$ как круг (двумерный диск) с отождествленными диаметрально противоположными точками его граничной окружности.

Пример 14. Совокупность всех прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$ можно разбить на два множества: U — невертикальные прямые, V — негоризонтальные прямые. Каждая прямая из U имеет уравнение вида $y = u_1 x + u_2$ и тем самым характеризуется координатами (u_1, u_2), в то время как любая прямая из V имеет уравнение $x = v_1 y + v_2$ и задается координатами (v_1, v_2). Для прямых из пересечения $U \cap V$ действуют функции преобразования координат $v_1 = u_1^{-1}$, $v_2 = -u_2 u_1^{-1}$ и $u_1 = v_1^{-1}$, $u_2 = -v_2 v_1^{-1}$. Таким образом, рассматриваемое множество наделяется аналитическим атласом из двух карт.

Любая прямая на плоскости имеет уравнение $ax + by + c = 0$ и характеризуется тройкой чисел (a, b, c), причем пропорциональные тройки задают одну и ту же прямую. Может поэтому показаться, что здесь мы вновь имеем дело с проективной плоскостью $\mathbb{RP}^2$, рассмотренной в примере 13. Однако если в $\mathbb{RP}^2$ допускались любые тройки чисел, не равных одновременно нулю, то теперь не допускаются тройки вида $(0, 0, c)$, где $c \neq 0$. Всем таким тройкам в $\mathbb{RP}^2$ отвечает одна и та же точка. Значит, полученное в настоящем примере многообразие гомеоморфно тому, что получается удалением из $\mathbb{RP}^2$ одной точки. Если интерпретировать $\mathbb{RP}^2$ как круг с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной окружности, то, выколов центр круга, мы с точностью до гомеоморфизма получим кольцо, внешняя окружность которого склеивается по диаметрально противоположным точкам. Простым разрезанием легко показать, что при этом получается не что иное, как знакомый лист Мёбиуса.

Определение 9. Пусть M и N — гладкие многообразия класса $C^{(k)}$. Отображение $f : M \to N$ называется *l-гладким* (класса $C^{(l)}$), если локальные координаты точки $f(x) \in N$ являются функциями класса $C^{(l)}$ от локальных координат точки $x \in M$.

Приведенное определение имеет смысл и корректно (не зависит от выбора локальной карты), если $l \leqslant k$.

В частности, гладкие отображения M в $\mathbb{R}^1$ — это гладкие функции на M, а гладкие отображения $\mathbb{R}^1$ (или промежутка $\mathbb{R}^1$) в M — это гладкие пути на M.

Итак, степень гладкости функции $f : M \to N$ на многообразии M не может превышать степени гладкости самого многообразия.

3. Ориентация многообразия и его края

Определение 10. Две карты гладкого многообразия называются *согласованными*, если переход от локальных координат одной карты к локальным координатам другой карты в их общей области действия осуществляется диффеоморфизмом, имеющим всюду положительный якобиан.

В частности, если районы действия локальных карт имеют пустое пересечение, то такие карты признаются согласованными.

Определение 11. Атлас A гладкого многообразия (M, A) называется *ориентирующим атласом многообразия* M, если он состоит из попарно согласованных карт.

Определение 12. Многообразие называется *ориентируемым*, если оно обладает ориентирующим атласом. В противном случае многообразие называется *неориентируемым*.

Два ориентирующих атласа многообразия будем считать *эквивалентными* (в смысле рассматриваемого сейчас вопроса об ориентации многообразия), если их объединение также является ориентирующим атласом этого многообразия. Легко видеть, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности.

Определение 13. Класс эквивалентности ориентирующих атласов многообразия по указанному отношению эквивалентности называется *классом ориентации атласов многообразия* или *ориентацией многообразия*.

Определение 14. *Ориентированным многообразием* называется многообразие с указанным классом ориентации его атласов, т. е. с фиксированной на многообразии ориентацией.

Значит, ориентировать многообразие — это указать на нем (тем или иным способом) определенный класс ориентации его атласов. Для этого, например, достаточно указать любой конкретный ориентирующий атлас данного класса ориентации.

Различные используемые на практике способы задания ориентации на лежащих в $\mathbb{R}^n$ многообразиях описаны в §§ 2, 3 гл. XII.

Утверждение 3. *Связное многообразие либо неориентируемо, либо допускает две ориентации.*

◄ Пусть A и $\widetilde{A}$ — два ориентирующих атласа данного многообразия M с диффеоморфными переходами от локальных координат карт одного из них к другому. Предположим, что нашлась точка $p_0 \in M$ и такие две карты этих атласов, районы U_{i_0}, $\widetilde{U}_{j_0}$ действия которых содержат p_0, а якобиан преобразования координат этих карт в соответствующих точке p_0 точках областей параметров положителен. Покажем, что тогда для любой точки $p \in M$ и любых карт атласов A, $\widetilde{A}$, районы действия которых содержат точку p, якобиан преобразования координат в соответствующих координатных точках тоже будет положителен.

Сделаем прежде всего очевидное наблюдение, что если в точке $p \in M$ якобиан преобразования положителен (отрицателен) для какой-то пары включающих p карт из атласов A и $\widetilde{A}$, то он в p положителен (отрицателен) для любой такой пары карт, поскольку в пределах одного атласа преобразования координат происходят с положительным якобианом, а якобиан композиции отображений равен произведению их якобианов.

Пусть теперь E — подмножество M, состоящее из тех точек $p \in M$, в которых преобразования координат от карт одного атласа к картам другого происходят с положительным якобианом.

Множество E непусто, так как $p_0 \in E$. Множество E открыто в M. Действительно, для любой точки $p \in E$ найдутся содержащие p районы U_i, $\widetilde{U}_j$ некоторых карт атласов A и $\widetilde{A}$. Множества U_i, $\widetilde{U}_j$ открыты в M, поэтому открыто в M и множество $U_i \cap \widetilde{U}_j$. На содержащей p связной компоненте множества $U_i \cap \widetilde{U}_j$, являющейся открытым в $U_i \cap \widetilde{U}_j$ и в M множеством, якобиан преобразования не может менять знак, не обращаясь в нуль. То есть в некоторой окрестности точки p якобиан остается положительным, что и доказывает открытость множества E. Но множество E еще и замкнуто в M. Это следует из непрерывности якобиана диффеоморфизма и того обстоятельства, что якобиан диффеоморфизма не обращается в нуль.

Итак, E — непустое открыто-замкнутое подмножество связного множества M. Значит, $E = M$ и атласы A, $\widetilde{A}$ задают на M одну и ту же ориентацию.

Заменив во всех картах атласа A одну из координат, например t^1 на $-t^1$, получим ориентирующий атлас $-A$, принадлежащий другому классу ориентации. Поскольку якобиан преобразования координат из произвольной карты в карты атласов A и $-A$ имеет противоположный знак, то на M любой ориентирующий M атлас эквивалентен либо A, либо $-A$. ►

Определение 15. Конечную последовательность карт данного атласа назовем *цепочкой карт*, если районы действия любой пары карт с соседними номерами имеют непустое пересечение ($U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$).

Определение 16. Цепочка карт называется *противоречивой* или *дезориентирующей*, если якобиан преобразования координат от любой карты цепочки к следующей ее карте положителен, районы действия первой и последней карт цепочки пересекаются, но преобразование координат от последней карты к первой имеет отрицательные значения якобиана.

Утверждение 4. *Многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем не существует противоречивой цепочки карт.*

◄ Поскольку любое многообразие распадается на связные компоненты, ориентация которых задается независимо, достаточно доказать утверждение 4 для связного многообразия M.

Необходимость. Пусть связное многообразие M ориентируемо и A — задающий ориентацию M атлас. По доказанному в утверждении 3 любая гладко связанная с картами атласа A локальная карта многообразия M либо согласована со всеми картами атласа A, либо согласована со всеми картами атласа $-A$. Это легко усмотреть из самого утверждения 3, если ограничить карты атласа A на район действия взятой карты, который можно рассматривать как связное ориентированное одной картой многообразие. Отсюда следует, что противоречивой цепочки карт на многообразии M не существует.

Достаточность. Из определения 1 следует, что на многообразии существует атлас из конечного или счетного числа карт. Возьмем такой атлас A и занумеруем его карты. Рассмотрим карту (U_1, φ_1) и любую карту (U_i, φ_i) такую, что $U_1 \cap U_i \neq \varnothing$. Тогда якобиан преобразований координат φ_{1i}, φ_{i1} либо всюду отрицателен, либо всюду в области определения преобразова-

ний положителен. Он не может иметь значения разных знаков, поскольку иначе в множестве $U_1 \cup U_i$ можно было бы указать связные подмножества отрицательности и положительности якобиана U_-, U_+ и цепочка карт (U_1, φ_1), (U_+, φ_1), (U_i, φ_i), (U_-, φ_i) оказалась бы противоречивой.

Итак, меняя, если потребуется, знак одной из координат в карте (U_i, φ_i), можно получить карту с тем же районом действия U_i, согласованную с картой (U_1, φ_1). После описанной процедуры две карты (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) такие, что $U_1 \cap U_i \neq \varnothing$, $U_1 \cap U_j \neq \varnothing$, $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, сами окажутся согласованными: иначе мы построили бы противоречивую цепочку из трех карт.

Таким образом, все карты атласа, районы действия которых пересекаются с U_1, уже можно считать согласованными между собой. Принимая теперь каждую из этих карт за эталон, можно согласовать с нею новые, не охваченные на первом этапе карты атласа. Противоречивых ситуаций при этом не возникнет, поскольку противоречивых цепочек на многообразии по условию не существует. Продолжая этот процесс и учитывая связность многообразия, мы построим на нем атлас, состоящий из попарно согласованных карт, что и доказывает ориентируемость данного многообразия. ►

Полученный критерий ориентируемости многообразия, как, впрочем, и соображения, используемые при его доказательстве, можно с успехом применять при исследовании конкретных многообразий. Так, рассмотренное в примере 12 многообразие $\mathbb{RP}^1$ ориентируемо. Из указанного там атласа легко получить ориентирующий атлас $\mathbb{RP}^1$. Для этого достаточно изменить знак локальной координаты одной из двух построенных там карт. Впрочем, ориентируемость проективной прямой $\mathbb{RP}^1$, очевидно, следует также из того, что многообразие $\mathbb{RP}^1$ гомеоморфно окружности.

Проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ неориентируема: любая пара карт построенного в примере 13 атласа $\mathbb{RP}^2$ такова, что преобразования координат в пределах пары имеют как области положительности, так и области отрицательности якобиана. Как мы видели при доказательстве утверждения 4, отсюда следует существование противоречивой цепочки карт на $\mathbb{RP}^2$.

По той же причине неориентируемо и рассмотренное в примере 14 многообразие, которое, кстати, как отмечалось, гомеоморфно листу Мёбиуса.

Утверждение 5. *Край ориентируемого гладкого n-мерного многообразия является ориентируемым $(n-1)$-мерным многообразием, допускающим структуру той же гладкости, что и исходное многообразие.*

◄ Доказательство утверждения 5 проводится дословно так же, как и рассмотренное в гл. XII, § 3, п. 2 доказательство аналогичного утверждения 2 для поверхностей, лежащих в $\mathbb{R}^n$. ►

Определение 17. Если $A(M) = \{(H^n, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^n, \varphi_j, U_j)\}$ — ориентирующий многообразие M атлас, то совокупность карт

$$A(\partial M) = \left\{(\mathbb{R}^{n-1}, \varphi_i|_{\partial H^n = \mathbb{R}^{n-1}}, \partial U_i)\right\}$$

есть ориентирующий атлас края ∂M многообразия M. Задаваемая этим атла-

сом ориентация края называется *ориентацией края, согласованной с ориентацией многообразия*.

Важные и часто используемые на практике способы задания ориентации лежащей в $\mathbb{R}^n$ поверхности и согласованной ориентации ее края подробно описаны в §§ 2, 3 гл. XII.

4. Разбиение единицы и реализация многообразий в виде поверхностей в $\mathbb{R}^n$. Здесь будет изложена одна специальная конструкция, называемая в математике *разбиением единицы*. Эта конструкция часто бывает основным приемом сведения глобальных вопросов к локальным. В дальнейшем мы продемонстрируем это при выводе формулы Стокса на многообразии, а здесь используем разбиение единицы для пояснения возможности реализации любого многообразия в виде некоторой поверхности в пространстве $\mathbb{R}^n$ достаточно большой размерности n.

Лемма. *На $\mathbb{R}$ можно построить функцию $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такую, что $f(x) \equiv 0$ при $|x| > 3$, $f(x) \equiv 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $0 < f(x) < 1$ при $1 < |x| < 3$.*

◄ Проведем построение одной такой функции, исходя из знакомой нам функции

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

В свое время (см. часть I, стр. 208) мы проверили, что $g \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, показав, что $g^{(n)}(0) = 0$ при любом значении $n \in \mathbb{N}$.

В таком случае неотрицательная функция

$$G(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} \cdot e^{-(x+1)^{-2}} & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

также принадлежит классу $C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, а вместе с нею и функция

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} G(t)\,dt \Big/ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t)\,dt$$

принадлежит этому классу, поскольку

$$F'(x) = G(x) \Big/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t)\,dt.$$

Функция F строго возрастает на промежутке $[-1, 1]$, $F(x) \equiv 0$ при $x \leqslant -1$ и $F(x) \equiv 1$ при $x \geqslant 1$.

В качестве искомой функции можно теперь взять

$$f(x) = F(x+2) + F(-x-2) - 1. \ ►$$

Замечание. Если $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — построенная в доказательстве леммы функция, то определенная в $\mathbb{R}^n$ функция

$$\theta(x^1,\ldots,x^n)=f(x^1-a^1)\cdot\ldots\cdot f(x^n-a^n)$$

такова, что $\theta\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$ в любой точке $x\in\mathbb{R}^n$, $\theta(x)\equiv 1$ на промежутке $I(a)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x^i-a^i|\leqslant 1,\ i=1,\ldots,n\}$, и носитель $\operatorname{supp}\theta$ функции θ содержится в промежутке $\tilde{I}(a)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x^i-a^i|\leqslant 3,\ i=1,\ldots,n\}$.

Определение 18. Пусть M — многообразие класса гладкости $C^{(k)}$, а X — подмножество M. Говорят, что система $E=\{e_\alpha,\ \alpha\in A\}$ функций $e_\alpha\in C^{(k)}(M,\mathbb{R})$ является *k-гладким разбиением единицы* на множестве X, если

1° $0\leqslant e_\alpha(x)\leqslant 1$ для любой функции $e_\alpha\in E$ и любого $x\in M$;

2° каждая точка $x\in X$ обладает такой окрестностью $U(x)$ в M, что только конечное число функций системы E отлично от тождественного нуля на $U(x)$;

3° $\sum\limits_{e_\alpha\in E} e_\alpha(x)\equiv 1$ на X.

Заметим, что в силу условия 2° при любом $x\in X$ в последней сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Определение 19. Пусть $\mathscr{O}=\{o_\beta,\ \beta\in B\}$ — открытое покрытие множества $X\subset M$. Говорят, что *разбиение единицы* $E=\{e_\alpha,\ \alpha\in A\}$ на X *подчинено покрытию* $\mathscr{O}$, если носитель любой функции из системы E содержится по крайней мере в одном из множеств системы $\mathscr{O}$.

Утверждение 6. *Пусть $\{(U_i,\varphi_i),\ i=1,\ldots,m\}$ — конечный набор карт некоторого k-гладкого атласа многообразия M, районы U_i, $i=1,\ldots,m$, действия которых образуют покрытие компакта $K\subset M$. Тогда на K существует разбиение единицы класса $C^{(k)}$, подчиненное покрытию $\{U_i,\ i=1,\ldots,m\}$.*

◄ Для любой точки $x_0\in K$ проведем сначала следующее построение. Берем последовательно область U_i, содержащую x_0, соответствующую карту $\varphi_i:\mathbb{R}^n(H^n)\to U_i$, точку $t_0=\varphi_i^{-1}(x_0)\in\mathbb{R}^n(H^n)$, функцию $\theta(t-t_0)$ (где $\theta(t)$ — указанная в замечании к лемме функция) и ограничение θ_{t_0} функции $\theta(t-t_0)$ на область параметров карты φ_i.

Пусть I_{t_0} — пересечение единичного куба с центром $t_0\in\mathbb{R}^n$ и области параметров карты φ_i. Реально θ_{t_0} отличается от $\theta(t-t_0)$, а I_{t_0} от соответствующего единичного куба, только когда областью параметров карты φ_i является полупространство H^n. Открытые в M множества $\varphi_i(I_t)$, построенные по каждой точке $x\in K$ и соответствующей ей точке $t=\varphi_i^{-1}(x)$ для всех допустимых значений $i=1,2,\ldots,m$, в совокупности образуют открытое покрытие компакта K. Пусть $\{\varphi_{i_j}(I_{t_j}),\ j=1,2,\ldots,l\}$ — извлеченное из него конечное покрытие компакта K. Очевидно, $\varphi_{i_j}(I_{t_j})\subset U_{i_j}$. Определим на U_{i_j} функцию $\widetilde{\theta}_j(x)=\theta_{t_j}\circ\varphi_{i_j}^{-1}(x)$. Распространим $\widetilde{\theta}_j(x)$ на все многообразие M, полагая функцию равной нулю вне U_{i_j}. Сохраним за этой распространенной на M функцией прежнее обозначение $\widetilde{\theta}_j$. По построению $\widetilde{\theta}_j\in C^{(k)}(M,\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\widetilde{\theta}_j\subset U_{i_j}$, $0\leqslant\widetilde{\theta}_j(x)\leqslant 1$ на M и $\widetilde{\theta}_j(x)\equiv 1$ на $\varphi_{i_j}(I_{t_j})\subset U_{i_j}$. Тогда функции $e_1(x)=\widetilde{\theta}_1(x)$, $e_2(x)=\widetilde{\theta}_2(x)(1-\widetilde{\theta}_1(x))$, …, $e_l(x)=\widetilde{\theta}_l(x)\cdot(1-\widetilde{\theta}_{l-1}(x))\cdot\ldots\cdot(1-\widetilde{\theta}_1(x))$

составят искомое разбиение единицы. Проверим лишь, что $\sum_{j=1}^{l} e_j(x) \equiv 1$ на K, поскольку остальным требованиям к разбиению единицы на K, подчиненному покрытию $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_l}\} \subset \{U_i, i=1, \dots, m\}$ компакта K, система функций $\{e_1, \dots, e_l\}$, очевидно, удовлетворяет. Но

$$1 - \sum_{j=1}^{l} e_j(x) = (1-\widetilde{\theta}_1(x)) \cdot \ldots \cdot (1-\widetilde{\theta}_l(x)) \equiv 0 \quad \text{на } K,$$

поскольку каждая точка $x \in K$ покрыта некоторым множеством $\varphi_{i_j}(I_{t_j})$, на котором соответствующая функция $\widetilde{\theta}_j$ тождественно равна единице. ►

Следствие 1. *Если M — компактное многообразие и A — атлас класса $C^{(k)}$ на M, то на M существует конечное разбиение единицы $\{e_1, \dots, e_l\}$, подчиненное покрытию многообразия районами действия карт атласа A.*

◄ Поскольку M — компакт, атлас A можно считать конечным. Теперь мы оказываемся в условиях утверждения 6, если положить в нем $K = M$. ►

Следствие 2. *Для любого лежащего на многообразии M компакта K и любого содержащего K открытого множества $G \subset M$ существует функция $f : M \to \mathbb{R}$ класса гладкости многообразия M такая, что $f(x) \equiv 1$ на K и* $\operatorname{supp} f \subset G$.

◄ Покроем каждую точку $x \in K$ окрестностью $U(x)$, лежащей в G и в пределах района действия некоторой карты многообразия M. Из открытого покрытия $\{U(x), x \in K\}$ компакта K извлекаем конечное покрытие и строим подчиненное ему разбиение единицы $\{e_1, \dots, e_l\}$ на K. Функция $f = \sum_{i=1}^{l} e_i$ будет искомой. ►

Следствие 3. *Каждое (абстрактно заданное) компактное гладкое n-мерное многообразие M диффеоморфно некоторой компактной гладкой поверхности, лежащей в пространстве $\mathbb{R}^N$ достаточно большой размерности N.*

◄ Чтобы не осложнять идею доказательства несущественными деталями, проведем его для случая компактного многообразия M без края. В этом случае на M есть гладкий конечный атлас $A = \{\varphi_i : I \to U_i, i = 1, \dots, m\}$, где I — открытый n-мерный куб в $\mathbb{R}^n$. Подберем чуть меньший куб I' такой, что $I' \subset I$, а множества $\{U'_i = \varphi_i(I'), i = 1, \dots, m\}$ все еще образуют покрытие M. Полагая в следствии 2 $K = I'$, $G = I$, $M = \mathbb{R}^n$, построим функцию $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ такую, что $f(t) \equiv 1$ при $t \in I'$ и $\operatorname{supp} f \subset I$.

Рассмотрим теперь координатные функции $t_i^1(x), \dots, t_i^n(x)$ отображений $\varphi_i^{-1} : U_i \to I$, $i = 1, \dots, m$, и введем с их помощью на M следующие функции:

$$y_i^k(x) = \begin{cases} (f \circ \varphi_i^{-1})(x) \cdot t_i^k(x) & \text{при } x \in U_i, \\ 0 & \text{при } x \notin U_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m; \; k = 1, \dots, n.$$

В любой точке $x \in M$ ранг отображения $M \ni x \mapsto y(x) = (y_1^1, \dots, y_1^n, \dots, y_m^1, \dots, y_m^n)(x) \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ максимален и равен n. Действительно, если $x \in U'_i$, то $\varphi_i^{-1}(x) = t \in I'$, $f \circ \varphi_i^{-1}(x) = 1$ и $y_i^k(\varphi_i(t)) = t_i^k$, $k = 1, \dots, n$.

Если, наконец, рассмотреть отображение $M \ni x \mapsto Y(x) = (y(x), f \circ \varphi_1^{-1}(x), \ldots, f \circ \varphi_m^{-1}(x)) \in \mathbb{R}^{m \cdot n + m}$, полагая $f \circ \varphi_i^{-1}(x) \equiv 0$ вне U_i, $i = 1, \ldots, m$, то это отображение, с одной стороны, очевидно, будет иметь тот же ранг n, что и отображение $x \mapsto y(x)$, а с другой стороны, будет заведомо взаимно однозначным отображением M на образ M в $\mathbb{R}^{m \cdot n + m}$. Проверим последнее утверждение. Пусть p, q — различные точки M. Найдем область U_i' из системы $\{U_i', i = 1, \ldots, m\}$, покрывающей M, которая содержит точку p. Тогда $f \circ \varphi_i^{-1}(p) = 1$. Если $f \circ \varphi_i^{-1}(q) < 1$, то уже $Y(p) \neq Y(q)$. Если же $f \circ \varphi_i^{-1}(q) = 1$, то $p, q \in U_i$, $y_i^k(p) = t^k(p)$, $y_i^k(q) = t^k(q)$ и $t_i^k(p) \neq t_i^k(q)$ хотя бы для одного значения $k \in \{1, \ldots, n\}$. То есть и в этом случае $Y(p) \neq Y(q)$. ►

По поводу общей теоремы Уитни о реализации произвольного многообразия в виде поверхности в $\mathbb{R}^n$ читатель может обратиться к специальной геометрической литературе.

Задачи и упражнения

1. Проверьте, что вводимый определением 1 объект (*многообразие*) не изменится, если потребовать лишь, чтобы каждая точка $x \in M$ имела окрестность $U(x) \subset M$, гомеоморфную открытому подмножеству полупространства H^n.

2. Покажите, что

a) многообразие $GL(n, \mathbb{R})$ из примера 6 некомпактно и имеет точно две связные компоненты;

b) многообразие $SO(n, \mathbb{R})$ (см. пример 7) связно;

c) многообразие $O(n, \mathbb{R})$ компактно и имеет точно две связные компоненты.

3. Пусть (M, A) и $(\widetilde{M}, \widetilde{A})$ — многообразия с заданными на них гладкими структурами одной и той же степени гладкости $C^{(k)}$. Гладкие многообразия (M, A), $(\widetilde{M}, \widetilde{A})$ (*гладкие структуры*) считаются *изоморфными*, если существует такое отображение $f: M \to \widetilde{M}$ класса $C^{(k)}$, которое имеет обратное отображение $f^{-1}: \widetilde{M} \to M$ того же класса гладкости $C^{(k)}$ в атласах A, $\widetilde{A}$.

a) Покажите, что на $\mathbb{R}^1$ все структуры одинаковой гладкости изоморфны.

b) Проверьте высказанные в примере 11 утверждения и выясните, не противоречат ли они задаче a).

c) Покажите, что на окружности S^1 (одномерной сфере) любые две $C^{(\infty)}$-структуры изоморфны. Отметим, что это утверждение остается в силе и для сфер, размерность которых не превосходит 6, а уже на S^7, как показал Милнор[1], существуют неизоморфные $C^{(\infty)}$-структуры.

4. Пусть S — подмножество n-мерного многообразия M такое, что для любой точки $x_0 \in S$ найдется такая карта $x = \varphi(t)$ многообразия M, район U действия которой содержит x_0, а множеству $S \cap U$ в области параметров $t = (t^1, \ldots, t^n)$ карты φ отвечает k-мерная поверхность, задаваемая соотношениями $t^{k+1} = 0, \ldots, t^n = 0$. В этом случае S называется *k-мерным подмногообразием многообразия M*.

a) Покажите, что на S естественным образом возникает структура k-мерного многообразия, индуцированная структурой многообразия M и имеющая ту же гладкость, что и гладкость структуры многообразия M.

---

[1]Дж. Милнор (род. 1931) — один из наиболее крупных современных американских математиков; основные работы по алгебраической топологии и топологии многообразий.

b) Убедитесь в том, что k-мерные поверхности S в $\mathbb{R}^n$ в точности и являются k-мерными подмногообразиями $\mathbb{R}^n$.

c) Покажите, что при гладком гомеоморфном отображении $f\colon \mathbb{R}^1 \to T^2$ прямой $\mathbb{R}^1$ в тор T^2 образ $f(\mathbb{R}^1)$ может быть всюду плотным подмножеством T^2 и в этом случае не будет одномерным подмногообразием тора, хотя и будет абстрактным одномерным многообразием.

d) Проверьте, что объем понятия «подмногообразие» не изменится, если считать $S \subset M$ k-мерным подмногообразием n-мерного многообразия M в том случае, когда для любой точки $x_0 \in S$ найдется локальная карта многообразия M, район U действия которой содержит x_0, а множеству $S \cap U$ в области параметров карты отвечает некоторая k-мерная поверхность пространства $\mathbb{R}^n$.

5. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство (многообразие), а G — группа гомеоморфных преобразований пространства X. Группа G называется *дискретной группой преобразований пространства* X, если для любых (быть может, и совпадающих) точек $x_1, x_2 \in X$ найдутся такие их окрестности U_1, U_2 соответственно, что множество $\{g \in G \mid g(U_1) \cap U_2 \neq \varnothing\}$ — конечно.

a) Отсюда следует, что *орбита* $\{g(x) \in X \mid g \in G\}$ любой точки $x \in X$ дискретна, а *стабилизатор* $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ любой точки $x \in X$ конечен.

b) Проверьте, что если G — группа изометрий метрического пространства X, обладающая двумя указанными в a) свойствами, то G — дискретная группа преобразований X.

c) Введите естественную структуру топологического пространства (многообразия) на множестве X/G орбит дискретной группы G.

d) Замкнутое подмножество F топологического пространства (многообразия) X с дискретной группой G преобразований называют *фундаментальной областью группы* G, если оно является замыканием открытого подмножества X и если множества $g(F)$, где $g \in G$, не имеют попарно общих внутренних точек и образуют локально конечное покрытие пространства X. Покажите на приведенных в основном тексте примерах 8—10, как фактор-пространство X/G (орбит) группы G получается из F «склеиванием» некоторых граничных точек.

6. a) Используя конструкции примеров 12, 13, постройте n-мерное вещественное проективное пространство $\mathbb{RP}^n$.

b) Покажите, что $\mathbb{RP}^n$ ориентируемо, если n нечетно, и неориентируемо, если n четно.

c) Проверьте, что многообразия $SO(3,\mathbb{R})$ и $\mathbb{RP}^3$ гомеоморфны.

7. Проверьте, что построенное в примере 14 многообразие действительно гомеоморфно листу Мёбиуса.

8. a) *Группа Ли*[1] — это группа G, наделенная структурой аналитического многообразия так, что отображения $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$, $g \mapsto g^{-1}$ являются аналитическими отображениями $G \times G$ и G в G. Покажите, что рассмотренные в примерах 6, 7 многообразия являются группами Ли.

---

[1]С. Ли (1842—1899) — выдающийся норвежский математик, родоначальник теории непрерывных групп (групп Ли), которая имеет теперь фундаментальное значение в геометрии, топологии и математических методах физики; один из лауреатов Международной премии имени Лобачевского (награжден в 1897 г. за работу по применению теории групп к обоснованию геометрии).

b) *Топологическая группа* (или *непрерывная группа*) — это группа G, наделенная структурой топологического пространства так, что групповые операции умножения и перехода к обратному элементу непрерывны как отображения $G \times G \to G$, $G \to G$ в рассматриваемой топологии G. На примере группы $\mathbb{Q}$ рациональных чисел покажите, что не всякая топологическая группа является группой Ли.

c) Покажите, что каждая группа Ли является топологической группой в смысле данного в b) определения.

d) Доказано[1], что любая топологическая группа G, являющаяся многообразием, есть группа Ли (т. е. G как многообразие допускает аналитическую структуру, в которой группа становится группой Ли). Покажите, что любое групповое многообразие (т. е. любая группа Ли) является ориентируемым многообразием.

9. Система подмножеств топологического пространства называется *локально конечной*, если каждая точка пространства имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом множеств системы. В частности, можно говорить о локально конечном покрытии пространства.

Одна система множеств называется *вписанной* в другую, если любое множество первой системы содержится по крайней мере в одном из множеств второй системы. В частности, можно говорить о том, что одно покрытие некоторого множества вписано в другое такое покрытие.

a) Покажите, что в любое открытое покрытие $\mathbb{R}^n$ можно вписать открытое локально конечное покрытие $\mathbb{R}^n$.

b) Решите задачу a) с заменой $\mathbb{R}^n$ произвольным многообразием M.

c) Покажите, что на $\mathbb{R}^n$ существует разбиение единицы, подчиненное любому наперед заданному открытому покрытию $\mathbb{R}^n$.

d) Проверьте, что утверждение c) остается в силе для произвольного многообразия.

§ 3. Дифференциальные формы и их интегрирование на многообразиях

1. Касательное пространство к многообразию в точке. Напомним, что каждому гладкому пути $\mathbb{R} \ni t \overset{\gamma}{\longmapsto} x(t) \in \mathbb{R}^n$ (движению в $\mathbb{R}^n$), проходящему в некоторый момент t_0 через точку $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$, мы сопоставили вектор $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ мгновенной скорости: $\xi = \dot{x}(t) = (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n)(t_0)$. Совокупность таких векторов ξ, связанных с точкой $x_0 \in \mathbb{R}^n$, естественно отождествляется с арифметическим пространством $\mathbb{R}^n$ и обозначается символом $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ (или $T_{x_0}(\mathbb{R}^n)$). В $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ вводятся те же линейные операции над элементами $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, что и над соответствующими элементами линейного пространства $\mathbb{R}^n$. Так возникает линейное пространство $T\mathbb{R}^n_{x_0}$, называемое *касательным пространством к $\mathbb{R}^n$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$*.

Забыв мотивировки и наводящие соображения, можно теперь сказать, что формально $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ есть пара $(x_0, \mathbb{R}^n)$, состоящая из точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и связанного с нею экземпляра линейного пространства $\mathbb{R}^n$.

---

[1] Это ответ на так называемую пятую проблему Гильберта.

Пусть теперь M — гладкое n-мерное многообразие с атласом A класса гладкости не ниже, чем $C^{(1)}$. Мы хотим определить касательный вектор ξ и касательное пространство TM_{p_0} к многообразию M в точке $p_0 \in M$.

Воспользуемся для этого указанной выше интерпретацией касательного вектора как мгновенной скорости движения. Возьмем гладкий путь $\mathbb{R} \ni t \overset{\gamma}{\longmapsto} p(t) \in M$ на многообразии M, проходящий в момент t_0 через точку $p_0 = p(t_0) \in M$. Параметры карт (т. е. локальные координаты) многообразия M будем здесь обозначать буквой x, отмечая их снизу индексом соответствующей карты, а сверху номером координаты. Итак, в области параметров каждой карты (U_i, φ_i), район U_i действия которой содержит точку p_0, пути γ отвечает свой путь $t \overset{\gamma_i}{\longmapsto} \varphi_i^{-1} \circ p(t) = x_i(t) \in \mathbb{R}^n(H^n)$, который является гладким по определению гладкого отображения $\mathbb{R} \ni t \overset{\gamma}{\longmapsto} p(t) \in M$.

Таким образом, в области параметров карты (U_i, φ_i), где φ_i есть отображение $p = \varphi_i(x_i)$, возникает точка $x_i(t_0) = \varphi_i^{-1}(p_0)$ и вектор $\xi_i = \dot{x}_i(t_0) \in T\mathbb{R}^n_{x_i(t_0)}$. В другой такой карте (U_j, φ_j) это будут соответственно точка $x_j(t_0) = \varphi_j^{-1}(p_0)$ и вектор $\xi_j = \dot{x}_j(t_0) \in T\mathbb{R}^n_{x_j(t_0)}$. Естественно считать, что это координатные выражения в различных картах того, что мы хотели бы назвать касательным вектором ξ к многообразию M в точке $p_0 \in M$.

Между координатами x_i, x_j действуют гладкие взаимно обратные функции перехода
$$x_i = \varphi_{ji}(x_j), \quad x_j = \varphi_{ij}(x_i), \tag{1}$$
в результате чего пары $(x_i(t_0), \xi_i)$, $(x_j(t_0), \xi_j)$ оказываются связанными соотношениями
$$x_i(t_0) = \varphi_{ji}(x_j(t_0)), \qquad x_j(t_0) = \varphi_{ij}(x_i(t_0)), \tag{2}$$
$$\xi_i = \varphi'_{ji}(x_j(t_0))\xi_j, \quad \xi_j = \varphi'_{ij}(x_i(t_0))\xi_i. \tag{3}$$

Равенства (3), очевидно, вытекают из формул
$$\dot{x}_i(t) = \varphi'_{ji}(x_j(t))\dot{x}_j(t), \quad \dot{x}_j(t) = \varphi'_{ij}(x_i(t))\dot{x}_i(t),$$
получающихся из (1) в результате дифференцирования.

Определение 1. Будем говорить, что задан *вектор ξ, касательный к многообразию M в точке $p \in M$*, если в каждом пространстве $T\mathbb{R}^n_{x_i}$, касательном к $\mathbb{R}^n$ в точке x_i, отвечающей точке p в области параметров карты (U_i, φ_i), где $U_i \ni p$, фиксирован вектор ξ_i, причем так, что выполняются соотношения (3).

Если элементы матрицы Якоби φ'_{ji} отображения φ_{ji} записать в явном виде $\frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^m}$, то получаем, таким образом, следующую явную формулу связи двух координатных представлений одного и того же вектора ξ:
$$\xi_i^k = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^m} \xi_j^m, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где частные производные вычисляются в соответствующей p точке $x_j = \varphi_j^{-1}(p)$.

Обозначим через TM_p совокупность векторов, касательных к многообразию M в точке $p \in M$.

Определение 2. Если линейную структуру на множестве TM_p ввести, отождествляя TM_p с соответствующим пространством $T\mathbb{R}^n_{x_i}$ $(TH^n_{x_i})$, т. е. суммой векторов из TM_p считать вектор, координатное представление которого в $T\mathbb{R}^n_{x_i}$ $(TH^n_{x_i})$ отвечает сумме координатных представлений слагаемых, и аналогично определить умножение вектора на число, то получаемое при этом линейное пространство обозначается обычно одним из символов TM_p, $T_p(M)$ и называется *касательным пространством к многообразию M в точке $p \in M$*.

Из формул (3), (4) видно, что введенная в TM_p линейная структура не зависит от выбора индивидуальной карты, т. е. в этом смысле определение 2 корректно.

Итак, мы определили касательное пространство к многообразию. Интерпретации касательного вектора и касательного пространства могут быть различными (см. задачу 1). Например, одной из таких интерпретаций является отождествление касательного вектора с линейным функционалом. Это отождествление основано на следующем наблюдении, которое мы сделаем в $\mathbb{R}^n$.

Каждый вектор $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ есть вектор скорости, отвечающий некоторому гладкому пути $x = x(t)$, т. е. $\xi = \dot{x}(t)|_{t=t_0}$, причем $x_0 = x(t_0)$. Это позволяет определить производную $D_\xi f(x_0)$ в точке x_0 по вектору $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$ от гладкой функции f, заданной в $\mathbb{R}^n$ (или в окрестности точки x_0). А именно:

$$D_\xi f(x_0) := \frac{d}{dt}(f \circ x)(t)\Big|_{t=t_0}, \tag{5}$$

т. е.

$$D_\xi f(x_0) = f'(x_0)\xi, \tag{6}$$

где $f'(x_0)$ — касательное к f отображение (дифференциал f) в точке x_0.

Функционал $D_\xi : C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, сопоставляемый формулами (5), (6) вектору $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, очевидно, линеен по f. Из формулы (6) видно также, что величина $D_\xi f(x_0)$ при фиксированной функции f линейно зависит от ξ, т. е. сумме векторов отвечает сумма соответствующих линейных функционалов, а умножение вектора ξ на число отвечает умножение функционала D_ξ на это же число. Таким образом, между линейным пространством $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ и линейным пространством соответствующих линейных функционалов D_ξ имеется изоморфизм. Остается определить линейный функционал D_ξ, указав набор его характеристических свойств, чтобы получить новую, но, конечно, изоморфную прежней, интерпретацию касательного пространства $T\mathbb{R}^n_{x_0}$.

Заметим, что, кроме указанной выше линейности, функционал D_ξ обладает следующим свойством:

$$D_\xi(f \cdot g)(x_0) = D_\xi f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot D_\xi g(x_0). \tag{7}$$

Это закон дифференцирования произведения.

В дифференциальной алгебре аддитивное отображение $a \mapsto a'$ кольца A, удовлетворяющее соотношению $(a \cdot b)' = a' \cdot b + a \cdot b'$, называют *дифференцированием* (точнее, *дифференцированием кольца* A). Таким образом, функционал $D_\xi \colon C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ является дифференцированием кольца $C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Но D_ξ еще и линеен относительно линейной структуры пространства $C^{(1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Можно проверить, что линейный функционал $l \colon C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, обладающий свойствами

$$l(\alpha f + \beta g) = \alpha l(f) + \beta l(g), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$l(f \cdot g) = l(f) g(x_0) + f(x_0) l(g), \tag{9}$$

имеет вид D_ξ, где $\xi \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$. Таким образом, касательное пространство $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ к $\mathbb{R}^n$ в точке x_0 можно трактовать как линейное пространство функционалов (дифференцирований) на $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, удовлетворяющих условиям (8), (9).

Базисным векторам $e_1, \ldots, e_n$ пространства $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ отвечают функционалы $D_{e_k} f(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^k} f(x)\Big|_{x=x_0}$ вычисления соответствующей частной производной от функции f в точке x_0. Таким образом, при функциональной интерпретации пространства $T\mathbb{R}^n_{x_0}$ можно сказать, что функционалы $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}\Big|_{x=x_0}$ образуют базис $T\mathbb{R}^n_{x_0}$.

Если $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in T\mathbb{R}^n_{x_0}$, то соответствующий вектору ξ оператор D_ξ имеет вид $D_\xi = \xi^k \frac{\partial}{\partial \xi^k}$.

Совершенно аналогично касательный вектор ξ к n-мерному многообразию M класса $C^{(\infty)}$ в точке $p_0 \in M$ можно интерпретировать (или определить) как элемент пространства дифференцирований l на $C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$, обладающих свойствами (8), (9), при этом в соотношении (9) x_0, естественно, заменяется на p_0 и тем самым функционал l связывается именно с точкой $p_0 \in M$. Такое определение касательного вектора ξ и касательного пространства TM_{p_0} формально не требует привлечения локальных координат и в этом смысле, очевидно, инвариантно. В координатах $(x_i^1, \ldots, x_i^n)$ локальной карты (U_i, φ_i) оператор l имеет вид $\xi_i^1 \frac{\partial}{\partial x_i^1} + \ldots + \xi_i^n \frac{\partial}{\partial x_i^n} = D_{\xi_i}$. Набор чисел $(\xi_i^1, \ldots, \xi_i^n)$ естественно называется *координатами касательного вектора* $l \in TM_{p_0}$ в координатах карты (U_i, φ_i). Координатные представления одного и того же функционала $l \in TM_{p_0}$ в картах (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) в силу законов дифференцирования связаны соотношениями

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_i^k \frac{\partial}{\partial x_i^k} = \sum_{m=1}^{n} \xi_j^m \frac{\partial}{\partial x_j^m} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial x_i^k}{\partial x_j^m} \xi_j^m \right) \frac{\partial}{\partial x_i^k}, \tag{4'}$$

которые, естественно, повторяют соотношения (4).

2. Дифференциальная форма на многообразии. Рассмотрим теперь пространство T^*M_p, сопряженное к касательному пространству TM_p, то

есть T^*M_p есть пространство линейных вещественнозначных функционалов на TM_p.

Определение 3. Пространство T^*M_p, сопряженное пространству TM_p, касательному к многообразию M в точке $p \in M$, называется *кокасательным пространством к многообразию M в точке p*.

Если многообразие M — класса $C^{(\infty)}$, $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$, а l_ξ — отвечающее вектору $\xi \in TM_p$ дифференцирование, то при фиксированной функции $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$ отображение $\xi \mapsto l_\xi f$, очевидно, будет элементом пространства T^*M_p. В случае $M = \mathbb{R}^n$ получается $\xi \mapsto D_\xi f(p) = f'(p)\xi$, поэтому построенное отображение $\xi \mapsto l_\xi f$, естественно, называется дифференциалом функции f в точке p и обозначается обычным символом $df(p)$.

Если $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$ (или $TH^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$ при $p \in \partial M$) — пространство, отвечающее в карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ многообразия M касательному пространству TM_p, то пространство $T^*\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$, сопряженное к $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$, естественно считать изображением (представителем) пространства T^*M_p в этой локальной карте. В координатах $(x^1_\alpha, \ldots, x^n_\alpha)$ локальной карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ базису $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1_\alpha}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n_\alpha}\right\}$ пространства $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$ (или $TH^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$, если $p \in \partial M$) отвечает взаимный с ним базис $\{dx^1, \ldots$ $\ldots, dx^n\}$ в сопряженном пространстве. (Напомним, что $dx^i(\xi) = \xi^i$, поэтому $dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j$. Выражения этих взаимных базисов в другой карте (U_β, φ_β) могут оказаться не столь простыми, ибо $\frac{\partial}{\partial x^j_\beta} = \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta}\frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}$, $dx^i_\alpha = \frac{\partial x^i_\alpha}{\partial x^j_\beta} dx^j_\beta$.)

Определение 4. Говорят, что на гладком n-мерном многообразии M задана дифференциальная форма ω^m степени m, если на каждом касательном к M пространстве TM_p, $p \in M$, определена кососимметрическая форма $\omega^m(p): (TM_p)^m \to \mathbb{R}$.

Практически это означает всего-навсего, что в каждом пространстве $T\mathbb{R}^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$ (или $TH^n_{\varphi_\alpha^{-1}(p)}$), отвечающем пространству TM_p в карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ многообразия M, задана соответствующая m-форма $\omega_\alpha(x_\alpha)$, где $x_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(p)$. То, что две такие формы $\omega_\alpha(x_\alpha)$, $\omega_\beta(x_\beta)$ являются представителями одной и той же формы $\omega(p)$, выражается соотношением

$$\omega_\alpha(x_\alpha)((\xi_1)_\alpha, \ldots, (\xi_m)_\alpha) = \omega_\beta(x_\beta)((\xi_1)_\beta, \ldots, (\xi_m)_\beta), \tag{10}$$

в котором x_α, x_β — представители точки $p \in M$, а $(\xi_1)_\alpha, \ldots, (\xi_m)_\alpha, (\xi_1)_\beta, \ldots,$ $(\xi_m)_\beta$ — представители векторов $\xi_1, \ldots, \xi_m \in TM_p$ в картах $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) соответственно.

В более формальной записи это означает, что

$$x_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}(x_\beta), \qquad x_\beta = \varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha), \tag{3'}$$

$$\xi_\alpha = \varphi'_{\beta\alpha}(x_\beta)\xi_\beta, \quad \xi_\beta = \varphi'_{\alpha\beta}(x_\alpha)\xi_\alpha, \tag{4'}$$

где, как обычно, $\varphi_{\beta\alpha}$ и $\varphi_{\alpha\beta}$ являются соответственно функциями $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$, $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ преобразования координат, а касательные к ним отображения

$\varphi'_{\beta\alpha} =: (\varphi_{\beta\alpha})_*$, $\varphi'_{\alpha\beta} =: (\varphi_{\alpha\beta})_*$ осуществляют изоморфизм касательных к $\mathbb{R}^n$ (H^n) пространств в соответствующих точках x_α, x_β. Как было сказано в § 1, п. 3, сопряженные отображения $(\varphi'_{\beta\alpha})^* =: \varphi^*_{\beta\alpha}$, $(\varphi'_{\alpha\beta})^* =: \varphi^*_{\alpha\beta}$ осуществляют при этом перенос форм, и соотношение (10) в точности означает, что

$$\omega_\alpha(x_\alpha) = \varphi^*_{\alpha\beta}(x_\alpha)\omega_\beta(x_\beta), \tag{10$'$}$$

где α и β — равноправные индексы (которые можно поменять местами).

Матрица (c_i^j) отображения $\varphi'_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ известна: $(c_i^j) = \left(\frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}\right)(x_\alpha)$. Таким образом, если

$$\omega_\alpha(x_\alpha) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} a_{i_1, \ldots, i_m}\, dx_\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{i_m} \tag{11}$$

и

$$\omega_\beta(x_\beta) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} b_{j_1, \ldots, j_m}\, dx_\beta^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_\beta^{j_m}, \tag{12}$$

то в соответствии с формулой (30) из § 1 получаем, что

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_m}\, dx_\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{i_m} = \\ = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n}} b_{j_1 \ldots j_m} \frac{\partial(x_\beta^{j_1}, \ldots, x_\beta^{j_m})}{\partial(x_\alpha^{i_1}, \ldots, x_\alpha^{i_m})}(x_\alpha)\, dx_\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{i_m}, \tag{13}$$

где $\frac{\partial(\ )}{\partial(\ )}$, как всегда, означает определитель матрицы из соответствующих частных производных.

Итак, различные координатные выражения одной и той же формы ω получаются друг из друга прямой заменой переменных (с раскрытием соответствующих дифференциалов координат и последующими алгебраическими преобразованиями в соответствии с законами внешнего умножения).

Если условиться форму ω_α считать переносом заданной на многообразии формы ω в область параметров карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, то естественно писать, что $\omega_\alpha = \varphi_\alpha^*\omega$ и считать, что $\omega_\alpha = \varphi_\alpha^* \circ (\varphi_\beta^{-1})^*\omega_\beta = \varphi^*_{\alpha\beta}\omega_\beta$, где композиция $\varphi_\alpha^* \circ \circ (\varphi_\beta^{-1})^*$ в данном случае играет роль формальной детализации отображения $\varphi^*_{\alpha\beta} = (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)^*$.

Определение 5. Дифференциальная m-форма ω на n-мерном многообразии M *принадлежит классу гладкости* $C^{(k)}$, если коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_m}(x_\alpha)$ ее координатного представления

$$\omega_\alpha = \varphi_\alpha^*\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} a_{i_1 \ldots i_m}(x_\alpha)\, dx_\alpha^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_\alpha^{i_m}$$

в любой карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ атласа, задающего на M гладкую структуру, являются функциями соответствующего класса $C^{(k)}$.

Из формулы (13) видно, что определение 5 корректно, если само многообразие M имеет гладкость класса $C^{(k+1)}$; например, когда M есть многообразие класса $C^{(\infty)}$.

Для заданных на многообразии дифференциальных форм естественным образом (поточечно) определены операции сложения, умножения на число и внешнего умножения (в частности, умножения на функцию $f\colon M\to\mathbb{R}$, которая по определению считается формой степени нуль). Первые две из этих операций превращают множество Ω_k^m m-форм класса $C^{(k)}$ на M в линейное пространство. В случае $k=\infty$ это линейное пространство обычно обозначают символом Ω^m. Ясно, что внешнее произведение форм $\omega^{m_1}\in\Omega_k^{m_1}$, $\omega^{m_2}\in\Omega_k^{m_2}$ дает форму $\omega^{m_1+m_2}=\omega^{m_1}\wedge\omega^{m_2}\in\Omega_k^{m_1+m_2}$.

3. Внешний дифференциал

Определение 6. *Внешним дифференциалом* называется линейный оператор $d\colon\Omega_k^m\to\Omega_{k-1}^{m+1}$, обладающий следующими свойствами:

1° $d\colon\Omega_k^0\to\Omega_{k-1}^1$ на любой функции $f\in\Omega_k^0$ совпадает с обычным дифференциалом df этой функции.

2° $d\colon(\omega^{m_1}\wedge\omega^{m_2})=d\omega^{m_1}\wedge\omega^{m_2}+(-1)^{m_1}\omega^{m_1}\wedge d\omega^{m_2}$, где $\omega^{m_1}\in\Omega_k^{m_1}$, $\omega^{m_2}\in\in\Omega_k^{m_2}$.

3° $d^2:=d\circ d=0$.

Последнее равенство означает, что для любой формы ω форма $d(d\omega)$ нулевая.

Наличие требования 3° подразумевает, таким образом, что речь идет о формах гладкости не ниже чем класса $C^{(2)}$.

Практически это означает, что рассматривается $C^{(\infty)}$-многообразие M и оператор d, действующий из Ω^m в Ω^{m+1}.

Формула для вычисления оператора d в локальных координатах конкретной карты (а вместе с нею и единственность оператора d) вытекает из соотношения

$$d\Bigl(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} c_{i_1\ldots i_m}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_m}\Bigr)=$$
$$=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} dc_{i_1\ldots i_m}(x)\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_m}$$
$$\Bigl(+\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_m\leqslant n} c_{i_1\ldots i_m}\,d(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_m})=0\Bigr).\quad(14)$$

Существование оператора d вытекает теперь из того, что определенный в локальной системе координат соотношением (14) оператор удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3° определения 6.

Из сказанного, в частности, следует, что если $\omega_\alpha=\varphi_\alpha^*\omega$ и $\omega_\beta=\varphi_\beta^*\omega$ — координатные представления одной и той же формы ω, т. е. $\omega_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}^*\omega_\beta$,то $d\omega_\alpha$ и $d\omega_\beta$ также будут координатными представлениями одной и той же

формы $(d\omega)$, т. е. $d\omega_\alpha = \varphi^*_{\alpha\beta}\, d\omega_\beta$. Таким образом, справедливо соотношение $d(\varphi^*_{\alpha\beta}\omega_\beta) = \varphi^*_{\alpha\beta}(d\omega_\beta)$, что в абстрактной записи означает коммутативность

$$d\varphi^* = \varphi^* d \tag{15}$$

оператора d и операции φ^* переноса форм.

4. Интеграл от формы по многообразию

Определение 7. Пусть M — n-мерное гладкое ориентированное многообразие, на котором координаты $x^1, \ldots, x^n$ и ориентация задаются одной картой $\varphi_x : D_x \to M$ с областью параметров $D_x \subset \mathbb{R}^n$. Пусть ω — n-форма на M и $a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ — ее координатное представление в области D_x. Тогда

$$\int_M \omega := \int_{D_x} a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{16}$$

где слева стоит определяемый *интеграл от формы ω по ориентированному многообразию M*, а справа — интеграл от функции $a(x)$ по области D_x.

Если $\varphi_t : D_t \to M$ — другой состоящий из одной карты атлас M, задающий на M ту же ориентацию, что и атлас $\varphi_x : D_x \to M$, то якобиан $\det \varphi'(t)$ функции $x = \varphi(t)$ преобразования координат всюду положителен в области D_t. Форме ω в D_t отвечает форма

$$\varphi^*(a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = a(x(t)) \det \varphi'(t)\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n.$$

По теореме о замене переменных в кратном интеграле имеет место равенство

$$\int_{D_x} a(x)\, dx^1 \ldots dx^n = \int_{D_t} a(x(t)) \det \varphi'(t)\, dt^1 \ldots dt^n,$$

показывающее независимость левой части соотношения (16) от выбора системы координат на M.

Итак, определение 7 корректно.

Определение 8. *Носителем* определенной на многообразии M *формы ω* называется замыкание множества тех точек $x \in M$, где $\omega(x) \neq 0$.

Носитель формы ω обозначается символом $\operatorname{supp} \omega$. В случае 0-форм, т. е. функций, мы уже с этим понятием встречались. Вне носителя координатное представление формы в любой локальной системе координат является нулевой формой данной степени.

Определение 9. Заданная на многообразии M форма ω называется *финитной формой*, если $\operatorname{supp} \omega$ — компакт в M.

Определение 10. Пусть ω — финитная форма степени n на n-мерном гладком многообразии M, ориентированном атласом A. Пусть $\varphi_i : D_i \to U_i$ $\{(U_i, \varphi_i), i = 1, \ldots, m\}$ — конечный набор карт атласа A, районы $U_1, \ldots, U_m$ действия которых покрывают $\operatorname{supp} \omega$, а $e_1, \ldots, e_k$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы на $\operatorname{supp} \omega$. Повторяя некоторые карты по нескольку раз, можно считать, что $m = k$ и что $\operatorname{supp} e_i \subset U_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Интегралом от финитной формы ω по ориентированному многообразию M называется величина

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} \varphi_i^*(e_i \omega), \tag{17}$$

где $\varphi_i^*(e_i\omega)$ — координатное представление формы $e_i\omega|_{U_i}$ в области D_i изменения координат соответствующей локальной карты.

Докажем корректность этого определения.

◄ Пусть $\widetilde{A} = \{\widetilde{\varphi}_j : \widetilde{D}_j \to \widetilde{U}_j\}$ — другой атлас, задающий на M ту же гладкую структуру и ориентацию, что и атлас A, и пусть $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_{\widetilde{m}}$, $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_{\widetilde{m}}$ — соответствующее покрытие $\operatorname{supp}\omega$ и подчиненное ему разбиение единицы на $\operatorname{supp}\omega$. Введем функции $f_{ij} = e_i\tilde{e}_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, \widetilde{m}$, и положим $\omega_{ij} = f_{ij}\omega$.

Заметим, что $\operatorname{supp}\omega_{ij} \subset W_{ij} = U_i \cap \widetilde{U}_j$. Отсюда и из корректности определения 7 интеграла по задаваемому одной картой ориентированному многообразию вытекает, что

$$\int_{D_i} \varphi_i^*(\omega_{ij}) = \int_{\varphi_i^{-1}(W_{ij})} \varphi_i^*(\omega_{ij}) = \int_{\widetilde{\varphi}_j^{-1}(W_{ij})} \widetilde{\varphi}_j^*(\omega_{ij}) = \int_{\widetilde{D}_j} \widetilde{\varphi}_j^*(\omega_{ij}).$$

Суммируя эти равенства по i от 1 до m и по j от 1 до $\widetilde{m}$ с учетом того, что $\sum_{i=1}^{m} f_{ij} = \tilde{e}_j$, $\sum_{j=1}^{\widetilde{m}} f_{ij} = e_i$, получим интересующее нас тождество. ►

5. Формула Стокса

Теорема. *Пусть M — ориентированное гладкое n-мерное многообразие и ω — гладкая финитная дифференциальная форма степени $n-1$ на нем. Тогда*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega, \tag{18}$$

где ориентация края ∂M многообразия M берется согласованной с ориентацией многообразия M. Если же $\partial M = \varnothing$, то $\int_M d\omega = 0$.

◄ Без ограничения общности можно считать, что областями изменения координат (параметров) всех локальных карт многообразия M являются либо открытый куб $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x^i < 1,\ i = 1, \ldots, n\}$, либо куб $\tilde{I} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x^1 \leqslant 1 \land 0 < x^i < 1,\ i = 2, \ldots, n\}$ с одной (определенной!) присоединяемой к кубу I гранью.

С помощью разбиения единицы утверждение теоремы сводится к случаю, когда $\operatorname{supp}\omega$ лежит в районе U действия одной карты вида $\varphi : I \to U$ или $\varphi : \tilde{I} \to U$. В координатах этой карты форма ω имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где символ $\widehat{\ }$, как обычно, означает пропуск соответствующего множителя.

В силу линейности интеграла утверждение достаточно доказать для одного члена

$$\omega_i = a_i(x)\,dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^n \tag{19}$$

суммы. Дифференциалом такой формы является n-форма

$$d\omega_i = (-1)^{i-1}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}(x)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n. \tag{20}$$

Для карты вида $\varphi\colon I\to U$ оба интеграла в (18) от соответствующих форм (19), (20) равны нулю: первый потому, что $\operatorname{supp} a_i\subset I$, а второй — по той же причине, если учесть теорему Фубини и соотношение $\int\limits_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x^i}\,dx^i = a_i(1)-a_i(0)=0$. Этим заодно исчерпывается случай, когда $\partial M=\varnothing$.

Таким образом, остается проверить равенство (18) для карты $\varphi\colon\tilde I\to U$.

Если $i>1$, то и для такой карты оба интеграла равны нулю, что следует из приведенных выше соображений.

Если же $i=1$, то

$$\int\limits_M d\omega_1=\int\limits_U d\omega_1=\int\limits_{\tilde I}\frac{\partial a_1}{\partial x^1}(x)\,dx^1\ldots dx^n=\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\frac{\partial a_1}{\partial x^1}(x)\,dx^1\right)dx^2\ldots dx^n=$$
$$=\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 a_1(1,x^2,\ldots,x^n)\,dx^2\ldots dx^n=\int\limits_{\partial U}\omega_1=\int\limits_{\partial M}\omega_1.$$

Итак, при $n>1$ формула (18) доказана.

Случай $n=1$ совпадает с формулой Ньютона—Лейбница, если принять, что концы α, β ориентированного отрезка $[\alpha,\beta]$ отмечаются знаками α_- и β_+, а интеграл от 0-формы $g(x)$ по такой ориентированной точке полагается равным $-g(\alpha)$ и $+g(\beta)$ соответственно. ►

По поводу доказанной теоремы сделаем некоторые замечания.

Замечание 1. В формулировке теоремы ничего не говорится о гладкости многообразия M и формы ω. В таких случаях обычно подразумевают, что каждый из этих объектов имеет гладкость $C^{(\infty)}$. Из доказательства теоремы видно, однако, что формула (18) верна и для форм класса $C^{(2)}$ на многообразии M, допускающем формы такой гладкости.

Замечание 2. Из доказательства теоремы, как, впрочем, и из самой формулы (18), видно также, что если $\operatorname{supp}\omega$ — компакт, лежащий строго внутри M, т. е. $\operatorname{supp}\omega\cap\partial M=\varnothing$, то $\int\limits_M d\omega=0$.

Замечание 3. Если M — компактное многообразие, то для любой формы ω на M ее носитель $\operatorname{supp}\omega$, как замкнутое подмножество компакта M, является компактом. Следовательно, в этом случае любая форма ω на M является финитной и имеет место равенство (18). В частности, если M — компактное многообразие без края, то для любой гладкой формы на M имеет место равенство $\int\limits_M d\omega=0$.

Замечание 4. Для произвольных (не финитных) форм ω на многообразии, не являющемся само по себе компактом, формула (18), вообще говоря, не имеет места.

Рассмотрим, например, знакомую нам форму $\omega = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ в круговом кольце $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}$, наделенном стандартными декартовыми координатами. В этом случае M — компактное двумерное ориентированное многообразие, край ∂M которого состоит из двух окружностей $C_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = i\}$, $i = 1, 2$. Поскольку $d\omega = 0$, то по формуле (18) находим, что

$$0 = \int\limits_M d\omega = \int\limits_{C_2} \omega - \int\limits_{C_1} \omega,$$

где обе окружности C_1 и C_2 пробегаются против часовой стрелки. Мы знаем, что

$$\int\limits_{C_1} \omega = \int\limits_{C_2} \omega = 2\pi \neq 0.$$

Значит, если вместо M рассмотреть многообразие $\widetilde{M} = M \setminus C_1$, то $\partial\widetilde{M} = C_2$ и

$$\int\limits_{\widetilde{M}} d\omega = 0 \neq 2\pi = \int\limits_{\partial\widetilde{M}} \omega.$$

Задачи и упражнения

1. a) Два гладких пути $\gamma_i : \mathbb{R} \to M$, $i = 1, 2$, на гладком многообразии M назовем *касающимися* в точке $p \in M$, если $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ и в каждой локальной системе координат $\varphi : \mathbb{R}^n(H^n) \to U$, район U действия которой содержит точку p, выполняется соотношение

$$|\varphi^{-1} \circ \gamma_1(t) - \varphi^{-1} \circ \gamma_2(t)| = o(t) \quad \text{при } t \to 0. \tag{21}$$

Покажите, что если равенство (21) выполнено в одной из указанных систем координат, то оно будет выполнено и в другой такой же локальной системе координат гладкого многообразия M.

b) Свойство путей касаться в некоторой точке $p \in M$ является отношением эквивалентности на множестве гладких путей, проходящих на M через точку p. Класс эквивалентности по этому отношению назовем *пучком касающихся путей в точке* $p \in M$. Установите намеченное в § 3, п. 1 взаимно однозначное соответствие между векторами пространства TM_p и пучками касающихся в точке $p \in M$ путей.

c) Покажите, что если пути γ_1, γ_2 касаются в точке $p \in M$, а $f \in C^{(1)}(M, \mathbb{R})$, то

$$\frac{df \circ \gamma_1}{dt}(0) = \frac{df \circ \gamma_2}{dt}(0).$$

d) Покажите, как каждому вектору $\xi \in TM_p$ сопоставляется функционал $l = l_\xi$ $(= D_\xi) : C^{(\infty)}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, обладающий свойствами (8), (9), где $x_0 = p$. Обладающий этими свойствами функционал назовем *дифференцированием в точке* $p \in M$.

Проверьте, что дифференцирование l в точке p есть локальная операция, т. е. если $f_1, f_2 \in C^{(\infty)}$ и $f_1(x) \equiv f_2(x)$ в некоторой окрестности точки p, то $lf_1 = lf_2$.

e) Покажите, что если $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты в окрестности точки p, то $l = \sum\limits_{i=1}^{n} (lx_i) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, где $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ — операция вычисления частной производной по x^i в точке x, отвечающей точке p. (*Указание.* Запишите функцию $f|_{U(p)} \colon M \to \mathbb{R}$ в локальных координатах; вспомните, что для функции $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ имеет место разложение $f(x) = f(0) + \sum\limits_{i=1}^{n} x^i g_i(x)$, где $g_i \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ и $g_i(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}(0)$, $i = 1, \ldots, n$.)

f) Проверьте, что если M — многообразие класса $C^{(\infty)}$, то линейное пространство дифференцирований в точке $p \in M$ изоморфно построенному в п. 1 настоящего параграфа пространству TM_p, касательному к M в точке p.

2. a) Если в каждой точке $p \in M$ гладкого многообразия M фиксирован вектор $\xi(p) \in TM_p$, то говорят, что *на многообразии M* задано *векторное поле*. Пусть X — векторное поле на M. Поскольку в силу предыдущей задачи любой вектор $X(p) = \xi \in TM_p$ можно интерпретировать как дифференцирование в соответствующей точке p, то по любой функции $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$ можно построить функцию $Xf(p)$, значение которой в любой точке $p \in M$ вычисляется применением $X(p)$ к f, т. е. дифференцированием f по вектору $X(p)$ поля X. Поле X на M называется *гладким* (класса $C^{(\infty)}$), если для любой функции $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$ функция Xf тоже принадлежит классу $C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$.

Дайте локальную координатную запись векторного поля и эквивалентное приведенному, но координатное определение гладкого (класса $C^{(\infty)}$) векторного поля на гладком многообразии.

b) Пусть X и Y — два гладких векторных поля на многообразии M. Для функций $f \in C^{(\infty)}(M, \mathbb{R})$ построим функционал: $[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$. Проверьте, что $[X, Y]$ — тоже гладкое векторное поле на M. Оно называется *скобкой Пуассона векторных полей X и Y*.

c) Наделите гладкие векторные поля на многообразии структурой алгебры Ли.

3. a) Пусть X и ω — гладкое векторное поле и гладкая 1-форма на гладком многообразии M. Пусть ωX означает применение ω к вектору поля X в соответствующих точках многообразия M. Покажите, что ωX — гладкая функция на M.

b) Учитывая задачу 2, покажите, что имеет место следующее соотношение:

$$d\omega^1(X, Y) = X(\omega^1 Y) - Y(\omega^1 X) - \omega^1([X, Y]),$$

где X, Y — гладкие векторные поля, $d\omega^1$ — дифференциал формы ω^1, $d\omega^1(X, Y)$ — применение $d\omega^1$ к парам связанных с одной точкой векторов полей X, Y.

c) Проверьте, что в общем случае формы ω порядка m справедливо соотношение

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{m+1}) + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{m+1}), \end{aligned}$$

где символ $\widehat{\ }$ отмечает выпускаемый член, $[X_i, X_j]$ — скобка Пуассона полей X_i, X_j, а $X_i \omega$ — дифференцирование функции $\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{m+1})$ по векторам поля X_i. Поскольку скобка Пуассона определена инвариантно, то полученное соотношение можно расценить как довольно сложное, но *инвариантное определение оператора $d \colon \Omega \to \Omega$ внешнего дифференцирования*.

d) Пусть ω — гладкая m-форма на гладком n-мерном многообразии M. Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_{m+1})_i$ — векторы в $\mathbb{R}^n$, отвечающие в карте $\varphi_i \colon \mathbb{R}^n \to U \subset M$ векторам $\xi_1, \ldots$

$\ldots, \xi_{m+1} \in TM_p$. Обозначим через Π_i образованный векторами $(\xi_1, \ldots, \xi_{m+1})_i$ в $\mathbb{R}^n$ параллелепипед, и пусть $\lambda\Pi_i$ — параллелепипед, натянутый на векторы $(\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_{m+1})_i$. Образы $\varphi_i(\Pi_i)$, $\varphi_i(\lambda\Pi_i)$ этих параллелепипедов в M обозначим через Π и $\lambda\Pi$ соответственно. Покажите, что

$$d\omega(p)(\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda^{m+1}} \int\limits_{\partial(\lambda\Pi)} \omega.$$

4. a) Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображения гладкого m-мерного многообразия M в гладкое n-мерное многообразие N. Используя интерпретацию касательного вектора к многообразию как пучка касающихся путей (см. задачу 1), постройте индуцируемое отображением f отображение $f_*(p)\colon TM_p \to TN_{f(p)}$.

b) Покажите, что отображение f_* линейно и запишите его в соответствующих локальных координатах многообразий M и N. Объясните, почему $f_*(p)$ называют *дифференциалом отображения* f в точке p или отображением, *касательным к* f в этой точке.

Пусть f — диффеоморфизм. Проверьте, что $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$. Здесь X, Y — векторные поля на M, а $[\ ,\ ]$ — их скобка Пуассона (см. задачу 2).

c) Касательное отображение $f_*(p)\colon TM_p \to TN_{q=f(p)}$ касательных пространств, как известно из § 1, порождает сопряженное отображение $f^*(p)$ сопряженных пространств и вообще определенных на $TN_{f(p)}$ и TM_p пространств k-форм.

Пусть ω — k-форма на N; k-форма $f^*\omega$ на M определяется соотношением

$$(f^*\omega)(p)(\xi_1, \ldots, \xi_k) := \omega(f(p))(f_*\xi_1, \ldots, f_*\xi_k),$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_k \in TM_p$. Так возникает отображение $f^*\colon \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ пространства $\Omega^k(N)$ заданных на N k-форм в пространство $\Omega^k(M)$ k-форм на M.

Проверьте следующие свойства отображения f^*, считая M и N многообразиями класса гладкости $C^{(\infty)}$:

1° f^* — линейное отображение;

2° $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2$;

3° $d \circ f^* = f^* \circ d$, т. е. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$;

4° $(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*$.

d) Пусть M и N — гладкие n-мерные ориентированные многообразия, а $\varphi\colon M \to \to N$ — диффеоморфизм M на N. Покажите, что если ω — n-форма на N с компактным носителем, то

$$\int\limits_{\varphi(M)} \omega = \varepsilon \int\limits_M \varphi^*\omega,$$

где $\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \text{ сохраняет ориентацию,} \\ -1, & \text{если } \varphi \text{ меняет ориентацию.} \end{cases}$

e) Пусть $A \supset B$. Отображение $i\colon B \to A$, которое каждой точке $x \in B$ ставит в соответствие ее же как точку множества A, называют *каноническим вложением B в A*.

Если ω — форма на многообразии M, а M' — подмногообразие M, то каноническое вложение $i\colon M' \to M$ порождает на M' форму $i^*\omega$, которую называют *сужением* или *ограничением формы ω на M'*. Покажите, что правильная запись формулы Стокса (18) должна иметь вид

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} i^*\omega,$$

где $i\colon \partial M \to M$ — каноническое вложение ∂M в M, а ориентация на ∂M берется согласованной с ориентацией M.

5. a) Пусть M — гладкое ($C^{(\infty)}$) ориентируемое n-мерное многообразие, а $\Omega_c^n(M)$ — пространство гладких ($C^{(\infty)}$) n-форм с компактным носителем на M. Покажите, что существует и притом единственное отображение $\int\limits_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$, обладающее следующими свойствами:

1° отображение $\int\limits_M$ линейно;

2° если $\varphi : I^n\ (\tilde{I}^n) \to U \subset M$ — карта задающего ориентацию M атласа, $\operatorname{supp}\omega \subset U$ и в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ этой карты $\omega = a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, то

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_{I^n\ (\tilde{I}^n)} a(x)\, dx^1 \ldots dx^n,$$

где справа стоит интеграл Римана от функции a по соответствующему кубу I^n ($\tilde{I}^n$).

b) Всегда ли указанное выше отображение можно продолжить до обладающего теми же свойствами отображения $\int\limits_M : \Omega^n(M) \to \mathbb{R}$ пространства $\Omega^n(M)$ всех гладких n-форм на M?

c) Используя то, что в любое открытое покрытие многообразия M можно вписать не более чем счетное локально конечное покрытие M и то, что для любого такого покрытия на M существует подчиненное этому покрытию разбиение единицы (см. задачу 9 из § 2), определите интеграл от n-формы по ориентированному гладкому n-мерному (не обязательно компактному) многообразию так, чтобы он обладал указанными выше свойствами 1°, 2° применительно к формам, для которых интеграл конечен. Покажите, что для этого интеграла формула (18), вообще говоря, не имеет места, и дайте условия на ω, достаточные для справедливости формулы (18) в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, и в случае, когда $M = H^n$.

6. a) Используя теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$, а также гладкую зависимость решения от начальных данных, покажите, что гладкое ограниченное векторное поле $v(x)$ в $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать как поле скоростей установившегося течения. Точнее, покажите, что существует такое гладко зависящее от параметра (времени) t семейство диффеоморфизмов $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что $\varphi_t(x)$ при фиксированном значении $x \in \mathbb{R}^n$ является интегральной кривой нашего уравнения, т. е. $\dfrac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = v(\varphi_t(x))$, причем $\varphi_0(x) = x$. Отображение $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, очевидно, характеризует перемещение частиц среды за время t. Проверьте, что семейство отображений $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является *однопараметрической группой диффеоморфизмов*, т. е. $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$, $\varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1} = \varphi_{t_2+t_1}$.

b) Пусть v — векторное поле в $\mathbb{R}^n$, а φ_t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$, порожденная полем v. Проверьте, что для любой гладкой функции $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ имеет место соотношение

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\bigl(f(\varphi_t(x)) - f(x)\bigr) = D_{v(x)} f.$$

Если ввести обозначение $v(f) := D_v f$, согласованное с обозначениями из задачи 2, и вспомнить, что $f \circ \varphi_t =: \varphi_t^* f$, то можно написать, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t^* f - f)(x) = v(f)(x).$$

c) Теперь естественно определяется и дифференцирование заданной в $\mathbb{R}^n$ гладкой формы ω любой степени вдоль поля v. А именно, положим

$$v(\omega)(x) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t^* \omega - \omega)(x).$$

Форма $v(\omega)$ называется *производной Ли* от формы ω вдоль поля v и чаще всего обозначается специальным символом $L_v\omega$. Определите производную Ли $L_X\omega$ формы ω вдоль поля X на произвольном гладком многообразии M.

d) Покажите, что производная Ли на $C^{(\infty)}$-многообразии M обладает следующими свойствами.

1° L_X — локальная операция, т. е. если в окрестности $U\subset M$ рассматриваемой точки $x\in M$ поля X_1, X_2 и формы ω_1, ω_2 соответственно совпадают, то $(L_{X_1}\omega_1)(x)=$ $=(L_{X_2}\omega_2)(x)$.

2° $L_X\Omega^k(M)\subset\Omega^k(M)$.

3° $L_X:\Omega^k(M)\to\Omega^k(M)$ — линейное отображение при любом $k=0, 1, 2, \ldots$

4° $L_X(\omega_1\wedge\omega_2)=(L_X\omega_1)\wedge\omega_2+\omega_1\wedge L_X\omega_2$.

5° Если $f\in\Omega^0(M)$, то $L_Xf=df(X)=:Xf$.

6° Если $f\in\Omega^0(M)$, то $L_Xdf=d(Xf)$.

e) Проверьте, что указанные выше свойства 1° — 6° однозначно определяют операцию L_X.

7. Пусть X — векторное поле, а ω — форма степени k на гладком многообразии M. *Внутренним произведением* поля X и формы ω называется $(k-1)$-форма, обозначаемая через $i_X\omega$ или через $X\lrcorner\,\omega$ и определяемая следующим соотношением $(i_X\omega)(X_1, \ldots, X_{k-1}):=\omega(X, X_1, \ldots, X_{k-1})$, где $X_1, \ldots, X_{k-1}$ — векторные поля на M. Для 0-форм, т. е. функций на M, положим $X\lrcorner\, f=0$.

a) Покажите, что если в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ карты $\varphi:\mathbb{R}^n\to U\subset M$ форма ω (точнее $\omega|_U$) имеет вид

$$\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} a_{i_1\ldots i_k}(x)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}=\frac{1}{k!}a_{i_1\ldots i_k}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k},$$

а $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, то $i_X\omega=\dfrac{1}{(k-1)!}X^ia_{i,i_2,\ldots,i_k}\,dx^{i_2}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$.

b) Проверьте далее, что если $df=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$, то $i_Xdf=X^i\dfrac{\partial f}{\partial x^i}=X(f)\equiv D_Xf$.

c) Пусть $X(M)$ — пространство векторных полей на многообразии M, а $\Omega(M)$ — кольцо кососимметрических форм на M. Покажите, что существует только одно отображение $i: X(M)\times\Omega(M)\to\Omega(M)$, обладающее следующими свойствами:

1° i — локальная операция, т. е. если поля X_1, X_2 и формы ω_1, ω_2 соответственно совпадают в окрестности U точки $x\in M$, то $(i_{X_1}\omega_1)(x)=(i_{X_2}\omega_2)(x)$;

2° $i_X(\Omega^k(M))\subset\Omega^{k-1}(M)$;

3° $i_X:\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$ — линейное отображение;

4° если $\omega_1\in\Omega^{k_1}(M)$, $\omega_2\in\Omega^{k_2}(M)$, то $i_X(\omega_1\wedge\omega_2)=i_X\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^{k_1}\omega_1\wedge i_X\omega_2$;

5° если $\omega\in\Omega^1(M)$, то $i_X\omega=\omega(X)$, а если $f\in\Omega^0(M)$, то $i_Xf=0$.

8. Докажите следующие утверждения.

a) Операторы d, i_X и L_X (см. задачи 6, 7) удовлетворяют так называемому *тождеству гомотопии*

$$L_X=i_Xd+di_X, \tag{22}$$

где X — любое гладкое векторное поле на многообразии.

b) Производная Ли коммутирует с d и i_X, т. е.

$$L_X\circ d=d\circ L_X,\quad L_X\circ i_X=i_X\circ L_X.$$

c) $[L_X, i_Y]=i_{[X,Y]}$, $[L_X, L_Y]=L_{[X,Y]}$, где как всегда $[A, B]=A\circ B-B\circ A$ для любых операторов A, B, для которых выражение $A\circ B-B\circ A$ определено. В данном случае все скобки [,] определены.

d) $L_X f\omega = fL_X\omega + df \wedge i_X\omega$, где $f \in \Omega^0(M)$, а $\omega \in \Omega^k(M)$.

(*Указание.* Основным в задаче является п. a). Его можно проверить, например, индукцией по степени формы, на которую действуют операторы.)

§ 4. Замкнутые и точные формы на многообразии

1. Теорема Пуанкаре. В этом параграфе будут дополнены сведения о замкнутых и точных дифференциальных формах, которые были изложены в гл. XIV, § 3 в связи с теорией векторных полей в области пространства $\mathbb{R}^n$. Как и прежде, символ $\Omega^p(M)$ будет означать пространство всех гладких вещественнозначных форм степени p на гладком многообразии M, а $\Omega(M) = \bigcup\limits_p \Omega^p(M)$.

Определение 1. Форма $\omega \in \Omega^p(M)$ называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$.

Определение 2. Форма $\omega \in \Omega^p(M)$, $p > 0$, называется *точной*, если существует такая форма $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$, что $\omega = d\alpha$.

Множество всех замкнутых p-форм на многообразии M обозначим через $Z^p(M)$, а множество всех точных p-форм на M обозначим символом $B^p(M)$.

Для любой формы $\omega \in \Omega(M)$ имеет место соотношение[1] $d(d\omega) = 0$, которое показывает, что $Z^p(M) \supset B^p(M)$. Нам уже известно из гл. XIV, § 3, что, вообще говоря, это включение является строгим.

Важный вопрос о разрешимости (относительно α) уравнения $d\alpha = \omega$ при выполнении необходимого условия $d\omega = 0$ на форму ω оказывается тесно связан с топологической структурой многообразия M. Более полно сказанное будет расшифровано ниже.

Определение 3. Многообразие M будем называть *стягиваемым* (в точку $x_0 \in M$) или *гомотопным точке*, если существует такое гладкое отображение $h\colon M \times I \to M$, где $I = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, что $h(x, 1) = x$ и $h(x, 0) = x_0$.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ стягивается в точку посредством отображения $h(x, t) = tx$.

Теорема 1 (Пуанкаре). *Любая замкнутая $(p+1)$-форма $(p \geqslant 0)$ на стягиваемом в точку многообразии M является точной.*

◄ Нетривиальная часть доказательства состоит в следующей «цилиндрической» конструкции, сохраняющей силу для любого многообразия M.

Рассмотрим «цилиндр» $M \times I$ — прямое произведение M на единичный отрезок I, и два отображения $j_i\colon M \to M \times I$, $j_i(x) = (x, i)$, $i = 0, 1$, отождествляющие M с основаниями цилиндра $M \times I$. Тогда естественно возникают соответствующие отображения $j_i^*\colon \Omega^p(M \times I) \to \Omega^p(M)$, которые сводятся к тому, что в форме из $\Omega^p(M \times I)$ переменная t заменяется значением i $(= 0, 1)$, при этом, разумеется, $di = 0$.

---

[1] В зависимости от способа введения оператора d это свойство или доказывается, и тогда его часто называют *леммой Пуанкаре*, или включается в определение оператора d.

Построим линейный оператор $K\colon \Omega^{p+1}(M\times I)\to\Omega^p(M)$, который на мономах определим следующим образом:

$$K(a(x,t)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p+1}}):=0,$$

$$K(a(x,t)\,dt\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}):=\left(\int\limits_0^1 a(x,t)\,dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Основное нужное нам свойство оператора K состоит в том, что для любой формы $\omega\in\Omega^{p+1}(M\times I)$ имеет место соотношение

$$K(d\omega)+d(K\omega)=j_1^*\omega-j_0^*\omega. \tag{1}$$

Это соотношение достаточно проверить для мономов, поскольку все операторы K, d, j_1^*, j_0^* линейны.

Если $\omega=a(x,t)\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p+1}}$, то $K\omega=0$, $d(K\omega)=0$,

$$d\omega=\frac{\partial a}{\partial t}\,dt\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p+1}}+[\text{члены без } dt],$$

$$K(d\omega)=\left(\int\limits_0^1\frac{\partial a}{\partial t}\,dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p+1}}=$$
$$=(a(x,1)-a(x,0))\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p+1}}=j_1^*\omega-j_0^*\omega,$$

и соотношение (1) справедливо.

Если $\omega=a(x,t)\,dt\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$, то $j_1^*\omega=j_0^*\omega=0$. Далее,

$$K(d\omega)=K\left(-\sum_{i_0}\frac{\partial a}{\partial x^{i_0}}\,dt\wedge dx^{i_0}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\right)=$$
$$=-\sum_{i_0}\left(\int\limits_0^1\frac{\partial a}{\partial x^{i_0}}\,dt\right)dx^{i_0}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

$$d(K\omega)=d\left(\left(\int\limits_0^1 a(x,t)\,dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\right)=$$
$$=\sum_{i_0}\frac{\partial}{\partial x^{i_0}}\left(\int\limits_0^1 a(x,t)\,dt\right)dx^{i_0}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}=$$
$$=\sum_{i_0}\left(\int\limits_0^1\frac{\partial a}{\partial x^{i_0}}\,dt\right)dx^{i_0}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Таким образом, и в этом случае соотношение (1) справедливо[1]. Пусть теперь M — стягиваемое в точку $x_0\in M$ многообразие, $h\colon M\times I\to M$ — ука-

[1]По поводу обоснования проведенного в последнем равенстве дифференцирования интеграла по переменной x^{i_0} см., например, гл. XVII, § 1.

занное в определении 3 отображение, ω — $(p+1)$-форма на M. Тогда, очевидно, $h\circ j_1\colon M\to M$ — тождественное отображение, а $h\circ j_0\colon M\to x_0$ — отображение M в точку x_0, поэтому $(j_1^*\circ h^*)\omega=\omega$ и $(j_0^*\circ h^*)\omega=0$. Значит, в этом случае из (1) следует, что

$$K(d(h^*\omega))+d(K(h^*\omega))=\omega. \tag{2}$$

Если к тому же ω — замкнутая форма на M, то, поскольку $d(h^*\omega)=h^*(d\omega)=0$, из (2) получаем, что

$$d(K(h^*\omega))=\omega.$$

Таким образом, замкнутая форма ω является внешним дифференциалом формы $\alpha=K(h^*\omega)\in\Omega^p(M)$, т. е. ω — точная форма на M. ►

Пример 2. Пусть A, B, C — гладкие вещественнозначные функции переменных x, y, z в $\mathbb{R}^3$. Требуется решить относительно функций P, Q, R систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=A,\\ \dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=B,\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=C. \end{cases} \tag{3}$$

Для совместности системы (3), очевидно, необходимо, чтобы функции A, B, C удовлетворяли соотношению

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0,$$

которое равносильно замкнутости в $\mathbb{R}^3$ формы

$$\omega=A\,dy\wedge dz+B\,dz\wedge dx+C\,dx\wedge dy.$$

Система (3) будет решена, если будет найдена такая форма

$$\alpha=P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

что $d\alpha=\omega$.

В соответствии с изложенной при доказательстве теоремы 1 рецептурой и с учетом построенного в примере 1 отображения h после простых вычислений получим

$$\alpha=K(h^*\omega)=\left(\int_0^1 A(tx,ty,tz)t\,dt\right)(y\,dz-z\,dy)+$$
$$+\left(\int_0^1 B(tx,ty,tz)t\,dt\right)(z\,dx-x\,dz)+\left(\int_0^1 C(tx,ty,tz)t\,dt\right)(x\,dy-y\,dx).$$

Можно и непосредственно проверить, что $d\alpha=\omega$.

Замечание. Произвол в выборе формы α, удовлетворяющей условию $d\alpha = \omega$, обычно довольно большой. Так, вместе с формой α любая форма вида $\alpha + d\eta$, очевидно, тоже будет удовлетворять этому же уравнению.

В силу теоремы 1 на стягиваемом многообразии M любые две формы α, β, удовлетворяющие условию $d\alpha = d\beta = \omega$, отличаются на точную форму. Действительно, $d(\alpha - \beta) = 0$, т. е. форма $(\alpha - \beta)$ — замкнутая на M, а значит, по теореме 1 она точная.

2. Гомологии и когомологии. В силу теоремы Пуанкаре любая замкнутая форма на многообразии локально является точной. Склеить эти локальные первообразные в одну форму на всем многообразии удается далеко не всегда, и это зависит от топологической структуры многообразия. Например, замкнутая в проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ форма $\omega = \dfrac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$, рассмотренная в § 3 гл. XIV, локально является дифференциалом функции $\varphi = \varphi(x, y)$ — полярного угла точки (x, y), однако, продолжение этой функции в области $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ приводит к многозначностям, если замкнутый путь, по которому идет продолжение, охватывает дырку — точку 0. Примерно так же обстоит дело и с формами других степеней. «Дырки» в многообразиях могут быть различные — не только проколы, но и такие, как, например, у тора или кренделя. Структура многообразий высших размерностей может быть довольно сложной. Связь между устройством многообразия как топологического пространства и взаимоотношением замкнутых и точных форм на нем описывается так называемыми группами (ко)гомологий многообразия.

Замкнутые и точные вещественнозначные формы на многообразии M образуют линейные пространства $Z^p(M)$ и $B^p(M)$ соответственно, причем $Z^p(M) \supset B^p(M)$.

Определение 4. Фактор-пространство

$$H^p(M) := Z^p(M)/B^p(M) \tag{4}$$

называется *группой p-мерных когомологий* (с вещественными коэффициентами) *многообразия M*.

Таким образом, две замкнутые формы $\omega_1, \omega_2 \in Z^p(M)$ лежат в одном классе когомологии или когомологичны, если $\omega_1 - \omega_2 \in B^p(M)$, т. е. если они отличаются на точную форму. Класс когомологий формы $\omega \in Z^p(M)$ будем обозначать символом $[\omega]$.

Поскольку $Z^p(M)$ есть ядро оператора $d^p : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$, а $B^p(M)$ есть образ оператора $d^{p-1} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)$, то вместо (4), часто пишут

$$H^p(M) = \operatorname{Ker} d^p / \operatorname{Im} d^{p-1}.$$

Подсчет когомологий — дело, как правило, трудное. Можно, однако, сделать некоторые тривиальные общие наблюдения.

Из определения 4 следует, что если $p > \dim M$, то $H^p(M) = 0$.

Из теоремы Пуанкаре вытекает, что если M стягиваемо, то при $p>0$ $H^p(M)=0$.

На любом связном многообразии M группа $H^0(M)$ изоморфна $\mathbb{R}$, так как $H^0(M)=Z^0(M)$, а если для функции $f\colon M\to\mathbb{R}$ на связном многообразии M выполнено соотношение $df=0$, то $f=\mathrm{const}$.

Таким образом, например, для пространства $\mathbb{R}^n$ получается, что $H^p(\mathbb{R}^n)=0$ при $p>0$ и $H^0(\mathbb{R}^n)\sim\mathbb{R}$. Это утверждение (с точностью до тривиального последнего соотношения) эквивалентно теореме 1 при $M=\mathbb{R}^n$ и тоже называется теоремой Пуанкаре.

Более наглядную геометрическую связь с многообразием M имеют так называемые группы гомологий.

Определение 5. Гладкое отображение $c\colon I^p\to M$ p-мерного куба $I\subset\mathbb{R}^p$ в многообразие M называют *сингулярным кубом* на многообразии M.

Это прямое обобщение понятия гладкого пути на случай произвольной размерности p. В частности, сингулярный куб может состоять в преобразовании куба I в одну точку.

Определение 6. *Цепью* (сингулярных кубов) *размерности* p на многообразии M называется любая конечная формальная линейная комбинация $\sum\limits_k \alpha_k c_k$ сингулярных p-мерных кубов на M с вещественными коэффициентами.

Как и пути, сингулярные кубы, получающиеся друг из друга диффеоморфным изменением параметризации с положительным якобианом, считаются эквивалентными и отождествляются. Если же такая замена параметризации происходит с отрицательным якобианом, то соответствующие (противоположно ориентированные) сингулярные кубы c, c_- считаются противоположными и полагают $c_-=-c$.

Цепи размерности p на многообразии M, очевидно, образуют линейное пространство относительно стандартных операций сложения и умножения на вещественное число. Это пространство мы обозначим через $C_p(M)$.

Определение 7. *Границей* ∂I p-мерного куба I^p в $\mathbb{R}^p$ называется $(p-1)$-мерная цепь

$$\partial I := \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{i+j}c_{ij} \tag{5}$$

в $\mathbb{R}^p$, где $c_{ij}\colon I^{p-1}\to\mathbb{R}^p$ — отображение $(p-1)$-мерного куба в $\mathbb{R}^p$, индуцированное каноническим вложением соответствующей грани куба I^p в $\mathbb{R}^p$. Точнее, если $I^{p-1}=\{\tilde{x}\in\mathbb{R}^{p-1}\mid 0\leqslant\tilde{x}^m\leqslant 1,\ m=1,\dots,p-1\}$, то $c_{ij}(\tilde{x})=(\tilde{x}^1,\dots$ $\dots,\tilde{x}^{j-1},i,\tilde{x}^j,\dots,\tilde{x}^{p-1})\in\mathbb{R}^p$.

Легко проверить, что это формальное определение границы куба в точности совпадает с операцией взятия края стандартно ориентированного куба I^p (см. гл. XII § 3).

Определение 8. Граница ∂c *сингулярного* p-мерного *куба* есть $(p-1)$-мерная цепь

$$\partial c := \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{p}(-1)^{i+j}c\circ c_{ij}.$$

Определение 9. Граница p-мерной цепи $\sum\limits_k \alpha_k c_k$ на многообразии M есть $(p-1)$-мерная цепь

$$\partial\Big(\sum_k \alpha_k c_k\Big) := \sum_k \alpha_k \partial c_k.$$

Таким образом, на любом пространстве цепей $C_p(M)$ определен линейный оператор

$$\partial = \partial_p : C_p(M) \to C_{p-1}(M).$$

Исходя из соотношения (5), можно проверить, что для куба имеет место соотношение $\partial(\partial I) = 0$. Следовательно, вообще $\partial \circ \partial = \partial^2 = 0$.

Определение 10. *Циклом z размерности p* или *p-циклом* на многообразии называется такая цепь, для которой $\partial z = 0$.

Определение 11. *Граничным циклом b размерности p* на многообразии называется цепь, являющаяся границей некоторой $(p+1)$-мерной цепи.

Пусть $Z_p(M)$ и $B_p(M)$ — совокупности p-мерных циклов и p-мерных граничных циклов на многообразии M. Ясно, что $Z_p(M)$ и $B_p(M)$ являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$ и что $Z_p(M) \supset B_p(M)$.

Определение 12. Фактор-пространство

$$H_p(M) := Z_p(M)/B_p(M) \tag{6}$$

называется *p-мерной группой гомологий* (с вещественными коэффициентами) *многообразия M*.

Таким образом, два цикла $z_1, z_2 \in Z_p(M)$ лежат в одном классе гомологий или *гомологичны*, если $z_1 - z_2 \in B_p(M)$, т. е. если они отличаются на границу некоторой цепи. Класс гомологий цикла $z \in Z_p(M)$ будем обозначать через $[z]$.

Как и в случае когомологий, соотношение (6) можно переписать в виде

$$H_p(M) = \operatorname{Ker} \partial_p / \operatorname{Im} \partial_{p+1}.$$

Определение 13. Если $c\colon I \to M$ — сингулярный p-мерный куб, а ω — p-форма на многообразии M, то *интегралом от формы ω по этому сингулярному кубу* называется величина

$$\int_c \omega := \int_I c^* \omega. \tag{7}$$

Определение 14. Если $\sum\limits_k \alpha_k c_k$ — цепь размерности p, а ω — p-форма на многообразии M, то интеграл от формы по такой цепи понимается как линейная комбинация $\sum\limits_k \alpha_k \int\limits_{c_k} \omega$ интегралов по соответствующим сингулярным кубам.

Из определений 5—8 и 13, 14 следует, что для интеграла по сингулярному кубу справедлива формула Стокса

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega, \tag{8}$$

где c и ω имеют размерность p и степень $p-1$ соответственно. Если учесть еще определение 9, то можно заключить, что вообще формула Стокса (8) остается в силе для интегралов по цепям.

Теорема 2. a) *Интеграл от точной формы по циклу равен нулю.*

b) *Интеграл от замкнутой формы по границе цепи равен нулю.*

c) *Интеграл от замкнутой формы по циклу зависит только от класса гомологий цикла.*

d) *Интеграл от замкнутой формы по циклу зависит только от класса когомологий формы.*

e) *Если замкнутые p-формы ω_1, ω_2 и циклы z_1, z_2 размерности p таковы, что $[\omega_1]=[\omega_2]$ и $[z_1]=[z_2]$, то*

$$\int_{z_1} \omega_1 = \int_{z_2} \omega_2.$$

◄ a) По формуле Стокса $\int_z d\omega = \int_{\partial z} \omega = 0$, так как $\partial z = 0$.

b) По формуле Стокса $\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega = 0$, так как $d\omega = 0$.

c) Вытекает из b).

d) Вытекает из a).

e) Вытекает из c) и d). ►

Следствие. *Билинейное отображение $\Omega^p(M) \times C_p(M) \to \mathbb{R}$, задаваемое формулой $(\omega, c) \mapsto \int_c \omega$, индуцирует билинейное отображение $Z^p(M) \times Z_p(M) \to \mathbb{R}$ и билинейное отображение $H^p(M) \times H_p(M) \to \mathbb{R}$. Последнее задается формулой*

$$([\omega], [z]) \mapsto \int_z \omega, \tag{9}$$

где $\omega \in Z^p(M)$ и $z \in Z_p(M)$.

Теорема 3 (де Рам[1]). *Задаваемое формулой* (9) *билинейное отображение $H^p(M) \times H_p(M) \to \mathbb{R}$ невырождено*[2].

Мы не останавливаемся здесь на доказательстве этой теоремы де Рама, но дадим несколько ее переформулировок, позволяющих в явном виде представить используемые в анализе ее следствия.

Прежде всего заметим, что каждый класс когомологий $[\omega] \in H^p(M)$ в силу (9) можно интерпретировать как линейную функцию $[\omega]([z]) = \int_z \omega$. Таким образом, возникает естественное отображение $H^p(M) \to H_p^*(M)$, где $H_p^*(M)$ — сопряженное к $H_p(M)$ пространство. Теорема де Рама утверждает,

---

[1]Ж. де Рам (1903—1969) — бельгийский математик; основные работы относятся к алгебраической топологии.

[2]Напомним, что билинейная форма $L(x, y)$ называется невырожденной, если при любом фиксированном отличном от нуля значении одной из переменных получается не равная нулю тождественно линейная форма по другой переменной.

что это отображение является изоморфизмом, и в этом смысле $H^p(M) = H_p^*(M)$.

Определение 15. Если ω — замкнутая p-форма, а z — цикл размерности p на многообразии M, то величина $\operatorname{per}(z) := \int\limits_z \omega$ называется *периодом* (или *циклической постоянной*) *формы ω на цикле z*.

В частности, если цикл z гомологичен нулю, то, как следует из утверждения b) теоремы 2, $\operatorname{per}(z) = 0$. По этой причине между периодами имеется следующая связь:

$$\Big[\sum_k \alpha_k z_k\Big] = 0 \Leftrightarrow \sum_k \alpha_k \operatorname{per}(z_k) = 0, \tag{10}$$

т. е. если линейная комбинация циклов является граничным циклом, или, что то же самое, гомологична нулю, то соответствующая линейная комбинация периодов равна нулю.

Имеют место следующие две теоремы де Рама, которые в совокупности равносильны теореме 3.

Теорема 4 (первая теорема де Рама). *Замкнутая форма точна тогда и только тогда, когда все ее периоды равны нулю.*

Теорема 5 (вторая теорема де Рама). *Если каждому p-циклу $z \in Z_p(M)$ на многообразии M сопоставить число* $\operatorname{per}(z)$ *с соблюдением условия* (10), *то на M найдется такая замкнутая p-форма ω, что $\int\limits_z \omega = \operatorname{per}(z)$ для любого цикла $z \in Z_p(M)$.*

Задачи и упражнения

1. Проверьте прямым вычислением, что полученная в примере 2 форма α действительно удовлетворяет уравнению $d\alpha = \omega$.

2. a) Докажите, что любая односвязная область в $\mathbb{R}^2$ стягиваема по себе в точку.

b) Покажите, что в $\mathbb{R}^3$ предыдущее утверждение, вообще говоря, не имеет места.

3. Проанализируйте доказательство теоремы Пуанкаре и покажите, что если гладкое отображение $h\colon M \times I \to M$ рассматривать как семейство зависящих от параметра $t \in I$ отображений $h_t\colon M \to M$, то для любой замкнутой на M формы ω, все формы $h_t^*\omega$, $t \in I$, будут лежать в одном классе когомологий.

4. a) Пусть $t \mapsto h_t \in C^{(\infty)}(M, N)$ — гладко зависящее от параметра $t \in I \subset \mathbb{R}$ семейство отображений многообразия M в многообразие N. Проверьте, что для любой формы $\omega \in \Omega(N)$ справедлива следующая *формула гомотопии*:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_t^*\omega)(x) = dh_t^*(i_X\omega)(x) + h_t^*(i_X d\omega)(x). \tag{11}$$

Здесь $x \in M$; X — векторное поле на N, причем $X(x,t) \in TN_{h_t(x)}$ и $X(x,t)$ есть вектор скорости для пути $t' \mapsto h_{t'}(x)$ при $t' = t$; оператор i_X внутреннего произведения формы и векторного поля определен в задаче 7 предыдущего параграфа.

b) Из формулы (11) получите утверждение, высказанное в задаче 3.

c) Опираясь на формулу (11), докажите вновь теорему 1 Пуанкаре.

d) Покажите, что если K — стягиваемое в точку многообразие, то для любого многообразия M и при любом целом значении p имеет место равенство $H^p(K \times M) = H^p(M)$.

e) Получите из формулы (11) соотношение (22) предыдущего параграфа.

5. a) Используя теорему 4, а также непосредственно покажите, что если замкнутая 2-форма на сфере S^2 такова, что $\int\limits_{S^2} \omega = 0$, то форма ω — точная.

b) Покажите, что группа $H^2(S^2)$ изоморфна $\mathbb{R}$.

c) Покажите, что $H^1(S^2) = 0$.

6. a) Пусть $\varphi\colon S^2 \to S^2$ — отображение, которое каждой точке $x \in S^2$ ставит в соответствие диаметрально противоположную ей точку $-x \in S^2$ (антипод). Покажите, что между формами на проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$ и формами на сфере S^2, инвариантными относительно отображения φ (т. е. $\varphi^*\omega = \omega$), имеется взаимно однозначное соответствие.

b) Представим $\mathbb{RP}^2$ как фактор-многообразие S^2/Γ, где Γ — группа преобразований сферы S^2, состоящая из тождественного отображения и антиподального отображения φ. Пусть $\pi\colon S^2 \to \mathbb{RP}^2 = S^2/\Gamma$ — естественная проекция, т. е. $\pi(x) = \{x, -x\}$. Покажите, что $\pi \circ \varphi = \pi$, и проверьте, что

$$\forall \eta \in \Omega^p(S^2)\ (\varphi^*\eta = \eta) \iff \exists \omega \in \Omega^p(\mathbb{RP}^2)\ (\pi^*\omega = \eta).$$

c) Используя задачу 5 a), покажите теперь, что $H^2(\mathbb{RP}^2) = 0$.

d) Докажите, что если функция $f \in C(S^2, \mathbb{R})$ такова, что $f(x) - f(-x) \equiv \mathrm{const}$, то $f \equiv 0$. Учитывая задачу 5 c), выведите отсюда, что $H^1(\mathbb{RP}^2) = 0$.

7. a) Представив $\mathbb{RP}^2$ в виде стандартного прямоугольника Π с отождествлением противоположных сторон, указанным на рис. 98 ориентирующими стороны стрелками, покажите, что $\partial\Pi = 2c' - 2c$; $\partial c = P - Q$; $\partial c' = P - Q$.

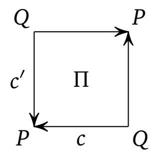


Рис. 98

b) Выведите из сделанного в предыдущем задании наблюдения, что на $\mathbb{RP}^2$ нет нетривиальных двумерных циклов и, используя теорему де Рама, покажите, что $H^2(\mathbb{RP}^2) = 0$.

c) Покажите, что единственным (с точностью до множителя) нетривиальным одномерным циклом на $\mathbb{RP}^2$ является цикл $c' - c$ и, поскольку $c' - c = \frac{1}{2}\partial\Pi$, выведите из теоремы де Рама, что $H^1(\mathbb{RP}^2) = 0$.

8. Найдите группы $H^0(M)$, $H^1(M)$, $H^2(M)$, если:

a) $M = S^1$ — окружность; b) $M = T^2$ — двумерный тор;

c) $M = K^2$ — бутылка Клейна.

9. a) Докажите, что диффеоморфные многообразия имеют изоморфные группы (ко)гомологий соответствующей размерности.

b) На примере $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{RP}^2$ покажите, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

10. Пусть X и Y — линейные пространства над полем $\mathbb{R}$, а $L(x, y)$ — невырожденная билинейная форма $L\colon X \times Y \to \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $X \to Y^*$, осуществляемое соответствием $X \ni x \mapsto L(x, \cdot) \in Y^*$.

a) Докажите, что построенное отображение инъективно.

b) Покажите, что для любой системы $y_1, \ldots, y_k$ линейно независимых векторов пространства Y в X найдутся такие векторы $x^1, \ldots, x^k$, что $x^i(y_j) := L(x^i, y_j) = \delta^i_j$, где $\delta^i_j = 0$ при $i \neq j$ и $\delta^i_j = 1$ при $i = j$.

c) Проверьте, что построенное отображение $X \to Y^*$ является изоморфизмом линейных пространств X и Y^*.

d) Покажите, что первая и вторая теоремы де Рама означают в совокупности, что с точностью до изоморфизма $H^p(M) = H^*_p(M)$.

Глава XVI

Равномерная сходимость и основные операции анализа над рядами и семействами функций

§ 1. Поточечная и равномерная сходимость

1. Поточечная сходимость

Определение 1. Говорят, что *последовательность* $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ *функций* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *сходится в точке* $x \in X$, если сходится последовательность $\{f_n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$ значений этих функций в точке x.

Определение 2. Множество $E \subset X$ точек, в которых последовательность $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ функций $f_n : X \to \mathbb{R}$ сходится, называется *множеством сходимости последовательности функций*.

Определение 3. На множестве сходимости последовательности функций $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ естественно возникает функция $f : E \to \mathbb{R}$, задаваемая соотношением $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Эта функция называется *предельной функцией последовательности* $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ или *пределом последовательности функций* $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Определение 4. Если $f : E \to \mathbb{R}$ — предельная функция последовательности $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, то говорят, что эта *последовательность функций сходится* (или *сходится поточечно*) *к функции* f *на множестве* E.

В этом случае пишут $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ на E или $f_n \to f$ на E при $n \to \infty$.

Пример 1. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, а функции $f_n : X \to \mathbb{R}$ заданы соотношением $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Множеством сходимости этой последовательности функций, очевидно, является отрезок $I = [0, 1]$, а предельной является функция $f : I \to \mathbb{R}$, задаваемая условиями

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Пример 2. Рассматриваемая на $\mathbb{R}$ последовательность функций $f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$ сходится на $\mathbb{R}$ к функции $f : \mathbb{R} \to 0$, тождественно равной нулю.

Пример 3. Последовательность $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ тоже имеет своим пределом функцию $f : \mathbb{R} \to 0$, тождественно равную нулю.

Пример 4. Рассмотрим на отрезке $I = [0, 1]$ последовательность функций $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$. Поскольку $nq^n \to 0$ при $|q| < 1$, эта последовательность на всем отрезке I стремится к нулю.

Пример 5. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, и пусть $f_m(x) := \lim\limits_{n\to\infty} (\cos m!\,\pi x)^{2n}$. Если $m!\,x$ — целое, то $f_m(x) = 1$, если же $m!\,x \notin \mathbb{Z}$, то, очевидно, $f_m(x) = 0$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{f_m;\ m \in \mathbb{N}\}$ и покажем, что на всей числовой оси она сходится к функции Дирихле

$$\mathscr{D}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Действительно, если $x \notin \mathbb{Q}$, то $m!\,x \notin \mathbb{Z}$, и $f_m(x) = 0$ при любом значении $m \in \mathbb{N}$, значит, $f(x) = 0$. Если же $x = p/q$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, то уже при $m \geqslant q$ будет $m!\,x \in \mathbb{Z}$ и $f_m(x) = 1$, что влечет $f(x) = 1$.

Итак, $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = \mathscr{D}(x)$.

2. Постановка основных вопросов. Предельный переход встречается в анализе на каждом шагу и часто бывает важно знать, какими функциональными свойствами обладает предельная функция. Главные из таких свойств для анализа — непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Значит, важно выяснить, будет ли предельная функция непрерывной, дифференцируемой или интегрируемой, если соответствующим свойством обладали допредельные функции. При этом особенно важно найти достаточно удобные в работе условия, при выполнении которых из сходимости функций следует сходимость производных или интегралов от этих функций к производной или интегралу от предельной функции.

Как показывают разобранные выше простейшие примеры, без каких-либо дополнительных условий соотношение «$f_n \to f$ на $[a, b]$ при $n \to \infty$», вообще говоря, не влечет ни непрерывности предельной функции, даже при непрерывности функций f_n, ни соотношений $f_n' \to f'$ или $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \to \int\limits_a^b f(x)\,dx$, даже если все указанные производные и интегралы определены.

Действительно,

в примере 1 предельная функция разрывна на отрезке $[0, 1]$, хотя допредельные функции непрерывны на нем;

в примере 2 производные $n \cos n^2 x$ допредельных функций вообще не сходятся, а значит, не сходятся и к производной от предельной функции, которая в данном случае тождественно равна нулю;

в примере 4 имеем $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ при любом значении $n \in \mathbb{N}$, в то время как $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$;

в примере 5 каждая из функций f_m равна нулю всюду, кроме конечного числа точек, поэтому $\int\limits_a^b f_m(x)\,dx = 0$ на любом отрезке $[a, b] \in \mathbb{R}$, в то время как предельная функция $\mathscr{D}$ вообще не интегрируема ни на каком отрезке числовой оси.

Вместе с тем:

в примерах 2, 3, 4 непрерывны как допредельные, так и предельные функции;

в примере 3 предел производных $\frac{\cos nx}{n}$ функций последовательности $\frac{\sin nx}{n^2}$ совпадает с производной от предельной функции этой последовательности;

в примере 1 имеем $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx \to \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ при $n\to\infty$.

Наша основная цель — выяснить, в каких же случаях предельные переходы под знаком интеграла или под знаком дифференцирования законны.

Рассмотрим в этой связи еще

Пример 6. Мы знаем, что при любом $x\in\mathbb{R}$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \ldots, \tag{1}$$

но после приведенных примеров мы понимаем, что соотношения

$$\sin' x = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right)', \tag{2}$$

$$\int\limits_a^b \sin x\,dx = \sum_{m=0}^{\infty}\int\limits_a^b \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}\,dx, \tag{3}$$

вообще говоря, нуждаются в проверке.

В самом деле, если равенство

$$S(x) = a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_m(x) + \ldots$$

понимать в том смысле, что $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = \sum\limits_{m=1}^{n} a_m(x)$, то соотношения

$$S'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m'(x), \qquad \int\limits_a^b S(x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_a^b a_m(x)\,dx$$

в силу линейности операций дифференцирования и интегрирования равносильны равенствам

$$S'(x) = \lim_{n\to\infty} S_n'(x), \qquad \int\limits_a^b S(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b S_n(x)\,dx,$$

к которым мы теперь должны относиться с осторожностью.

В данном случае оба соотношения (2), (3) легко проверяются, поскольку известно, что при любом $x\in\mathbb{R}$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \ldots$$

Однако представьте себе, что равенство (1) является определением функции $\sin x$. Ведь именно так обстояло дело с определением функций $\sin z$,

$\cos z$, e^z для комплексных значений аргумента. Тогда нам нужно было бы свойства возникшей новой функции (ее непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость), как и законность равенств (2), (3), извлекать непосредственно из того, что эта функция является пределом последовательности частичных сумм написанного ряда.

Главным понятием, с помощью которого в § 3 будут получены достаточные условия законности указанных предельных переходов, является понятие равномерной сходимости.

3. Сходимость и равномерная сходимость семейства функций, зависящих от параметра. При обсуждении постановки вопросов мы ограничились выше рассмотрением предела последовательностей функций. Последовательность функций — это важнейший частный случай семейства функций $f_t(x)$, зависящих от параметра t, когда $t \in \mathbb{N}$. Последовательности функций, таким образом, занимают здесь то же место, какое в теории предела функций занимает теория предела последовательности. О пределе последовательности функций и связанной с ней теорией сходимости рядов функций мы будем подробно говорить в § 2, а здесь обсудим основные для всего дальнейшего понятия сходимости и равномерной сходимости семейства функций, зависящих от параметра.

Определение 5. Функцию $(x, t) \mapsto F(x, t)$ двух переменных x, t, определенную на множестве $X \times T$, называют *семейством функций, зависящих от параметра t*, если по тем или иным причинам переменная $t \in T$ выделяется и называется *параметром*.

Множество T при этом называют *множеством* или *областью значений параметра*, а само семейство часто записывают в виде $f_t(x)$ или $\{f_t;\ t \in T\}$, явно выделяя параметр.

Нам, как правило, придется в этой книге рассматривать такие семейства функций, для которых областью параметров T являются множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ натуральных, действительных или комплексных чисел соответственно или их подмножества, хотя, вообще говоря, множество T может быть любой природы. Так, в рассмотренных выше примерах 1 — 5 было $T = \mathbb{N}$. В примерах 1 — 4 при этом можно было бы без потери их содержательности считать, что параметр n есть любое положительное число, а предел берется по базе $n \to \infty$, $n \in \mathbb{R}_+$.

Определение 6. Пусть $\{f_t : X \to \mathbb{R};\ t \in T\}$ — семейство функций, зависящих от параметра, и пусть $\mathcal{B}$ — база в множестве T значений параметра.

Если существует предел $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_t(x)$ при фиксированном значении $x \in X$, то говорят, что *семейство функций сходится в точке x*.

Множество всех таких точек сходимости называется *множеством сходимости семейства функций при данной базе $\mathcal{B}$*.

Определение 7. Говорят, что *семейство функций сходится на множестве $E \subset X$ при базе $\mathcal{B}$*, если оно сходится при этой базе в каждой точке $x \in E$.

Функция $f(x) := \lim\limits_{\mathcal{B}} f_t(x)$ на E называется *предельной функцией* или *пределом семейства функций f_t на множестве E при базе $\mathcal{B}$*.

Пример 7. Пусть $f_t(x) = e^{-(x/t)^2}$, $x \in X = \mathbb{R}$, $t \in T = \mathbb{R} \setminus 0$, $\mathcal{B}$ — база $t \to 0$. Это семейство сходится на всем множестве $\mathbb{R}$, причем

$$\lim_{t\to 0} f_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Теперь дадим два основных определения.

Определение 8. Говорят, что семейство $\{f_t;\ t \in T\}$ функций $f_t : X \to \mathbb{R}$ *сходится поточечно* (или просто *сходится*) *на множестве $E \subset X$ при базе $\mathcal{B}$* к функции $f : E \to \mathbb{R}$, если $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_t(x) = f(x)$ в любой точке $x \in E$.

В этом случае мы часто будем писать ($f_t \underset{\mathcal{B}}{\longrightarrow} f$ на E).

Определение 9. Говорят, что семейство $\{f_t;\ t \in T\}$ функций $f_t : X \to \mathbb{R}$ *сходится равномерно на множестве $E \subset X$ при базе $\mathcal{B}$* к функции $f : E \to \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент B базы $\mathcal{B}$, что при любом значении $t \in B$ в любой точке $x \in E$ выполняется неравенство $|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon$.

В этом случае мы часто будем писать ($f_t \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f$ на E).

Приведем еще формальную запись этих важных определений:

$$(f_t \underset{\mathcal{B}}{\longrightarrow} f \text{ на } E) := \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in E\ \exists B \in \mathcal{B}\ \forall t \in B\ (|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon),$$
$$(f_t \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f \text{ на } E) := \forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B}\ \forall x \in E\ \forall t \in B\ (|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon).$$

Соотношение между сходимостью и равномерной сходимостью напоминает соотношение между непрерывностью и равномерной непрерывностью функции на множестве.

Чтобы лучше уяснить взаимоотношение сходимости и равномерной сходимости семейства функций, введем величину $\Delta_t(x) = |f(x) - f_t(x)|$, измеряющую отклонение значения функции f_t от значения функции f в точке $x \in E$. Рассмотрим также величину $\Delta_t = \sup\limits_{x\in E} \Delta_t(x)$, характеризующую, грубо говоря, максимальное (хотя его может и не быть) по всем точкам $x \in E$ отклонение значений функции f_t от соответствующих значений функции f. Таким образом, в любой точке $x \in E$ имеем $\Delta_t(x) \leqslant \Delta_t$.

В этих обозначениях приведенные определения, очевидно, можно записать следующим образом:

$$(f_t \underset{\mathcal{B}}{\longrightarrow} f \text{ на } E) := \forall x \in E\ (\Delta_t(x) \to 0 \text{ при } \mathcal{B}),$$
$$(f_t \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f \text{ на } E) := (\Delta_t \to 0 \text{ при } \mathcal{B}).$$

Теперь ясно, что

$$(f_t \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f \text{ на } E) \Rightarrow (f_t \underset{\mathcal{B}}{\longrightarrow} f \text{ на } E),$$

т. е. если семейство f_t сходится равномерно к функции f на множестве E, то оно и поточечно сходится к f на этом множестве.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример 8. Рассмотрим семейство функций $f_t\colon I \to \mathbb{R}$, определенных на отрезке $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ и зависящих от параметра $t \in \,]0, 1]$. График функции $y = f_t(x)$ изображен на рис. 99. Ясно, что в любой точке $x \in I$ $\lim\limits_{t \to 0} f_t(x) = 0$, т. е. $f_t \to f \equiv 0$ при $t \to 0$. Вместе с тем

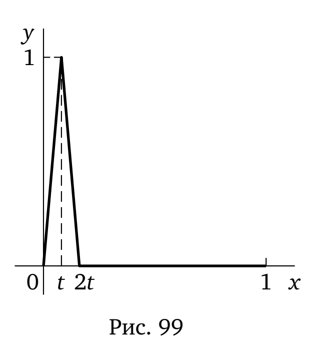


Рис. 99

$$\Delta_t = \sup_{x \in I} |f(x) - f_t(x)| = \sup_{x \in I} |f_t(x)| = 1,$$

т. е. $\Delta_t \not\to 0$ при $t \to 0$, и значит, семейство сходится, но не сходится равномерно.

Будем для удобства в таких случаях говорить, что семейство *сходится* к предельной функции *неравномерно*.

Если параметр t интерпретировать как время, то сходимость семейства функций f_t на множестве E к функции f означает, что при любой заданной точности $\varepsilon > 0$ для любой точки $x \in E$ можно указать момент t_ε, начиная с которого, т. е. при $t > t_\varepsilon$, значения всех функций f_t в точке x будут отличаться от значения $f(x)$ меньше чем на ε.

Равномерная же сходимость означает, что наступит момент t_ε, начиная с которого, т. е. при $t > t_\varepsilon$, уже сразу во всех точках $x \in E$ будет выполнено соотношение $|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon$.

Для неравномерной сходимости типична изображенная на рис. 99 картина бегущего горба большого уклонения.

Пример 9. Последовательность заданных на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ функций $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, как легко видеть, в любой точке x этого отрезка стремится к нулю при $n \to \infty$. Чтобы выяснить, равномерная ли эта сходимость, найдем величину $\Delta_n = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x)|$. Поскольку $f'_n(x) = nx^{n-1}(1 - 2x^n) = 0$ при $x = 0$ и $x = 2^{-1/n}$, то ясно, что $\Delta_n = f_n(2^{-1/n}) = 1/4$. Таким образом, $\Delta_n \not\to 0$ при $n \to \infty$, и наша последовательность сходится к предельной функции $f(x) \equiv 0$ неравномерно.

Пример 10. Рассмотренная в примере 1 последовательность функций $f_n = x^n$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ сходится к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1, \end{cases}$$

неравномерно, так как при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_n = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{0 \leqslant x < 1} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{0 \leqslant x < 1} |f_n(x)| = \sup_{0 \leqslant x < 1} |x^n| = 1.$$

Пример 11. Рассмотренная в примере 2 последовательность функций $f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}$ сходится к нулю равномерно на всем множестве $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$,

так как в данном случае

$$|f(x)-f_n(x)|=|f_n(x)|=\left|\frac{\sin n^2x}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

т. е. $\Delta_n\leqslant 1/n$ и, значит, $\Delta_n\to 0$ при $n\to\infty$.

4. Критерий Коши равномерной сходимости. В определении 9 мы сказали, что значит, что семейство функций f_t равномерно на некотором множестве сходится к заданной на этом множестве функции. Обычно, когда задается семейство функций, предельная функция еще неизвестна, поэтому разумно принять

Определение 10. Будем говорить, что *семейство* $\{f_t;\ t\in T\}$ *функций* $f_t\colon X\to\mathbb{R}$ *сходится на множестве* $E\subset X$ *равномерно при базе* $\mathcal{B}$, если оно сходится на этом множестве и сходимость к возникающей при этом на E предельной функции $f\colon E\to\mathbb{R}$ является равномерной в смысле определения 9.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости). *Пусть* $\{f_t;t\in T\}$ — *семейство функций* $f_t\colon X\to\mathbb{R}$, *зависящих от параметра* $t\in T$, *и* $\mathcal{B}$ — *база в* T. *Для того, чтобы семейство* $\{f_t;\ t\in T\}$ *сходилось на множестве* $E\subset X$ *равномерно при базе* $\mathcal{B}$, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *нашелся такой элемент* B *базы* $\mathcal{B}$, *что при любых значениях параметров* $t_1,t_2\in B$ *в любой точке* $x\in E$ *было выполнено неравенство* $|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon$.

В формальной записи это означает, что f_t сходится равномерно на E при базе $\mathcal{B}\iff\forall\varepsilon>0\ \exists B\in\mathcal{B}\ \forall t_1,t_2\in B\ \forall x\in E\ (|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon)$.

◄ *Необходимость* приведенных условий очевидна, ибо если $f\colon E\to\mathbb{R}$ — предельная функция и $f_t\rightrightarrows f$ на E при $\mathcal{B}$, то найдется элемент B базы $\mathcal{B}$ такой, что при любом $t\in B$ и любом $x\in E$ будет $|f(x)-f_t(x)|<\varepsilon/2$. Тогда при любых $t_1,t_2\in B$ и любом $x\in E$ будет

$$|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|\leqslant|f(x)-f_{t_1}(x)|+|f(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Достаточность. При каждом фиксированном значении $x\in E$ величину $f_t(x)$ можно рассматривать как функцию переменной $t\in T$. Если выполнены условия теоремы, то для этой функции выполнены условия критерия Коши существования ее предела при базе $\mathcal{B}$.

Значит, семейство $\{f_t;t\in T\}$ по крайней мере поточечно сходится к некоторой функции $f\colon E\to\mathbb{R}$ на множестве E при базе $\mathcal{B}$.

Если теперь перейти к пределу в неравенстве $|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon$, справедливом при любых $t_1,t_2\in B$ и любых $x\in E$, то можно получить, что $|f(x)-f_{t_2}(x)|\leqslant\varepsilon$ при любом $t_2\in B$ и любом $x\in E$, а это с точностью до несущественных переобозначений и замены строгого неравенства нестрогим как раз совпадает с определением равномерной сходимости семейства $\{f_t;t\in T\}$ к функции $f\colon E\to\mathbb{R}$ на множестве E при базе $\mathcal{B}$. ►

Замечание 1. Определения сходимости и равномерной сходимости, которые мы привели для семейств вещественнозначных функций $f_t\colon X\to\mathbb{R}$, разумеется, остаются в силе для семейств функций $f_t\colon X\to Y$ со значения-

ми в любом метрическом пространстве Y. Естественное изменение, которое при этом следует сделать в приведенных определениях, состоит в замене $|f(x)-f_t(x)|$ на $d_Y(f(x), f_t(x))$, где d_Y означает метрику в пространстве Y.

Для векторных нормированных пространств Y, в частности для $Y=\mathbb{C}$, или $Y=\mathbb{R}^m$, или $Y=\mathbb{C}^m$, не приходится делать даже этих формальных изменений.

Замечание 2. Критерий Коши, конечно, тоже остается в силе для семейств функций $f_t\colon X\to Y$ со значениями в метрическом пространстве Y, если Y — полное метрическое пространство. Как видно из доказательства, условие полноты Y нужно лишь в пункте, относящемся к достаточности условий критерия.

Задачи и упражнения

1. Выясните, равномерно ли сходятся рассмотренные в примерах 3—5 последовательности функций.

2. Докажите равенства (2), (3).

3. a) Покажите, что рассмотренная в примере 1 последовательность функций сходится равномерно на любом отрезке $[0, 1-\delta]\subset[0, 1]$, но на множестве $[0, 1]$ сходится неравномерно.

b) Покажите, что это же справедливо и для последовательности, рассмотренной в примере 9.

c) Покажите, что рассмотренное в примере 8 семейство функций f_t при $t\to 0$ сходится равномерно на любом отрезке $[\delta, 1]\subset[0, 1]$, но на множестве $[0, 1]$ сходится неравномерно.

d) Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость семейство функций $f_t(x)=\sin tx$ при $t\to 0$, а затем при $t\to\infty$.

e) Охарактеризуйте сходимость семейства функций $f_t(x)=e^{-tx^2}$ при $t\to+\infty$ на произвольном фиксированном множестве $E\subset\mathbb{R}$.

4. a) Проверьте, что если семейство функций сходится (сходится равномерно) на множестве, то оно сходится (сходится равномерно) и на любом подмножестве этого множества.

b) Покажите, что если семейство функций $f_t\colon X\to\mathbb{R}$ сходится (сходится равномерно) на множестве E при базе $\mathcal{B}$, а $g\colon X\to\mathbb{R}$ — ограниченная функция, то и семейство $g\cdot f_t\colon X\to\mathbb{R}$ тоже будет сходиться (равномерно сходиться) на E при базе $\mathcal{B}$.

c) Докажите, что если семейства функций $f_t\colon X\to\mathbb{R}$, $g_t\colon X\to\mathbb{R}$ равномерно сходятся на множестве $E\subset X$ при базе $\mathcal{B}$, то и семейство $h_t=\alpha f_t+\beta g_t$, где $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, тоже сходится равномерно на множестве E при базе $\mathcal{B}$.

5. a) При доказательстве достаточности условий критерия Коши мы совершили предельный переход $\lim\limits_{\mathcal{B}} f_{t_1}(x)=f(x)$ по базе $\mathcal{B}$ в T. Но $t_1\in B$, а $\mathcal{B}$ — база в T, а не в B. Можем ли мы совершить этот предельный переход так, чтобы t_1 оставалось в B?

b) Поясните, где в доказательстве критерия Коши равномерной сходимости семейства функций $f_t\colon X\to\mathbb{R}$ использована полнота $\mathbb{R}$.

c) Заметьте, что если все функции семейства $\{f_t\colon X\to\mathbb{R};\ t\in T\}$ постоянные, то доказанная теорема в точности дает критерий Коши существования предела функции $\varphi\colon T\to\mathbb{R}$ при базе $\mathcal{B}$ в T.

6. Докажите, что если семейство функций $f_t\in C(I, \mathbb{R})$, непрерывных на отрезке $I=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$, сходится равномерно на интервале $]a, b[$, то оно сходится, и причем равномерно, на всем отрезке $[a, b]$.

§ 2. Равномерная сходимость рядов функций

1. Основные определения и критерий равномерной сходимости ряда

Определение 1. Пусть $\{a_n : X \to \mathbb{C};\ n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность комплекснозначных (в частности, вещественнозначных) функций. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится* или *равномерно сходится на множестве* $E \subset X$, если на E сходится или соответственно равномерно сходится последовательность $\left\{s_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n(x);\ m \in \mathbb{N}\right\}$.

Определение 2. Функция $s_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n(x)$, как и в случае числовых рядов, называется *частичной суммой* или, точнее, m-й *частичной суммой ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.

Определение 3. *Суммой ряда* называется предел последовательности его частичных сумм.

Таким образом, запись

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ на } E$$

означает, что $s_m(x) \to s(x)$ на E при $m \to \infty$, а запись

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ равномерно сходится на } E$$

означает, что $s_m(x) \rightrightarrows s(x)$ на E при $m \to \infty$.

Исследование поточечной сходимости ряда в сущности есть исследование сходимости числового ряда, и с этим мы уже знакомы.

Пример 1. Функцию $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ мы в свое время определили соотношением

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \tag{1}$$

убедившись предварительно, что стоящий справа ряд сходится при каждом значении $z \in \mathbb{C}$.

На языке определений 1 — 3 можно теперь сказать, что ряд (1) функций $a_n(z) = \frac{1}{n!} z^n$ сходится на всей комплексной плоскости и функция $\exp z$ является его суммой.

В силу принятых определений 1, 2 между рядами и последовательностями их частичных сумм устанавливается обратимая связь: зная члены ряда, получаем последовательность частичных сумм, а зная последовательность частичных сумм, восстанавливаем все члены ряда: характер сходимости ряда отождествляется с характером сходимости последовательности его частичных сумм.

Пример 2. В примере 5 из § 1 была построена последовательность $\{f_m; m \in \mathbb{N}\}$ функций, сходящаяся на $\mathbb{R}$ к функции Дирихле $\mathscr{D}(x)$. Если положить $a_1(x) = f_1(x)$ и $a_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ при $n > 1$, то мы получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, который будет сходиться на всей числовой оси, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \mathscr{D}(x)$.

Пример 3. В примере 9 из § 1 было показано, что последовательность функций $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ сходится, но неравномерно, к нулю на отрезке $[0, 1]$. Значит, полагая $a_1(x) = f_1(x)$, $a_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ при $n > 1$, получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, который сходится к нулю на отрезке $[0, 1]$, но сходится неравномерно.

Прямая связь между рядами и последовательностями функций позволяет каждое утверждение о последовательностях функций переформулировать в виде соответствующего утверждения о рядах функций.

Так, применительно к последовательности $\{s_n : X \to \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}\}$ доказанный в § 1 критерий Коши равномерной сходимости последовательности на множестве $E \subset X$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n_1, n_2 > N\ \forall x \in E\ (|s_{n_1}(x) - s_{n_2}(x)| < \varepsilon). \tag{2}$$

Отсюда с учетом определения 1 получается

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N \in \mathbb{N}$, что при любых натуральных m, n, удовлетворяющих условию $m \geqslant n > N$, в любой точке $x \in E$ выполнено неравенство*

$$|a_n(x) + \ldots + a_m(x)| < \varepsilon. \tag{3}$$

◄ Действительно, полагая в (2) $n_1 = m$, $n_2 = n - 1$ и считая $s_n(x)$ частичной суммой нашего ряда, получаем неравенство (3), из которого, в свою очередь, при тех же обозначениях и условиях теоремы вытекает соотношение (2). ►

Замечание 1. Мы не указали в формулировке теоремы 1 область значений функций $a_n(x)$, подразумевая, что это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. На самом деле областью значений, очевидно, может быть любое векторное нормированное пространство, например $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, если только оно является полным.

Замечание 2. Если в условиях теоремы 1 все функции $a_n(x)$ постоянны, мы получаем уже знакомый нам критерий Коши сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Следствие 1 (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходился равномерно на некотором множестве E, необходимо, чтобы $a_n \rightrightarrows 0$ на E при $n \to \infty$.*

◄ Это вытекает из определения равномерной сходимости последовательности к нулю и неравенства (3), если положить в нем $m=n$. ►

ПРИМЕР 4. Ряд (1) сходится на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ неравномерно, поскольку $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}\left|\frac{1}{n!}z^n\right|=\infty$ для любого $n\in\mathbb{N}$, в то время как по необходимому условию равномерной сходимости, при наличии таковой, величина $\sup\limits_{x\in E}|a_n(x)|$ должна стремиться к нулю.

ПРИМЕР 5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, как мы знаем, сходится в единичном круге $K=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$. Поскольку $\left|\frac{z^n}{n}\right|<\frac{1}{n}$ при $z\in K$, то $\frac{z^n}{n}\rightrightarrows 0$ на K при $n\to\infty$. Необходимое условие равномерной сходимости выполнено, однако этот ряд сходится неравномерно на K. В самом деле, при любом фиксированном $n\in\mathbb{N}$, считая z достаточно близким к единице, можно в силу непрерывности членов ряда добиться выполнения неравенства

$$\left|\frac{z^n}{n}+\ldots+\frac{z^{2n}}{2n}\right|>\frac{1}{2}\left|\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{2n}\right|>\frac{1}{4}.$$

По критерию Коши отсюда заключаем, что рассматриваемый ряд не сходится равномерно на множестве K.

2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ *сходится абсолютно* на множестве E, если в любой точке $x\in E$ соответствующий числовой ряд сходится абсолютно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ таковы, что $|a_n(x)|\leqslant b_n(x)$ при любом $x\in E$ и при всех достаточно больших номерах $n\in\mathbb{N}$, то из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ на E вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ на том же множестве E.*

◄ В силу принятых условий при всех достаточно больших номерах n и m (пусть $n\leqslant m$) в любой точке $x\in E$ выполнены неравенства

$$|a_n(x)+\ldots+a_m(x)|\leqslant|a_n(x)|+\ldots+|a_m(x)|\leqslant$$
$$\leqslant b_n(x)+\ldots+b_m(x)=|b_n(x)+\ldots+b_m(x)|.$$

По критерию Коши для любого $\varepsilon>0$ можно в силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ указать номер $N\in\mathbb{N}$ так, что при любых $m\geqslant n>N$ и любом $x\in E$ $|b_n(x)+\ldots+b_m(x)|<\varepsilon$. Но тогда из написанных неравенств следует, что в силу того же критерия Коши должны равномерно сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$. ►

Следствие 2 (мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда). *Если для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *можно указать такой сходящийся числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, *что* $\sup\limits_{x\in E} |a_n(x)| \leqslant M_n$ *при всех достаточно больших номерах* $n\in\mathbb{N}$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится на множестве* E *абсолютно и равномерно.*

◄ Сходящийся числовой ряд можно рассматривать как ряд из постоянных на множестве E функций, который в силу критерия Коши сходится равномерно на E. Значит, признак Вейерштрасса вытекает из утверждения 1, если положить в последнем $b_n(x) = M_n$. ►

Признак Вейерштрасса является наиболее простым и вместе с тем наиболее часто используемым достаточным условием равномерной сходимости ряда.

В качестве примера его применения докажем следующее полезное

Утверждение 2. *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *сходится в точке* $\zeta\neq z_0$, *то он сходится абсолютно и равномерно в любом круге* $K_q = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0| < q|\zeta - z_0|\}$, *где* $0<q<1$.

◄ Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta - z_0)^n$ в силу необходимого признака сходимости числового ряда следует, что $c_n(\zeta - z_0)^n \to 0$ при $n\to\infty$. Значит, в рассматриваемом круге K_q при всех достаточно больших значениях $n\in\mathbb{N}$ справедливы оценки $|c_n(z-z_0)^n| = |c_n(\zeta - z_0)^n|\cdot\left|\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right|^n \leqslant |c_n(\zeta-z_0)^n|\cdot q^n < q^n$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ при $|q|<1$ сходится, из оценок $|c_n(z-z_0)^n| < q^n$ на основе мажорантного признака равномерной сходимости получаем высказанное утверждение 2. ►

Сопоставляя это утверждение с формулой Коши—Адамара для радиуса сходимости степенного ряда (см. гл. V, § 5, (17)), приходим к заключению, что имеет место

Теорема 2 (о характере сходимости степенного ряда). *Степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *сходится в круге* $K = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$, *радиус которого определяется по формуле*[1] $R = \Bigl(\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\Bigr)^{-1}$ *Коши—Адамара. Вне этого круга ряд расходится. На любом замкнутом круге, лежащем строго внутри круга* K *сходимости ряда, степенной ряд сходится абсолютно и равномерно.*

Замечание 3. Как показывают примеры 1 и 5, на всем круге K степенной ряд не обязан при этом сходиться равномерно. Вместе с тем может случиться, что степенной ряд равномерно сходится даже на замкнутом круге $\overline{K}$.

[1] В исключительном случае, когда $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$, считается, что $R=0$, а круг K вырождается в единственную точку z_0.

Пример 6. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ равен единице. Но если $|z| \leqslant 1$, то $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$, и по признаку Вейерштрасса рассматриваемый ряд сходится абсолютно и равномерно в замкнутом круге $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.

3. Признак Абеля—Дирихле. Следующие пары родственных достаточных условий равномерной сходимости ряда несколько более специальны и существенно связаны с вещественнозначностью определенных компонент рассматриваемых рядов. Но эти условия тоньше, чем признак Вейерштрасса, поскольку они позволяют исследовать и такие ряды, которые сходятся, но неабсолютно.

Определение 5. Говорят, что семейство $\mathscr{F}$ функций $f: X \to \mathbb{C}$ *равномерно ограничено* на некотором множестве $E \subset X$, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что для любой функции $f \in \mathscr{F}$ справедливо соотношение $\sup\limits_{x \in E} |f(x)| \leqslant M$.

Определение 6. Последовательность функций $\{b_n : X \to \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) *на множестве* $E \subset X$, если для любого $x \in E$ таковой является числовая последовательность $\{b_n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$. Неубывающие и невозрастающие на множестве последовательности функций называются *монотонными последовательностями* на этом множестве.

Напомним (в случае необходимости см. гл. VI, § 2, п. 3) следующее тождество, называемое *преобразованием Абеля*:

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = A_m b_m - A_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}), \tag{4}$$

где $a_k = A_k - A_{k-1}$, $k = n, \ldots, m$.

Если $b_n, b_{n+1}, \ldots, b_m$ — монотонная последовательность вещественных чисел, то, даже если $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m$ комплексные числа или векторы какого-то нормированного пространства, на основании тождества (4) можно получить следующую нужную нам оценку:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| \leqslant 4 \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot \max\{|b_n|, |b_m|\}. \tag{5}$$

◄ В самом деле,

$$|A_m b_m| + |A_{n-1} b_n| + \left|\sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1})\right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot \left(|b_m| + |b_n| + \sum_{k=n}^{m-1} |b_k - b_{k+1}|\right) =$$
$$= \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot \big(|b_m| + |b_n| + |b_n - b_m|\big) \leqslant 4 \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k| \cdot \max\{|b_n|, |b_m|\}.$$

В участвующем в этой выкладке равенстве как раз и использована монотонность последовательности чисел b_k. ►

Утверждение 3 (признак Абеля—Дирихле равномерной сходимости ряда). *Для равномерной сходимости на множестве E ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$, члены которого являются произведениями комплекснозначных функций $a_n: X \to \mathbb{C}$ и вещественнозначных функций $b_n: X \to \mathbb{R}$, достаточно, чтобы выполнялась любая пара следующих условий:*

α_1) частичные суммы $s_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно ограничены на E;

β_1) последовательность функций $b_n(x)$ монотонна и равномерно стремится к нулю на множестве E;

или

α_2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на E;

β_2) последовательность функций $b_n(x)$ монотонна и равномерно ограничена на E.

◄ Монотонность последовательности $b_n(x)$ позволяет при каждом $x \in E$ записать аналогичную (5) оценку

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 4 \max_{n-1 \leqslant k \leqslant m} |A_k(x)| \cdot \max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}, \tag{5'}$$

где в качестве $A_k(x)$ возьмем $s_k(x) - s_{n-1}(x)$.

Если выполнена пара условий α_1), β_1), то, с одной стороны, существует такая постоянная M, что $|A_k(x)| \leqslant M$ при любом $k \in \mathbb{N}$ и любом $x \in E$, а с другой стороны, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, при всех достаточно больших значениях n и m и любом $x \in E$ будет выполнено неравенство

$$\max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\} < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Значит, из (5) следует, что при всех достаточно больших значениях n и m и любом $x \in E$ будет $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(x)\right| < \varepsilon$, т. е. для рассматриваемого ряда выполнен критерий Коши равномерной сходимости.

В случае пары условий α_2), β_2) ограниченной оказывается величина $\max\{|b_n(x)|, |b_m(x)|\}$. В то же время, ввиду равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ при любых достаточно больших значениях n и $k > n$ и любой точке $x \in E$ будет $|A_k(x)| = |s_k(x) - s_{n-1}(x)| < \varepsilon$. Учитывая это, из неравенства (5) вновь заключаем, что для рассматриваемого ряда выполнен критерий Коши равномерной сходимости. ►

Замечание 4. В случае, когда функции a_n и b_n — постоянные, утверждение 3 превращается в признак Абеля—Дирихле сходимости числовых рядов.

Пример 7. Исследуем при $x \in \mathbb{R}$ сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} e^{inx}. \tag{6}$$

Поскольку

$$\left| \frac{1}{n^{\alpha}} e^{inx} \right| = \frac{1}{n^{\alpha}}, \tag{7}$$

то при $\alpha \leqslant 0$ для ряда (6) не выполнено необходимое условие сходимости, и он расходится при любом значении $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, в дальнейшем можно считать, что $\alpha > 0$.

Если $\alpha > 1$, то из (7) на основании признака Вейерштрасса заключаем, что ряд (6) сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси $\mathbb{R}$.

Для исследования сходимости при $0 < \alpha \leqslant 1$ воспользуемся признаком Абеля—Дирихле, полагая $a_n(x) = e^{inx}$ и $b_n(x) = \frac{1}{n^{\alpha}}$. Поскольку при $\alpha > 0$ постоянные функции $b_n(x)$ монотонно и, очевидно, равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$ стремятся к нулю, то остается исследовать частичные суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{inx}$.

Для удобства дальнейших ссылок мы рассмотрим суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ikx}$, отличающиеся от частичных сумм нашего ряда только начальным слагаемым 1.

Используя формулу геометрической прогрессии и формулу Эйлера, последовательно находим при $x \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} e^{i\frac{n}{2}x} =$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{n}{2} x + i \sin \frac{n}{2} x \right). \tag{8}$$

Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} \right| \leqslant \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}, \tag{9}$$

откуда по признаку Абеля—Дирихле вытекает, что ряд (6) при $0 < \alpha \leqslant 1$ сходится равномерно на любом множестве $E \subset \mathbb{R}$ на котором $\inf\limits_{x \in E} \left| \sin \frac{x}{2} \right| > 0$. В частности, ряд (6) просто сходится при любом $x \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Если же $x = 2\pi m$, то $e^{in2\pi m} = 1$, и ряд (6) превращается в числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, который при $0 < \alpha \leqslant 1$ расходится.

Покажем, что из сказанного уже можно заключить, что при $0 < \alpha \leqslant 1$ ряд (6) не может сходиться равномерно ни на каком множестве E, замыкание которого содержит точки вида $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Положим для определенности, что

$0\in\overline{E}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при $0<\alpha\leqslant 1$ расходится. По критерию Коши найдется число $\varepsilon_0>0$ такое, что, какое бы $N\in\mathbb{N}$ ни взять, можно будет подобрать числа $m\geqslant n>N$ так, что $\left|\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{m^{\alpha}}\right|>\varepsilon_0>0$. В силу непрерывности функций e^{ikx} на $\mathbb{R}$ отсюда следует, что в E можно выбрать точку x, столь близкую к нулю, что

$$\left|\frac{e^{inx}}{n^{\alpha}}+\ldots+\frac{e^{imx}}{m^{\alpha}}\right|>\varepsilon_0.$$

Но это в силу критерия Коши равномерной сходимости ряда означает, что на указанном множестве E ряд (6) не может сходиться равномерно.

В дополнение к сказанному можно отметить, что, как видно из равенства (7), ряд (6) сходится неабсолютно при $0<\alpha\leqslant 1$.

Замечание 5. Для дальнейшего полезно заметить, что, отделяя в (8) действительную и мнимую части, получаем следующие соотношения:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos kx=\frac{\cos\frac{n}{2}x\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},\tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin kx=\frac{\sin\frac{n}{2}x\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}},\tag{11}$$

справедливые при $x\neq 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

В качестве еще одного примера использования признака Абеля—Дирихле докажем следующее

Утверждение 4 (так называемая вторая теорема Абеля о степенных рядах). *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ *сходится в некоторой точке* $\zeta\in\mathbb{C}$, *то он сходится равномерно на отрезке с концами* z_0, ζ.

◄ Точки указанного отрезка представим в виде $z=z_0+(\zeta-z_0)t$, где $0\leqslant t\leqslant 1$. Подставив это выражение для z в данный степенной ряд, получим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(\zeta-z_0)^n t^n$. По условию числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(\zeta-z_0)^n$ сходится, а последовательность функций t^n монотонна и равномерно ограничена единицей на отрезке $[0,1]$. Значит, выполнены условия α_2), β_2) признака Абеля—Дирихле и утверждение 4 доказано. ►

Задачи и упражнения

1. Исследуйте характер сходимости на множествах $E\subset\mathbb{R}$ при различных значениях действительного параметра α следующих рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$.

2. Докажите, что следующие ряды сходятся равномерно на указанных множествах:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ при $0\leqslant x\leqslant 1$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$ при $0 \leqslant x \leqslant +\infty$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ при $0 \leqslant x \leqslant +\infty$.

3. Покажите, что если *ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{n^x}$ сходится в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то он сходится равномерно на множестве $x \geqslant x_0$, причем если $x > x_0 + 1$, то ряд сходится абсолютно.

4. Проверьте, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ хотя и сходится на $\mathbb{R}$, но неравномерно.

5. a) На примере рядов из задачи 2 покажите, что признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда является достаточным, но не необходимым условием равномерной сходимости ряда.

b) Постройте ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ с неотрицательными непрерывными на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ членами, который сходится равномерно на этом отрезке, и в то же время ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, составленный из величин $M_n = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |a_n(x)|$, расходится.

6. a) Сформулируйте упомянутый в замечании 4 признак Абеля—Дирихле сходимости ряда.

b) Покажите, что условие монотонности $\{b_n\}$ в нем можно несколько ослабить, потребовав, чтобы последовательность $\{b_n\}$ была монотонна лишь с точностью до поправок $\{\beta_n\}$, образующих абсолютно сходящийся ряд.

7. В дополнение к утверждению 4 покажите вслед за Абелем, что если степенной ряд сходится в некоторой точке границы круга сходимости, то его сумма имеет в этом круге предел по любому не касательному к граничной окружности направлению, идущему в эту точку.

§ 3. Функциональные свойства предельной функции

1. Конкретизация задачи. В этом параграфе будут даны ответы на поставленные в § 1 вопросы о том, когда предел семейства непрерывных, дифференцируемых или интегрируемых функций является функцией, обладающей тем же свойством, и когда предел производных или интегралов от функций семейства совпадает с производной или интегралом от предельной функции этого семейства.

Чтобы разъяснить математическое содержание обсуждаемых вопросов, рассмотрим, например, связь непрерывности и предельного перехода.

Пусть $f_n(x) \to f(x)$ на $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$, и пусть все функции последовательности $\{f_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ непрерывны в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Мы интересуемся непрерывностью предельной функции f в той же точке x_0. Для ответа на этот вопрос нам нужно проверить равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, которое в терминах исходной последовательности переписывается в виде соотношения

$$\lim_{x \to x_0} \Bigl(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\Bigr) = \lim_{n \to \infty} f_n(x_0)$$

или, с учетом данной нам непрерывности функций f_n в точке x_0, записывается в форме следующего подлежащего проверке соотношения:

$$\lim_{x\to x_0}\Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr)=\lim_{n\to\infty}\Bigl(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\Bigr). \tag{1}$$

В левой части этого соотношения сначала делается предельный переход по базе $n\to\infty$, а затем предельный переход по базе $x\to x_0$, а в правой части предельные переходы по тем же базам проводятся в другом порядке.

Изучая функции нескольких переменных, мы видели, что равенство (1) имеет место далеко не всегда. Видели мы это и на разобранных в предыдущих двух параграфах примерах, показывающих, что предел последовательности непрерывных функций не всегда является функцией непрерывной.

Дифференцирование и интегрирование являются некоторыми специальными операциями предельного перехода. Значит, вопрос о том, получим ли мы одно и то же, если сначала продифференцируем (проинтегрируем) функции семейства, а затем перейдем к пределу по параметру семейства, или сначала найдем предельную функцию семейства, а затем будем ее дифференцировать (интегрировать), снова сводится к проверке возможности изменения порядка двух предельных переходов.

2. Условия коммутирования двух предельных переходов. Покажем, что если из последовательно выполняемых предельных переходов хотя бы один равномерен, то предельные переходы перестановочны.

Теорема 1. *Пусть $\{F_t;\, t\in T\}$ — семейство функций $F_t\colon X\to\mathbb{C}$, зависящих от параметра t; $\mathscr{B}_X$ — база в X, $\mathscr{B}_T$ — база в T. Если при базе $\mathscr{B}_T$ семейство сходится равномерно на X к функции $F\colon X\to\mathbb{C}$, а при каждом $t\in T$ существует предел $\lim\limits_{\mathscr{B}_X} F_t(x)=A_t$, то существуют оба повторных предела $\lim\limits_{\mathscr{B}_X}\bigl(\lim\limits_{\mathscr{B}_T} F_t(x)\bigr)$, $\lim\limits_{\mathscr{B}_T}\bigl(\lim\limits_{\mathscr{B}_X} F_t(x)\bigr)$ и имеет место равенство*

$$\lim_{\mathscr{B}_X}\Bigl(\lim_{\mathscr{B}_T} F_t(x)\Bigr)=\lim_{\mathscr{B}_T}\Bigl(\lim_{\mathscr{B}_X} F_t(x)\Bigr). \tag{2}$$

Эту теорему удобно записать в виде следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
F_t(x) & \underset{\mathscr{B}_T}{\rightrightarrows} & F(x) \\
{\scriptstyle \mathscr{B}_X}\downarrow & \diagup & \downarrow{\scriptstyle \exists\ \mathscr{B}_X} \\
A_t & \overset{\exists}{\underset{\mathscr{B}_T}{\longrightarrow}} & A,
\end{array} \tag{3}$$

в которой над диагональю указаны условия, а под диагональю — их следствия. Равенство (2) означает, что эта диаграмма коммутативна, т. е. окончательный результат A не зависит от того, выполнить ли сначала операции, отвечающие переходу по верхней и правой стороне диаграммы, или в том же смысле сначала пройти по левой, а затем по нижней ее стороне.

Докажем сформулированную теорему.

◄ Поскольку $F_t \rightrightarrows F$ на X при базе $\mathcal{B}_T$, по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент B_T базы $\mathcal{B}_T$, что при любых $t_1, t_2 \in B_T$ и любом $x \in X$ будет выполнено неравенство

$$|F_{t_1}(x) - F_{t_2}(x)| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по базе $\mathcal{B}_X$, получим соотношение

$$|A_{t_1} - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon, \qquad (5)$$

справедливое для любых $t_1, t_2 \in B_T$. По критерию Коши существования предела функции отсюда следует, что функция A_t имеет некоторый предел A по базе $\mathcal{B}_T$. Проверим теперь, что $A = \lim\limits_{\mathcal{B}_X} F(x)$.

Фиксировав $t_2 \in B_T$, найдем такой элемент B_X базы $\mathcal{B}_X$, что при любом $x \in B_X$ имеет место неравенство

$$|F_{t_2}(x) - A_{t_2}| < \varepsilon. \qquad (6)$$

Не меняя t_2, совершим в (4) и (5) предельный переход по базе $\mathcal{B}_T$ относительно параметра t_1. Тогда получим, что

$$|F(x) - F_{t_2}(x)| \leqslant \varepsilon, \qquad (7)$$

$$|A - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon, \qquad (8)$$

причем неравенство (7) справедливо при любом $x \in X$.

Сопоставляя соотношения (6)—(8), пользуясь неравенством треугольника, получаем, что

$$|F(x) - A| < 3\varepsilon$$

при любом $x \in B_X$. Тем самым проверено, что $A = \lim\limits_{\mathcal{B}_X} F(x)$. ►

Замечание 1. Как видно из приведенного доказательства, теорема 1 остается в силе для функций $F_t \colon X \to Y$ со значениями в любом полном метрическом пространстве Y.

Замечание 2. Если к условиям теоремы 1 добавить требование существования предела $\lim\limits_{\mathcal{B}_T} A_t = A$, то, как видно из доказательства, равенство $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} F(x) = A$ можно получить, даже не предполагая полноту пространства Y значений функций $F_t \colon X \to Y$.

3. Непрерывность и предельный переход. Покажем, что если непрерывные в некоторой точке множества функции сходятся равномерно на этом множестве, то и предельная функция непрерывна в этой точке.

Теорема 2. *Пусть* $\{f_t;\ t \in T\}$ — *семейство функций* $f_t \colon X \to \mathbb{C}$, *зависящих от параметра* t; $\mathcal{B}$ — *база в* T. *Если* $f_t \rightrightarrows f$ *на* X *при базе* $\mathcal{B}$ *и функции* f_t *непрерывны в точке* $x_0 \in X$, *то функция* $f \colon X \to \mathbb{C}$ *тоже непрерывна в этой точке.*

◄ В нашем случае диаграмма (3) приобретает следующий конкретный вид:

$$\begin{array}{ccc} f_t(x) & \overset{}{\underset{\mathscr{B}}{\rightrightarrows}} & f(x) \\ {\scriptstyle x\to x_0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle x\to x_0} \\ f_t(x_0) & \underset{\mathscr{B}}{\longrightarrow} & f(x_0), \end{array}$$

Здесь все предельные переходы, кроме правого вертикального, заданы самими условиями теоремы 2. Нетривиальное нужное нам следствие теоремы 1 состоит именно в том, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. ►

Замечание 3. Мы не конкретизировали природу множества X. На самом деле это может быть любое топологическое пространство, лишь бы в X была определена база $x \to x_0$. Значения функций f_t могут лежать в любом метрическом пространстве, которое, как следует из замечания 2, даже не обязано быть полным.

Следствие 1. *Если последовательность функций, непрерывных на множестве, сходится на нем равномерно, то предельная функция тоже непрерывна на этом множестве.*

Следствие 2. *Если ряд из функций, непрерывных на некотором множестве, сходится на нем равномерно, то сумма ряда тоже непрерывна на этом множестве.*

В качестве иллюстрации возможного использования полученных результатов рассмотрим

Пример 1. *Метод Абеля суммирования рядов.*

Сопоставляя следствие 2 со второй теоремой Абеля (утверждение 4 из § 2), приходим к заключению, что справедливо

Утверждение 1. *Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится в некоторой точке ζ, то он сходится равномерно на отрезке $[z_0, \zeta]$, идущем из z_0 в точку ζ, и сумма ряда непрерывна на этом отрезке.*

В частности, это означает, что если числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится, то степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится равномерно на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ действительной оси и его сумма $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ непрерывна на этом отрезке. Поскольку $s(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, можно, таким образом, сказать, что если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится, то справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{9}$$

Интересно, что в соотношении (9) правая часть порой может иметь смысл даже тогда, когда ряд, стоящий слева, в традиционном его понимании является расходящимся. Например, ряду $1 - 1 + 1 - \ldots$ соответствует ряд

$x-x^2+x^3-\ldots$, который при $|x|<1$ сходится к функции $x/(1+x)$. При $x\to 1$ эта функция имеет предел $1/2$.

Метод суммирования ряда, называемый методом Абеля, состоит в приписывании левой части равенства (9) значения правой части этого равенства, если последнее значение определено. Мы видели, что если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ в традиционном смысле сходится, то по методу Абеля ему будет сопоставлена его же классическая сумма. Вместе с тем, например, расходящемуся в традиционном смысле ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ метод Абеля сопоставляет естественную усредненную величину $1/2$.

Дальнейшие вопросы в связи с разобранным примером 1 можно найти в задачах 5—8.

Пример 2. В свое время, обсуждая формулу Тейлора, мы показали, что при $|x|<1$ имеет место разложение

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \tag{10}$$

Можно проверить, что при $\alpha>0$ числовой ряд

$$1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}+\ldots$$

сходится. Значит, по теореме Абеля, если $\alpha>0$, ряд (10) сходится равномерно на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$. Но функция $(1+x)^\alpha$ непрерывна в точке $x=1$, поэтому можно утверждать, что если $\alpha>0$, то равенство (10) имеет место и при $x=1$.

В частности, можно утверждать, что при $\alpha>0$

$$(1-t^2)^\alpha = 1-\frac{\alpha}{1!}t^2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^4-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}t^{2n}+\ldots, \tag{11}$$

и этот ряд сходится к функции $(1-t^2)^\alpha$ равномерно на отрезке $[-1, 1]$.

Полагая в (11) $\alpha=\frac{1}{2}$ и $t^2=1-x^2$ при $|x|\leqslant 1$, получаем, что

$$|x| = 1-\frac{\frac{1}{2}}{1!}(1-x^2)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(1-x^2)^2-\ldots, \tag{12}$$

и стоящий справа ряд многочленов сходится к функции $|x|$ равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Полагая $P_n(x):=S_n(x)-S_n(0)$, где $S_n(x)$ есть n-я частичная сумма этого ряда, находим, что какую бы точность $\varepsilon>0$ ни задать, найдется такой многочлен $P(x)$, что $P(0)=0$ и

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\Big||x|-P(x)\Big|<\varepsilon. \tag{13}$$

Вернемся теперь к общей теории.

Мы показали, что непрерывность функций сохраняется при равномерном предельном переходе. Условие равномерности предельного перехода является, однако, только достаточным для того, чтобы пределом непрерывных

функций была непрерывная же функция (см. по этому поводу примеры 8, 9 из § 1). Вместе с тем имеется конкретная ситуация, в которой из сходимости непрерывных функций к непрерывной же следует, что эта сходимость является равномерной.

Утверждение 2 (теорема Дини[1]). *Если последовательность непрерывных на компакте функций сходится на нем монотонно и к непрерывной же функции, то эта сходимость равномерная.*

◄ Пусть для определенности f_n стремятся к f не убывая. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и для любой точки x компакта K найдем такой номер n_x, что $0 \leqslant f(x) - f_{n_x}(x) < \varepsilon$. Поскольку функции f и f_{n_x} непрерывны на K, неравенства $0 \leqslant f(\xi) - f_{n_x}(\xi) < \varepsilon$ останутся в силе и в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in K$. Из покрытия компакта K такими окрестностями можно извлечь конечное покрытие $U(x_1), \ldots, U(x_k)$ и затем фиксировать номер $n(\varepsilon) = \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_k}\}$. Тогда при любом $n > n(\varepsilon)$ в силу неубывания последовательности $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ будем иметь $0 \leqslant f(\xi) - f_n(\xi) < \varepsilon$ в любой точке $\xi \in K$. ►

Следствие 3. *Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ суть неотрицательные непрерывные на компакте K функции $a_n : K \to \mathbb{R}$ и ряд сходится на K к непрерывной функции, то он сходится на K равномерно.*

◄ Частичные суммы $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ данного ряда удовлетворяют условиям теоремы Дини. ►

Пример 3. Покажем, что последовательность функций $f_n(x) = n(1 - x^{1/n})$ при $n \to +\infty$ сходится к функции $f(x) = \ln \frac{1}{x}$ равномерно на каждом отрезке $[a, b]$, лежащем в промежутке $0 < x < \infty$.

◄ Функция $x^t = e^{t \ln x}$ при фиксированном $x > 0$ выпукла по t, поэтому отношение $\frac{x^t - x^0}{t - 0}$ (как угловой коэффициент хорды) не возрастает при $t \to +0$ и стремится к $\ln x$.

Значит, $f_n(x) \nearrow \ln \frac{1}{x}$ при $x > 0$ и $n \to +\infty$. По теореме Дини отсюда следует, что указанная сходимость $f_n(x)$ к $\ln \frac{1}{x}$ является равномерной на каждом отрезке $[a, b] \subset]0, +\infty[$. ►

Отметим, что при этом, например, на промежутке $0 < x \leqslant 1$ равномерной сходимости, очевидно, нет, поскольку функция $\ln \frac{1}{x}$ неограничена на нем, в то время как каждая из функций $f_n(x)$ ограничена на этом промежутке (зависящей от n константой).

4. Интегрирование и предельный переход. Покажем, что если интегрируемые на отрезке функции сходятся на нем равномерно, то предельная

[1]У. Ди́ни (1845—1918) — итальянский математик, наиболее известные его работы относятся к теории функций.

функция тоже интегрируема и ее интеграл по этому отрезку равен пределу интегралов исходных функций.

Теорема 3. *Пусть* $\{f_t;\ t\in T\}$ — *семейство функций* $f_t\colon [a,b]\to\mathbb{C}$, *определенных на отрезке* $a\leqslant x\leqslant b$ *и зависящих от параметра* $t\in T$; $\mathcal{B}$ — *база в* T. *Если функции семейства интегрируемы на* $[a,b]$ *и* $f_t\rightrightarrows f$ *на* $[a,b]$ *при базе* $\mathcal{B}$, *то предельная функция* $f\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ *тоже интегрируема на отрезке* $[a,b]$ *и*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\mathcal{B}}\int\limits_a^b f_t(x)\,dx.$$

◄ Пусть $p=(P,\xi)$ — разбиение P отрезка $[a,b]$ с отмеченными точками $\xi=\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$. Рассмотрим интегральные суммы $F_t(p)=\sum\limits_{i=1}^n f_t(\xi_i)\,\Delta x_i$, $t\in T$, и $F(p)=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i$. Оценим разность $F(p)-F_t(p)$. Поскольку $f_t\rightrightarrows f$ на $[a,b]$ при базе $\mathcal{B}$, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такой элемент B базы $\mathcal{B}$, что при любом $t\in B$ в любой точке $x\in[a,b]$ будет выполнено неравенство $|f(x)-f_t(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$. Значит, при $t\in B$

$$|F(p)-F_t(p)|=\left|\sum_{i=1}^n (f(\xi_i)-f_t(\xi_i))\Delta x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^n |f(\xi_i)-f_t(\xi_i)|\,\Delta x_i<\varepsilon,$$

и эта оценка справедлива не только при любом значении $t\in B$, но и при любом разбиении p из множества $\mathcal{P}=\{(P,\xi)\}$ разбиений отрезка $[a,b]$ с отмеченными точками. Таким образом, $F_t\rightrightarrows F$ на $\mathcal{P}$ при базе $\mathcal{B}$. Теперь, взяв в $\mathcal{P}$ традиционную базу $\lambda(P)\to 0$, по теореме 1 находим, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
\sum\limits_{i=1}^n f_t(\xi_i)\Delta x_i=:F_t(p) & \overset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} & F(p):=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\\
\Big\downarrow{\scriptstyle \lambda(P)\to 0} & & {\scriptstyle\exists}\Big\downarrow{\scriptstyle \lambda(P)\to 0}\\
\int\limits_a^b f_t(x)\,dx=:A_t & \xrightarrow[\mathcal{B}]{} & A:=\int\limits_a^b f(x)\,dx,
\end{array}$$

что и доказывает сформулированную теорему 3. ►

Следствие 4. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *из интегрируемых на отрезке* $[a,b]\subset\mathbb{R}$ *функций сходится равномерно на этом отрезке, то его сумма тоже интегрируема на отрезке* $[a,b]$ *и*

$$\int\limits_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

Пример 4. В этом примере, записывая $\frac{\sin x}{x}$, будем считать, что при $x=0$ это отношение равно единице.

В свое время мы отмечали, что функция $\operatorname{Si}(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ не является элементарной. Используя доказанные теоремы, можно, тем не менее, получить достаточно простое представление этой функции в виде степенного ряда.

Для этого заметим, что

$$\frac{\sin t}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,t^{2n}, \tag{14}$$

и стоящий справа ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-a,a]\subset\mathbb{R}$. Равномерная сходимость ряда следует из мажорантного признака Вейерштрасса равномерной сходимости ряда, поскольку $\frac{|t|^{2n}}{(2n+1)!}\leqslant\frac{a^{2n}}{(2n+1)!}$ при $|t|\leqslant a$, в то время как числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(2n+1)!}$ сходится.

На основании следствия 4 теперь можно написать

$$\operatorname{Si}(x)=\int\limits_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_0^1\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n}\,dt\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}.$$

Полученный ряд, кстати, тоже сходится равномерно на любом отрезке числовой оси, поэтому, какой бы отрезок $[a,b]$ изменения аргумента x ни указать и какую бы ни назначить допустимую абсолютную погрешность, можно подобрать многочлен — частичную сумму полученного ряда, который в любой точке отрезка $[a,b]$ позволит вычислить $\operatorname{Si}(x)$ с погрешностью, не превышающей заданной.

5. Дифференцирование и предельный переход

Теорема 4. *Пусть $\{f_t;\ t\in T\}$ — семейство функций $f_t: X\to\mathbb{C}$, определенных на выпуклом ограниченном множестве X (лежащем в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или ином линейном нормированном пространстве) и зависящих от параметра $t\in T$; $\mathscr{B}$ — база в T. Если функции семейства дифференцируемы на X, семейство $\{f'_t;\ t\in T\}$ производных сходится равномерно на X к некоторой функции $\varphi: X\to\mathbb{C}$, а исходное семейство $\{f_t;\ t\in T\}$ сходится хотя бы в одной точке $x_0\in X$, то оно сходится равномерно на всем множестве X к дифференцируемой функции $f: X\to\mathbb{C}$, причем $f'=\varphi$.*

◄ Покажем сначала, что семейство $\{f_t;\ t\in T\}$ равномерно сходится на множестве X при базе $\mathscr{B}$. Воспользуемся теоремой о конечном приращении в следующих оценках:

$$\left|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)\right|\leqslant\left|(f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x))-(f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0))\right|+\left|f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{\xi\in[x_0,x]}\left|f'_{t_1}(\xi)-f'_{t_2}(\xi)\right||x-x_0|+\left|f_{t_1}(x_0)-f_{t_2}(x_0)\right|=\Delta(x,t_1,t_2).$$

По условию семейство $\{f'_t;\ t\in T\}$ сходится равномерно на X при базе $\mathscr{B}$, величина $f_t(x_0)$ как функция t при той же базе $\mathscr{B}$ имеет предел, а $|x-x_0|$ — ограниченная величина при $x\in X$. Ввиду необходимости условий критерия Коши для равномерной сходимости семейства функций f'_t и существования предела функции $f_t(x_0)$, для любого $\varepsilon>0$ найдется такой элемент B базы $\mathscr{B}$, что для любых $t_1, t_2\in B$ и любого $x\in X$ будет $\Delta(x, t_1, t_2)<\varepsilon$. А это в силу написанных оценок означает, что семейство функций $\{f_t;\ t\in T\}$ тоже удовлетворяет условиям критерия Коши и, следовательно, равномерно сходится на X при базе $\mathscr{B}$ к некоторой функции $f\colon X\to\mathbb{C}$.

Вновь используя теорему о конечном приращении, получим теперь следующие оценки:

$$\begin{aligned}\big|(f_{t_1}(x+h)-f_{t_1}(x)-f'_{t_1}(x)h)-(f_{t_2}(x+h)-f_{t_2}(x)-f'_{t_2}(x)h)\big| &=\\ =\big|(f_{t_1}-f_{t_2})(x+h)-(f_{t_1}-f_{t_2})(x)-(f_{t_1}-f_{t_2})'(x)h\big| &\leqslant\\ \leqslant \sup_{0<\theta<1}|(f_{t_1}-f_{t_2})'(x+\theta h)|\,|h|+|(f_{t_1}-f_{t_2})'(x)|\,|h| &=\\ =\Big(\sup_{0<\theta<1}|f'_{t_1}(x+\theta h)-f'_{t_2}(x+\theta h)|+|f'_{t_1}(x)-f'_{t_2}(x)|\Big)|h|&.\end{aligned}$$

Эти оценки, справедливые при $x, x+h\in X$, ввиду равномерной сходимости семейства $\{f'_t;\ t\in T\}$ на X, показывают, что семейство $\{F_t;\ t\in T\}$ функций

$$F_t(h)=\frac{f_t(x+h)-f_t(x)-f'_t(x)h}{|h|},$$

которые мы будем рассматривать при фиксированном значении $x\in X$, сходится при базе $\mathscr{B}$ равномерно относительно всех значений $h\neq 0$ таких, что $x+h\in X$.

Заметим, что $F_t(h)\to 0$ при $h\to 0$ ввиду дифференцируемости функции f_t в точке $x\in X$, а ввиду того, что $f_t\to f$ и $f'_t\to\varphi$ при базе $\mathscr{B}$, имеем $F_t(h)\to$ $\to F(h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)-\varphi(x)h}{|h|}$ при базе $\mathscr{B}$.

Применяя теорему 1, можно теперь записать коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}\dfrac{f_t(x+h)-f_t(x)-f'_t(x)h}{|h|}=: & F_t(h) & \underset{\mathscr{B}}{\rightrightarrows} & F(h) & :=\dfrac{f(x+h)-f(x)-\varphi(x)h}{|h|}\\ & {\scriptstyle h\to 0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h\to 0} & \\ & 0 & \underset{\mathscr{B}}{\longrightarrow} & 0. & \end{array}$$

Правый предельный переход при $h\to 0$ показывает, что функция f дифференцируема в точке $x\in X$ и $f'(x)=\varphi(x)$. ►

Следствие 5. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *из функций* $f_n\colon X\to\mathbb{C}$, *дифференцируемых на ограниченном выпуклом множестве* X *(лежащем в* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *или любом линейном нормированном пространстве), сходится хотя бы в одной точке*

$x \in X$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно на X, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ тоже сходится равномерно на X, его сумма дифференцируема на X и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Это вытекает из теоремы 4 и определений суммы и равномерной сходимости ряда с учетом линейности операции дифференцирования.

Замечание 4. Приведенные доказательства теорем 3 и 4, как и сами теоремы и их следствия, остаются в силе для функций $f_t\colon X \to Y$ со значениями в любом полном линейном нормированном пространстве Y. Например, Y может быть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $C[a, b]$ и т. д. Областью X определения функций f_t в теореме 4 тоже может быть соответствующее подмножество любого линейного нормированного пространства. В частности, X может лежать в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Для вещественнозначных функций вещественного аргумента (при дополнительных требованиях к сходимости) доказательства этих теорем можно сделать еще более простыми (см. задачу 11).

В качестве иллюстрации использования теорем 2—4 докажем следующее широко используемое и в теории, и в конкретных вычислениях

Утверждение 3. *Если круг $K \subset \mathbb{C}$ сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

не сводится к единственной точке $z = z_0$, то внутри K сумма $f(z)$ этого ряда дифференцируема, причем

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}. \tag{15}$$

Кроме того, функцию $f(z)\colon K \to \mathbb{C}$ можно интегрировать по любому гладкому пути $\gamma\colon [0, 1] \to K$, и если $[0, 1] \ni t \overset{\gamma}{\mapsto} z(t) \in K$, $z(0) = z_0$, $z(1) = z$, то

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}. \tag{16}$$

Замечание 5. Здесь $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz := \int\limits_0^1 f(z(t))z'(t)\,dt$. В частности, если на интервале $-R < x - x_0 < R$ действительной оси $\mathbb{R}$ имеет место равенство $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

◄ Поскольку $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, то из формулы Коши—Адамара (теорема из § 2) вытекает, что степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, имеет тот же круг сходимости K, что и исходный степенной ряд. Но по той же теореме из § 2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$ сходится равномерно в любом круге K_q таком, что $K_q \subset K$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, очевидно, сходится при $z = z_0$, к нему теперь применимо следствие 5, чем и обосновывается равенство (15). Итак, показано, что степенной ряд можно дифференцировать почленно.

Проверим теперь, что его можно и интегрировать почленно.

Если $\gamma\colon [0, 1] \to K$ — гладкий путь в K, то найдется круг K_q такой, что $\gamma \subset \subset K_q$ и $K_q \subset K$. На K_q исходный степенной ряд сходится равномерно, поэтому в равенстве

$$f(z(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z(t)-z_0)^n$$

стоящий справа ряд из непрерывных на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ функций сходится равномерно на этом отрезке к непрерывной же функции $f(z(t))$.

Умножение этого равенства на функцию $z'(t)$, непрерывную на отрезке $[0, 1]$, не нарушит ни самого равенства, ни равномерной сходимости ряда. Значит, по теореме 3 получаем

$$\int_0^1 f(z(t))z'(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 c_n(z(t)-z_0)^n z'(t)\,dt.$$

Но

$$\int_0^1 (z(t)-z(0))^n z'(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\int_0^1 d(z(t)-z(0))^{n+1} =$$
$$= \frac{1}{n+1}(z(1)-z(0))^{n+1} = \frac{1}{n+1}(z(1)-z_0)^{n+1},$$

и мы приходим к равенству (16). ►

Поскольку в разложении $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, очевидно, $c_0 = f(z_0)$, то, последовательно применяя равенство (15), вновь получаем знакомые соотношения $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, которые показывают, что степенной ряд однозначно определяется своей суммой и он является ее рядом Тейлора.

Пример 5. *Бесселева функция* $J_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, есть решение *уравнения Бесселя*[1]

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0.$$

[1]Ф. В. Бессель (1784—1846) — немецкий астроном.

Попробуем найти решение этого уравнения, например, при $n=0$, в виде степенного ряда $y=\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Последовательно используя формулу (15), после элементарных преобразований приходим к соотношению

$$c_1+\sum_{k=2}^{\infty}(k^2c_k+c_{k-2})x^{k-1}=0,$$

из которого, в силу указанной единственности степенного ряда с данной суммой, находим

$$c_1=0, \quad k^2c_k+c_{k-2}=0, \quad k=2,3,\ldots$$

Отсюда легко вывести, что $c_{2k-1}=0$, $k\in\mathbb{N}$, и $c_{2k}=(-1)^k\frac{c_0}{(k!)^2 2^{2k}}$. Если считать $J_0(0)=1$, то мы приходим к соотношению

$$J_0(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

Написанный ряд сходится на всей прямой $\mathbb{R}$ (и во всей плоскости $\mathbb{C}$), поэтому проведенные выше до конкретизации его вида операции над этим рядом являются законными.

Пример 6. В примере 5 мы искали решение уравнения в виде степенного ряда. Если же ряд задан, то, используя формулу (15), можно непосредственно проверить, является ли сумма ряда решением данного уравнения. Так, прямым вычислением можно убедиться в том, что введенная Гауссом функция

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n$$

(*гипергеометрический ряд*) корректно определена при $|x|<1$ и удовлетворяет так называемому *гипергеометрическому дифференциальному уравнению*

$$x(x-1)y''-[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\cdot y'+\alpha\beta\cdot y=0.$$

Отметим в заключение, что, в отличие от теорем 2, 3, в теореме 4 требуется, чтобы не исходное семейство, а семейство производных сходилось равномерно. Мы уже видели (см. пример 2 § 1), что последовательность функций $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin n^2x$ может сходиться к дифференцируемой функции $f(x)\equiv 0$ равномерно, в то время как последовательность производных $f_n'(x)$ не сходится к $f'(x)$. Дело в том, что производная — это характеристика скорости изменения функции, а не величины значений функции. Даже при очень малых по абсолютной величине изменениях значений функции производная формально может меняться очень сильно, как это имеет место в рассмотренном случае малых колебаний большой частоты. Именно это обстоятельство легло в основу построенного Вейерштрассом примера непрерывной ни-

где не дифференцируемой функции, которую он задал в виде ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, очевидно, равномерно сходящегося на всей прямой $\mathbb{R}$, если $0 < a < 1$. Вейерштрасс показал, что если параметр b выбрать удовлетворяющим условию $a \cdot b > 1 + \frac{3}{2}\pi$, то, с одной стороны, f будет непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, а с другой стороны, она не будет иметь производную ни в одной точке $x \in \mathbb{R}$. Формальная проверка последнего утверждения довольно утомительна, поэтому желающие получить более простой пример непрерывной функции без производной могут посмотреть задачу 5 из § 1 гл. V.

Задачи и упражнения

1. Используя степенные ряды, найдите решение уравнения $y''(x) - y(x) = 0$, удовлетворяющее условиям

a) $y(0) = 0$, $y(1) = 1$; b) $y(0) = 1$, $y(1) = 0$.

2. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n+1)}$.

3. a) Проверьте, что заданная в виде ряда функция

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

является решением уравнения Бесселя с индексом $n \geqslant 0$ из примера 5.

b) Проверьте, что гипергеометрический ряд из примера 6 доставляет решение гипергеометрического уравнения.

4. Получите и обоснуйте следующие пригодные для вычислений разложения полных эллиптических интегралов первого и второго рода при $0 < k < 1$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right);$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right).$$

5. Найдите

a) $\sum_{k=0}^{n} r^k e^{ik\varphi}$; b) $\sum_{k=0}^{n} r^k \cos k\varphi$; c) $\sum_{k=0}^{n} r^k \sin k\varphi$.

Покажите, что при $|r| < 1$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} r^k e^{ik\varphi} = \frac{1}{1 - r\cos\varphi - ir\sin\varphi}$; e) $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}$;

f) $\sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin k\varphi = \frac{r \sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}$.

Проверьте, что в смысле суммирования ряда методом Абеля

g) $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi = 0$, если $\varphi \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$, если $\varphi \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Рассмотрев произведение рядов

$$(a_0+a_1+\ldots)(b_0+b_1+\ldots)=(c_0+c_1+\ldots),$$

где $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0$, и используя утверждение 1, покажите, что если ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ сходятся соответственно к A, B и C, то $A\cdot B=C$.

7. Пусть $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ и $\sigma_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}s_k$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ называется *суммируемым по Чезаро*[1], точнее $(c,1)$-суммируемым к A, если $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=A$. В этом случае пишут $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=A(c,1)$.

a) Проверьте, что $1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}(c,1)$.

b) Покажите, что $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k$.

c) Проверьте, что если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=A$ в обычном смысле, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=A(c,1)$.

d) $(c,2)$-суммой ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ называют величину $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sigma_1+\ldots+\sigma_n)$, если этот предел существует. Так можно определить сумму (c,r) любого порядка r. Покажите, что если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=A(c,r)$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=A(c,r+1)$.

e) Докажите, что если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=A(c,1)$, то и методом Абеля этот ряд суммируется к той же величине A.

8. a) «*Теорема тауберова типа*» — это собирательное название для теорем, дающих возможность при тех или иных дополнительных условиях регулярности судить о поведении самих величин по поведению некоторых их средних. Примером такой теоремы, относящейся к методу Чезаро суммирования рядов, является следующее утверждение, которое вы можете попробовать доказать вслед за Харди[2].

Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A(c,1)$ и если $a_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится в обычном смысле и к той же сумме.

b) Сама теорема Таубера[3] относится к методу Абеля суммирования рядов и состоит в следующем.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ сходится при $0<x<1$ и $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=A$. Если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n}=0,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится в обычном смысле и причем к A.

---

[1] Э. Чезаро (1859—1906) — итальянский математик, занимался анализом и геометрией.

[2] Г. Х. Харди (1877—1947) — английский математик; основные труды посвящены теории чисел и теории функций.

[3] А. Таубер (1866—1942) — австрийский математик; основные исследования относятся к теории чисел и теории функций.

9. Полезно иметь в виду, что в отношении предельного перехода под знаком интеграла существуют теоремы, дающие гораздо более свободные достаточные условия для возможности такого перехода, чем те, которые предоставляет теорема 3. Эти теоремы составляют одно из основных достижений так называемой теории интеграла Лебега. В случае, когда функция интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, т. е. $f \in \mathcal{R}[a, b]$, эта функция принадлежит также пространству $\mathcal{L}[a, b]$ функций, интегрируемых по Лебегу, причем значения интегралов $(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $(L)\int\limits_a^b f(x)\,dx$ Римана и Лебега от f совпадают.

Вообще пространство $\mathcal{L}[a, b]$ есть пополнение пространства $\mathcal{R}[a, b]$ (точнее, $\widetilde{\mathcal{R}}[a, b]$) по интегральной метрике, а интеграл $(L)\int\limits_a^b$ есть продолжение линейной функции $(R)\int\limits_a^b$ с $\mathcal{R}[a, b]$ на $\mathcal{L}[a, b]$.

Итоговая теорема Лебега «об ограниченной сходимости» утверждает, что *если последовательность $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ функций $f_n \in \mathcal{L}[a, b]$ такова, что существует неотрицательная функция $F \in \mathcal{L}[a, b]$, мажорирующая функции последовательности, т. е. $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ почти всюду на $[a, b]$, то из сходимости $f_n \to f$ почти во всех точках отрезка $[a, b]$ вытекает, что $f \in \mathcal{L}[a, b]$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(L)\int\limits_a^b f_n(x)\,dx = (L)\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*

a) Покажите на примере, что даже если все функции последовательности $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ ограничены одной и той же константой M на отрезке $[a, b]$, из условий $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \to f$ поточечно на $[a, b]$ не следует, что $f \in \mathcal{R}[a, b]$ (см. пример 5 из § 1).

b) Основываясь на сказанном о взаимоотношении интегралов $(R)\int\limits_a^b$, $(L)\int\limits_a^b$ и теореме Лебега, покажите, что если в условиях предыдущего пункта задачи известно, что все же $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}(R)\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$. Это существенное усиление теоремы 3.

c) Применительно к интегралу Римана можно сформулировать еще следующий вариант теоремы Лебега о монотонной сходимости.

Если последовательность $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ функций $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ сходится к нулю монотонно, т. е. $0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$ и $f_n \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $x \in [a, b]$, то $(R)\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \to 0$.

Докажите это утверждение, используя при необходимости следующее полезное наблюдение.

d) Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $|f| \leqslant M$ и $\int\limits_0^1 f(x)\,dx \geqslant \alpha > 0$. Тогда множество $E = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geqslant \alpha/2\}$ содержит конечное число таких интервалов, сумма l длин которых не меньше, чем $\alpha/(4M)$.

Докажите это, используя, например, интервалы такого разбиения P отрезка $[0, 1]$, которому отвечает нижняя сумма Дарбу $s(f, P)$, удовлетворяющая соотношению $0 \leqslant \int\limits_0^1 f(x)\,dx - s(f, P) < \alpha/4$.

10. a) Покажите на примерах из § 1, что не всегда из сходящейся на отрезке последовательности функций можно извлечь подпоследовательность, которая сходилась бы равномерно на этом отрезке.

b) Гораздо труднее непосредственно проверить, что из последовательности $\{f_n; n\in\mathbb{N}\}$ функций $f_n(x)=\sin nx$ нельзя извлечь подпоследовательность, которая сходилась бы в любой точке отрезка $[0,2\pi]$. Докажите, что это, однако, именно так (используйте результат задачи 9 b) и то обстоятельство, что $\int\limits_0^{2\pi}(\sin n_k x-\sin n_{k+1}x)^2\,dx=2\pi\neq 0$ при $n_k<n_{k+1}$).

c) Пусть $\{f_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ — равномерно ограниченная последовательность функций $f_n\in\mathcal{R}[a,b]$. Пусть

$$F_n(x)=\int\limits_a^x f_n(t)\,dt\quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

Покажите, что из последовательности $\{F_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[a,b]$.

11. a) Покажите, что если $f, f_n\in\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ и $f_n\rightrightarrows f$ на $[a,b]$ при $n\to\infty$, то для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такой номер $N\in\mathbb{N}$, что при любом $n>N$ будет выполнено соотношение

$$\left|\int\limits_a^b(f-f_n)(x)\,dx\right|<\varepsilon(b-a).$$

b) Пусть $f_n\in C^{(1)}([a,b],\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$. Используя формулу $f_n(x)=f_n(x_0)+\int\limits_{x_0}^x f_n'(t)\,dt$, докажите, что если $f_n'\rightrightarrows\varphi$ на отрезке $[a,b]$ и существует точка $x_0\in[a,b]$, для которой последовательность $\{f_n(x_0);\ n\in\mathbb{N}\}$ сходится, то последовательность функций $\{f_n; n\in\mathbb{N}\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к некоторой функции $f\in C^{(1)}([a,b],\mathbb{R})$, причем $f_n'\rightrightarrows f'=\varphi$.

* § 4. Компактные и плотные подмножества пространства непрерывных функций

Этот параграф посвящен более специальным вопросам, относящимся, однако, к вездесущему для анализа пространству непрерывных функций. Все эти вопросы, как, впрочем, и сама метрика пространства непрерывных функций[1], тесно связаны с понятием равномерной сходимости.

1. Теорема Арцела—Асколи

Определение 1. Семейство $\mathcal{F}$ функций $f\colon X\to Y$, определенных на множестве X и принимающих значения в метрическом пространстве Y, называется *равномерно ограниченным на множестве* X, если множество $V=\{y\in Y\mid \exists f\in\mathcal{F}\ \exists x\in X\ (y=f(x))\}$ значений функций семейства ограничено в Y.

Для числовых функций или для функций $f\colon X\to\mathbb{R}^n$ это попросту означает существование такой константы $M\in\mathbb{R}$, что для любого $x\in X$ и любой функции $f\in B$ будет $|f(x)|\leqslant M$.

[1]Если вы еще не вполне освоились с общими понятиями из главы IX, то без потери содержательности дальнейшего можете считать, что всюду речь идет о функциях, действующих из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, или из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, или из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1$'$. Если множество $V \subset Y$ значений функций семейства $\mathscr{F}$ вполне ограничено (т. е. при любом $\varepsilon > 0$ для V в Y найдется конечная ε-сеть), то семейство $\mathscr{F}$ называется *вполне ограниченным*.

Для пространств Y, где понятия ограниченного и вполне ограниченного множества совпадают (например для $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^m$ и вообще в случае локально компактного пространства Y), понятия равномерно ограниченного и вполне ограниченного семейства функций со значениями в Y тоже совпадают.

Определение 2. Пусть X и Y — метрические пространства. Семейство $\mathscr{F}$ функций $f: X \to Y$ называется *равностепенно непрерывным на множестве* X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $x_1, x_2 \in X$ соотношение $d_X(x_1, x_2) < \delta$ влечет $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, какова бы ни была функция f семейства.

Пример 1. Семейство функций $\{x^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ не является равностепенно непрерывным на отрезке $[0, 1]$, но оно равностепенно непрерывно на любом отрезке вида $[0, q]$, где $0 < q < 1$.

Пример 2. Семейство функций $\{\sin nx;\ n \in \mathbb{N}\}$ не равностепенно непрерывно ни на каком невырожденном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Пример 3. Если семейство $\{f_\alpha: [a, b] \to \mathbb{R};\ \alpha \in A\}$ дифференцируемых функций f_α таково, что семейство $\{f'_\alpha;\ \alpha \in A\}$ их производных f'_α равномерно ограничено постоянной, то, как следует из формулы конечных приращений, $|f_\alpha(x_2) - f_\alpha(x_1)| \leqslant M|x_2 - x_1|$, и, значит, исходное семейство равностепенно непрерывно на отрезке $[a, b]$.

Связь введенных понятий с равномерной сходимостью непрерывных функций демонстрирует уже следующая

Лемма 1. *Пусть K и Y — метрические пространства, причем K — компакт. Для того, чтобы последовательность $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ непрерывных функций $f_n: K \to Y$ сходилась на компакте K равномерно, необходимо, чтобы семейство $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ было вполне ограниченным и равностепенно непрерывным.*

◄ Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на K. По теореме 2 из § 3 заключаем, что $f \in C(K, Y)$. Из равномерной непрерывности f на компакте K вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $x_1, x_2 \in K$ $(d_K(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon)$. По этому же $\varepsilon > 0$ найдем такой номер $N \in \mathbb{N}$, чтобы при $n > N$ в любой точке $x \in K$ иметь $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$. Сопоставляя эти неравенства, пользуясь неравенством треугольника, находим, что при любом $n > N$ и $x_1, x_2 \in K$ из $d_K(x_1, x_2) < \delta$ следует $d_Y(f_n(x_1), f_n(x_2)) < 3\varepsilon$. Значит, семейство $\{f_n;\ n > N\}$ равностепенно непрерывно. Добавляя к нему равностепенно непрерывное семейство $\{f_1, \ldots, f_N\}$, состоящее из конечного числа непрерывных на компакте K функций, получим равностепенно непрерывное семейство $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

То, что оно вполне ограничено, вытекает из неравенства $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$, справедливого при $x \in K$ и $n > N$, а также из того, что $f(K)$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{N} f_n(K)$ компактны в Y, и, значит, вполне ограничены в Y. ►

На самом деле справедлива следующая общая

Теорема 1 (Арцела—Асколи). *Пусть* $\mathscr{F}$ — *семейство функций* $f: K \to Y$, *определенных на метрическом компакте* K *со значениями в полном метрическом пространстве* Y.

Для того, чтобы любая последовательность $\{f_n \in \mathscr{F};\ n \in \mathbb{N}\}$ *содержала равномерно сходящуюся подпоследовательность, необходимо и достаточно, чтобы семейство* $\mathscr{F}$ *было вполне ограниченным и равностепенно непрерывным.*

◄ *Необходимость*. Если бы $\mathscr{F}$ не было вполне ограниченным семейством, то, очевидно, можно было бы построить такую последовательность $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ функций $f_n \in \mathscr{F}$, которая не была бы вполне ограниченной и из которой (см. лемму) уже нельзя было бы извлечь равномерно сходящуюся последовательность.

Если семейство $\mathscr{F}$ не равностепенно непрерывно, то найдутся число $\varepsilon_0 > 0$ и такие последовательность функций $\{f_n \in \mathscr{F};\ n \in \mathbb{N}\}$ и последовательность $\{(x'_n, x''_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ пар (x'_n, x''_n) точек x'_n, x''_n, сходящихся при $n \to \infty$ к некоторой точке $x_0 \in K$, что $d_Y(f_n(x'_n), f_n(x''_n)) \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Тогда из последовательности $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ уже нельзя извлечь сходящуюся равномерно подпоследовательность: ведь по лемме 1 функции такой подпоследовательности должны были бы составлять равностепенно непрерывное семейство.

Достаточность. Компакт K будем считать бесконечным множеством, иначе утверждение тривиально. Фиксируем в K счетное всюду плотное подмножество E — последовательность $\{x_n \in K;\ n \in \mathbb{N}\}$. Такое множество E легко получить, взяв, например, объединение точек конечных ε-сетей в K, получаемых при $\varepsilon = 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots$

Пусть $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ — произвольная последовательность функций семейства $\mathscr{F}$.

Последовательность $\{f_n(x_1);\ n \in \mathbb{N}\}$ значений этих функций в точке x_1 по условию вполне ограничена в Y и, поскольку Y — полное пространство, из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}(x_1);\ k \in \mathbb{N}\}$. Функции полученной последовательности, как будет видно, удобно обозначить через f_n^1, $n \in \mathbb{N}$. Индекс 1 показывает, что это последовательность, построенная по точке x_1.

Из полученной последовательности извлечем подпоследовательность $\{f_{n_k}^1;\ k \in \mathbb{N}\}$, которую обозначим через $\{f_n^2;\ n \in \mathbb{N}\}$, такую, что последовательность $\{f_{n_k}^1(x_2);\ k \in \mathbb{N}\}$ является сходящейся.

Продолжая этот процесс, получим серию $\{f_n^k;\ n \in \mathbb{N}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, последовательностей. Если теперь взять «диагональную» последовательность $\{g_n = f_n^n;\ n \in \mathbb{N}\}$, то она, как легко видеть, будет сходиться в любой точке всюду плотного множества $E \subset K$.

Покажем, что последовательность $\{g_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится в любой точке компакта K и что ее сходимость равномерная на K. Для этого фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ в соответствии с определением 2 равностепенной

непрерывности семейства $\mathscr{F}$. Пусть $E_1=\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ — конечное подмножество E, образующее δ-сеть в K. Поскольку последовательности $\{g_n(\xi_i);\ n\in\in\mathbb{N}\}$, $i=1, 2, \ldots, k$, сходятся, найдется такой номер N, что при $m, n\geqslant N$ будет $d_Y(g_m(\xi_i), g_n(\xi_i))<\varepsilon$ для $i=1, 2, \ldots, k$.

Для каждой точки $x\in K$ найдется такая точка $\xi_j\in E$, что $d_K(x, \xi_j)<\delta$. В силу равностепенной непрерывности семейства $\mathscr{F}$ отсюда следует, что $d_Y(g_n(x), g_n(\xi_j))<\varepsilon$ при любом $n\in\mathbb{N}$. Используя полученные неравенства, теперь находим, что при любых $m, n>N$

$$d_Y(g_m(x), g_n(x))\leqslant d_Y(g_n(x), g_n(\xi_j))+d_Y(g_m(\xi_j), g_n(\xi_j))+\\ +d_Y(g_m(x), g_m(\xi_j))<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.$$

Но x — произвольная точка компакта K, значит, по критерию Коши последовательность $\{g_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ действительно равномерно сходится на K. ►

2. Метрическое пространство $C(K, Y)$. Одной из наиболее естественных метрик на множестве $C(K, Y)$ функций $f\colon K\to Y$, непрерывных на компакте K и принимающих значения в метрическом пространстве Y, является следующая *метрика равномерной сходимости*

$$d(f, g)=\max_{x\in K} d_Y(f(x), g(x)),$$

где $f, g\in C(K, Y)$, а максимум существует, так как K — компакт. Происхождение названия метрики связано с тем, что, очевидно, $d(f_n, f)\to 0 \iff f_n\rightrightarrows f$ на K.

Учитывая последнее соотношение, на основании теоремы 2 из § 3 и критерия Коши равномерной сходимости можно заключить, что метрическое пространство $C(K, Y)$ с метрикой равномерной сходимости является полным.

Напомним, что *компактным подмножеством* метрического пространства называется такое подмножество, из любой последовательности точек которого можно извлечь последовательность Коши (или, что то же самое, фундаментальную последовательность). Если исходное метрическое пространство полное, то такая последовательность будет даже сходящейся.

Теорема Арцела—Асколи дает описание компактных подмножеств метрического пространства $C(K, Y)$.

Следующая важная теорема, которую мы собираемся доказать, даст описание достаточно разнообразных всюду плотных подмножеств пространства $C(K, Y)$. Естественный интерес, который представляют такие подмножества, связан с тем, что функциями, составляющими их, можно равномерно, т. е. со сколь угодно малой абсолютной погрешностью на всем K, аппроксимировать любую функцию $f\colon K\to Y$, непрерывную на K.

Пример 4. Классический результат Вейерштрасса, к которому мы будем еще не раз возвращаться и который обобщает приведенная ниже теорема Стоуна, состоит в следующем.

Теорема 2 (Вейерштрасс). *Если* $f\in C([a,b],\mathbb{C})$, *то существует такая последовательность* $\{P_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ *многочленов* $P_n\colon [a,b]\to\mathbb{C}$, *что* $P_n\rightrightarrows f$ *на* $[a,b]$. *При этом если* $f\in C([a,b],\mathbb{R})$, *то и многочлены* P_n *можно выбрать из* $C([a,b],\mathbb{R})$.

На геометрическом языке это означает, например, что многочлены с вещественными коэффициентами образуют всюду плотное подмножество в пространстве $C([a,b],\mathbb{R})$.

Пример 5. Если теорема 2 требует все-таки нетривиального доказательства (оно дано ниже), то на основании равномерной непрерывности любой функции $f\in C([a,b],\mathbb{R})$ легко заключить, что множество кусочно линейных непрерывных вещественнозначных на отрезке $[a,b]$ функций является всюду плотным подмножеством в $C([a,b],\mathbb{R})$.

Замечание 1. Отметим, что если E_1 всюду плотно в E_2, а E_2 всюду плотно в E_3, то в смысле той же метрики E_1, очевидно, будет всюду плотным в E_3.

Это означает, например, что для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что непрерывную кусочно линейную функцию можно сколь угодно хорошо приблизить многочленом на соответствующем отрезке.

3. Теорема Стоуна. Прежде чем переходить к общей теореме Стоуна, приведем следующее, полезное для восприятия дальнейшего, доказательство теоремы 2 (Вейерштрасса) в случае вещественнозначных функций.

◄ Заметим сначала, что если $f,g\in C([a,b],\mathbb{R})$, $\alpha\in\mathbb{R}$ и функции f, g допускают равномерную (сколь угодно точную) аппроксимацию многочленами, то ее допускают и непрерывные на $[a,b]$ функции $f+g$, $f\cdot g$, αf.

На отрезке $[-1,1]$, как было показано в примере 2, § 3, функция $|x|$ допускает равномерное приближение полиномами $P_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k$. Значит, соответствующая последовательность полиномов $M\cdot P_n(x/M)$ дает равномерную аппроксимацию функции $|x|$ уже на отрезке $|x|\leqslant M$.

Если $f\in C([a,b],\mathbb{R})$ и $M=\max|f(x)|$, то из $\left||y|-\sum\limits_{k=1}^{n}c_ky^k\right|<\varepsilon$ при $|y|\leqslant M$ следует $\left||f(x)|-\sum\limits_{k=1}^{n}c_kf^k(x)\right|<\varepsilon$ при $a\leqslant x\leqslant b$. Значит, если f допускает равномерную аппроксимацию многочленами на отрезке $[a,b]$, то $\sum\limits_{k=1}^{n}c_kf^k$ и $|f|$ тоже допускают такую аппроксимацию.

Наконец, если f и g допускают равномерную аппроксимацию многочленами на отрезке $[a,b]$, то в силу сказанного ее допускают и функции

$$\max\{f,g\}=\frac{1}{2}((f+g)+|f-g|),\quad \min\{f,g\}=\frac{1}{2}((f+g)-|f-g|).$$

Пусть $a\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant b$, $f(x)\equiv 0$,

$$g_{\xi_1\xi_2}(x)=\frac{x-\xi_1}{\xi_2-\xi_1},\quad h(x)\equiv 1,\quad \Phi_{\xi_1\xi_2}=\max\{f,g_{\xi_1\xi_2}\},\quad F_{\xi_1\xi_2}=\min\{h,\Phi_{\xi_1\xi_2}\}.$$

Линейные комбинации функций вида $F_{\xi_1\xi_2}$, очевидно, порождают все множество непрерывных кусочно линейных функций на отрезке $[a, b]$, откуда, в силу примера 5, и следует теорема Вейерштрасса. ►

Прежде чем формулировать теорему Стоуна, определим несколько новых понятий.

Определение 3. Совокупность A вещественно (комплексно)-значных функций на множестве X называется *вещественной* (*комплексной*) *алгеброй функций* на X, если из $f, g \in A$ и $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ следует, что

$$(f+g) \in A; \quad (f \cdot g) \in A; \quad (\alpha f) \in A.$$

Пример 6. Пусть $X \subset \mathbb{C}$. Многочлены $P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n$, $n \in \mathbb{N}$, очевидно, образуют комплексную алгебру функций на X.

Если взять $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ и многочлены брать только с действительными коэффициентами, то получим вещественную алгебру функций на отрезке $[a, b]$.

Пример 7. Линейные комбинации с коэффициентами из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ функций e^{nx}, $n = 0, 1, 2, \ldots$, очевидно, тоже образуют алгебру (соответственно вещественную или комплексную) на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

То же можно, сказать и о линейных комбинациях функций $\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\}$.

Определение 4. Будем говорить, что некоторая совокупность S функций, определенных на множестве X, *разделяет точки* множества X, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in X$ найдется функция $f \in S$ такая, что $f(x_1) \neq$ $\neq f(x_2)$.

Пример 8. Совокупность функций $\{e^{nx}; n \in \mathbb{N}\}$ и даже каждая из них разделяет точки $\mathbb{R}$.

Вместе с тем, совокупность 2π-периодических функций $\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\}$ разделяет точки отрезка, если его длина меньше 2π и, очевидно, не разделяет точки отрезка длины, большей или равной 2π.

Пример 9. Вещественные многочлены в совокупности образуют множество функций, разделяющее точки любого отрезка $[a, b]$, так как это делает уже один многочлен $P(x) = x$. Сказанное можно повторить относительно множества $X \subset \mathbb{C}$ и совокупности комплексных полиномов на X. В качестве одной разделяющей функции теперь можно взять $P(z) = z$.

Определение 5. Будем говорить, что *семейство* $\mathscr{F}$ функций $f : X \to \mathbb{C}$ *не исчезает на множестве* X, если для любой точки $x_0 \in X$ найдется функция $f_0 \in \mathscr{F}$ такая, что $f_0(x_0) \neq 0$.

Пример 10. Семейство $\mathscr{F} = \{1, x, x^2, \ldots\}$ на отрезке $[0, 1]$ не исчезает, а вот все функции семейства $\mathscr{F}_0 = \{x, x^2, \ldots\}$ обращаются в нуль при $x = 0$.

Лемма 2. *Если алгебра A вещественных* (*или комплексных*) *на множестве X функций разделяет точки X и не исчезает на X, то для любых различных точек $x_1, x_2 \in X$ и любых вещественных* (*или, соответственно, комплексных*) *чисел c_1, c_2 в A найдется такая функция f, что $f(x_1) = c_1$, $f(x_2) = c_2$.*

◄ Очевидно, лемму достаточно доказать, лишь когда $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ и когда $c_1 = 1$, $c_2 = 0$.

Ввиду равноправности точек x_1, x_2, рассмотрим лишь случай $c_1=1$, $c_2=0$.

Заметим сначала, что в A существует такая специальная разделяющая точки x_1, x_2 функция s, которая, наряду с условием $s(x_1)\neq s(x_2)$, удовлетворяет требованию $s(x_1)\neq 0$.

Пусть $g, h\in A$, $g(x_1)\neq g(x_2)$, $g(x_1)=0$, $h(x_1)\neq 0$. Очевидно, найдется такое число $\lambda\in\mathbb{R}\setminus 0$, что $\lambda(h(x_1)-h(x_2))\neq g(x_2)$. Тогда функция $s=g+\lambda h$ и будет искомой.

Теперь, полагая $f(x)=\dfrac{s^2(x)-s(x_2)s(x)}{s^2(x_1)-s(x_1)s(x_2)}$, находим функцию f из нашей алгебры A, удовлетворяющую поставленным условиям: $f(x_1)=1$ и $f(x_2)=0$. ►

Теорема 3 (Стоун[1]). *Пусть A — алгебра определенных на компакте K непрерывных вещественнозначных функций. Если A разделяет точки компакта K и не исчезает на K, то A является всюду плотным подмножеством пространства $C(K,\mathbb{R})$.*

◄ Пусть $\overline{A}$ — замыкание в $C(K,\mathbb{R})$ множества $A\subset C(K,\mathbb{R})$, т. е. $\overline{A}$ состоит из тех непрерывных функций $f\in C(K,\mathbb{R})$, которые можно сколь угодно точно равномерно приближать функциями из A. Теорема утверждает, что $\overline{A}= C(K,\mathbb{R})$.

Повторяя проведенные при доказательстве теоремы Вейерштрасса рассуждения, замечаем, что если $f, g\in A$ и $\alpha\in\mathbb{R}$, то функции $f+g$, $f\cdot g$, αf, $|f|$, $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ тоже принадлежат A. По индукции можно проверить, что вообще, если $f_1, f_2, \ldots, f_n\in A$, то $\max\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ и $\min\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ тоже лежат в A.

Теперь покажем, что для любой функции $f\in C(K,\mathbb{R})$, любой точки $x\in K$ и любого числа $\varepsilon>0$ найдется такая функция $g_x\in A$, что $g_x(x)=f(x)$ и $g_x(t)> f(t)-\varepsilon$ при любом $t\in K$.

Чтобы в этом убедиться, для каждой точки $y\in K$ возьмем в соответствии с леммой 2 функцию $h_y\in A$ такую, что $h_y(x)=f(x)$ и $h_y(y)=f(y)$. В силу непрерывности на K функций f и h_y найдется такая открытая окрестность U_y точки y, что $h_y(t)>f(t)-\varepsilon$ при любом $t\in U_y$. Из покрытия компакта K открытыми множествами U_y извлекаем конечное покрытие $\{U_{y_1}, U_{y_2}, \ldots, U_{y_n}\}$. Тогда функция $g_x=\max\{h_{y_1}, h_{y_2}, \ldots, h_{y_n}\}\in A$ будет искомой.

Взяв теперь для каждой точки $x\in K$ такую функцию g_x, заметим, что ввиду непрерывности функций g_x и f найдется такая открытая окрестность V_x точки $x\in K$, что $g_x(t)<f(t)+\varepsilon$ при любом $t\in V_x$. Поскольку K — компакт, найдется его конечное покрытие $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_m}\}$ такими окрестностями. Функция $g=\min\{g_{x_1}, g_{x_2}, \ldots, g_{x_m}\}$ принадлежит алгебре A и по построению в любой точке удовлетворяет двойному неравенству

$$f(t)-\varepsilon<g(t)<f(t)+\varepsilon.$$

---

[1] М. Х. Стоун (1903—1989) — американский математик; основные труды относятся к топологии и функциональному анализу.

Но число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, поэтому доказано, что любую функцию $f \in C(K, \mathbb{R})$ можно сколь угодно точно равномерно приблизить на K функциями из алгебры A. ►

Задачи и упражнения

1. Семейство $\mathscr{F}$ функций $f : X \to Y$, определенных на метрическом пространстве X и принимающих значения в метрическом пространстве Y, называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой функции $f \in \mathscr{F}$ соотношение $d_X(x, x_0) < \delta$ влечет $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

a) Покажите, что если семейство $\mathscr{F}$ функций $f : X \to Y$ равностепенно непрерывно в точке $x_0 \in X$, то любая функция $f \in \mathscr{F}$ непрерывна в точке x_0, но утверждение, обратное к этому, неверно.

b) Докажите, что если семейство $\mathscr{F}$ функций $f : K \to Y$ равностепенно непрерывно в любой точке компакта K, то оно равностепенно непрерывно на K в смысле определения 2.

c) Покажите, что если метрическое пространство X не является компактом, то из равностепенной непрерывности семейства $\mathscr{F}$ функций $f : X \to Y$ в каждой точке $x \in X$ еще не вытекает равностепенная непрерывность $\mathscr{F}$ на X.

По этой причине, если семейство $\mathscr{F}$ равностепенно непрерывно на множестве X в смысле определения 2, его часто называют *равномерно равностепенно непрерывным* на множестве. Таким образом, между равностепенной непрерывностью в точке и равномерной равностепенной непрерывностью семейства функций на множестве X соотношение такое же, как между непрерывностью и равномерной непрерывностью отдельной функции $f : X \to Y$ на множестве X.

d) Пусть $\omega(f; E)$ — колебание функции $f : X \to Y$ на множестве $E \subset X$, а $B(x, \delta)$ — шар радиуса δ с центром в точке $x \in X$. Определением каких понятий являются следующие записи:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathscr{F}\ \omega(f; B(x, \delta)) < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in \mathscr{F}\ \forall x \in X\ \omega(f; B(x, \delta)) < \varepsilon?$$

e) Покажите на примере, что теорема Арцела—Асколи, вообще говоря, не имеет места, если K не является компактом: постройте на $\mathbb{R}$ равномерно ограниченную и равностепенно непрерывную последовательность $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ функций $f_n = \varphi(x + n)$, из которой нельзя извлечь равномерно сходящуюся на $\mathbb{R}$ подпоследовательность.

f) Опираясь на теорему Арцела—Асколи, решите задачу 10 c) из § 3.

2. a) Объясните подробно, почему любую непрерывную кусочно линейную функцию на отрезке $[a, b]$ можно представить в виде линейной комбинации функций вида F_{ξ_1,ξ_2}, указанных в доказательстве теоремы Вейерштрасса.

b) Докажите теорему Вейерштрасса для комплекснозначных непрерывных функций $f : [a, b] \to \mathbb{C}$.

c) Величину $M_n = \int\limits_a^b f(x)x^n\,dx$ часто называют n-м моментом функции $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ на отрезке $[a, b]$. Покажите, что если $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ и $M_n = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

3. a) Покажите, что алгебра, порожденная парой функций $\{1, x^2\}$ плотна в множестве всех четных, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций.

b) Решите предыдущий вопрос для алгебры, порожденной одной функцией $\{x\}$, и множества нечетных функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$.

c) Любую ли функцию $f \in C([0, \pi], \mathbb{C})$ можно сколь угодно точно равномерно аппроксимировать функциями алгебры, порожденной парой функций $\{1, e^{ix}\}$?

d) Ответьте на предыдущий вопрос в случае $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$.

e) Покажите, что ответ на предыдущий вопрос будет положительным тогда и только тогда, когда $f(-\pi) = f(\pi)$.

f) Любую ли функцию $f \in C([a, b], \mathbb{C})$ можно равномерно аппроксимировать линейными комбинациями функций системы $\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$, если $[a, b] \subset]-\pi, \pi[$?

g) Любую ли четную функцию $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ можно равномерно аппроксимировать функциями системы $\{1, \cos x, \ldots, \cos nx, \ldots\}$?

h) Пусть $[a, b]$ — произвольный отрезок прямой $\mathbb{R}$. Покажите, что алгебра, порожденная на $[a, b]$ любой не обращающейся в нуль строго монотонной функцией $\varphi(x)$ (например, e^x), плотна в $C([a, b], \mathbb{R})$.

i) При каком расположении отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ порожденная функцией $\varphi(x) = x$ алгебра плотна в $C([a, b], \mathbb{R})$?

4. a) Комплексная алгебра функций A называется *самосопряженной*, если из $f \in \in A$ следует, что $\bar{f} \in A$, где $\bar{f}(x)$ — значение, сопряженное к $f(x)$. Покажите, что если комплексная алгебра A не вырождается на X и разделяет точки X, то при условии самосопряженности алгебры A можно утверждать, что подалгебра A_R вещественнозначных функций алгебры A тоже не вырождается на X и тоже разделяет точки множества X.

b) Докажите следующий комплексный вариант теоремы Стоуна.

Если комплексная алгебра A функций $f : X \to \mathbb{C}$ не вырождается на X и разделяет точки X, то при условии самосопряженности алгебры A можно утверждать, что она плотна в $C(X, \mathbb{C})$.

c) Пусть $X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ — единичная окружность, A — алгебра на X, порожденная функцией $e^{i\varphi}$, где φ — полярный угол точки $z \in \mathbb{C}$. Эта алгебра не вырождается на X и разделяет точки X, но не является самосопряженной.

Докажите, что для любой функции $f : X \to \mathbb{C}$, допускающей равномерную аппроксимацию элементами алгебры A, должно выполняться равенство $\int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) e^{in\varphi}\, d\varphi = = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Используя это обстоятельство, проверьте, что ограничение на окружность X функции $f(z) = \bar{z}$ есть непрерывная на X функция, которая не входит в замыкание указанной алгебры A.

Глава XVII

Интегралы, зависящие от параметра

В этой главе общие теоремы о семействах функций, зависящих от параметра, будут применены к одному из наиболее часто встречающихся в анализе виду таких семейств — к интегралу, зависящему от параметра.

§ 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1. Понятие интеграла, зависящего от параметра. *Интеграл, зависящий от параметра,* — это функция вида

$$F(t) = \int\limits_{E_t} f(x, t)\, dx, \tag{1}$$

где t играет роль параметра, пробегающего некоторое множество T, а каждому значению $t \in T$ отвечает множество E_t и интегрируемая на нем в собственном или несобственном смысле функция $\varphi_t(x) = f(x, t)$.

Природа множества T может быть самой разнообразной, но важнейшими, разумеется, являются случаи, когда T — подмножество пространств $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$.

Если при каждом значении параметра $t \in T$ интеграл (1) является собственным, то принято говорить, что функция F в (1) есть *собственный интеграл, зависящий от параметра*.

Если же при всех или при некоторых значениях $t \in T$ интеграл в (1) существует только в несобственном смысле, то функцию F обычно называют *несобственным интегралом, зависящим от параметра*.

Но это, конечно, всего лишь терминологические условности.

В том случае, когда $x \in \mathbb{R}^m$, $E_t \subset \mathbb{R}^m$ и $m > 1$, говорят, что имеют дело с *кратным* (двойным, тройным и т. д.) *интегралом* (1)*, зависящим от параметра*.

Главное внимание мы сосредоточим, однако, на одномерном случае, составляющем основу любых обобщений. Более того, для простоты мы сначала в качестве E_t будем брать только не зависящие от параметра промежутки числовой прямой $\mathbb{R}$, и к тому же будем считать, что на них интеграл (1) существует в собственном смысле.

2. Непрерывность интеграла, зависящего от параметра

Утверждение 1. *Пусть* $P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x\leqslant b \wedge c\leqslant y\leqslant d\}$ — *прямоугольник в плоскости* $\mathbb{R}^2$. *Если функция* $f\colon P\to\mathbb{R}$ *непрерывна, т. е. если* $f\in C(P,\mathbb{R})$, *то функция*

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx \tag{2}$$

непрерывна в любой точке $y\in[c,d]$.

◄ Из равномерной непрерывности функции f на компакте P вытекает, что $\varphi_y(x):=f(x,y)\rightrightarrows f(x,y_0)=:\varphi_{y_0}(x)$ на $[a,b]$ при $y\to y_0$, $y, y_0\in[c,d]$. При каждом $y\in[c,d]$ функция $\varphi_y(x)=f(x,y)$ непрерывна по x на отрезке $[a,b]$, а значит, и интегрируема на нем. По теореме о предельном переходе под знаком интеграла теперь можно утверждать, что

$$F(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)\,dx=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\lim_{y\to y_0}F(y). \ ►$$

Замечание 1. Как видно из приведенного доказательства, утверждение 1 о непрерывности функции (2) остается в силе, если в качестве множества значений параметра y взять любой компакт K, конечно, при условии, что $f\in C(I\times K,\mathbb{R})$, где $I=\{x\in\mathbb{R} \mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

Отсюда, в частности, можно сделать вывод, что если $f\in C(I\times D,\mathbb{R})$, где D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то $F\in C(D,\mathbb{R})$, поскольку любая точка $y_0\in D$ имеет компактную окрестность $K\subset D$, а ограничение функции f на $I\times K$ является непрерывной функцией на компакте $I\times K$.

Мы сформулировали утверждение 1 для вещественнозначных функций, но, конечно, оно вместе с доказательством сохраняет силу и для векторнозначных функций, например, для функций, принимающих значения в $\mathbb{C}$, в $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{C}^m$.

Пример 1. При доказательстве леммы Морса (см. часть I, гл. VIII, § 6) мы упоминали о следующем утверждении, называемом леммой Адамара.

Если функция f *в окрестности* U *точки* x_0 *принадлежит классу* $C^{(1)}(U,\mathbb{R})$, *то в некоторой окрестности точки* x_0 *ее можно представить в виде*

$$f(x)=f(x_0)+\varphi(x)(x-x_0), \tag{3}$$

где φ — *непрерывная функция, причем* $\varphi(x_0)=f'(x_0)$.

Равенство (3) легко следует из формулы

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^1 f'(x_0+th)\,dt\cdot h \tag{4}$$

Ньютона—Лейбница и утверждения 1, применяемого к функции $F(h)=\int_0^1 f'(x_0+th)\,dt$: остается сделать замену $h=x-x_0$ и положить $\varphi(x)=F(x-x_0)$.

Полезно заметить, что равенство (4) имеет место для $x_0, h \in \mathbb{R}^n$, где n не обязано быть только единицей. Раскрывая символ f' подробнее и полагая для простоты записи $x_0 = 0$, можно вместо (4) написать

$$f(x^1, \ldots, x^n) - f(0, \ldots, 0) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \ldots, tx^n)\, dt \cdot x^i,$$

и тогда в равенстве (3) следует положить

$$\varphi(x)x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)x^i,$$

где $\varphi_i(x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx)\, dt$.

3. Дифференцирование интеграла, зависящего от параметра

Утверждение 2. *Если на прямоугольнике* $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \wedge c \leqslant \leqslant y \leqslant d\}$ *функция* $f : P \to \mathbb{R}$ *непрерывна и имеет непрерывную частную производную по* y*, то интеграл* (2) *принадлежит классу* $C^{(1)}([c, d], \mathbb{R})$*, причем*

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx. \tag{5}$$

Формулу (5) дифференцирования собственного интеграла (2) по параметру часто называют *формулой* или *правилом Лейбница*.

◄ Проверим непосредственно, что если $y_0 \in [c, d]$, то $F'(y_0)$ можно вычислить по формуле (5):

$$\left| F(y_0 + h) - F(y_0) - \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx \right) h \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \left(f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)h \right) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \left| f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)h \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \sup_{0<\theta<1} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| dx|h| = \varphi(y_0, h) \cdot |h|.$$

По условию $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(P, \mathbb{R})$, поэтому $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \rightrightarrows \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant \leqslant b$ при $y \to y_0$, откуда следует, что $\varphi(y_0, h) \to 0$ при $h \to 0$. ►

Замечание 2. Непрерывность исходной функции f использована в доказательстве лишь как достаточное условие существования всех участвующих в нем интегралов.

Замечание 3. Проведенное доказательство и использованная в нем форма теоремы о конечном приращении показывают, что утверждение 2 остается в силе, если вместо отрезка $[c, d]$ взять выпуклый компакт в любом векторном нормированном пространстве. При этом, очевидно, можно еще считать, что f принимает значения в некотором полном векторном нормированном пространстве.

В частности, и это порой бывает весьма полезно, формула (5) применима и к комплекснозначным функциям F комплексного переменного $y \in \mathbb{C}$ и к функциям $F(y) = F(y^1, \ldots, y^n)$ от векторного параметра $y = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{C}^n$.

В последнем случае $\frac{\partial f}{\partial y}$, конечно, можно расписать покоординатно в виде $\left(\frac{\partial f}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^n}\right)$ и получить из (5) соответствующие частные производные $\frac{\partial F}{\partial y^i}(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y^i}(x, y^1, \ldots, y^n)\,dx$ функции F.

Пример 2. Проверим, что функция $u(x) = \int\limits_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi$ удовлетворяет уравнению Бесселя $x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0$.

Действительно, выполнив дифференцирования в соответствии с формулой (5), после простых преобразований находим

$$-x^2\int\limits_0^\pi \sin^2\varphi\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi +$$
$$+ x\int\limits_0^\pi \sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi + (x^2 - n^2)\int\limits_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi =$$
$$= -\int\limits_0^\pi \big((x^2\sin^2\varphi + n^2 - x^2)\cos(n\varphi - x\sin\varphi) - x\sin\varphi\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\big)\,d\varphi =$$
$$= -(n + x\cos\varphi)\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\Big|_0^\pi = 0.$$

Пример 3. Полные эллиптические интегралы

$$E(k) = \int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad K(k) = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \tag{6}$$

как функции параметра k, $0 < k < 1$, называемого *модулем* соответствующего *эллиптического интеграла*, связаны соотношениями

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k}, \quad \frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1 - k^2)} - \frac{K}{k}.$$

Проверим, например, первое из них. По формуле (5)

$$\frac{dE}{dk} = -\int_0^{\pi/2} k\sin^2\varphi\cdot(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}\,d\varphi - \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\,d\varphi = \frac{E-K}{k}.$$

Пример 4. Иногда применение формулы (5) позволяет даже вычислить интеграл. Пусть

$$F(\alpha) = \int_0^{\pi/2}\ln(\alpha^2-\sin^2\varphi)\,d\varphi \quad (\alpha>1).$$

Согласно формуле (5)

$$F'(\alpha) = \int_0^{\pi/2}\frac{2\alpha\,d\varphi}{\alpha^2-\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}},$$

откуда $F(\alpha) = \pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})+c$.

Величину c тоже легко найти, если заметить, что при $\alpha\to+\infty$, с одной стороны, $F(\alpha) = \pi\ln\alpha+\pi\ln 2+c+o(1)$, а, с другой стороны, из определения $F(\alpha)$ с учетом равенства $\ln(\alpha^2-\sin^2\varphi) = 2\ln\alpha+o(1)$ при $\alpha\to+\infty$ получается, что $F(\alpha) = \pi\ln\alpha+o(1)$. Значит, $\pi\ln 2+c=0$ и $F(\alpha) = \pi\ln\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})$.

Утверждение 2 можно несколько усилить.

Утверждение 2′. *Пусть на прямоугольнике* $P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x\leqslant b \wedge \wedge\, c\leqslant y\leqslant d\}$ *функция* $f\colon P\to\mathbb{R}$ *непрерывна и имеет непрерывную частную производную* $\frac{\partial f}{\partial y}$; *пусть далее* $\alpha(y)$ *и* $\beta(y)$ *такие непрерывно дифференцируемые на* $[c,d]$ *функции, что при любом* $y\in[c,d]$ *их значения лежат на отрезке* $[a,b]$. *Тогда интеграл*

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \tag{7}$$

определен при любом $y\in[c,d]$, *принадлежит классу* $C^{(1)}([c,d],\mathbb{R})$ *и справедлива формула*

$$F'(y) = f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx. \tag{8}$$

◄ В соответствии с правилом дифференцирования интеграла по пределам интегрирования и с учетом формулы (5) можно сказать, что функция

$$\Phi(\alpha,\beta,y) = \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$$

при условиях, что $\alpha, \beta \in [a, b]$ и $y \in [c, d]$, имеет следующие частные производные:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = f(\beta, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = -f(\alpha, y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx.$$

С учетом утверждения 1 заключаем, что все частные производные функции Φ непрерывны в ее области определения. Значит, Φ — непрерывно дифференцируемая функция. Теперь формула (8) получается дифференцированием сложной функции $F(y) = \Phi(\alpha(y), \beta(y), y)$. ►

Пример 5. Пусть

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt,$$

где $n \in \mathbb{N}$, а f — непрерывная на промежутке интегрирования функция. Проверим, что $F_n^{(n)}(x) = f(x)$.

При $n = 1$ $F_1(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ и $F_1'(x) = f(x)$.

По формуле (8) при $n > 1$ находим

$$F_n'(x) = \frac{1}{(n-1)!}(x-x)^{n-1} f(x) + \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x (x-t)^{n-2} f(t)\, dt = F_{n-1}(x).$$

По принципу индукции заключаем, что, действительно, $F_n^{(n)}(x) = f(x)$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

4. Интегрирование интеграла, зависящего от параметра

Утверждение 3. *Если функция* $f: P \to \mathbb{R}$ *непрерывна в прямоугольнике* $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \wedge c \leqslant y \leqslant d\}$, *то интеграл* (2) *интегрируем на отрезке* $[c, d]$ *и имеет место равенство*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx. \tag{9}$$

◄ С точки зрения кратных интегралов равенство (9) есть простейший вариант теоремы Фубини.

Приведем, однако, доказательство соотношения (9), позволяющее обосновать его независимо от теоремы Фубини.

Рассмотрим функции

$$\varphi(u) = \int_c^u \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy, \quad \psi(u) = \int_a^b \left(\int_c^u f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Ввиду того, что $f \in C(P, \mathbb{R})$ на основании утверждения 1 и непрерывной зависимости интеграла от верхнего предела интегрирования, заключаем,

что $\varphi, \psi \in C([c, d], \mathbb{R})$. Далее, ввиду непрерывности функции (2), находим, что $\varphi'(u) = \int\limits_a^b f(x, u)\, dx$, а по формуле (5) получаем, что $\psi'(u) = \int\limits_a^b f(x, u)\, dx$ при $u \in [c, d]$. Таким образом, $\varphi'(u) = \psi'(u)$ и, значит, $\varphi(u) = \psi(u) + \text{const}$ на отрезке $[c, d]$. Но поскольку $\varphi(c) = \psi(c) = 0$, то на отрезке $[c, d]$ имеет место равенство $\varphi(u) = \psi(u)$, из которого при $u = d$ получается соотношение (9). ►

Задачи и упражнения

1. a) Объясните, почему функция $F(y)$ из соотношения (2) имеет предел $\int\limits_a^b \varphi(x)\, dx$, если зависящее от параметра $y \in Y$ семейство функций $\varphi_y(x) = f(x, y)$, интегрируемых на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, равномерно сходится на нем к функции $\varphi(x)$ при некоторой базе $\mathscr{B}$ в Y (например, при базе $y \to y_0$).

b) Докажите, что если E — измеримое множество в $\mathbb{R}^m$, а функция $f\colon E \times I^n \to \mathbb{R}$, определенная на прямом произведении $E \times I^n = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid x \in E \wedge t \in I^n\}$ множества E и n-мерного промежутка I^n, непрерывна, то определенная равенством (1) при $E_t = E$ функция F непрерывна на I^n.

c) Пусть $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \wedge c \leqslant y \leqslant d\}$, и пусть $f \in C(P, \mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in C([c, d], [a, b])$. Докажите, что тогда функция (7) непрерывна на отрезке $[c, d]$.

2. a) Покажите, что если $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, то функция $F(x) = \dfrac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{a} f(x + t)\, dt$ не только непрерывна, но и дифференцируема на $\mathbb{R}$.

b) Найдите производную указанной функции $F(x)$ и убедитесь, что $F \in C^{(1)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Используя дифференцирование по параметру, покажите, что при $|r| < 1$

$$F(r) = \int\limits_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2)\, dx = 0.$$

4. Проверьте, что следующие функции удовлетворяют уравнению Бесселя, указанному в примере 2.

a) $u = x^n \int\limits_0^\pi \cos(x \cos\varphi) \sin^{2n}\varphi\, d\varphi$.

b) $J_n(x) = \dfrac{x^n}{(2n-1)!!\pi} \int\limits_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{n - \frac{1}{2}} \cos xt\, dt$.

c) Покажите, что отвечающие различным значениям $n \in \mathbb{N}$ функции J_n связаны соотношением $J_{n+1} = J_{n-1} - 2J_n'$.

5. Развивая пример 3 и полагая $\tilde{k} := \sqrt{1 - k^2}$, $\widetilde{E}(k) := E(\tilde{k})$, $\widetilde{K}(k) := K(\tilde{k})$, покажите, вслед за Лежандром, что

a) $\dfrac{d}{dk}(E\widetilde{K} + \widetilde{E}K - K\widetilde{K}) = 0$.

b) $E\widetilde{K} + \widetilde{E}K - K\widetilde{K} = \pi/2$.

6. Вместо интеграла (2) рассмотрим интеграл

$$\mathscr{F}(y) = \int\limits_a^b f(x, y) g(x)\, dx,$$

где g — интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция ($g \in \mathscr{R}[a, b]$).

Повторив приведенные выше доказательства утверждений 1—3, последовательно проверьте, что

a) Если функция f удовлетворяет условиям утверждения 1, то функция $\mathscr{F}$ непрерывна на отрезке $[c, d]$ ($\mathscr{F} \in C[c, d]$).

b) Если функция f удовлетворяет условиям утверждения 2, то функция $\mathscr{F}$ непрерывно дифференцируема на $[c, d]$ ($\mathscr{F} \in C^{(1)}[c, d]$), причем

$$\mathscr{F}'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) g(x)\, dx.$$

c) Если функция f удовлетворяет условиям утверждения 3, то $\mathscr{F}$ интегрируема на $[c, d]$ ($\mathscr{F} \in \mathscr{R}[c, d]$), причем

$$\int_c^d \mathscr{F}(y)\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) g(x)\, dy \right) dx.$$

7. *Формула Тейлора и лемма Адамара.*

a) Покажите, что если f — гладкая функция и $f(0) = 0$, то $f(x) = x\varphi(x)$, где φ — непрерывная функция и $\varphi(0) = f'(0)$.

b) Покажите, что если $f \in C^{(n)}$ и $f^{(k)} = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то $f(x) = x^n \varphi(x)$, где φ — непрерывная функция и $\varphi(0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

c) Пусть f — определенная в окрестности нуля функция класса $C^{(n)}$. Проверьте, что справедлива следующая формула Тейлора с остаточным членом в форме Адамара:

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)x^{n-1} + x^n \varphi(x),$$

где φ — функция, непрерывная в окрестности нуля, и $\varphi(0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

d) Обобщите результаты задач a), b), c) на случай, когда f — функция нескольких переменных. Запишите основную формулу Тейлора в мультииндексных обозначениях

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha + \sum_{|\alpha|=n} x^\alpha \varphi_\alpha(x)$$

и заметьте в дополнение к сказанному в задачах a), b), c), что если $f \in C^{(n+p)}$, то $\varphi_\alpha \in C^{(p)}$.

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

1. Равномерная сходимость несобственного интеграла относительно параметра

a. Основное определение и примеры. Пусть при каждом значении $y \in \in Y$ сходится несобственный интеграл

$$F(y) = \int_a^\omega f(x, y)\, dx \tag{1}$$

по промежутку $[a, \omega[\subset \mathbb{R}$. Для определенности будем считать, что интеграл (1) имеет единственную особенность, связанную с верхним пределом интегрирования (т. е. или $\omega = +\infty$ или функция f неограничена как функция x в окрестности точки ω).

Определение. Говорят, что *несобственный интеграл* (1), зависящий от параметра $y \in Y$, *сходится равномерно на множестве* $E \subset Y$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U_{[a,\omega[}(\omega)$ точки ω в множестве $[a, \omega[$, что при любом $b \in U_{[a,\omega[}(\omega)$ и любом значении $y \in E$ имеет место следующая оценка

$$\left|\int_b^\omega f(x, y)\, dx\right| < \varepsilon \tag{2}$$

остатка интеграла (1).

Если ввести обозначение

$$F_b(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx \tag{3}$$

для собственного приближения несобственного интеграла (1), то приведенное основное определение этого параграфа можно (и, как будет видно из дальнейшего, весьма полезно) переформулировать также в иной, равносильной прежней, форме:

равномерная сходимость интеграла (1) *на множестве* $E \subset Y$ по определению означает, что

$$F_b(y) \rightrightarrows F(y) \text{ на } E \text{ при } b \to \omega,\ b \in [a, \omega[. \tag{4}$$

Действительно, ведь

$$F(y) = \int_a^\omega f(x, y)\, dx := \lim_{\substack{b\to\omega \\ b\in[a,\omega[}} \int_a^b f(x, y)\, dx = \lim_{\substack{b\to\omega \\ b\in[a,\omega[}} F_b(y),$$

поэтому соотношение (2) можно переписать в виде

$$|F(y) - F_b(y)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Последнее неравенство справедливо при любом $b \in U_{[a,b[}(\omega)$ и любом $y \in \in E$, что и указано в соотношении (4).

Итак, соотношения (2), (4), (5) означают, что если интеграл (1) сходится равномерно на некотором множестве E значений параметра, то с любой наперед заданной точностью и одновременно для всех $y \in E$ этот несобственный интеграл (1) можно заменить некоторым собственным интегралом (3), зависящим от того же параметра y.

Пример 1. Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2}$$

сходится равномерно на всем множестве $\mathbb{R}$ значений параметра $y \in \mathbb{R}$, поскольку при любом $y \in \mathbb{R}$

$$\int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2} \leqslant \int_b^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{b} < \varepsilon,$$

как только $b > 1/\varepsilon$.

Пример 2. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dx,$$

очевидно, сходится, лишь когда $y > 0$. При этом на любом множестве $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_0 > 0\}$ он сходится равномерно.

В самом деле, если $y \geqslant y_0 > 0$, то

$$0 \leqslant \int_b^{+\infty} e^{-xy}\, dx = \frac{1}{y} e^{-by} \leqslant \frac{1}{y_0} e^{-by_0} \to 0 \quad \text{при } b \to +\infty.$$

Вместе с тем на всем множестве $\mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ равномерной сходимости нет. Действительно, отрицание равномерной сходимости интеграла (1) на множестве E означает, что

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall B \in [a, \omega[\ \exists b \in [B, \omega[\ \exists y \in E \left(\left| \int_b^{\omega} f(x, y)\, dx \right| > \varepsilon_0 \right).$$

В нашем случае в качестве ε_0 можно взять любое действительное число, поскольку

$$\int_b^{+\infty} e^{-xy}\, dx = \frac{1}{y} e^{-by} \to +\infty, \quad \text{когда } y \to +0,$$

каково бы ни было фиксированное значение $b \in [0, +\infty[$.

Рассмотрим еще один менее тривиальный пример, которым мы в дальнейшем воспользуемся.

Пример 3. Покажем, что каждый из интегралов

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\, dy,$$

$$F(y) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\, dx,$$

в которых α и β — фиксированные положительные числа, сходится равномерно на множестве неотрицательных значений параметра.

Для остатка интеграла $\Phi(x)$ сразу получаем, что

$$0 \leqslant \int_b^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dy = \int_b^{+\infty} (xy)^\alpha e^{-xy} y^{\beta+1} e^{-y}\,dy < M_\alpha \int_b^{+\infty} y^{\beta+1} e^{-y}\,dy,$$

где $M_\alpha = \max\limits_{0 \leqslant u < +\infty} u^\alpha e^{-u}$. Поскольку последний интеграл сходится, то при достаточно больших значениях $b \in \mathbb{R}$ он может быть сделан меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Но это и означает равномерную сходимость интеграла $\Phi(x)$.

Теперь рассмотрим остаток второго интеграла $F(y)$:

$$0 \leqslant \int_b^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dx = y^\beta e^{-y} \int_b^{+\infty} (xy)^\alpha e^{-xy} y\,dx = y^\beta e^{-y} \int_{by}^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\,du.$$

Поскольку при $y \geqslant 0$

$$\int_{by}^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\,du \leqslant \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\,du < +\infty,$$

а $y^\beta e^{-y} \to 0$ при $y \to 0$, то для $\varepsilon > 0$, очевидно, найдется такое число $y_0 > 0$, что при любом $y \in [0, y_0]$ остаток интересующего нас интеграла будет меньше ε независимо даже от значения $b \in [0, +\infty[$.

Если же $y \geqslant y_0 > 0$, то, учитывая, что $M_\beta = \max\limits_{0 \leqslant y < +\infty} y^\beta e^{-y} < +\infty$, а $0 \leqslant \int_{by}^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\,du \leqslant \int_{by_0}^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\,du \to 0$ при $b \to +\infty$, заключаем, что при всех достаточно больших значениях $b \in [0, +\infty[$ одновременно для всех значений $y \geqslant y_0 > 0$ остаток интеграла $F(y)$ можно сделать меньшим, чем ε.

Объединяя участки $[0, y_0]$, $[y_0, +\infty[$, заключаем, что, действительно, по любому $\varepsilon > 0$ можно так подобрать число B, что при любом $b > B$ и любом $y \geqslant 0$ соответствующий остаток интеграла $F(y)$ будет меньше, чем ε.

b. Критерий Коши равномерной сходимости интеграла

Утверждение 1 (критерий Коши). *Для того, чтобы несобственный интеграл* (1)*, зависящий от параметра $y \in Y$, сходился равномерно на множестве $E \subset Y$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U_{[a,\omega[}(\omega)$ точки ω, что при любых $b_1, b_2 \in U_{[a,\omega[}(\omega)$ и любом $y \in E$ выполняется неравенство*

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{6}$$

◄ Неравенство (6) равносильно соотношению $|F_{b_2}(y) - F_{b_1}(y)| < \varepsilon$, поэтому утверждение 1 является прямым следствием записи (4) определения равномерной сходимости интеграла (1) и критерия Коши равномерной сходимости на E семейства функций $F_b(y)$, зависящих от параметра $b \in [a, \omega[$. ►

В качестве иллюстрации использования этого критерия Коши рассмотрим следующее иногда полезное его

Следствие 1. *Если функция f в интеграле* (1) *непрерывна на множестве* $[a, \omega[\times[c, d]$, *а сам интеграл* (1) *сходится при любом* $y \in]c, d[$, *но расходится при* $y = c$ *или* $y = d$, *то он сходится неравномерно на интервале* $]c, d[$, *равно как и на любом множестве* $E \subset]c, d[$, *замыкание которого содержит точку расходимости.*

◄ Если при $y = c$ интеграл (1) расходится, то на основании критерия Коши сходимости несобственного интеграла существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что в любой окрестности $U_{[a,\omega[}(\omega)$ найдутся числа b_1, b_2, для которых

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x, c)\, dx\right| > \varepsilon_0. \tag{7}$$

Собственный интеграл

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dx$$

является в нашем случае непрерывной функцией параметра y на всем отрезке $[c, d]$ (см. утверждение 1 из § 1), поэтому при всех значениях y, достаточно близких к c, вместе с неравенством (7) будет выполняться неравенство

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dx\right| > \varepsilon_0.$$

На основании критерия Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, теперь заключаем, что рассматриваемый интеграл не может сходиться равномерно ни на каком подмножестве $E \subset]c, d[$, замыкание которого содержит точку c.

Аналогично рассматривается случай, когда интеграл расходится при $y = d$. ►

Пример 4. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\, dx$$

сходится при $t > 0$ и расходится при $t = 0$, поэтому он заведомо сходится неравномерно на любом множестве положительных чисел, имеющем нуль предельной точкой. В частности, он сходится неравномерно на всем множестве $\{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ положительных чисел.

В данном случае сказанное легко проверить и непосредственно:

$$\int_b^{+\infty} e^{-tx^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{b\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-u^2}\, du \to +\infty \quad \text{при } t \to +0.$$

Подчеркнем, что тем не менее на любом отделенном от нуля множестве $\{t\in\mathbb{R} \mid t\geqslant t_0>0\}$ наш интеграл сходится равномерно, поскольку

$$0<\frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_{b\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du\leqslant\frac{1}{\sqrt{t_0}}\int\limits_{b\sqrt{t_0}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du\to 0 \quad \text{при } b\to+\infty.$$

c. Достаточные условия равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра

Утверждение 2 (признак Вейерштрасса). *Пусть функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ интегрируемы по x на любом отрезке $[a, b]\subset[a, \omega[$ при каждом значении $y\in Y$.*

Если при каждом значении $y\in Y$ и любом $x\in[a, \omega[$ имеет место неравенство $|f(x, y)|\leqslant g(x, y)$, а интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} g(x, y)\,dx$$

сходится равномерно на Y, то интеграл

$$\int\limits_a^{\omega} f(x, y)\,dx$$

сходится абсолютно при каждом $y\in Y$ и равномерно на множестве Y.

◄ Это следует из оценок

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x, y)\,dx\right|\leqslant\int\limits_{b_1}^{b_2}|f(x, y)|\,dx\leqslant\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x, y)\,dx$$

и критерия Коши равномерной сходимости интеграла (утверждение 1). ►

Наиболее часто встречается тот случай утверждения 2, когда функция g вообще не зависит от параметра y. Именно в этом случае доказанное утверждение 2 обычно называют *мажорантным признаком* Вейерштрасса *равномерной сходимости интеграла*.

Пример 5. Интеграл

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx$$

сходится равномерно на всем множестве $\mathbb{R}$ значений параметра α, поскольку $\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$, а интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ сходится.

Пример 6. Ввиду неравенства $|\sin xe^{-tx^2}|\leqslant e^{-tx^2}$ интеграл

$$\int\limits_0^{\infty}\sin xe^{-tx^2}\,dx,$$

как следует из утверждения 2 и результатов примера 3, сходится равномерно на любом множестве вида $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geqslant t_0 > 0\}$. Поскольку при $t = 0$ интеграл расходится, на основании следствия критерия Коши заключаем, что он не может сходиться равномерно ни на каком множестве E, имеющем нуль своей предельной точкой.

Утверждение 3 (признак Абеля—Дирихле). *Предположим, что функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ при каждом значении $y \in Y$ интегрируемы по x на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$.*

Для равномерной сходимости интеграла

$$\int_a^{\omega} (f \cdot g)(x, y)\, dx$$

на множестве Y достаточно, чтобы была выполнена любая из следующих двух пар условий:

α_1) *Существует постоянная $M \in \mathbb{R}$ такая, что при любом $b \in [a, \omega[$ и любом $y \in Y$ выполнено неравенство*

$$\left| \int_a^b f(x, y)\, dx \right| < M;$$

β_1) *при каждом $y \in Y$ функция $g(x, y)$ монотонна по x на промежутке $[a, \omega[$ и $g(x, y) \rightrightarrows 0$ на Y при $x \to \omega$, $x \in [a, \omega[$.*

α_2) *Интеграл*

$$\int_a^{\omega} f(x, y)\, dx$$

сходится равномерно на множестве Y;

β_2) *при каждом $y \in Y$ функция $g(x, y)$ монотонна по x на промежутке $[a, \omega[$ и существует постоянная $M \in \mathbb{R}$ такая, что при любом $x \in [a, \omega[$ и любом $y \in Y$ выполнено неравенство*

$$|g(x, y)| < M.$$

◄ Применяя вторую теорему о среднем для интеграла, запишем, что

$$\int_{b_1}^{b_2} (f \cdot g)(x, y)\, dx = g(b_1, y) \int_{b_1}^{\xi} f(x, y)\, dx + g(b_2, y) \int_{\xi}^{b_2} f(x, y)\, dx,$$

где $\xi \in [b_1, b_2]$. Если b_1 и b_2 брать в достаточно малой окрестности $U_{[a,\omega[}(\omega)$ точки ω, то правую часть написанного равенства можно сделать по модулю меньшей любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, причем сразу для всех значений $y \in Y$. В случае первой пары условий α_1), β_1) это очевидно. В случае второй пары α_2), β_2) это становится очевидным, если воспользоваться критерием Коши равномерной сходимости интеграла (утверждение 1).

Таким образом, вновь ссылаясь на критерий Коши, заключаем, что исходный интеграл от произведения $f \cdot g$ по промежутку $[a, \omega[$ действительно сходится равномерно на множестве Y значений параметра. ►

Пример 7. Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx,$$

как следует из критерия Коши и признака Абеля—Дирихле сходимости несобственных интегралов, сходится лишь при $\alpha > 0$. Полагая $f(x, \alpha) = \sin x$, $g(x, \alpha) = x^{-\alpha}$, видим, что при $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ для рассматриваемого интеграла выполнена пара α_1), β_1) условий утверждения 3. Следовательно, на любом множестве вида $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geqslant \alpha_0 > 0\}$ данный интеграл сходится равномерно. На множестве $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha > 0\}$ всех положительных значений параметра интеграл сходится неравномерно, поскольку он расходится при $\alpha = 0$.

Пример 8. Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\, dx$$

сходится, и притом равномерно, на множестве $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$.

◄ Прежде всего, на основании критерия Коши сходимости несобственного интеграла легко заключить, что при $y < 0$ данный интеграл вообще расходится. Считая теперь $y \geqslant 0$ и полагая $f(x, y) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x, y) = e^{-xy}$, видим, что выполнена вторая пара α_2), β_2) условий утверждения 3, откуда и вытекает равномерная сходимость рассматриваемого интеграла на множестве $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$. ►

Итак, мы ввели понятие равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, и указали некоторые наиболее важные признаки такой сходимости, вполне аналогичные соответствующим признакам равномерной сходимости рядов функций. Прежде, чем переходить к дальнейшему, сделаем два замечания.

Замечание 1. Чтобы не отвлекать внимание читателя от основного введенного здесь понятия равномерной сходимости интеграла, мы всюду подразумевали, что речь идет об интегрировании вещественнозначных функций. Вместе с тем, как теперь легко проанализировать, полученные результаты распространяются и на интегралы от векторнозначных функций, в частности, на интегралы от комплекснозначных функций. Здесь стоит только отметить, что, как всегда, в критерии Коши необходимо дополнительно предполагать, что соответствующее векторное пространство значений подынтегральной функции является полным (для $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ это выполнено), а в признаке Абеля—Дирихле, как и в соответствующем признаке равномерной сходимости рядов функций, надо считать вещественнозначным тот сомножитель произведения $f \cdot g$, относительно которого предполагается, что он является монотонной функцией.

Все сказанное в равной степени относится и к основным результатам последующих пунктов этого параграфа.

Замечание 2. Мы рассмотрели несобственный интеграл (1), единственная особенность которого была связана с верхним пределом интегрирования ω. Аналогично определяется и исследуется равномерная сходимость интеграла, единственная особенность которого связана с нижним пределом интегрирования. Если же интеграл имеет особенности на обоих концах промежутка интегрирования, то его представляют в виде

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x, y)\,dx = \int\limits_{\omega_1}^{c} f(x, y)\,dx + \int\limits_{c}^{\omega_2} f(x, y)\,dx,$$

где $c \in \,]\omega_1, \omega_2[$, и считают сходящимся равномерно на множестве $E \subset Y$, если на E сходятся равномерно оба стоящие в правой части равенства интеграла. Легко проверить, что такое определение корректно, т. е. не зависит от выбора точки $c \in \,]\omega_1, \omega_2[$.

2. Предельный переход под знаком несобственного интеграла и непрерывность несобственного интеграла, зависящего от параметра

Утверждение 4. *Пусть* $f(x, y)$ — *семейство зависящих от параметра* $y \in Y$ *функций, интегрируемых хотя бы в несобственном смысле на промежутке* $a \leqslant x < \omega$, *и пусть* $\mathcal{B}_Y$ — *база в* Y.

Если

a) *для любого* $b \in [a, \omega[$

$$f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x) \text{ на } [a, b] \text{ при базе } \mathcal{B}_Y \quad \text{и}$$

b) *интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx$ *сходится равномерно на* Y,

то предельная функция φ *несобственно интегрируема на* $[a, \omega[$ *и справедливо равенство*

$$\lim_{\mathcal{B}_Y} \int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx = \int\limits_a^\omega \varphi(x)\,dx. \tag{8}$$

◄ Доказательство сводится к проверке следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
F_b(y) := \int\limits_a^b f(x, y)\,dx & \xrightarrow[b\in[a,\omega[]{b\to\omega} \!\!\!\!\rightrightarrows & \int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx =: F(y) \\
\Big\downarrow \mathcal{B}_Y & & \Big\downarrow \mathcal{B}_Y \\
\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx & \xrightarrow[b\in[a,\omega[]{b\to\omega} & \int\limits_a^\omega \varphi(x)\,dx.
\end{array}$$

Левый вертикальный предельный переход следует из условия a) и теоремы о предельном переходе под знаком собственного интеграла (см. теорему 3 из § 3 гл. XVI).

Верхний горизонтальный переход есть запись условия b).

По теореме о коммутировании двух предельных переходов отсюда следует существование и совпадение стоящих под диагональю пределов.

Правый вертикальный предельный переход есть то, что стоит в левой части доказываемого равенства (8), а нижний горизонтальный предельный переход дает по определению несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства (8). ►

Следующий пример показывает, что в рассматриваемом случае несобственного интеграла одного условия a) для обеспечения равенства (8), вообще говоря, недостаточно.

Пример 9. Пусть $Y=\{y\in\mathbb{R} \mid y>0\}$, а

$$f(x, y)=\begin{cases} 1/y, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant y, \\ 0, & \text{если } y<x. \end{cases}$$

Очевидно, $f(x, y)\rightrightarrows 0$ на промежутке $0\leqslant x<+\infty$ при $y\to+\infty$. Вместе с тем, при любом $y\in Y$

$$\int_0^{+\infty} f(x, y)\,dx=\int_0^{y} f(x, y)\,dx=\int_0^{y} \frac{1}{y}\,dx=1,$$

поэтому равенство (8) в данном случае не имеет места.

Используя теорему Дини (утверждение 2 § 3 гл. XVI), из только что доказанного утверждения 4 можно получить иногда весьма полезное

Следствие 2. *Пусть при каждом значении вещественного параметра $y\in Y\subset\mathbb{R}$ вещественнозначная функция $f(x, y)$ неотрицательна и непрерывна на промежутке $a\leqslant x<\omega$.*

Если

a) *с ростом y функции $f(x, y)$, монотонно возрастая, стремятся на $[a, \omega[$ к функции $\varphi(x)$,*

b) $\varphi\in C([a, \omega[, \mathbb{R})$ *и*

c) *интеграл $\int_a^{\omega} \varphi(x)\,dx$ сходится,*

то справедливо равенство (8).

◄ Из теоремы Дини следует, что $f(x, y)\rightrightarrows\varphi(x)$ на каждом отрезке $[a, b]\subset\subset[a, \omega[$.

Из неравенств $0\leqslant f(x, y)\leqslant\varphi(x)$ и мажорантного признака равномерной сходимости вытекает равномерная относительно параметра y сходимость интеграла от $f(x, y)$ по промежутку $a\leqslant x<\omega$.

Таким образом, оба условия утверждения 4 выполнены и, значит, имеет место равенство (8). ►

Пример 10. В примере 3 из § 3 гл. XVI мы проверили, что последовательность функций $f_n(x)=n(1-x^{1/n})$ является монотонно возрастающей на промежутке $0<x\leqslant 1$, причем $f_n(x)\nearrow\ln\frac{1}{x}$ при $n\to+\infty$.

Значит, по следствию 2

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(1-x^{1/n})\,dx=\int_0^1 \ln\frac{1}{x}\,dx.$$

Утверждение 5. *Если*

a) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве* $\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant x<\omega\wedge c\leqslant \leqslant y\leqslant d\}$,

b) *интеграл* $F(y)=\int_a^\omega f(x, y)\,dx$ *сходится равномерно на* $[c, d]$,

то функция $F(y)$ *непрерывна на* $[c, d]$.

◄ Из условия a) следует, что при любом $b\in[a, \omega[$ собственный интеграл

$$F_b(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx$$

является функцией, непрерывной на $[c, d]$ (см. утверждение 1 § 1).

По условию b) $F_b(y)\rightrightarrows F(y)$ на $[c, d]$ при $b\to\omega$, $b\in[a, \omega[$, откуда теперь и следует непрерывность на $[c, d]$ функции $F(y)$. ►

Пример 11. В примере 8 было показано, что интеграл

$$F(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx \tag{9}$$

сходится равномерно на промежутке $0\leqslant y<+\infty$. Значит, на основании утверждения 5 можно заключить, что функция $F(y)$ непрерывна на каждом отрезке $[0, d]\subset[0, +\infty[$, т. е. непрерывна и на всем промежутке $0\leqslant y<+\infty$. В частности, отсюда следует, что

$$\lim_{y\to+0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{10}$$

3. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру

Утверждение 6. *Если*

a) *функции* $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ *непрерывны на множестве* $\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leqslant \leqslant x<\omega\wedge c\leqslant y\leqslant d\}$,

b) *интеграл* $\Phi(y)=\int_a^\omega f'_y(x, y)\,dx$ *сходится равномерно на множестве* $Y= =[c, d]$, *а*

c) *интеграл* $F(y)=\int_a^\omega f(x, y)\,dx$ *сходится хотя бы при одном значении* $y_0\in Y$,

то он сходится, и даже равномерно, на всем множестве Y; *при этом функция* $F(y)$ *оказывается дифференцируемой и справедливо равенство*

$$F'(y)=\int_a^\omega f'_y(x, y)\,dx.$$

◄ В силу условия a) при любом $b \in [a, \omega[$ функция

$$F_b(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

определена и дифференцируема на промежутке $c \leqslant y \leqslant d$, и по правилу Лейбница

$$(F_b)'_y(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\, dx.$$

В силу условия b) семейство зависящих от параметра $b \in [a, \omega[$ функций $(F_b)'_y(y)$ сходится равномерно на $[c, d]$ к функции $\Phi(y)$ при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$.

По условию c) величина $F_b(y_0)$ имеет предел при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$.

Отсюда следует (см. теорему 4 § 3 гл. XVI), что само семейство функций $F_b(y)$ сходится на $[c, d]$ равномерно к предельной функции $F(y)$, когда $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$, при этом функция F оказывается дифференцируемой на промежутке $c \leqslant y \leqslant d$ и имеет место равенство $F'(y) = \Phi(y)$. Но это как раз то, что и требовалось доказать. ►

Пример 12. При фиксированном значении $\alpha > 0$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-xy}\, dx$$

сходится равномерно относительно параметра y на любом промежутке вида $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_0 > 0\}$: это следует из оценки $0 \leqslant x^\alpha e^{-xy} < x^\alpha e^{-xy_0} < e^{-xy_0/2}$, справедливой при всех достаточно больших значениях $x \in \mathbb{R}$.

Значит, по утверждению 6, функция

$$F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dx$$

бесконечно дифференцируема при $y > 0$ и

$$F^{(n)}(y) = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-xy}\, dx.$$

Но $F(y) = \frac{1}{y}$, поэтому $F^{(n)}(y) = (-1)^n \frac{n!}{y^{n+1}}$, и, следовательно, можно заключить, что

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-xy}\, dx = \frac{n!}{y^{n+1}}.$$

В частности, при $y = 1$ получаем

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$$

Пример 13. Вычислим *интеграл Дирихле*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Для этого вернемся к интегралу (9) и заметим, что при $y>0$

$$F'(y) = -\int_0^{+\infty} \sin x e^{-xy}\,dx, \tag{11}$$

поскольку интеграл (11) сходится равномерно на любом множестве вида $\{y\in\mathbb{R} \mid y\geqslant y_0>0\}$.

Интеграл (11) легко вычисляется через первообразную подынтегральной функции и получается, что

$$F'(y) = -\frac{1}{1+y^2} \quad \text{при } y>0,$$

откуда следует, что

$$F(y) = -\operatorname{arctg} y + c \quad \text{при } y>0. \tag{12}$$

При $y\to+\infty$, как видно из соотношения (9), $F(y)\to 0$, поэтому из (12) следует, что $c=\pi/2$. Теперь из (10) и (12) получается, что $F(0)=\pi/2$. Итак,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{13}$$

Заметим, что использованное при выводе равенства (13) соотношение «$F(y)\to 0$ при $y\to+\infty$» не является прямым следствием утверждения 4, поскольку $\frac{\sin x}{x}e^{-xy} \rightrightarrows 0$ при $y\to+\infty$ лишь на промежутках вида $\{x\in\mathbb{R} \mid x\geqslant x_0>0\}$, а на промежутках вида $0<x<x_0$ равномерной сходимости нет: ведь $\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\to 1$ при $x\to 0$. Но при $x_0>0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx = \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx$$

и, если задано $\varepsilon>0$, то сначала выберем x_0 столь близко к нулю, что $\sin x\geqslant 0$ при $x\in[0,x_0]$ и

$$0 < \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx < \int_0^{x_0} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

при любом $y>0$, а затем, фиксировав x_0, на основании утверждения 4, устремляя y к $+\infty$, сделаем интеграл по промежутку $[x_0,+\infty[$ тоже по модулю меньшим, чем $\varepsilon/2$.

4. Интегрирование несобственного интеграла по параметру

Утверждение 7. *Если*

a) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x < \omega \wedge c \leqslant \leqslant y \leqslant d\}$ *и*

b) *интеграл* $F(y) = \int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx$ *сходится равномерно на промежутке* $[c, d]$,

то функция F *интегрируема на* $[c, d]$ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx = \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \tag{14}$$

◄ При $b \in [a, \omega[$ на основе условия a) и утверждения 3 из § 1 для собственных интегралов можно записать, что

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \tag{15}$$

Используя условие b) и теорему 3 § 3 гл. XVI о предельном переходе под знаком интеграла, в левой части равенства (15) делаем предельный переход при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$ и получаем левую часть равенства (14). Правая часть равенства (14) по самому определению несобственного интеграла является пределом при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$ правой части равенства (15). Таким образом, благодаря условию b) из (15) при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$, получаем равенство (14). ►

Следующий пример показывает, что, в отличие от случая перестановки двух собственных интегралов, одного условия a), вообще говоря, недостаточно для справедливости равенства (14).

Пример 14. Рассмотрим функцию $f(x, y) = (2 - xy)xye^{-xy}$ на множестве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x < +\infty \wedge 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Используя первообразную u^2e^{-u} функции $(2 - u)ue^{-u}$, легко подсчитать непосредственно, что

$$0 = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{+\infty} (2 - xy)xye^{-xy}\,dx \neq \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^1 (2 - xy)xye^{-xy}\,dy = 1.$$

Следствие 3. *Если*

a) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве* $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x < \omega \wedge \wedge c \leqslant y \leqslant d\}$,

b) *неотрицательна на* P *и*

c) *интеграл* $F(y) = \int\limits_a^\omega f(x, y)\,dx$ *как функция* y *непрерывен на промежутке* $[c, d]$,

то имеет место равенство (14).

◄ Из условия a) следует, что при любом $b \in [a, \omega[$ интеграл

$$F_b(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

является непрерывной по y функцией на отрезке $[c, d]$.

Из условия b) вытекает, что $F_{b_1}(y) \leqslant F_{b_2}(y)$ при $b_1 \leqslant b_2$.

На основании теоремы Дини и условия c) теперь заключаем, что $F_b \rightrightarrows F$ на $[c, d]$ при $b \to \omega$, $b \in [a, \omega[$.

Таким образом, выполнены условия утверждения 7 и, следовательно, в рассматриваемом случае равенство (14) действительно имеет место. ►

Следствие 3 показывает, что пример 14 связан с тем, что в нем функция $f(x, y)$ не является знакопостоянной.

В заключение докажем теперь одно достаточное условие перестановочности двух несобственных интегралов.

Утверждение 8. *Если*

a) *функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x < \omega \land c \leqslant \leqslant y < \widetilde{\omega}\}$,*

b) *оба интеграла*

$$F(y) = \int_a^\omega f(x, y)\, dx, \quad \Phi(x) = \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x, y)\, dy$$

сходятся равномерно, первый — относительно y, на любом отрезке $[c, d] \subset \subset [c, \widetilde{\omega}[$, а второй — относительно x на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$,

c) *существует хотя бы один из двух повторных интегралов*

$$\int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^\omega |f|(x, y)\, dx, \quad \int_a^\omega dx \int_c^{\widetilde{\omega}} |f|(x, y)\, dy,$$

то имеет место равенство

$$\int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^\omega f(x, y)\, dx = \int_a^\omega dx \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x, y)\, dy. \tag{16}$$

◄ Пусть для определенности существует второй из двух указанных в c) повторных интегралов.

Ввиду условия a) и первого из условий b) на основании утверждения 7 можно сказать, что при любом $d \in [c, \widetilde{\omega}[$ для функции f справедливо равенство (14).

Если мы покажем, что при $d \to \widetilde{\omega}$, $d \in [c, \widetilde{\omega}[$ правая часть равенства (14) стремится к правой части соотношения (16), то равенство (16) будет доказано, поскольку тогда его левая часть тоже будет существовать и являться пределом левой части равенства (14) по самому определению несобственного интеграла.

Положим

$$\Phi_d(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

При любом фиксированном $d \in [c, \widetilde{\omega}[$ функция Φ_d определена и, ввиду непрерывности f, непрерывна на промежутке $a \leqslant x < \omega$.

В силу второго из условий b) на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega[$ $\Phi_d(x) \rightrightarrows \Phi(x)$ при $d \to \widetilde{\omega}$, $d \in [c, \widetilde{\omega}[$.

Поскольку $|\Phi_d(x)| \leqslant \int_c^{\widetilde{\omega}} |f|(x, y)\, dy =: G(x)$, а интеграл $\int_a^{\omega} G(x)\, dx$, совпадающий со вторым из интегралов условия c), по предположению сходится, на основе мажорантного признака равномерной сходимости заключаем, что интеграл $\int_a^{\omega} \Phi_d(x)\, dx$ относительно параметра d сходится равномерно.

Таким образом, выполнены условия утверждения 4 и можно заключить, что

$$\lim_{\substack{d \to \widetilde{\omega} \\ d \in [c, \widetilde{\omega}]}} \int_a^{\omega} \Phi_d(x)\, dx = \int_a^{\omega} \Phi(x)\, dx;$$

а именно это нам и оставалось проверить. ►

Следующий пример показывает, что появление в утверждении 8 дополнительного по сравнению с утверждением 7 условия c) не является случайным.

Пример 15. Вычисление при $A > 0$ интеграла

$$\int_A^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = -\frac{x}{x^2 + y^2}\bigg|_A^{+\infty} = \frac{A}{A^2 + y^2} < \frac{1}{A}$$

показывает заодно, что при любом фиксированном значении $A > 0$ он сходится равномерна относительно параметра на всем множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел. То же самое можно было бы сказать об интеграле, отличающемся от написанного заменой dx на dy. Значения этих интегралов, кстати, отличаются только знаком. Прямое вычисление показывает, что

$$-\frac{\pi}{4} = \int_A^{+\infty} dx \int_A^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy \neq \int_A^{+\infty} dy \int_A^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 16. При $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ повторный интеграл

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\, dx = \int_0^{+\infty} y^{\beta} e^{-y}\, dy \int_0^{+\infty} (xy)^{\alpha} e^{-(xy)} y\, dx$$

от неотрицательной непрерывной функции, как показывает написанное тождество, существует: он равен нулю при $y = 0$ и равен $\int_0^{+\infty} y^{\beta} e^{-y}\, dy \cdot \int_0^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u}\, du$

при $y > 0$. Таким образом, в этом случае выполнены условия а) и с) утверждения 8. То, что для рассматриваемого интеграла выполнены оба условия b), было проверено в примере 3. Значит, в силу утверждения 8, имеет место равенство

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\, dx = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} x^\alpha y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\, dy.$$

Подобно тому, как из утверждения 7 вытекало следствие 3, из утверждения 8 можно вывести

Следствие 4. *Если*

а) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве*

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x < \omega \wedge c \leqslant y < \widetilde{\omega}\},$$

b) *неотрицательна на* P,

с) *оба интеграла*

$$F(y) = \int_a^\omega f(x, y)\, dx, \quad \Phi(x) = \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x, y)\, dy$$

являются непрерывными функциями на промежутках $[a, \omega[$, $[c, \widetilde{\omega}[$ *соответственно и*

d) *существует хотя бы один из повторных интегралов*

$$\int_c^{\widetilde{\omega}} dy \int_a^\omega f(x, y)\, dx, \quad \int_a^\omega dx \int_c^{\widetilde{\omega}} f(x, y)\, dy,$$

то существует и другой повторный интеграл, причем их значения совпадают.

◄ Рассуждая, как и при доказательстве следствия 3, из условий а), b), с) на основе теоремы Дини заключаем, что в рассматриваемом случае выполнено условие b) утверждения 8. Поскольку $f \geqslant 0$, наше условие d) совпадает с условием с) утверждения 8. Таким образом, все условия утверждения 8 выполнены и, значит, имеет место равенство (15). ►

Замечание 3. Как указывалось в замечании 2, интеграл, имеющий особенности на обоих концах промежутка интегрирования, сводится к сумме двух интегралов, каждый из которых имеет по одной особенности. Это позволяет применять доказанные здесь утверждения и их следствия также к интегралам по интервалам $]\omega_1, \omega_2[\subset \mathbb{R}$. При этом, естественно, те условия, которые раньше выполнялись на отрезках $[a, b] \subset [a, \omega[$, теперь должны быть выполнены на отрезках $[a, b] \subset]\omega_1, \omega_2[$.

Пример 17. Используя изменения порядка двух несобственных интегрирований, покажем, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{17}$$

Это известный *интеграл Эйлера—Пуассона*.

◄ Заметим сначала, что при $y>0$

$$\mathcal{J} := \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = y\int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}\,dx$$

и что значение интеграла в равенстве (17) не изменится от того, понимать ли интеграл взятым по полуинтервалу $[0, +\infty[$ или по интервалу $]0, +\infty[$.

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} ye^{-y^2}\,dy \int_0^{+\infty} e^{-(xy)^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \mathcal{J}^2,$$

при этом считаем, что интегрирование по y ведется в пределах интервала $]0, +\infty[$.

Как мы проверим, в указанном повторном интеграле допустимо изменение порядка интегрирований по переменным x и y, поэтому

$$\mathcal{J}^2 = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4},$$

откуда и следует равенство (17).

Обоснуем теперь законность изменения порядка интегрирований.

Функция

$$\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

непрерывна при $x \geqslant 0$, а функция

$$\int_0^{+\infty} ye^{-(1+x^2)y^2}\,dx = e^{-y^2}\cdot\mathcal{J}$$

непрерывна при $y>0$. Учитывая сделанное выше общее замечание 3, на основе следствия 4 заключаем теперь, что проведенное изменение порядка интегрирований действительно законно. ►

Задачи и упражнения

1. Пусть $a=a_0<a_1<\ldots<a_n<\ldots<\omega$. Представим интеграл (1) в виде суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)$, где $\varphi_n(y)=\int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)\,dx$. Докажите, что интеграл (1) сходится равномерно на множестве $E\subset Y$ тогда и только тогда, когда любой последовательности $\{a_n\}$ указанного вида отвечает ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(y)$, сходящийся равномерно на множестве E.

2. a) В соответствии с замечанием 1 проведите все построения п. 1 в случае комплекснозначной подынтегральной функции f.

b) Проверьте высказанные в замечании 2 утверждения.

3. Проверьте, что функция $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ удовлетворяет уравнению Бесселя $y''+\frac{1}{x}y'+y=0$.

4. a) Исходя из равенства $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{x}$, покажите, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{(x^2+y^2)^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}}.$$

b) Проверьте, что $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+(y^2/n))^n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\sqrt{n}$.

c) Покажите, что $(1+(y^2/n))^{-n}\searrow e^{-y^2}$ на $\mathbb{R}$ при $n\to+\infty$ и что

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{(1+(y^2/n))^n}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-y^2}\,dy.$$

d) Получите следующую формулу Валлиса:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

5. Учитывая равенство (17), покажите, что

a) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2xy\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-y^2}$, b) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin 2xy\,dx=e^{-y^2}\int\limits_0^{y}e^{t^2}\,dt$.

6. При условии $t>0$ докажите тождество

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{1+x^2}\,dx=\int\limits_t^{+\infty}\frac{\sin(x-t)}{x}\,dx,$$

используя то обстоятельство, что оба эти интеграла как функции параметра t удовлетворяют уравнению $\ddot{y}+y=1/t$ и стремятся к нулю при $t\to+\infty$.

7. Покажите, что

$$\int\limits_0^1 K(k)\,dk=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi\quad\left(=\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\,dx\right),$$

где $K(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

8. a) Считая, что $a>0$ и $b>0$ и используя равенство

$$\int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_a^b e^{-xy}\,dy=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx,$$

вычислите последний интеграл.

b) При $a>0$, $b>0$ вычислите интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos x\,dx.$$

c) Используя интеграл Дирихле (13) и равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_a^b \sin xy\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx,$$

вычислите последний интеграл.

9. a) Докажите, что при $k > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt} \sin t\, dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du = \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t} \sin t\, dt.$$

b) Покажите, что предыдущее равенство остается в силе и при значении $k = 0$.

c) Используя интеграл Эйлера—Пуассона (17), проверьте, что

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du.$$

d) Используя последнее равенство и соотношения

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt, \qquad \int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt,$$

получите значение $\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$ интегралов Френеля

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx.$$

10. a) Используя равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \sin x\, dx \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy$$

и обосновав возможность изменения порядка интегрирований в повторном интеграле, получите вновь найденное в примере 13 значение интеграла Дирихле (13).

b) Покажите, что при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x\, dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } \beta < \alpha, \\ \pi/4, & \text{если } \beta = \alpha, \\ 0, & \text{если } \beta > \alpha. \end{cases}$$

Этот интеграл часто называют *разрывным множителем Дирихле*.

c) Считая $\alpha > 0$, $\beta > 0$, проверьте равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\beta, & \text{если } \beta \leqslant \alpha, \\ \frac{\pi}{2}\alpha, & \text{если } \alpha \leqslant \beta. \end{cases}$$

d) Докажите, что если числа $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ положительны и $\alpha > \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \ldots \frac{\sin \alpha_n x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n.$$

11. Рассмотрим интеграл

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^\omega f(x, y)g(x)\,dx,$$

где g — локально интегрируемая на промежутке $[a, \omega[$ функция (значит, при любом $b \in [a, \omega[\ g|_{[a,b]} \in \mathcal{R}[a, b]$). Пусть функция f удовлетворяет порознь условиям a) утверждений 5—8. Если в остальных условиях этих утверждений под знаком интеграла $f(x, y)$ заменить на $f(x, y)\cdot g(x)$, то получатся условия, при которых можно, используя задачу 6 из § 1 и дословно повторяя доказательства утверждений 5—8, заключить соответственно, что

a) $\mathcal{F} \in C[c, d]$,

b) $\mathcal{F} \in C^{(1)}[c, d]$, причем $\mathcal{F}'(y) = \int\limits_a^\omega \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)g(x)\,dx$,

c) $\mathcal{F} \in \mathcal{R}[c, d]$, причем $\int\limits_c^d \mathcal{F}(y)\,dy = \int\limits_a^\omega \left(\int\limits_c^d f(x, y)g(x)\,dy\right)dx$,

d) $\mathcal{F}$ несобственно интегрируема на $[c, \tilde{\omega}[$, причем

$$\int_c^{\tilde{\omega}} \mathcal{F}(y)\,dy = \int_a^\omega \left(\int_c^{\tilde{\omega}} f(x, y)g(x)\,dy\right)dx.$$

Проверьте это.

§ 3. Эйлеровы интегралы

В этом и следующем параграфах будет продемонстрировано приложение развитой выше теории к некоторым важным для анализа конкретным интегралам, зависящим от параметра.

Эйлеровыми интегралами первого и *второго рода* соответственно называют, следуя Лежандру, две следующие специальные функции:

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \tag{1}$$

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx. \tag{2}$$

Первую из них называют *бета-функцией*, а вторую, особенно часто используемую, *гамма-функцией Эйлера*.[1]

---

[1] Л. Эйлер (1707—1783) — гениальный ученый, прежде всего математик и механик. Если бы нужно было назвать следующее после Ньютона и Лейбница имя, то профессионал-математик, скорее всего, произнес бы «Эйлер». Труды и идеи Эйлера до сих пор пронизывают почти все области современной математики. Швейцарец по происхождению, значительную часть своей жизни жил и работал в России, где и похоронен.

1. Бета-функция

a. Область определения. Для сходимости интеграла (1) на нижнем пределе интегрирования необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\alpha > 0$. Аналогично, сходимости интеграла (1) в единице отвечает условие $\beta > 0$.

Таким образом, функция $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ определена при одновременном выполнении двух условий:

$$\alpha > 0 \quad \text{и} \quad \beta > 0.$$

Замечание. Мы здесь всюду считаем α и β действительными числами. Следует, однако, иметь в виду, что наиболее полная картина свойств функций B и Γ и наиболее глубокие приложения этих функций связаны с выходом в область комплексных значений параметров.

b. Симметричность. Проверим, что

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \mathrm{B}(\beta, \alpha). \tag{3}$$

◄ Для доказательства достаточно в интеграле (1) сделать замену переменной $x = 1 - t$. ►

c. Формула понижения. Если $\alpha > 1$, то имеет место равенство

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 1}\,\mathrm{B}(\alpha - 1, \beta). \tag{4}$$

◄ Выполняя при $\alpha > 1$ и $\beta > 0$ интегрирование по частям и тождественные преобразования, получаем

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = -\frac{1}{\beta}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1 + \frac{\alpha-1}{\beta}\cdot\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}\,dx =$$
$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}((1-x)^{\beta-1} - (1-x)^{\beta-1}x)\,dx =$$
$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\,\mathrm{B}(\alpha-1, \beta) - \frac{\alpha-1}{\beta}\,\mathrm{B}(\alpha, \beta),$$

откуда и следует формула понижения (4). ►

Учитывая формулу (3), можно теперь записать формулу понижения

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\beta - 1}{\alpha + \beta - 1}\,\mathrm{B}(\alpha, \beta - 1) \tag{4'}$$

по параметру β, считая, разумеется, что $\beta > 1$.

Непосредственно из определения функции B видно, что $\mathrm{B}(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha}$, поэтому при $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\mathrm{B}(\alpha, n) = \frac{n-1}{\alpha+n-1}\cdot\frac{n-2}{\alpha+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(n-1)}{\alpha+n-(n-1)}\,\mathrm{B}(\alpha, 1) =$$
$$= \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}. \tag{5}$$

В частности, при $m, n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{B}(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{6}$$

d. Другое интегральное представление функции B. Иногда бывает полезно следующее представление бета-функции:

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\, dy. \tag{7}$$

◄ Оно получается из (1) заменой переменной $x = \dfrac{y}{1+y}$. ►

2. Гамма-функция

a. Область определения. Из формулы (2) видно, что задающий функцию Γ интеграл сходится в нуле лишь при $\alpha > 0$, а на бесконечности, за счет быстро убывающего множителя e^{-x}, сходится при любом значении $\alpha \in \mathbb{R}$.

Таким образом, функция Γ определена при $\alpha > 0$.

b. Гладкость и формула для производных. Функция Γ бесконечно дифференцируема, причем

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x}\, dx. \tag{8}$$

◄ Проверим сначала, что при любом фиксированном значении $n \in \mathbb{N}$ интеграл (8) сходится равномерно относительно параметра α на каждом отрезке $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

Если $0 < a \leqslant \alpha$, то (поскольку $x^{\alpha/2} \ln^n x \to 0$ при $x \to +0$) найдется число $c_n > 0$ такое, что

$$|x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x}| < x^{\frac{a}{2}-1}$$

при $0 < x \leqslant c_n$. Значит, на основании мажорантного признака равномерной сходимости можно заключить, что интеграл

$$\int\limits_0^{c_n} x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x}\, dx$$

сходится равномерно по α на промежутке $[a, +\infty[$.

Если же $\alpha \leqslant b < +\infty$, то при $x \geqslant 1$

$$|x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x}| \leqslant x^{b-1} |\ln^n x| e^{-x},$$

и аналогично заключаем, что интеграл

$$\int\limits_{c_n}^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln^n x e^{-x}\, dx$$

сходится равномерно по α на промежутке $]0, b]$.

Совмещая эти выводы, получаем, что интеграл (8) сходится равномерно на любом отрезке $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

Но при этих условиях дифференцирование под знаком интеграла (1) законно. Значит, на любом таком отрезке $[a, b]$, а следовательно и на всем промежутке $0 < \alpha$, функция Γ бесконечно дифференцируема и справедлива формула (8). ►

c. Формула понижения. Имеет место соотношение

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \tag{9}$$

называемое *формулой понижения* для гамма-функции.

◄ Интегрируя по частям, находим, что при $\alpha > 0$

$$\Gamma(\alpha+1) := \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\, dx = -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx =$$

$$= \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx =: \alpha\Gamma(\alpha). \ ►$$

Поскольку $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$, заключаем, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{10}$$

Таким образом, функция Γ оказалась тесно связанной с теоретико-числовой арифметической функцией $n!$.

d. Формула Эйлера—Гаусса. Так обычно называют следующее равенство:

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}. \tag{11}$$

◄ Для его доказательства сделаем в интеграле (2) замену переменной $x = \ln\frac{1}{u}$ и получим новое интегральное представление функции Γ:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \ln^{\alpha-1}\Big(\frac{1}{u}\Big)\, du. \tag{12}$$

В примере 3 § 3 гл. XVI было показано, что последовательность функций $f_n(u) = n(1-u^{1/n})$, монотонно возрастая, сходится на промежутке $0 < u < 1$ к функции $\ln\Big(\frac{1}{u}\Big)$ при $n \to \infty$. Используя следствие 2 из § 2 (см. также пример 10 из § 2), заключаем, что при $\alpha \geqslant 1$

$$\int_0^1 \ln^{\alpha-1}\Big(\frac{1}{u}\Big)\, du = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} \int_0^1 (1-u^{1/n})^{\alpha-1}\, du. \tag{13}$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $u = v^n$, из (12), (13), (1), (3) и (5) получаем

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \int_0^1 v^{n-1}(1-v)^{\alpha-1}\,dv = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \mathrm{B}(n,\alpha) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \mathrm{B}(\alpha,n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}.$$

Применяя к доказанному для $\alpha \geqslant 1$ соотношению $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \mathrm{B}(\alpha,n)$ формулы понижения (4) и (9), убеждаемся в справедливости формулы (11) при всех $\alpha > 0$. ►

е. Формула дополнения. При $0 < \alpha < 1$ значения α и $1-\alpha$ аргумента функции Γ называют взаимно дополнительными, поэтому равенство

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \quad (0 < \alpha < 1) \tag{14}$$

называют *формулой дополнения для гамма-функции*.

◄ Используя формулу Эйлера—Гаусса (11), после простых тождественных преобразований находим, что

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \lim_{n\to\infty}\left(n^\alpha \frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}\cdot n^{1-\alpha}\frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdot\ldots\cdot(n-\alpha)}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\frac{1}{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{\alpha}{n-1}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right)(n-\alpha)}\right) =$$
$$= \frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2}\right)}.$$

Итак, при $0 < \alpha < 1$

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}}. \tag{15}$$

Но имеет место классическое разложение

$$\sin\pi\alpha = \pi\alpha\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right). \tag{16}$$

(Сейчас мы не останавливаемся на его доказательстве, поскольку позже, при рассмотрении рядов Фурье, оно будет получено в качестве простого примера использования общей теории; см. гл. XVIII, § 2, пример 6.)

Сопоставляя соотношения (15) и (16), приходим к формуле (14). ►

Из формулы (14), в частности, следует, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{17}$$

Заметим, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x}\,dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du,$$

и, таким образом, мы вновь получаем значение интеграла Эйлера—Пуассона:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

3. Связь между функциями B и Г. Сопоставляя формулы (6) и (10), можно заподозрить следующую взаимосвязь:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{18}$$

между функциями B и Г. Докажем эту формулу.

◄ Заметим, что при $y > 0$

$$\Gamma(\alpha) = y^\alpha \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-xy}\,dx,$$

поэтому справедливо также равенство

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} = y^{\alpha-1}\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+y)x}\,dx,$$

используя которое, с учетом формулы (7), получаем

$$\Gamma(\alpha+\beta)\cdot\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(y^{\alpha-1}\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx\right)dy \overset{!}{=} \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha-1}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int\limits_0^{+\infty}(xy)^{\alpha-1}e^{-(xy)}x\,dy\right)dx = \int\limits_0^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int\limits_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}\,du\right)dx =$$

$$= \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta).$$

Нам остается объяснить отмеченное восклицательным знаком равенство. Но именно оно было рассмотрено в примере 16 из § 2. ►

4. Некоторые примеры. Рассмотрим в заключение небольшую группу взаимосвязных примеров, в которых встречаются введенные здесь специальные функции B и Г.

Пример 1.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1}\varphi\,\cos^{\beta-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right). \tag{19}$$

◄ Для доказательства достаточно в интеграле сделать замену переменной $\sin^2\varphi = x$. ►

Используя формулу (18), интеграл (19) можно выразить через функцию Г. В частности, с учетом (17) получаем

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1}\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1}\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}. \tag{20}$$

Пример 2. Одномерный шар радиуса r — это попросту отрезок, а его (одномерный) объем $V_1(r)$ — это длина $2r$ такого отрезка. Итак, $V_1(r) = 2r$.

Если считать, что (($n-1$)-мерный) объем ($n-1$)-мерного шара радиуса r выражается формулой $V_{n-1}(r) = c_{n-1}r^{n-1}$, то, интегрируя по сечениям (см. пример 3 § 4 гл. XI), получаем

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} c_{n-1}(r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dx = \left(c_{n-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n\varphi\,d\varphi\right)\cdot r^n,$$

т. е. $V_n(r) = c_n r^n$, где

$$c_n = 2c_{n-1}\int_0^{\pi/2} \cos^n\varphi\,d\varphi.$$

Благодаря соотношениям (20), последнее равенство можно переписать в виде

$$c_n = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\,c_{n-1},$$

таким образом,

$$c_n = (\sqrt{\pi})^{n-1}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}\cdot c_1$$

или, короче,

$$c_n = \pi^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\,c_1.$$

Но $c_1 = 2$, а $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, поэтому

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

Следовательно,

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} r^n,$$

или, что то же самое,

$$V_n(r) = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^n. \tag{21}$$

Пример 3. Из геометрических соображений ясно, что $dV_n(r) = S_{n-1}(r)\,dr$, где $S_{n-1}(r)$ — $(n-1)$-мерная площадь сферы, ограничивающей в $\mathbb{R}^n$ n-мерный шар радиуса r.

Таким образом, $S_{n-1}(r) = \frac{dV_n}{dr}(r)$, и с учетом формулы (21) получаем

$$S_{n-1}(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1}.$$

Задачи и упражнения

1. Покажите, что:

a) $\mathrm{B}(1/2, 1/2) = \pi$,

b) $\mathrm{B}(\alpha, 1-\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx$,

c) $\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \ln x\,dx$,

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^p\,dx}{(a+bx^q)^r} = \frac{a^{-r}}{q}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p+1}{q}} \mathrm{B}\left(\frac{p+1}{q}, r-\frac{p+1}{q}\right)$,

e) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$,

f) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$,

g) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ $(0<\alpha<1)$,

h) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} \ln^n x}{1+x}\,dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}\right)$ $(0<\alpha<1)$,

i) Длина кривой, задаваемой в полярных координатах уравнением $r^n = a^n \cos n\varphi$, где $n \in \mathbb{N}$ и $a > 0$, выражается формулой $a\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right)$.

2. Покажите, что:

a) $\Gamma(1) = \Gamma(2)$;

b) производная Γ' функции Γ в некоторой точке $x_0 \in \,]1, 2[$ обращается в нуль;

c) функция Γ' является монотонно возрастающей на промежутке $]0, +\infty[$;

d) функция Γ монотонно убывает на промежутке $]0, x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0, +\infty[$;

e) интеграл $\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{u}\right)^{x-1} \ln \ln \frac{1}{u}\,du$ равен нулю при $x = x_0$;

f) $\Gamma(\alpha) \sim \dfrac{1}{\alpha}$ при $\alpha \to +0$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}\,dx = 1$.

3. *Формула Эйлера* $E := \prod\limits_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$.

a) Покажите, что $E^2 = \prod\limits_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\dfrac{k}{n}\right)\Gamma\left(\dfrac{n-k}{n}\right)$.

b) Проверьте, что $E^2 = \dfrac{\pi^{n-1}}{\sin\dfrac{\pi}{n}\sin 2\dfrac{\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin(n-1)\dfrac{\pi}{n}}$.

c) Исходя из тождества $\dfrac{z^n-1}{z-1} = \prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(z - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$, получите при $z \to 1$ последовательно соотношение

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right),$$

а из него соотношение

$$n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

d) Используя последнее равенство, получите формулу Эйлера.

4. *Формула Лежандра* $\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}}\Gamma(2\alpha)$.

a) Покажите, что $\mathrm{B}(\alpha, \alpha) = 2\int\limits_0^{1/2}\left(\dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{1}{2} - x\right)^2\right)^{\alpha-1} dx$.

b) Сделав в предыдущем интеграле замену переменной, докажите, что $\mathrm{B}(\alpha, \alpha) = \dfrac{1}{2^{2\alpha-1}}\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}, \alpha\right)$.

c) Получите теперь формулу Лежандра.

5. Сохраняя обозначения задачи 5 из § 1, укажите путь, на котором с использованием интегралов Эйлера может быть выполнена вторая, более деликатная часть указанной задачи.

a) Заметьте, что при $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ будет $\widetilde{k} = k$ и

$$\widetilde{E} = E = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad \widetilde{K} = K = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

b) После соответствующей замены переменных эти интегралы приводятся к виду, из которого следует, что при $k = 1/\sqrt{2}$

$$K = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}(1/4, 1/2) \quad \text{и} \quad 2E - K = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}(3/4, 1/2).$$

c) Теперь получается, что при $k = 1/\sqrt{2}$

$$E\widetilde{K} + \widetilde{E}K - K\widetilde{K} = \pi/2.$$

6. *Интеграл Раабе*[1] $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$.

Покажите, что:

a) $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,dx$,

b) $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$,

c) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx - \frac{\pi}{2}\ln 2$,

d) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$,

e) $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx = \ln\sqrt{2\pi}$.

7. Используя равенство

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^{+\infty} y^{s-1}e^{-xy}\,dy$$

и обосновав возможность изменения порядка соответствующих интегрирований, проверьте, что

a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^\alpha}\,dx = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$ $(0<\alpha<1)$;

b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\beta}\,dx = \frac{\pi b^{\beta-1}}{2\Gamma(\beta)\sin\frac{\pi\beta}{2}}$ $(0<\beta<2)$.

c) Получите теперь еще раз значение интеграла Дирихле $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ и значение интегралов Френеля $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$, $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$.

8. Покажите, что при $\alpha>1$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}\,dx = \Gamma(\alpha)\cdot\zeta(\alpha),$$

где $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ — *дзета-функция Римана*.

9. *Формула Гаусса*. В примере 6 § 3 гл. XVI была указана введенная Гауссом функция

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n,$$

являющаяся суммой написанного гипергеометрического ряда. Оказывается, имеет место следующая формула Гаусса:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\Gamma(\gamma)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

[1] Ж. Л. Раабе (1801—1859) — швейцарский математик и физик.

a) Раскладывая функцию $(1-tx)^{-\beta}$ в ряд, покажите, что при $\alpha>0$, $\gamma-\alpha>0$ и $0<x<1$ интеграл

$$P(x)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tx)^{-\beta}\,dt$$

можно представить в виде

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\cdot x^n,$$

где $P_n=\dfrac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!}\cdot\dfrac{\Gamma(\alpha+n)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)}$.

b) Покажите, что

$$P_n=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}.$$

c) Докажите теперь, что при $\alpha>0$, $\gamma-\alpha>0$ и $0<x<1$

$$P(x)=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}\cdot F(\alpha,\beta,\gamma,x).$$

d) При дополнительном условии $\gamma-\alpha-\beta>0$ обоснуйте возможность перехода к пределу при $x\to 1-0$ в обеих частях последнего равенства и покажите, что

$$\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)}=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,1),$$

откуда и следует формула Гаусса.

10. *Формула Стирлинга*[1].

Покажите, что:

a) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=2x\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{x^{2m}}{2m+1}$ при $|x|<1$,

b) $\left(n+\dfrac12\right)\ln\left(1+\dfrac1n\right)=1+\dfrac13\dfrac{1}{(2n+1)^2}+\dfrac15\dfrac{1}{(2n+1)^4}+\dfrac17\dfrac{1}{(2n+1)^6}+\ldots,$

c) $1<\left(n+\dfrac12\right)\ln\left(1+\dfrac1n\right)<1+\dfrac{1}{12n(n+1)}$ при $n\in\mathbb{N}$,

d) $1<\dfrac{\left(1+\dfrac1n\right)^{n+1/2}}{e}<\dfrac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}$,

e) $a_n=\dfrac{n!e^n}{n^{(n+1/2)}}$ — монотонно убывающая последовательность,

f) $b_n=a_ne^{-\frac{1}{12n}}$ — монотонно возрастающая последовательность,

g) $n!=cn^{n+1/2}e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$, где $0<\theta_n<1$, а $c=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,

h) Из соотношения $\sin\pi x=\pi x\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$ при $x=1/2$ вытекает формула Валлиса

$$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

---

[1] Дж. Стирлинг (1692—1770) — шотландский математик.

i) Имеет место *формула Стирлинга*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

j) $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$ при $x \to +\infty$.

11. Покажите, что $\Gamma(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \cdot \frac{1}{n!} + \int\limits_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Это соотношение позволяет определить $\Gamma(z)$ для комплексных $z \in \mathbb{C}$ вне точек $0, -1, -2, \ldots$

§ 4. Свертка функций и начальные сведения об обобщенных функциях

1. Свертка в физических задачах (наводящие соображения). Разнообразные приборы и системы живой и неживой природы осуществляют свои функции, отвечая соответствующим сигналом $\tilde{f}$ на воздействие f. Иными словами, каждый такой прибор или система является оператором A, преобразующим входной сигнал f в сигнал $\tilde{f} = Af$ на выходе. Разумеется, у каждого такого оператора своя область воспринимаемых сигналов (область определения) и своя форма ответа на них (область значений). Удобной математической моделью для большого класса реальных процессов и аппаратов является линейный оператор A, сохраняющий сдвиги.

Определение 1. Пусть A — линейный оператор, действующий на линейном пространстве определенных на $\mathbb{R}$ вещественно- или комплекснозначных функций. Обозначим через T_{t_0} *оператор сдвига*, действующий на том же пространстве по закону

$$(\mathrm{T}_{t_0} f)(t) := f(t - t_0).$$

Говорят, что оператор A *инвариантен относительно сдвигов* (или *сохраняет сдвиги*), если для любой функции f из области определения оператора A справедливо равенство

$$A(\mathrm{T}_{t_0} f) = \mathrm{T}_{t_0}(Af).$$

Если t — время, то соотношение $A \circ \mathrm{T}_{t_0} = \mathrm{T}_{t_0} \circ A$ можно трактовать как предположение о том, что свойства прибора A неизменны во времени: реакции прибора на сигналы $f(t)$ и $f(t-t_0)$ отличаются только сдвигом на t_0 по времени и больше ничем.

Для любого прибора A возникают две следующие основные задачи: во-первых, предугадать реакцию $\tilde{f}$ прибора на произвольное входное воздействие f и, во-вторых, зная сигнал $\tilde{f}$ на выходе прибора, определить, если это возможно, поступивший на прибор входной сигнал f.

Сейчас на эвристическом уровне мы решим первую из этих двух задач применительно к инвариантному относительно сдвигов линейному операто-

ру A. Простой, но очень важный факт состоит в том, что оказывается для описания отклика $\tilde{f}$ такого прибора A на любой входной сигнал f достаточно знать отклик E прибора A на импульсное воздействие δ.

Определение 2. Отклик $E(t)$ прибора A на единичное импульсное воздействие δ называют *аппаратной функцией прибора* (в оптике) или *импульсной переходной функцией прибора* (в электротехнике).

Мы будем, как правило, пользоваться более коротким термином «аппаратная функция».

Не вдаваясь пока в детали, скажем, что импульс имитируется, например, функцией $\delta_\alpha(t)$, изображенной на рис. 100, причем эта имитация считается все более точной по мере уменьшения длительности α «импульса» при сохранении его общей «энергии» $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$. Вместо ступенчатых функций для имитации импульса можно использовать гладкие функции (рис. 101) с соблюдением естественных условий:

$$f_\alpha \geqslant 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}} f_\alpha(t)\,dt = 1, \quad \int\limits_{U(0)} f_\alpha(t)\,dt \to 1 \text{ при } \alpha \to 0,$$

Рис. 100

где $U(0)$ — произвольная окрестность точки $t = 0$.

Откликом прибора A на идеальный единичный импульс (обозначаемый вслед за Дираком через δ) следует считать функцию $E(t)$, к которой стремятся отклики прибора A на имитирующие импульс δ входные сигналы по мере того, как эта имитация улучшается. Разумеется, при этом подразумевается некоторая (не уточняемая пока) непрерывность оператора A, т. е. непрерывность изменения отклика $\tilde{f}$ прибора при непрерывном изменении входного воздействия f.

Например, если взять последовательность $\{\Delta_n(t)\}$ ступенчатых функций $\Delta_n(t) := \delta_{1/n}(t)$ (рис. 100), то, полагая $A\Delta_n =: E_n$, получаем $A\delta := E = \lim\limits_{n\to\infty} E_n = \lim\limits_{n\to\infty} A\Delta_n$.

Рассмотрим теперь входной сигнал f, рис. 102 и изображенную на этом же рисунке кусочно постоянную функцию $l_h(t) = \sum\limits_i f(\tau_i)\delta_h(t - \tau_i)h$.

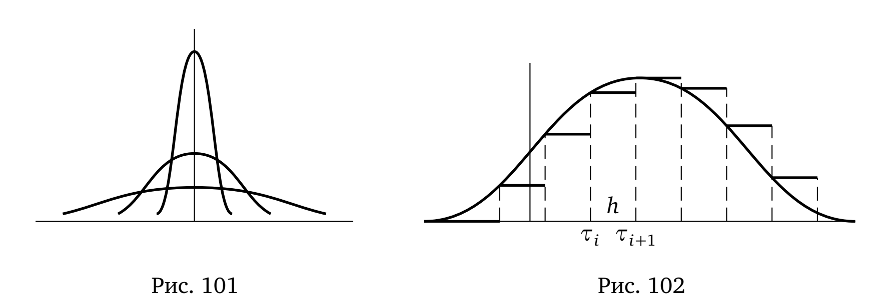


Рис. 101 Рис. 102

Поскольку $l_h \to f$ при $h \to 0$, то надо считать, что

$$\tilde{l}_h = Al_h \to Af = \tilde{f} \quad \text{при } h \to 0.$$

Но если оператор A — линейный и сохраняющий сдвиги, то

$$\tilde{l}_h(t) = \sum_i f(\tau_i)E_h(t-\tau_i)h,$$

где $E_h = A\delta_h$. Таким образом, при $h \to 0$ окончательно получаем

$$\tilde{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)E(t-\tau)\,d\tau. \tag{1}$$

Формула (1) решает первую из двух указанных выше задач. Она представляет отклик $\tilde{f}(t)$ прибора A в виде специального интеграла, зависящего от параметра t. Этот интеграл полностью определяется входным сигналом $f(t)$ и аппаратной функцией $E(t)$ прибора A. С математической точки зрения прибор A и интеграл (1) просто одно и то же.

Отметим заодно, что задача определения входного сигнала по выходу $\tilde{f}$ сводится теперь к решению относительно f интегрального уравнения (1).

Определение 3. *Сверткой функций* $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *и* $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется функция $u * v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, определяемая соотношением

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}} u(y)v(x-y)\,dy, \tag{2}$$

в предположении, что указанный несобственный интеграл существует при всех $x \in \mathbb{R}$.

Таким образом, формула (1) утверждает, что отклик линейного прибора A, сохраняющего сдвиги, на входное воздействие, задаваемое функцией f, является сверткой $f * E$ функции f и аппаратной функции E прибора A.

2. Некоторые общие свойства свертки. Рассмотрим теперь с математической точки зрения основные свойства свертки.

a. Достаточные условия существования. Напомним сначала некоторые определения и обозначения.

Пусть $f\colon G \to \mathbb{C}$ — вещественно или комплекснозначная функция, определенная на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}$.

Функция f называется *локально интегрируемой на* G, если любая точка $x \in G$ имеет окрестность $U(x) \subset G$, в которой функция $f|_{U(x)}$ интегрируема. В частности, если $G = \mathbb{R}$, условие локальной интегрируемости функции f, очевидно, равносильно тому, что $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}[a,b]$ для любого отрезка $[a,b]$.

Носителем функции f (обозначение $\operatorname{supp} f$) называется замыкание в G множества $\{x \in G \mid f(x) \neq 0\}$.

Функция f называется *финитной* (в G), если ее носитель — компакт.

Множество функций $f\colon G \to \mathbb{C}$, имеющих в G непрерывные производные до порядка m $(0 \leqslant m \leqslant \infty)$ включительно, принято обозначать символом

$C^{(m)}(G)$, а его подмножество, состоящее из финитных функций, символом $C_0^{(m)}(G)$. В случае, когда $G=\mathbb{R}$, вместо $C^{(m)}(\mathbb{R})$ и $C_0^{(m)}(\mathbb{R})$ принято употреблять сокращения $C^{(m)}$ и $C_0^{(m)}$ соответственно.

Укажем теперь наиболее часто встречающиеся случаи свертки функций, в которых без труда обосновывается ее существование.

Утверждение 1. *Каждое из перечисленных ниже трех условий является достаточным для существования свертки $u*v$ локально интегрируемых функций $u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ и $v:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.*

1) *Функции $|u|^2$ и $|v|^2$ интегрируемы на $\mathbb{R}$.*

2) *Одна из функций $|u|$, $|v|$ интегрируема на $\mathbb{R}$, а другая ограничена на $\mathbb{R}$.*

3) *Одна из функций u, v финитна.*

◄ 1) По неравенству Коши — Буняковского

$$\Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}} |u(y)v(x-y)|\,dy\Bigr)^2 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |u|^2(y)\,dy \int\limits_{\mathbb{R}} |v|^2(x-y)\,dy,$$

откуда и следует существование интеграла (2), поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v|^2(x-y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v|^2(y)\,dy.$$

2) Если, например, $|u|$ — интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, а $|v|\leqslant M$ на $\mathbb{R}$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |u(y)v(x-y)|\,dy \leqslant M\int\limits_{\mathbb{R}} |u|(y)\,dy < +\infty.$$

3) Пусть $\operatorname{supp} u\subset[a,b]\subset\mathbb{R}$. Тогда, очевидно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u(y)v(x-y)\,dy = \int\limits_a^b u(y)v(x-y)\,dy.$$

Поскольку u и v локально интегрируемы, последний интеграл существует при любом значении $x\in\mathbb{R}$.

Случай, когда финитной является функция v, сводится к разобранному заменой переменной $x-y=z$. ►

b. Симметричность

Утверждение 2. *Если свертка $u*v$ существует, то существует также свертка $v*u$ и имеет место равенство*

$$u*v=v*u. \tag{3}$$

◄ Выполнив в интеграле (2) замену переменной $x-y=z$, получаем

$$u*v(x):=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(y)v(x-y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(z)u(x-z)\,dz =: v*u(x). \ ►$$

c. Сохранение сдвигов. Пусть, как и выше, T_{x_0} — оператор сдвига, т. е. $(\mathrm{T}_{x_0})f(x)=f(x-x_0)$.

Утверждение 3. *Если свертка $u*v$ функций u и v существует, то справедливы следующие равенства*:

$$\mathrm{T}_{x_0}(u*v)=\mathrm{T}_{x_0}u*v=u*\mathrm{T}_{x_0}v. \tag{4}$$

◄ Если вспомнить физический смысл формулы (1), то первое из написанных равенств становится очевидным, а второе тогда получается из симметричности свертки. Проведем, однако, формальную проверку первого равенства:

$$(\mathrm{T}_{x_0})(u*v)(x):=(u*v)(x-x_0):=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)v(x-x_0-y)\,dy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y-x_0)v(x-y)\,dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{T}_{x_0}u)(y)v(x-y)\,dy=:((\mathrm{T}_{x_0}u)*v)(x). \ ►$$

d. Дифференцирование свертки. Свертка функций является интегралом, зависящим от параметра, и ее дифференцирование проводится в соответствии с общими законами дифференцирования таких интегралов, разумеется, при выполнении соответствующих условий.

Условия, при которых свертка (2) функций u и v непрерывно дифференцируема, заведомо выполнены, если, например, u — непрерывная, а v — гладкая функция и одна из функций u, v — финитна.

◄ Действительно, если ограничить изменение параметра любым конечным промежутком, то при указанных условиях весь интеграл (2) сведется к интегралу по некоторому, не зависящему от x, конечному отрезку. А такой интеграл уже можно дифференцировать по параметру в соответствии с классическим правилом Лейбница. ►

Вообще справедливо следующее

Утверждение 4. *Если u — локально интегрируемая функция, а v — финитная функция класса $C_0^{(m)}$ $(0\leqslant m\leqslant+\infty)$, то $(u*v)\in C^{(m)}$, причем*[1]

$$D^k(u*v)=u*(D^kv). \tag{5}$$

◄ Когда u — непрерывная функция, утверждение непосредственно следует из только что доказанного выше. В общем виде оно получается, если еще принять во внимание наблюдение, сделанное в задаче 6 § 1. ►

Замечание 1. Ввиду коммутативности свертки (формула (3)) утверждение 4, разумеется, останется в силе, если в нем поменять местами u и v, сохранив, однако, левую часть равенства (5).

Формула (5) показывает, что свертка коммутирует с оператором дифференцирования, подобно тому как она коммутирует с оператором сдвига

[1]Здесь D — оператор дифференцирования и, как обычно, $D^kv=v^{(k)}$.

(формула (4)). Но если формула (4) симметрична по u и v, то в правой части формулы (5) u и v, вообще говоря, нельзя поменять местами, поскольку функция u может просто не иметь соответствующей производной. То, что свертка $u*v$, как видно из (5), при этом все же может оказаться дифференцируемой функцией, наводит на мысль, что приведенные в утверждении 4 условия являются достаточными, но не необходимыми для дифференцируемости свертки.

Пример 1. Пусть f — локально интегрируемая функция, а δ_α — «ступенька», изображенная на рис. 100. Тогда

$$(f*\delta_\alpha)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\delta_\alpha(x-y)\,dy = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{x-\alpha}^{x} f(y)\,dy, \tag{6}$$

и, следовательно, если функция f непрерывна в точках x и $x-\alpha$, свертка $f*\delta_\alpha$ уже оказывается дифференцируемой в x — усредняющее действие интеграла.

Условия дифференцируемости свертки, сформулированные в утверждении 4, являются, однако, вполне достаточными практически для всех встречающихся случаев применения формулы (5). По этой причине мы не будем здесь заниматься дальнейшим их уточнением, а предпочтем продемонстрировать некоторые новые красивые возможности, которые открываются благодаря обнаруженному сглаживающему действию свертки.

3. Дельтаобразные семейства функций и аппроксимационная теорема Вейерштрасса. Заметим, что интеграл в соотношении (6) дает среднее значение функции f на промежутке $[x-\alpha, x]$, поэтому, если f непрерывна в точке x, то, очевидно, $(f*\delta_\alpha)(x)\to f(x)$ при $\alpha\to 0$. Последнее соотношение, следуя наводящим соображениям п. 1, относящимся к представлению о δ-функции, хотелось бы записать в виде предельного равенства

$$(f*\delta)(x) = f(x), \quad \text{если } f \text{ непрерывна в } x. \tag{7}$$

Это равенство показывает, что δ-функцию можно трактовать как единичный (нейтральный) элемент по отношению к операции свертки. Равенство (7) можно считать вполне осмысленным, если будет показано, что любое семейство функций, сходящихся к δ-функции, обладает тем же свойством, что и рассмотренное в (6) специальное семейство δ_α.

Перейдем к точным формулировкам и введем следующее полезное

Определение 4. Семейство $\{\Delta_\alpha;\ \alpha\in A\}$ функций $\Delta_\alpha\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, зависящих от параметра $\alpha\in A$, называют *δ-образным* или *аппроксимативной единицей* при базе $\mathcal{B}$ в A, если выполнены следующие три условия:

a) все функции семейства неотрицательны ($\Delta_\alpha(x)\geqslant 0$);

b) для любой функции Δ_α семейства $\int\limits_{\mathbb{R}} \Delta_\alpha(x)\,dx = 1$;

c) для любой окрестности U точки $0\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_U \Delta_\alpha(x)\,dx = 1$.

Последнее условие с учетом первых двух, очевидно, равносильно тому, что $\lim\limits_{\mathscr{B}} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus U} \Delta_\alpha(x)\,dx = 0$.

Рассмотренное в п. 1 и примере 1 исходное семейство «ступенек» δ_α, конечно, является δ-образным при $\alpha \to 0$. Приведем другие примеры δ-образных семейств функций.

Пример 2. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная неотрицательная интегрируемая на $\mathbb{R}$ финитная функция такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$. При $\alpha > 0$ построим функции $\Delta_\alpha(x) := \frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Семейство этих функций при $\alpha \to +0$, очевидно, является аппроксимативной единицей (см. рис. 101).

Пример 3. Рассмотрим последовательность функций

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-x^2)^n}{\int\limits_{|x|<1} (1-x^2)^n\,dx} & \text{при } |x| \leqslant 1,\\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Для того, чтобы установить δ-образность этой последовательности, надо лишь проверить, что кроме условий a), b) для нее при базе $n \to \infty$ выполнено и условие c) определения 4. Но ведь при любом $\varepsilon \in]0, 1]$

$$0 \leqslant \int\limits_\varepsilon^1 (1-x^2)^n\,dx \leqslant \int\limits_\varepsilon^1 (1-\varepsilon^2)^n\,dx = (1-\varepsilon^2)^n(1-\varepsilon) \to 0, \quad \text{когда } n \to \infty.$$

Вместе с тем

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx > \int\limits_0^1 (1-x)^n\,dx = \frac{1}{n+1}.$$

Значит, условие c) действительно выполнено.

Пример 4. Пусть

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \cos^{2n}(x) \Big/ \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx & \text{при } |x| \leqslant \pi/2,\\ 0 & \text{при } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Как и в примере 3, здесь остается проверить лишь условие c). Заметим сначала, что

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n} > \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2n}.$$

С другой стороны, при $\varepsilon \in]0, \pi/2[$

$$\int\limits_\varepsilon^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx \leqslant \int\limits_\varepsilon^{\pi/2} \cos^{2n} \varepsilon\,dx < \frac{\pi}{2}(\cos\varepsilon)^{2n}.$$

Сопоставляя полученные неравенства, заключаем, что, каково бы ни было число $\varepsilon \in]0, \pi/2]$,

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \Delta_n(x)\,dx \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

откуда и следует, что условие c) определения 4 выполнено.

Определение 5. Будем говорить, что функция $f: G \to \mathbb{C}$ *равномерно непрерывна на множестве* $E \subset G$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\rho > 0$ такое, что при любом $x \in E$ и любом $y \in G$ из ρ-окрестности $U_G^\rho(x)$ точки x в G выполнено соотношение $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

В частности, если $E = G$, мы возвращаемся к определению функции, равномерно непрерывной на всей своей области определения.

Теперь докажем следующее основное

Утверждение 5. *Пусть* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — *ограниченная функция, а* $\{\Delta_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — δ*-образное семейство функций при* $\alpha \to \omega$. *Если при любом* $\alpha \in A$ *свертка* $f * \Delta_\alpha$ *существует и функция* f *равномерно непрерывна на множестве* $E \subset \mathbb{R}$, *то*

$$(f * \Delta_\alpha)(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } E \text{ при } \alpha \to \omega.$$

Итак, утверждается, что семейство функций $f * \Delta_\alpha$ равномерно сходится к функции f на множестве E ее равномерной непрерывности. В частности, если E состоит только из одной точки x, условие равномерной непрерывности f на E сводится к условию непрерывности функции f в точке x, и мы получаем, что $(f * \Delta_\alpha)(x) \to f(x)$ при $\alpha \to \omega$. Это и послужило нам в свое время поводом для записи соотношения (7).

Докажем утверждение 5.

◄ Пусть $|f(x)| \leqslant M$ на $\mathbb{R}$. По числу $\varepsilon > 0$ подберем в соответствии с определением 5 число $\rho > 0$ и обозначим через $U(0)$ ρ-окрестность нуля в $\mathbb{R}$.

Учитывая симметричность свертки, получаем следующие оценки, справедливые одновременно для всех точек $x \in E$:

$$\begin{aligned}
&|(f * \Delta_\alpha)(x) - f(x)| = \\
&\quad = \Big|\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\Delta_\alpha(y)\,dy - f(x)\Big| = \Big|\int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x))\Delta_\alpha(y)\,dy\Big| \leqslant \\
&\quad \leqslant \int_{U(0)} |f(x-y) - f(x)|\Delta_\alpha(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}\setminus U(0)} |f(x-y) - f(x)|\Delta_\alpha(y)\,dy < \\
&\quad < \varepsilon \int_{U(0)} \Delta_\alpha(y)\,dy + 2M \int_{\mathbb{R}\setminus U(0)} \Delta_\alpha(y)\,dy \leqslant \varepsilon + 2M \int_{\mathbb{R}\setminus U(0)} \Delta_\alpha(y)\,dy.
\end{aligned}$$

При $\alpha \to \omega$ последний интеграл стремится к нулю, значит, начиная с какого-то момента, при всех $x \in E$ будет выполнено неравенство

$$|(f * \Delta_\alpha)(x) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

что и завершает доказательство утверждения 5. ►

Следствие 1. *Любую финитную непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию можно равномерно аппроксимировать финитными бесконечно дифференцируемыми функциями.*

◄ Проверим, что в указанном смысле $C_0^{(\infty)}$ всюду плотно в C_0.

Пусть, например,

$$\varphi(x) = \begin{cases} k \cdot \exp\Big(-\dfrac{1}{1-x^2}\Big) & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

где коэффициент k выбран так, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$.

Функция φ финитна и бесконечно дифференцируема. В таком случае семейство бесконечно дифференцируемых функций $\Delta_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\varphi\Big(\dfrac{x}{\alpha}\Big)$, как отмечалось в примере 2, является δ-образным при $\alpha \to +0$. Если $f \in C_0$, то ясно, что и $f * \Delta_\alpha \in C_0$. Кроме того, по утверждению 4 $f * \Delta_\alpha \in C_0^{(\infty)}$. Наконец, из утверждения 5 вытекает, что $f * \Delta_\alpha \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}$ при $\alpha \to +0$. ►

Замечание 2. Если рассматриваемая функция $f \in C_0$ принадлежит классу $C_0^{(m)}$, то, каково бы ни было значение $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$, можно гарантировать, что $(f * \Delta_\alpha)^{(n)} \rightrightarrows f^{(n)}$ на $\mathbb{R}$ при $\alpha \to +0$.

◄ Действительно, в этом случае $(f * \Delta_\alpha)^{(n)} = f^{(n)} * \Delta_\alpha$ (см. утверждение 4 и замечание 1). Остается сослаться на доказанное следствие 1. ►

Следствие 2 (аппроксимационная теорема Вейерштрасса). *Каждую непрерывную на отрезке функцию можно равномерно приблизить на этом отрезке алгебраическим многочленом.*

◄ Поскольку при линейной замене переменной многочлен переходит в многочлен, а непрерывность и равномерность аппроксимации функций сохраняются, следствие 2 достаточно проверить на любом удобном нам отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Будем поэтому считать, что $0 < a < b < 1$, и пусть $\rho = \min\{a, 1-b\}$. Заданную нам функцию $f \in C[a, b]$ продолжим до непрерывной на $\mathbb{R}$ функции F, полагая $F(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus]0, 1[$ и, например, линейно сопрягая 0 с $f(a)$, $f(b)$ с 0 на участках $[0, a]$ и $[b, 1]$ соответственно.

Если теперь взять δ-образную последовательность функций Δ_n, из примера 3, то на основании утверждения 5 уже можно заключить, что $F * \Delta_n \rightrightarrows$ $\rightrightarrows f = F|_{[a,b]}$ на $[a, b]$ при $n \to \infty$. Но при $x \in [a, b] \subset [0, 1]$

$$F * \Delta_n(x) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(y)\Delta_n(x-y)\,dy = \int\limits_0^1 F(y)\Delta_n(x-y)\,dy =$$
$$= \int\limits_0^1 F(y)p_n \cdot (1-(x-y)^2)^n\,dy = \int\limits_0^1 F(y)\Big(\sum_{k=0}^{2n} a_k(y)x^k\Big)\,dy =$$
$$= \sum_{k=0}^{2n}\Big(\int\limits_0^1 F(y)a_k(y)\,dy\Big)x^k.$$

Последнее выражение является многочленом $P_{2n}(x)$ степени $2n$, и мы показали, что $P_{2n} \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ при $n\to\infty$. ►

Замечание 3. Несколько развив проведенные рассуждения, можно показать, что теорема Вейерштрасса остается в силе, даже если отрезок $[a,b]$ заменить произвольным, лежащим в $\mathbb{R}$ компактом.

Замечание 4. Нетрудно также проверить, что для любого открытого в $\mathbb{R}$ множества G и любой функции $f\in C^{(m)}(G)$ существует последовательность $\{P_k\}$ полиномов такая, что при каждом $n\in\{0, 1, \dots, m\}$ $P_k^{(n)} \rightrightarrows f^{(n)}$ на любом компакте $K\subset G$, когда $k\to\infty$.

Если, кроме того, множество G ограничено и $f\in C^{(m)}(\overline{G})$, то можно добиться, чтобы $P_k^{(n)} \rightrightarrows f^{(n)}$ на $\overline{G}$ при $k\to\infty$.

Замечание 5. Подобно тому, как для доказательства следствия 2 была использована δ-образная последовательность примера 3, можно использовать последовательность из примера 4 и доказать, что любая 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$ равномерно приближается тригонометрическими полиномами вида

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx.$$

Выше использовались лишь δ-образные семейства финитных функций. Следует, однако, иметь в виду, что во многих случаях важную роль играют δ-образные семейства не финитных функций. Приведем только два примера.

Пример 5. Семейство функций $\Delta_y(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$ при $y\to+0$ является δ-образным на $\mathbb{R}$, так как $\Delta_y>0$ при $y>0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_y(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x}{y}\Big)\Big|_{x=-\infty}^{+\infty}=1$$

и при любом $\rho>0$ справедливо соотношение

$$\int_{-\rho}^{\rho}\Delta_y(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\rho}{y}\to 1,$$

когда $y\to+0$.

Если $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывная и ограниченная функция, то функция

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi)y}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi, \tag{8}$$

представляющая собой свертку $f*\Delta_y$, определена при любых $x\in\mathbb{R}$ и $y>0$.

Интеграл (8), называемый *интегралом Пуассона для полуплоскости*, как легко проверить (используя мажорантный признак равномерной сходимости), является ограниченной бесконечно дифференцируемой функцией в по-

луплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Дифференцируя под знаком интеграла, убеждаемся, что при $y > 0$

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f * \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Delta_y = 0,$$

т. е. u — гармоническая функция.

На основании утверждения 5 можно гарантировать также сходимость $u(x, y)$ к $f(x)$ при $y \to 0$. Таким образом, интеграл (8) решает задачу построения ограниченной функции, гармонической в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ и принимающей заданные граничные значения f на $\partial\mathbb{R}^2_+$.

Пример 6. Семейство функций $\Delta_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ является δ-образным на $\mathbb{R}$ при $t \to +0$. Действительно, $\Delta_t(x) > 0$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t(x) = 1$, поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\, dv = \sqrt{\pi}$ (интеграл Эйлера—Пуассона); наконец, при любом $\rho > 0$ выполнено соотношение

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\rho/2\sqrt{t}}^{\rho/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\, dv \to 1, \quad \text{когда } t \to +0.$$

Если f — непрерывная и, например, ограниченная функция на $\mathbb{R}$, то функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi, \tag{9}$$

представляющая собой свертку $f * \Delta_t$, очевидно, бесконечно дифференцируема при $t > 0$.

Дифференцируя под знаком интеграла при $t > 0$, получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f * \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Delta_t = 0,$$

т. е. функция u удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности с начальным условием $u(x, 0) = f(x)$. Последнее равенство следует трактовать как предельное соотношение $u(x, t) \to f(x)$ при $t \to +0$, вытекающее из утверждения 5.

*** 4. Начальные представления о распределениях.**

a. Определение обобщенных функций. В п. 1 настоящего параграфа мы на эвристическом уровне вывели формулу (1), дающую возможность определить отклик линейного преобразователя A на входной сигнал f по известной аппаратной функции E прибора A. При определении аппаратной функции прибора существенно использовалось некоторое интуитивное представление о единичном импульсном воздействии и описывающей его δ-функции. Ясно, однако, что δ-функция на самом-то деле не является

функцией в классическом понимании этого термина, поскольку она должна обладать следующим противоречивым с классической точки зрения набором свойств: $\delta(x) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$; $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$; $\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx = 1$.

Понятия, связанные с линейными операторами, сверткой, δ-функцией и аппаратной функцией прибора приобретают точные математические описания в так называемой теории обобщенных функций или, иначе, теории распределений. Исходные посылки этой теории и начальные сведения о все шире используемом ее аппарате мы собираемся сейчас изложить.

Пример 7. Рассмотрим материальную точку массы m, способную перемещаться вдоль оси и связанную с началом координат упругой пружиной; k — коэффициент упругости пружины. На покоящуюся в начале координат точку начинает действовать зависящая от времени сила $f(t)$, смещающая точку вдоль оси. В силу закона Ньютона

$$m\ddot{x} + kx = f, \tag{10}$$

где $x(t)$ — координата точки (смещение от положения равновесия) в момент t.

При указанных условиях функция $x(t)$ однозначно определяется функцией f и решение $x(t)$ дифференциального уравнения (10), очевидно, линейно зависит от его правой части f. Таким образом, мы имеем дело с линейным оператором $f \overset{A}{\longmapsto} x$, обратным к дифференциальному оператору $x \overset{B}{\longmapsto} f$ $\left(B = \frac{d^2}{dt^2} + k\right)$, связывающему $x(t)$ и $f(t)$ соотношением $Bx = f$. Поскольку оператор A, очевидно, сохраняет сдвиги по времени, то, чтобы найти отклик $x(t)$ описанной механической системы на функцию $f(t)$, достаточно ввиду формулы (1) знать отклик на единичное импульсное воздействие δ, т. е. достаточно знать (так называемое *фундаментальное*) решение E уравнения

$$m\ddot{E} + kE = \delta. \tag{11}$$

Соотношение (11) не вызвало бы вопроса, если бы δ действительно обозначало функцию. Однако пока равенство (11) неясно. Но формально неясно и фактически неверно — совсем разные ситуации. В нашем случае надо лишь уяснить смысл равенства (11).

Один путь к такому разъяснению нам уже знаком: δ можно понимать как имитирующее δ-функцию δ-образное семейство классических функций $\Delta_\alpha(t)$, а E — как предел, к которому стремятся решения $E_\alpha(t)$ уравнения

$$m\ddot{E}_\alpha + kE_\alpha = \Delta_\alpha \tag{10$'$}$$

при соответствующем изменении параметра α.

Другой, имеющий свои значительные преимущества, подход к обсуждаемому вопросу состоит в принципиальном расширении представления о функции. Он исходит из того, что вообще объекты наблюдения характеризуются их взаимодействием с другими («пробными») объектами. Так

и функцию предлагается рассматривать не как набор значений в различных точках, а как объект, способный определенным образом действовать на другие (пробные) функции. Конкретизируем это пока слишком общее высказывание.

Пример 8. Пусть $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. В качестве пробных возьмем функции класса C_0 (непрерывные финитные на $\mathbb{R}$). Функция f порождает следующий, действующий на C_0 функционал

$$\langle f, \varphi \rangle := \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{12}$$

Используя δ-образные семейства финитных функций, легко понять, что $\langle f, \varphi \rangle \equiv 0$ на C_0 в том и только в том случае, когда $f(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$.

Таким образом, каждая функция $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ порождает в силу (12) линейный функционал $A\colon C_0 \to \mathbb{R}$, и, подчеркнем, при этом различным функциям f_1, f_2 соответствуют различные функционалы A_{f_1}, A_{f_2}.

Значит, формула (12) осуществляет вложение (инъективное отображение) множества $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ функций в множество $\mathscr{L}(C_0; \mathbb{R})$ линейных функционалов на C_0 и, следовательно, каждую функцию $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ можно интерпретировать как некоторый функционал $A_f \in \mathscr{L}(C_0; \mathbb{R})$.

Если вместо множества $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ непрерывных функций рассмотреть множество функций, локально интегрируемых на $\mathbb{R}$, то по той же формуле (12) получается отображение указанного множества в пространство $\mathscr{L}(C_0; \mathbb{R})$. При этом $(\langle f, \varphi \rangle \equiv 0$ на $C_0) \iff (f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции f на $\mathbb{R}$, т. е. $f(x) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R})$. Значит, в рассматриваемом случае получается вложение в $\mathscr{L}(C_0; \mathbb{R})$ классов эквивалентных функций, если в один класс отнести локально интегрируемые функции, отличающиеся лишь на множестве меры нуль.

Итак, локально интегрируемые на $\mathbb{R}$ функции f (точнее, классы их эквивалентности) в силу формулы (12) можно интерпретировать как линейные функционалы $A_f \in \mathscr{L}(C_0; \mathbb{R})$. Осуществляемое по формуле (12) отображение $f \mapsto A_f = \langle f, \cdot \rangle$ локально интегрируемых функций в пространство $\mathscr{L}(C_0; \mathbb{R})$ не является отображением на все $\mathscr{L}(C_0; \mathbb{R})$, поэтому, интерпретируя функции как элементы $\mathscr{L}(C_0; \mathbb{R})$ (т. е. как функционалы), мы, кроме классических функций, интерпретируемых как функционалы вида (12), получим и новые функции (функционалы), не имеющие прообраза в классических функциях.

Пример 9. *Функционал* $\delta \in \mathscr{L}(C_0; \mathbb{R})$ определяется соотношением

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \delta(\varphi) := \varphi(0), \tag{13}$$

которое должно быть выполнено для любой функции $\varphi \in C_0$.

Можно проверить (см. задачу 7), что никакая локально интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция f не способна представить функционал δ в виде (12).

Итак, мы вложили множество классических локально интегрируемых функций в более широкое множество линейных функционалов. Эти ли-

нейные функционалы и называют обобщенными функциями или распределениями (точное определение дано ниже). Распространенный термин «распределение» имеет физическое происхождение.

Пример 10. Пусть на $\mathbb{R}$ распределена единичная масса (или единичный заряд). Если это распределение достаточно регулярно, в том смысле, что оно имеет, например, непрерывную или интегрируемую на $\mathbb{R}$ плотность $\rho(x)$, то взаимодействие массы M с другими объектами, описываемыми функциями $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, может задаваться в виде функционала

$$M(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x)\varphi(x)\,dx.$$

Если распределение сингулярно, например, вся масса M сосредоточена в одной точке, то, «размазывая» массу и интерпретируя предельную точечную ситуацию с помощью δ-образного семейства регулярных распределений, получаем, что взаимодействие массы M с указанными выше другими объектами должно выражаться формулой

$$M(\varphi) = \varphi(0),$$

показывающей, что такое распределение массы на $\mathbb{R}$ следует отождествить с δ-функцией (13) на $\mathbb{R}$.

Проведенные предварительные рассмотрения делают осмысленным следующее общее

Определение 6. Пусть P — линейное пространство функций, называемое в дальнейшем *пространством основных* или *пробных функций* с определенной в P сходимостью функций.

Пространством обобщенных функций или *распределений* над P назовем линейное пространство P' линейных непрерывных (вещественно- или комплекснозначных) функционалов на P. При этом предполагается, что каждый элемент $f \in P$ порождает некоторый функционал $A_f = \langle f, \cdot \rangle \in P'$ и что отображение $f \to A_f$ является непрерывным вложением P в P', если сходимость в P' вводится как *слабая* («поточечная») *сходимость функционалов*, т. е.

$$P' \ni A_n \to A \in P' := \forall \varphi \in P \ (A_n(\varphi) \to A(\varphi)).$$

Уточним это определение в конкретном случае, когда P есть линейное пространство $C_0^{(\infty)}(G, \mathbb{C})$ бесконечно дифференцируемых финитных в G функций, где G — произвольное открытое подмножество $\mathbb{R}$ (быть может, и совпадающее с $\mathbb{R}$).

Определение 7 (пространств $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$). *Сходимость в* $C_0^{(\infty)}(G, \mathbb{C})$ введем следующим образом: последовательность $\{\varphi_n\}$ функций $\varphi_n \in C_0^{(\infty)}(G, \mathbb{C})$ будет считаться сходящейся к функции $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G, \mathbb{C})$, если существует компакт $K \subset G$, в котором содержатся носители всех функций последовательности $\{\varphi_n\}$ и при любом значении $m = 0, 1, 2, \ldots$ $\varphi_n^{(m)} \rightrightarrows \varphi^{(m)}$ на K (а значит, и на G), когда $n \to \infty$.

Получаемое при этом линейное пространство с заданной в нем сходимостью принято обозначать символом $\mathscr{D}(G)$, а когда $G = \mathbb{R}$ — символом $\mathscr{D}$.

Соответствующее этому пространству основных (пробных) функций пространство обобщенных функций (распределений) обозначают символом $\mathscr{D}'(G)$ или $\mathscr{D}'$ соответственно.

В этом и следующем параграфах мы не будем рассматривать никаких других обобщенных функций, кроме элементов введенного пространства $\mathscr{D}'(G)$, поэтому без специальных оговорок будем употреблять термин распределение или обобщенная функция, имея в виду элементы $\mathscr{D}'(G)$.

Определение 8. Распределение $F \in \mathscr{D}'(G)$ называется *регулярным*, если его можно представить в виде

$$F(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathscr{D}(G),$$

где f — локально интегрируемая в G функция.

Нерегулярные распределения называют *сингулярными распределениями* или *сингулярными обобщенными функциями*.

В соответствии с этим определением δ-функция (из примера 9) является сингулярной обобщенной функцией.

Действие обобщенной функции (распределения) F на основную (пробную) функцию φ, т. е. спаривание F и φ будем, как и прежде, обозначать одним из двух равнозначных символов $F(\varphi)$ или $\langle F, \varphi \rangle$.

Прежде чем переходить к техническому аппарату, связанному с обобщенными функциями, ради которого мы и привели определение обобщенной функции, отметим, что само понятие обобщенной функции, как и большинство математических понятий, имело определенный период внутриутробного развития, когда оно лишь неявно зарождалось в трудах ряда математиков.

Физики, вслед за Дираком, уже в конце двадцатых — начале тридцатых годов активно использовали δ-функцию и оперировали с сингулярными обобщенными функциями, не смущаясь отсутствием должной математической теории.

В явном виде идея обобщенной функции была высказана С. Л. Соболевым[1], заложившим в середине тридцатых годов математические основы теории обобщенных функций. Современное состояние аппарата теории распределений в значительной степени связано с выполненными в конце сороковых годов работами Л. Шварца[2]. Сказанное поясняет, почему, например, пространство $\mathscr{D}'$ обобщенных функций часто называют *пространством обобщенных функций Соболева—Шварца*.

---

[1]С. Л. Соболев (1908—1989) — один из наиболее крупных советских математиков.

[2]Л. Шварц (1915—2002) — известный французский математик. За упомянутые работы на Международном математическом конгрессе 1950 г. удостоен Филдсовской премии, присуждаемой молодым математикам.

Изложим теперь некоторые элементы аппарата теории распределений. Развитие и расширение использования этого аппарата продолжается и в наши дни, в основном в связи с потребностями теории дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, функционального анализа и их приложений.

Для упрощения записи мы будем рассматривать дальше только обобщенные функции класса $\mathcal{D}'$, хотя все их свойства, как будет видно из определений и доказательств, остаются в силе для распределений любого класса $\mathcal{D}'(G)$, где G — произвольное открытое подмножество $\mathbb{R}$.

Действия с распределениями определяются, исходя из интегральных соотношений, справедливых для классических функций, т. е. для регулярных обобщенных функций.

b. Умножение распределения на функцию. Если f — локально интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, а $g \in C^{(\infty)}$, то при любой функции $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, с одной стороны, $g\varphi \in C_0^{(\infty)}$, а с другой стороны, имеет место очевидное равенство

$$\int_{\mathbb{R}} (f \cdot g)(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)(g \cdot \varphi)(x)\,dx$$

или, в других обозначениях,

$$\langle f \cdot g, \varphi \rangle = \langle f, g \cdot \varphi \rangle.$$

Это соотношение, справедливое для регулярных обобщенных функций, лежит в основе следующего определения распределения $F \cdot g$, получаемого *умножением распределения $F \in \mathcal{D}'$ на функцию $g \in C^{(\infty)}$*:

$$\langle F \cdot g, \varphi \rangle := \langle F, g \cdot \varphi \rangle. \tag{14}$$

Правая часть равенства (14) определена, и тем самым задается значение функционала $F \cdot g$ на любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$, т. е. задается сам функционал $F \cdot g$.

Пример 11. Посмотрим, как действует распределение $\delta \cdot g$, где $g \in C^{(\infty)}$. В соответствии с определением (14) и определением распределения δ получаем

$$\langle \delta \cdot g, \varphi \rangle := \langle \delta, g \cdot \varphi \rangle := (g \cdot \varphi)(0) := g(0) \cdot \varphi(0).$$

c. Дифференцирование обобщенных функций. Если $f \in C^{(1)}$, а $\varphi \in C_0^{(\infty)}$, то интегрированием по частям получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx. \tag{15}$$

Это равенство является отправной точкой для следующего основного определения *дифференцирования обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'$*:

$$\langle F', \varphi \rangle := -\langle F, \varphi' \rangle. \tag{16}$$

Пример 12. Если $f \in C^{(1)}$, то производная от f в классическом смысле совпадает с производной от f в смысле теории распределений (разумеется, если, как всегда, отождествлять классическую функцию с соответствующей ей регулярной обобщенной функцией). Это следует из сопоставления соотношений (15) и (16), в которых правые части совпадают, если распределение F порождается функцией f.

Пример 13. Возьмем *функцию Хевисайда*[1]

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 0, \end{cases}$$

называемую иногда *единичной ступенькой* и, рассматривая ее как обобщенную функцию, найдем производную H' этой разрывной в классическом смысле функции.

Из определения регулярной обобщенной функции H, отвечающей функции Хевисайда, и на основании соотношения (16) находим

$$\langle H', \varphi \rangle := -\langle H, \varphi' \rangle := -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0),$$

поскольку $\varphi \in C_0^{(\infty)}$. Таким образом, $\langle H', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$, какова бы ни была функция $\varphi \in C_0^{(\infty)}$. Значит, $H' = \delta$.

Пример 14. Вычислим $\langle \delta', \varphi \rangle$:

$$\langle \delta', \varphi \rangle := -\langle \delta, \varphi' \rangle := -\varphi'(0).$$

Естественно, что в теории обобщенных функций, как и в классическом случае, для определения высших производных полагают, что $F^{(n+1)} := (F^{(n)})'$.

Сопоставляя результаты последних двух примеров, можно, следовательно, записать, что

$$\langle H'', \varphi \rangle = -\varphi'(0).$$

Пример 15. Покажем, что $\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$.

◄ При $n = 0$ это — определение δ-функции.

Мы видели в примере 14, что написанное равенство справедливо и при $n = 1$.

Докажем его по индукции, считая, что для фиксированного значения $n \in \mathbb{N}$ оно уже установлено. Опираясь на определение (16), находим

$$\langle \delta^{(n+1)}, \varphi \rangle := \langle (\delta^{(n)})', \varphi \rangle := -\langle \delta^{(n)}, \varphi' \rangle = \\ = -(-1)^n (\varphi')^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \varphi^{(n+1)}(0). \ ►$$

---

[1] О. Хевисайд (1850—1925) — английский физик и инженер, разработавший на символическом уровне важный математический аппарат, который теперь называется *операционным исчислением*.

Пример 16. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ непрерывно дифференцируема при $x<0$ и при $x>0$, и пусть существуют односторонние пределы $f(-0)$, $f(+0)$ функции в точке 0. Обозначим через $\rfloor f(0)$ величину $f(+0)-f(-0)$ скачка функции в точке 0, а через f' и $\{f'\}$ соответственно производную функции f в смысле теории распределений и распределение, определяемое функцией, которая равна обычной производной от f при $x<0$ и $x>0$. При $x=0$ последняя функция не определена, но это и не важно для интеграла, которым она определяет регулярное распределение $\{f'\}$.

В примере 1 мы отмечали, что если $f\in C^{(1)}$, то $f'=\{f'\}$. Покажем, что в общем случае это не так, а справедлива следующая важная формула:

$$f'=\{f'\}+\rfloor f(0)\cdot\delta. \tag{17}$$

◄ Действительно,

$$\langle f',\varphi\rangle=-\langle f,\varphi'\rangle=-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx=-\left(\int\limits_{-\infty}^{0}+\int\limits_{0}^{+\infty}\right)(f(x)\varphi'(x))\,dx=$$

$$=-\left((f\cdot\varphi)(x)\Big|_{x=-\infty}^{0}-\int\limits_{-\infty}^{0} f'(x)\varphi(x)\,dx+(f\cdot\varphi)(x)\Big|_{0}^{+\infty}-\int\limits_{0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx\right)=$$

$$=\big(f(+0)-f(-0)\big)\varphi(0)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx=\langle\rfloor f(0)\cdot\delta,\varphi\rangle+\langle\{f'\},\varphi\rangle. \ ►$$

Если все производные до порядка m функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ на промежутках $x<0$ и $x>0$ существуют, непрерывны и имеют односторонние пределы при $x=0$, то, повторяя проведенное при выводе формулы (17) рассуждение, получим

$$f^{(m)}=\{f^{(m)}\}+\rfloor f(0)\cdot\delta^{(m-1)}+\rfloor f'(0)\cdot\delta^{(m-2)}+\ldots+\rfloor f^{(m-1)}(0)\cdot\delta. \tag{18}$$

Укажем теперь некоторые свойства операции дифференцирования обобщенных функций.

Утверждение 6. a) *Любая обобщенная функция $F\in\mathcal{D}'$ бесконечно дифференцируема.*

b) *Операция $D\colon\mathcal{D}'\to\mathcal{D}'$ дифференцирования линейна.*

c) *Если $F\in\mathcal{D}'$, $g\in C^{(\infty)}$, то $(F\cdot g)\in\mathcal{D}'$ и справедлива формула Лейбница*

$$(F\cdot g)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m} C_m^k F^{(k)}\cdot g^{(m-k)}.$$

d) *Операция $D\colon\mathcal{D}'\to\mathcal{D}'$ дифференцирования непрерывна.*

e) *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)=S(x)$, составленный из локально интегрируемых функций $f_k\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, сходится равномерно на каждом лежащем в $\mathbb{R}$ компакте, то в смысле обобщенных функций его можно дифференцировать почленно любое число раз, и получаемые при этом ряды будут сходиться в $\mathcal{D}'$.*

◄ a) $\langle F^{(m)}, \varphi\rangle := -\langle F^{(m-1)}, \varphi'\rangle := (-1)^m \langle F, \varphi^{(m)}\rangle$.

b) Очевидно.

c) Проверим формулу при $m=1$:

$$\langle (F\cdot g)', \varphi\rangle := -\langle Fg, \varphi'\rangle := -\langle F, g\cdot\varphi'\rangle = -\langle F, (g\cdot\varphi)' - g'\cdot\varphi\rangle = \\ = \langle F', g\varphi\rangle + \langle F, g'\cdot\varphi\rangle = \langle F'\cdot g, \varphi\rangle + \langle F\cdot g', \varphi\rangle = \langle F'\cdot g + F\cdot g', \varphi\rangle.$$

В общем случае формулу можно получить теперь методом индукции.

d) Пусть $F_m \to F$ в $\mathcal{D}'$ при $m\to\infty$, т. е. для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}\langle F_m, \varphi\rangle \to \to \langle F, \varphi\rangle$ при $m\to\infty$. Тогда

$$\langle F'_m, \varphi\rangle := -\langle F_m, \varphi'\rangle \to -\langle F, \varphi'\rangle =: \langle F', \varphi\rangle.$$

e) При указанных условиях сумма $S(x)$ ряда как равномерный на компактах предел локально интегрируемых функций $S_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x)$ сама является локально интегрируемой. Остается заметить, что для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}$ (т. е. финитной и бесконечно дифференцируемой) имеет место соотношение

$$\langle S_m, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} S_m(x)\varphi\,dx \to \int\limits_{\mathbb{R}} S(x)\varphi(x)\,dx = \langle S, \varphi\rangle.$$

Теперь на основании доказанного в d) заключаем, что $S'_m \to S'$ при $m\to\infty$. ►

Мы видим, что, сохраняя важнейшие свойства классического дифференцирования, операция дифференцирования обобщенных функций приобретает ряд новых замечательных свойств, открывающих большую оперативную свободу, которой не было в классическом случае из-за наличия там недифференцируемых функций и неустойчивости (отсутствия непрерывности) классического дифференцирования относительно предельных переходов.

d. Фундаментальное решение и свертка. Мы начали этот пункт с интуитивных представлений о единичном импульсе и аппаратной функции прибора. В примере 7 была указана простейшая механическая система, которая естественным образом порождает линейный оператор, сохраняющий сдвиги по времени. Рассматривая ее, мы пришли к уравнению (11), которому должна удовлетворять аппаратная функция E этого оператора.

Мы закончим пункт, снова вернувшись к этим вопросам, но теперь с целью продемонстрировать их адекватное математическое описание на языке обобщенных функций.

Начнем с осмысления уравнения (11). В правой его части стоит обобщенная функция δ, поэтому соотношение (11) следует трактовать как равенство обобщенных функций. Поскольку нам известны операция дифференцирования обобщенных функций и линейные операции над распределениями, то левая часть уравнения (11) теперь тоже понятна, даже если ее трактовать в смысле обобщенных функций.

Попробуем решить уравнение (11).

При $t<0$ система находилась в покое. При $t=0$ точка получила единичный импульс, поэтому в момент $t=0$ она приобрела такую скорость $v=v(0)$, что $mv=1$. При $t>0$ на систему не действуют внешние силы и ее закон движения $x=x(t)$ подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению

$$m\ddot{x}+kx=0, \tag{19}$$

которое следует решать при начальных данных $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=v=1/m$.

Такое решение единственно и немедленно выписывается:

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t, \quad t\geqslant 0.$$

Поскольку в нашем случае при $t<0$ система покоится, то можно заключить, что

$$E(t)=\frac{H(t)}{\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{20}$$

где H — функция Хевисайда (см. пример 13).

Проверим теперь, пользуясь законами дифференцирования обобщенных функций и результатами рассмотренных выше примеров, что задаваемая равенством (20) функция $E(t)$ удовлетворяет уравнению (11).

Для упрощения записи проверим, что функция

$$e(x)=H(x)\frac{\sin\omega x}{\omega} \tag{21}$$

удовлетворяет в смысле теории распределений уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)e=\delta. \tag{22}$$

Действительно,

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega\right)e=\frac{d^2}{dx^2}\left(H\frac{\sin\omega x}{\omega}\right)+\omega^2\left(H\frac{\sin\omega x}{\omega}\right)=$$
$$=H''\frac{\sin\omega x}{\omega}+2H'\cos\omega x-\omega H(x)\sin\omega x+$$
$$+\omega H(x)\sin\omega x=\delta'\frac{\sin\omega x}{\omega}+2\delta\cos\omega x.$$

Далее, для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}$

$$\left\langle\delta'\frac{\sin\omega x}{\omega}+2\delta\cos\omega x,\varphi\right\rangle=\left\langle\delta',\frac{\sin\omega x}{\omega}\varphi\right\rangle+\langle\delta,2(\cos\omega x)\varphi\rangle=$$
$$=-\left\langle\delta,\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\omega x}{\omega}\varphi\right)\right\rangle+2\varphi(0)=$$
$$=-\left((\cos\omega x)\varphi(x)+\frac{\sin\omega x}{\omega}\varphi'(x)\right)\Big|_{x=0}+2\varphi(0)=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle,$$

тем самым проверено, что функция (21) удовлетворяет уравнению (22).

Введем, наконец, следующее

Определение 9. *Фундаментальным решением* или *функцией Грина* (*аппаратной функцией* или *функцией влияния*) *оператора* $A\colon \mathscr{D}' \to \mathscr{D}'$ называется такая обобщенная функция $E \in \mathscr{D}'$, которая под действием оператора A переходит в функцию $\delta \in \mathscr{D}'$, т. е. $A(E) = \delta$.

Пример 17. В соответствии с этим определением функция (21) является фундаментальным решением для оператора $A = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)$, поскольку она удовлетворяет уравнению (22).

Функция (20) удовлетворяет уравнению (11), т. е. является функцией Грина для оператора $A = \left(m\frac{d^2}{dt^2} + k\right)$. Фундаментальная роль аппаратной функции оператора, сохраняющего сдвиги, уже обсуждалась в п. 1, где была получена формула (1), на основании которой можно теперь записать соответствующее указанным в примере 7 начальным условиям решение уравнения (10):

$$x(t) = (f * E)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)H(\tau)\frac{\sin\sqrt{k/m}\,\tau}{\sqrt{km}}\,d\tau, \tag{19}$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{km}}\int_{0}^{+\infty} f(t-\tau)\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\tau\,d\tau. \tag{20}$$

Учитывая продемонстрированную важную роль свертки и фундаментального решения, ясно, что желательно определить также свертку обобщенных функций. Это делается в теории распределений, но мы на этом останавливаться не будем. Отметим лишь, что в случае регулярных распределений определение свертки обобщенных функций равносильно рассмотренному выше классическому определению свертки функций.

Задачи и упражнения

1. a) Проверьте ассоциативность свертки: $u*(v*w) = (u*v)*w$.

b) Пусть, как всегда, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, а $H(x)$ — функция Хевисайда. Положим

$$H_\lambda^\alpha(x) := H(x)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{\lambda x}, \quad \text{где } \alpha > 0, \text{ а } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Покажите, что $H_\lambda^\alpha * H_\lambda^\beta = H_\lambda^{\alpha+\beta}$.

c) Проверьте, что функция $F = H(x)\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}$ является n-й сверточной степенью функции $f = H(x)e^{\lambda x}$, т. е. $F = \underbrace{f * f * \ldots * f}_{n}$.

2. Функция $G_\sigma(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2\sigma^2}$, $\sigma > 0$, задает плотность распределения вероятностей в гауссовском нормальном законе распределения вероятностей.

a) Нарисуйте график функции $G_\sigma(x)$ при различных значениях параметра σ.

b) Проверьте, что математическое ожидание (среднее значение) случайной величины с распределением вероятностей G_σ равно нулю (т. е. $\int\limits_{\mathbb{R}} xG_\sigma(x)\,dx = 0$).

c) Проверьте, что среднее квадратичное уклонение величины x от своего среднего значения (дисперсия x) равно σ (т. е. $\left(\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 G_\sigma(x)\,dx\right)^{1/2} = \sigma$).

d) В теории вероятностей доказывается, что плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин является сверткой плотностей распределения вероятностей самих этих величин. Проверьте, что $G_\alpha * G_\beta = G_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

e) Покажите, что сумма n однотипных случайных величин (например, n независимых измерений одного и того же объекта), распределенных по нормальному закону G_δ, распределена по закону $G_{\sigma\sqrt{n}}$. Отсюда, в частности, следует, что ожидаемый порядок погрешности среднего арифметического n таких измерений, взятого в качестве значения измеряемой величины, равен $\sigma/\sqrt{n}$, где σ — вероятная погрешность отдельного измерения.

3. Напомним, что функция $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ называется *производящей функцией последовательности* $a_0, a_1, \ldots$

Пусть даны две последовательности $\{a_k\}$, $\{b_k\}$. Если считать, что $a_k = b_k = 0$ при $k < 0$, то свертку последовательностей $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ естественно определить как последовательность $\Big\{c_k = \sum\limits_m a_m b_{k-m}\Big\}$. Покажите, что производящая функция свертки двух последовательностей равна произведению производящих функций этих последовательностей.

4. a) Проверьте, что если свертка $u * v$ определена и одна из функций u, v, периодична с периодом T, то $u * v$ — тоже T-периодическая функция.

b) Докажите теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной периодической функции тригонометрическими полиномами (см. замечание 5).

c) Докажите усиленные варианты аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, указанные в замечании 4.

5. a) Пусть компакт $K \subset \mathbb{R}$ содержит строго внутри себя замыкание $\overline{E}$ множества E из утверждения 5. Покажите, что в этом случае $\int\limits_K f(y)\Delta_k(x-y)\,dy \rightrightarrows f(x)$ на E.

b) Из разложения $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \ldots$ выведите, что

$$g(\rho, \theta) := \frac{1+\rho e^{i\theta}}{2(1-\rho e^{i\theta})} = \frac{1}{2} + \rho e^{i\theta} + \rho^2 e^{i2\theta} + \ldots \quad \text{при } 0 \leqslant \rho < 1.$$

c) Проверьте, что при $0 \leqslant \rho < 1$

$$P_\rho(\theta) := \operatorname{Re} g(\rho, \theta) = \frac{1}{2} + \rho\cos\theta + \rho^2\cos 2\theta + \ldots;$$

функция $P_\rho(\theta)$ имеет вид

$$P_\rho(\theta) = \frac{1}{2}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$$

и называется *ядром Пуассона для круга*.

d) Покажите, что семейство зависящих от параметра $\rho \in [0, 1[$ функций $P_\rho(\theta)$ обладает следующим набором свойств:

$$P_\rho(\theta) \geqslant 0, \quad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_\rho(\theta)\,d\theta = 1, \quad \int\limits_{\varepsilon>0}^{2\pi-\varepsilon} P_\rho(\theta)\,d\theta \to 0 \quad \text{при } \rho \to 1-0.$$

e) Докажите, что если $f \in C[0, 2\pi]$, то функция

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_\rho(\theta - t) f(t)\,dt$$

— гармоническая в круге $\rho < 1$ и $u(\rho, \theta) \rightrightarrows f(\theta)$ при $\rho \to 1-0$. Таким образом, ядро Пуассона позволяет строить гармоническую в круге функцию, имеющую заданные граничные значения на границе круга.

f) Для локально интегрируемых функций u и v в случае, когда они периодические, причем с одинаковым периодом T, можно корректно определить операцию свертки (свертки по периоду) следующим образом:

$$(u \underset{T}{*} v)(x) := \int\limits_{a}^{a+T} u(y)v(x-y)\,dy.$$

Периодические функции на $\mathbb{R}$ можно интерпретировать как функции, заданные на окружности, поэтому введенную операцию естественно считать определением свертки двух функций, заданных на окружности.

Покажите, что если $f(\theta)$ — локально интегрируемая 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$ (или, что то же самое, f — функция на окружности), а семейство $P_\rho(\theta)$ зависящих от параметра ρ функций обладает свойствами ядра Пуассона, перечисленными в d), то $(f \underset{2\pi}{*} P_\rho)(\theta) \to f(\theta)$ при $\rho \to 1-0$ в любой точке непрерывности функции f.

6. a) Пусть

$$\varphi(x) := a \cdot \exp\Big(\frac{1}{|x|^2-1}\Big) \text{ при } |x| < 1 \quad \text{и} \quad \varphi(x) := 0 \text{ при } |x| \geqslant 1;$$

a — постоянная, выбираемая из условия $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$. Проверьте, что при $\alpha \to +0$ семейство функций $\varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\varphi\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)$ является δ-образным семейством функций класса $C_0^{(\infty)}$ на $\mathbb{R}$.

b) Для любого промежутка $I \subset \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ постройте функцию $e(x)$ класса $C_0^{(\infty)}$ такую, что $0 \leqslant e(x) \leqslant 1$ на $\mathbb{R}$, $e(x) = 1 \Leftrightarrow x \in I$ и, наконец, $\operatorname{supp} e \subset I_\varepsilon$, где I_ε — ε-окрестность (или ε-раздутие) множества I в $\mathbb{R}$. (Проверьте, что при соответствующем значении $\alpha > 0$ в качестве $e(x)$ можно взять $\chi_I * \varphi_\alpha$.)

c) Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой счетный набор $\{e_k\}$ функций $e_k \in C_0^{(\infty)}$ (ε-разбиение единицы на $\mathbb{R}$), который обладает следующими свойствами: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(0 \leqslant e_k(x) \leqslant 1)$; диаметр носителя $\operatorname{supp} e_k$ любой функции семейства не превосходит $\varepsilon > 0$; любая точка $x \in \mathbb{R}$ принадлежит лишь конечному числу множеств $\operatorname{supp} e_k$; $\sum\limits_k e_k(x) \equiv 1$ на $\mathbb{R}$.

d) Покажите, что, каково бы ни было открытое покрытие $\{U_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ открытого множества $G \subset \mathbb{R}$ и какова бы ни была функция $\varphi \in C^{(\infty)}(G)$, существует такая последовательность $\{\varphi_k; k \in \mathbb{N}\}$ функций $\varphi_k \in C_0^{(\infty)}$, которая обладает следующими свойствами: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists \gamma \in \Gamma$ $(\operatorname{supp} \varphi_k \subset U_\gamma)$; любая точка $x \in G$ принадлежит лишь конечному числу множеств $\operatorname{supp} \varphi_k$; $\sum\limits_k \varphi_k(x) = \varphi(x)$ на G.

e) Докажите, что множество функций $C_0^{(\infty)}$, интерпретируемых как обобщенные функции, всюду плотно в соответствующем $C^{(\infty)}(G)$ множестве регулярных обобщенных функций.

f) Две обобщенные функции F_1, F_2 из $\mathscr{D}'(G)$ считаются совпадающими на открытом множестве $U \subset G$, если для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}(G)$, носитель которой лежит в U, выполняется равенство $\langle F_1, \varphi\rangle = \langle F_2, \varphi\rangle$. Обобщенные функции F_1, F_2 считаются локально совпадающими в точке $x \in G$, если они совпадают в некоторой окрестности $U(x) \subset G$ этой точки. Докажите, что $(F_1 = F_2) \Longleftrightarrow (F_1 = F_2$ локально в любой точке $x \in G)$.

7. a) Пусть $\varphi(x) := \exp\Big(\dfrac{1}{|x|^2-1}\Big)$ при $|x|<1$ и $\varphi(x) := 0$ при $|x|\geqslant 1$. Покажите, что для любой локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f выполняется соотношение $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx \to 0$ при $\varepsilon\to+0$, где $\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(x/\varepsilon)$.

b) Учитывая предыдущий результат и то обстоятельство, что $\langle\delta,\varphi_\varepsilon\rangle=\varphi(0)\neq 0$, докажите, что обобщенная функция δ не является регулярной.

c) Покажите, что существует последовательность регулярных обобщенных функций (даже отвечающих функциям класса $C_0^{(\infty)}$), которая сходится в $\mathscr{D}'$ к обобщенной функции δ. (На самом-то деле любая обобщенная функция является пределом регулярных обобщенных функций, отвечающих функциям из $\mathscr{D}=C_0^{(\infty)}$. В этом смысле регулярные обобщенные функции образуют всюду плотное в $\mathscr{D}'$ множество, подобно тому как рациональные числа $\mathbb{Q}$ всюду плотны в множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.)

8. a) Вычислите значение $\langle F,\varphi\rangle$ обобщенной функции $F\in\mathscr{D}'$ на функции $\varphi\in\mathscr{D}$, если $F=\sin x\delta$; $F=2\cos x\delta$; $F=(1+x^2)\delta$.

b) Проверьте, что операция $F\mapsto\psi F$ умножения на функцию $\psi\in C^{(\infty)}$ является непрерывной операцией в $\mathscr{D}'$.

c) Проверьте, что линейные операции над обобщенными функциями непрерывны в $\mathscr{D}'$.

9. a) Покажите, что если F — регулярное распределение, порожденное функцией $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0,\\ x & \text{при } x>0,\end{cases}$ то $F'=H$, где H — распределение, отвечающее функции Хевисайда.

b) Вычислите производную от распределения, отвечающего функции $|x|$.

10. a) Проверьте справедливость следующих предельных переходов в $\mathscr{D}'$:

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}=\pi\delta;\quad \lim_{\alpha\to+0}\frac{\alpha x}{\alpha^2+x^2}=\pi x\delta;\quad \lim_{\alpha\to+0}\frac{x}{x^2+\alpha^2}=\ln|x|.$$

b) Покажите, что если $f=f(x)$ — локально интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, а $f_\varepsilon = f(x+\varepsilon)$, то $f_\varepsilon\to f$ в $\mathscr{D}'$ при $\varepsilon\to 0$.

c) Докажите, что если $\{\Delta_\alpha\}$ — δ-образное семейство гладких функций при $\alpha\to 0$, то $F_\alpha=\int\limits_{-\infty}^{x}\Delta_\alpha(t)\,dt\to H$ при $\alpha\to 0$, где H — обобщенная функция, отвечающая функции Хевисайда.

11. a) Через $\delta(x-a)$ обычно обозначают «*сдвинутую* в точку a δ-*функцию*», т. е. обобщенную функцию, действующую на функции $\varphi\in\mathscr{D}$ по правилу $\langle\delta(x-a),\varphi\rangle = \varphi(a)$. Покажите, что ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(x-k)$ сходится в $\mathscr{D}'$.

b) Найдите производную функции $[x]$ ($[x]$ — целая часть числа x).

c) 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$ в пределах промежутка $]0,2\pi]$ задана формулой $f|_{]0,2\pi]}(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{2\pi}$. Покажите, что $f'=-\dfrac{1}{2\pi}+\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(x-2\pi k)$.

d) Проверьте, что $\delta(x-\varepsilon)\to\delta(x)$ при $\varepsilon\to 0$.

e) Обозначая, как и прежде, сдвинутую в точку ε δ-функцию через $\delta(x-\varepsilon)$, покажите прямым вычислением, что $\dfrac{1}{\varepsilon}(\delta(x-\varepsilon)-\delta(x))\to-\delta'(x)=-\delta'$.

f) Исходя из предыдущего предельного перехода, интерпретируйте $-\delta'$ как распределение зарядов, соответствующее диполю с электрическим моментом $+1$, расположенному в точке $x=0$. Проверьте, что $\langle-\delta',1\rangle=0$ (полный заряд диполя равен нулю) и что $\langle-\delta',x\rangle=1$ (его момент действительно равен 1).

g) Важным свойством δ-функции является ее однородность: $\delta(\lambda x)=\lambda^{-1}\delta(x)$. Докажите это равенство.

12. a) Для обобщенной функции F, заданной в виде $\langle F,\varphi\rangle=\int\limits_0^\infty \sqrt{x}\,\varphi(x)\,dx$, проверьте следующие равенства:

$$\langle F',\varphi\rangle=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\,dx;$$

$$\langle F'',\varphi\rangle=-\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{3/2}}\,dx;$$

$$\langle F''',\varphi\rangle=\frac{3}{8}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^{5/2}}\,dx;$$

. . . .

$$\langle F^{(n)},\varphi\rangle=\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots-\dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^{\frac{2n+1}{2}}}\,dx.$$

b) Покажите, что если $n-1<p<n$ и обобщенная функция x_+^{-p} задана соотношением

$$\langle x_+^{-p},\varphi\rangle:=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots-\dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}\varphi^{(n-2)}(0)}{x^p}\,dx,$$

то ее производной является функция $-px_+^{-(p+1)}$, определяемая соотношением

$$\langle -px_+^{-(p+1)},\varphi\rangle=-p\int\limits_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)-\ldots-\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)}{x^{p+1}}\,dx.$$

13. Определяемая равенством

$$\langle F,\varphi\rangle:=\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\quad\left(:=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right)$$

обобщенная функция обозначается символом $\mathscr{P}\dfrac{1}{x}$. Покажите, что:

a) $\left\langle\mathscr{P}\dfrac{1}{x},\varphi\right\rangle=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx.$

b) $(\ln|x|)'=\mathscr{P}\dfrac{1}{x}.$

c) $\left\langle\left(\mathscr{P}\dfrac{1}{x}\right)',\varphi\right\rangle=\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\varphi(x)+\varphi(-x)-2\varphi(0)}{x^2}\,dx.$

d) $\dfrac{1}{x+i0}:=\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{1}{x+iy}=-i\pi\delta+\mathscr{P}\dfrac{1}{x}.$

14. С определением произведения обобщенных функций могут возникнуть сложности: например, функция $|x|^{-2/3}$ абсолютно интегрируема (в несобственном смысле) на $\mathbb{R}$; она порождает соответствующую обобщенную функцию $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-2/3}\varphi(x)\,dx,$

но квадрат ее $|x|^{-4/3}$ уже не является интегрируемой функцией даже в несобственном смысле. Ответы на следующие вопросы показывают, что в $\mathcal{D}'$ принципиально нельзя определить естественную ассоциативную и коммутативную операцию умножения любых обобщенных функций.

a) Покажите, что для любой функции $f \in C^{(\infty)}$ имеет место равенство $f(x)\delta = f(0)\delta$.

b) Проверьте, что $x\mathcal{P}\dfrac{1}{x} = 1$ в $\mathcal{D}'$.

c) Если бы операция умножения была распространена на любые пары обобщенных функций, то она по крайней мере не была бы ассоциативной и коммутативной, иначе

$$0 = 0\mathcal{P}\frac{1}{x} = (x\delta(x))\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\delta(x)x)\mathcal{P}\frac{1}{x} = \delta(x)\Big(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\Big) = \delta(x)1 = 1\delta(x) = \delta.$$

15. a) Покажите, что фундаментальное решение E для линейного оператора $A\colon \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$, вообще говоря, определено неоднозначно — с точностью до любого решения однородного уравнения $Af = 0$.

b) Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P\Big(x, \frac{d}{dx}\Big) := \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x).$$

Покажите, что если $u_0 = u_0(x)$ такое решение уравнения $P\Big(x, \dfrac{d}{dx}\Big)u_0 = 0$, которое удовлетворяет начальным условиям $u_0(0) = \ldots = u_0^{(n-2)}(0) = 0$, $u_0^{(n-1)}(0) = 1$, то функция $E(x) = H(x)u_0(x)$ (где $H(X)$ — функция Хевисайда) является фундаментальным решением для оператора $P\Big(x, \dfrac{d}{dx}\Big)$.

c) Найдите указанным способом фундаментальные решения для операторов

$$\Big(\frac{d}{dx} + a\Big), \quad \Big(\frac{d^2}{dx^2} + a^2\Big), \quad \frac{d^m}{dx^m}, \quad \Big(\frac{d}{dx} + a\Big)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

d) Используя полученные результаты и свертку, найдите решения уравнений $\dfrac{d^m u}{dx^m} = f$, $\Big(\dfrac{d}{dx} + a\Big)^m = f$, где $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

§ 5. Кратные интегралы, зависящие от параметра

В первых двух пунктах этого параграфа будут указаны свойства собственных и несобственных кратных интегралов, зависящих от параметра. Общий итог этих пунктов состоит в том, что основные свойства кратных интегралов, зависящих от параметра, по существу не отличаются от соответствующих свойств подробно рассмотренных выше одномерных интегралов, зависящих от параметра. В третьем пункте мы рассмотрим важный для приложений случай несобственного интеграла, особенность которого сама зависит от параметра. Наконец, в четвертом пункте будет рассмотрена свертка функций многих переменных и некоторые специфически многомерные вопросы обобщенных функций, тесно связанные с интегралами, зависящими от параметра, и классическими интегральными формулами анализа.

1. Собственные кратные интегралы, зависящие от параметра. Пусть X — измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$, например, ограниченная область с гладкой или кусочно гладкой границей; Y — некоторое подмножество $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим зависящий от параметра $y \in Y$ интеграл

$$F(y) = \int_X f(x, y)\, dx, \tag{1}$$

где функция f предполагается определенной на множестве $X \times Y$ и интегрируемой на X при любом фиксированном значении $y \in Y$.

Для интеграла (1) справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если $X \times Y$ — компакт в $\mathbb{R}^{n+m}$, и $f \in C(X \times Y)$, то $F \in \in C(Y)$.*

Утверждение 2. *Если Y — область в $\mathbb{R}^m$, $f \in C(X \times Y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y^i} \in C(X \times Y)$, то функция F дифференцируема в Y по переменной y^i, где $y = (y^1, \ldots, y^i, \ldots, y^m)$, и*

$$\frac{\partial F}{\partial y^i}(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y^i}(x, y)\, dx. \tag{2}$$

Утверждение 3. *Если X и Y — измеримые компакты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, а $f \in C(X \times Y)$, то $F \in C(Y) \subset \mathcal{R}(Y)$ и*

$$\int_Y F(y)\, dy := \int_Y dy \int_X f(x, y)\, dx = \int_X dx \int_Y f(x, y)\, dy. \tag{3}$$

Отметим, что значения функции f могут при этом лежать в любом векторном нормированном пространстве Z. Важнейшие частные случаи — когда Z есть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. В этих случаях проверка утверждений 1—3, очевидно, сводится к их доказательству при $Z = \mathbb{R}$. Но при $Z = \mathbb{R}$ доказательства утверждений 1 и 2 дословно повторяют доказательства соответствующих утверждений для одномерного интеграла (см. гл. XVII, § 1), а утверждение 3 является простым следствием утверждения 1 и теоремы Фубини (гл. XI, § 4).

2. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметра. Если в интеграле (1) неограничены множество $X \subset \mathbb{R}^n$ или функция f, то он понимается как несобственный кратный интеграл (см. гл. XI, § 6), т. е. как предел собственных интегралов, взятых по множествам соответствующего исчерпания X. При исследовании кратных несобственных интегралов, зависящих от параметра, как правило, интересуются специальными исчерпаниями, подобными тем, которые мы рассматривали в одномерном случае. В полном соответствии с одномерным случаем из области интегрирования X при этом удаляют ε-окрестность множества особых точек[1], находят интеграл по остав-

[1]То есть точек, в любой окрестности которых функция f неограничена. Если и множество X неограничено, то из X удаляется также окрестность бесконечности.

шейся части X_ε множества X и затем находят предел значений интегралов по X_ε при $\varepsilon \to +0$.

Если указанный предельный переход является равномерным относительно параметра $y \in Y$, то говорят, что несобственный интеграл (1) сходится равномерно на Y.

Пример 1. Интеграл

$$F(\lambda) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

получается предельным переходом

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\,dx\,dy := \lim_{\varepsilon\to+0} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1/\varepsilon^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

и, как легко проверить, используя полярные координаты, он сходится при $\lambda > 0$. Далее, на множестве $E_{\lambda_0} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geqslant \lambda_0 > 0\}$ он сходится равномерно, поскольку при $\lambda \in E_{\lambda_0}$

$$0 < \iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1/\varepsilon^2} e^{-\lambda(x^2+y^2)}\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1/\varepsilon^2} e^{-\lambda_0(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

а последний интеграл стремится к нулю, когда $\varepsilon \to 0$ (исходный интеграл $F(\lambda)$ сходится при $\lambda = \lambda_0 > 0$).

Пример 2. Пусть, как всегда, $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r\}$ — шар радиуса r с центром $a \in \mathbb{R}^n$, и пусть $y \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим интеграл

$$F(y) = \int\limits_{B(0,1)} \frac{|x-y|}{(1-|x|)^\alpha}\,dx := \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{B(0,1-\varepsilon)} \frac{|x-y|}{(1-|x|)^\alpha}\,dx.$$

Переходя к полярным координатам в $\mathbb{R}^n$, убеждаемся, что данный интеграл сходится лишь при $\alpha < 1$. Если значение $\alpha < 1$ фиксировано, то по параметру y интеграл сходится равномерно на любом компакте $Y \subset \mathbb{R}^n$, поскольку в этом случае $|x-y| \leqslant M(Y) \in \mathbb{R}$.

Отметим, что в рассмотренных примерах множество особых точек интеграла не зависело от параметра. Таким образом, если принять указанное выше понимание равномерной сходимости несобственного интеграла с фиксированным множеством особых точек, то ясно, что все основные свойства таких кратных несобственных интегралов, зависящих от параметра, получаются из соответствующих свойств собственных кратных интегралов и теорем о предельном переходе для семейств функций, зависящих от параметра.

Мы не останавливаемся на переизложении этих в принципе уже знакомых нам фактов, а предпочтем использовать развитый аппарат при рассмотрении следующей весьма важной и часто встречающейся ситуации, когда особенность несобственного интеграла (одномерного или кратного) сама зависит от параметра.

3. Несобственные интегралы с переменной особенностью

Пример 3. Как известно, потенциал помещенного в точку $x\in\mathbb{R}^3$ единичного заряда выражается формулой $U(x, y)=\dfrac{1}{|x-y|}$, где y — переменная точка пространства $\mathbb{R}^3$. Если теперь заряд распределен в ограниченной области $X\subset\mathbb{R}^3$ с ограниченной плотностью $\mu(x)$ (равной нулю вне X), то потенциал $U(y)$ так распределенного заряда (в силу аддитивности потенциала), очевидно, запишется в виде

$$U(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^3} U(x, y)\mu(x)\,dx=\int\limits_X \frac{\mu(x)\,dx}{|x-y|}. \tag{4}$$

Роль параметра в последнем интеграле играет переменная точка $y\in\mathbb{R}^3$. Если точка y лежит вне множества X, то интеграл (4) собственный, если же $y\in\overline{X}$, то $|x-y|\to 0$ при $X\ni x\to y$ и точка y оказывается особой для интеграла. С изменением y эта особая точка, таким образом, перемещается.

Поскольку $U(y)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0} U_\varepsilon(y)$, где

$$U_\varepsilon(y)=\int\limits_{X\setminus B(y,\varepsilon)} \frac{\mu(x)}{|x-y|}\,dx,$$

то естественно, как и прежде, считать, что рассматриваемый интеграл (4) с переменной особенностью сходится равномерно на множестве Y, если $U_\varepsilon(y)\rightrightarrows U(y)$ на Y при $\varepsilon\to+0$.

Мы приняли, что $|\mu(x)|\leqslant M\in\mathbb{R}$ на X, поэтому

$$\Bigg|\int\limits_{X\cap B(y,\varepsilon)} \frac{\mu(x)\,dx}{|x-y|}\Bigg|\leqslant M\int\limits_{B(y,\varepsilon)} \frac{dx}{|x-y|}=2\pi M\varepsilon^2.$$

Эта оценка показывает, что $|U(y)-U_\varepsilon(y)|\leqslant 2\pi M\varepsilon^2$ при любом $y\in\mathbb{R}^3$, т. е. в указанном смысле интеграл (4) сходится равномерно на множестве $Y=\mathbb{R}^3$.

В частности, если проверить, что функция $U_\varepsilon(y)$ непрерывна по y, то отсюда уже можно будет из общих соображений сделать вывод о непрерывности потенциала $U(y)$. Но непрерывность функции $U_\varepsilon(y)$ формально не вытекает из утверждения 1 о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра, так как в нашем случае с изменением y меняется область интегрирования $X\setminus B(y,\varepsilon)$. Рассмотрим поэтому внимательнее вопрос о непрерывности функции $U_\varepsilon(y)$.

Заметим, что при $|y-y_0|\leqslant\varepsilon$

$$U_\varepsilon(y)=\int\limits_{X\setminus B(y_0,2\varepsilon)} \frac{\mu(x)\,dx}{|x-y|}+\int\limits_{(X\setminus B(y,\varepsilon))\cap B(y_0,2\varepsilon)} \frac{\mu(x)\,dx}{|x-y|}.$$

Первый из этих двух интегралов при условии, что $|y-y_0|<\varepsilon$, непрерывен по y (как собственный интеграл с фиксированной областью интегрирования). Второй же интеграл по абсолютной величине не превосходит

$$\int\limits_{B(y_0,2\varepsilon)} \frac{M\,dx}{|x-y|} = 8\pi M\varepsilon^2.$$

Значит, при всех значениях y, достаточно близких к y_0, будет выполнено неравенство $|U_\varepsilon(y)-U_\varepsilon(y_0)|<\varepsilon+16\pi N\varepsilon^2$, устанавливающее непрерывность $U_\varepsilon(y)$ в точке $y_0\in\mathbb{R}^3$.

Таким образом, показано, что потенциал $U(y)$ является непрерывной функцией во всем пространстве $\mathbb{R}^3$.

Разобранные примеры дают основание принять следующее общее

Определение 1. Пусть интеграл (1) является несобственным и как таковой сходится при каждом значении $y\in Y$. Пусть X_ε — часть множества X, полученная удалением из X ε-окрестности множества особых точек интеграла[1], а $F_\varepsilon(y)=\int\limits_{X_\varepsilon} f(x,y)\,dx$. Будем говорить, что *интеграл* (1) *сходится равномерно на множестве* Y, если $F_\varepsilon(y)\rightrightarrows F(y)$ на Y при $\varepsilon\to+0$.

Из этого определения и соображений, аналогичных тем, которые были продемонстрированы в примере 3, немедленно вытекает следующее полезное

Утверждение 4. *Если функция* f *в интеграле* (1) *допускает оценку* $|f(x,y)|\leqslant\frac{M}{|x-y|^\alpha}$, *где* $M\in\mathbb{R}$, $x\in X\subset\mathbb{R}^n$, $y\in Y\subset\mathbb{R}^n$ *и* $\alpha<n$, *то интеграл сходится равномерно на множестве* Y.

Пример 4. В частности, на основании утверждения 4 заключаем, что интеграл

$$V_i(y)=\int\limits_X \frac{\mu(x)(x^i-y^i)}{|x-y|^3}\,dx,$$

полученный формальным дифференцированием потенциала (4) по переменной y^i $(i=1,2,3)$, сходится равномерно на множестве $Y=\mathbb{R}^3$, поскольку $\left|\frac{\mu(x)(x^i-y^i)}{|x-y|^3}\right|\leqslant\frac{M}{|x-y|^2}$.

Как и в примере 3, отсюда следует непрерывность функции $V_i(y)$ на $\mathbb{R}^3$.

Убедимся теперь в том, что на самом-то деле функция $U(y)$ — потенциал (4) — имеет частную производную $\frac{\partial U}{\partial y^i}$ и что $\frac{\partial U}{\partial y^i}(y)=V_i(y)$.

Для этого, очевидно, достаточно проверить, что

$$\int\limits_a^b V_i(y^1,y^2,y^3)\,dy^i = U(y^1,y^2,y^3)\Big|_{y^i=a}^{b}.$$

[1] См. сноску на стр. 443.

Но действительно,

$$\int_a^b V_i(y)\,dy^i = \int_a^b dy^i \int_X \frac{\mu(x)(x^i-y^i)}{|x-y|^3}\,dx = \int_X \mu(x)\,dx \int_a^b \frac{(x^i-y^i)}{|x-y|^3}\,dy^i =$$

$$= \int_X \mu(x)\,dx \int_a^b \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) dy^i = \left(\int_X \frac{\mu(x)\,dx}{|x-y|}\right)\Big|_{y^i=a}^b = U(y)\Big|_{y^i=a}^b.$$

Единственное нетривиальное место в этой выкладке — изменение порядка интегрирований. В общем случае для перестановки несобственных интегрирований достаточно иметь абсолютно сходящийся по совокупности переменных кратный интеграл. В нашем случае это условие удовлетворено, поэтому выполненная перестановка законна. Ее, конечно, можно обосновать и непосредственно благодаря простоте рассматриваемой функции.

Итак, показано, что потенциал $U(y)$, порожденный распределенным в пространстве $\mathbb{R}^3$ зарядом ограниченной плотности, является функцией, непрерывно дифференцируемой во всем пространстве.

Использованные в примерах 3 и 4 приемы и рассуждения позволяют вполне аналогично рассмотреть следующую более общую ситуацию.

Пусть

$$F(y) = \int_X K(y-\varphi(x))\psi(x,y)\,dx, \tag{5}$$

где X — ограниченная измеримая область в $\mathbb{R}^m$; параметр y пробегает область $Y \subset \mathbb{R}^m$, причем $n \leqslant m$; $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, удовлетворяющее условиям $\operatorname{rang}\varphi'(x) = n$, и $\|\varphi'(x)\| \geqslant c > 0$, т. е. φ задает n-мерную параметризованную поверхность, точнее, n — путь в $\mathbb{R}^m$; $K \in C(\mathbb{R}^m \setminus 0, \mathbb{R})$, т. е. функция $K(z)$ непрерывна в $\mathbb{R}^m$ всюду, кроме точки $z=0$, около которой она может быть и неограниченной; $\psi\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — ограниченная непрерывная функция. Будем считать, что при каждом $y \in Y$ интеграл (5) (вообще говоря, несобственный) существует.

В рассмотренном нами выше интеграле (4), в частности, было

$$n = m, \quad \varphi(x) = x, \quad \psi(x,y) = \mu(x), \quad K(z) = |z|^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что при указанных ограничениях на функцию φ определение 1 равномерной сходимости для интеграла (5) означает, что по любому $\alpha > 0$ можно выбрать $\varepsilon > 0$ так, что при любом $y \in Y$ будет

$$\left|\int_{|y-\varphi(x)|<\varepsilon} K(y-\varphi(x))\psi(x,y)\,dx\right| < \alpha, \tag{6}$$

где интеграл берется по множеству[1] $\{x \in X \mid |y-\varphi(x)| < \varepsilon\}$.

[1]Здесь мы считаем, что само множество X ограничено в $\mathbb{R}^n$. В противном случае к неравенству (6) надо еще приписать аналогичное неравенство, в котором интеграл берется по множеству $\{x \in X \mid |x| > 1/\varepsilon\}$.

Для интеграла (5) справедливы следующие утверждения.

Утверждение 5. *Если интеграл* (5) *с указанными при его описании условиями на функции* φ, ψ, K *сходится равномерно на* Y, *то* $F \in C(Y, \mathbb{R})$.

Утверждение 6. *Если про интеграл* (5) *известно дополнительно, что функция* ψ *не зависит от параметра* y (*т. е.* $\psi(x, y) = \psi(x)$), *а* $K \in \in C^{(1)}(\mathbb{R}^m \setminus 0, \mathbb{R})$, *то при условии равномерной сходимости интеграла*

$$\int\limits_X \frac{\partial K}{\partial y^i}(y - \varphi(x))\psi(x)\, dx$$

на множестве $y \in Y$, *можно утверждать, что функция* F *имеет непрерывную частную производную* $\frac{\partial F}{\partial y^i}$, *причем*

$$\frac{\partial F}{\partial y^i}(y) = \int\limits_X \frac{\partial K}{\partial y^i}(y - \varphi(x))\psi(x)\, dx. \tag{7}$$

Доказательства этих утверждений, как было сказано, вполне аналогичны проведенным в примерах 3 и 4, поэтому мы на них не останавливаемся.

Отметим лишь, что сходимость несобственного интеграла (при произвольном исчерпании) влечет его абсолютную сходимость. В примерах 3, 4 условие абсолютной сходимости использовалось нами в оценках и при перестановке порядка интегрирований. В качестве иллюстрации возможного использования утверждений 5, 6 рассмотрим еще один пример из теории потенциала.

Пример 5. Пусть заряд распределен на гладкой компактной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ с поверхностной плотностью заряда $\nu(x)$. Потенциал такого распределения заряда называется *потенциалом простого слоя* и, очевидно, представляется поверхностным интегралом

$$U(y) = \int\limits_S \frac{\nu(x)\, d\sigma(x)}{|x - y|}. \tag{8}$$

Пусть ν — ограниченная функция; тогда при $y \notin S$ этот интеграл собственный и функция $U(y)$ бесконечно дифференцируема вне S.

Если же $y \in S$, то интеграл имеет в точке y интегрируемую особенность. Особенность интегрируема, так как поверхность S гладкая и в окрестности точки $y \in S$ мало отличается от куска плоскости $\mathbb{R}^2$, на которой, как мы знаем, особенность типа $1/r^\alpha$ интегрируема при $\alpha < 2$. Это общее соображение, используя утверждение 5, можно превратить в формальное доказательство, если локально в окрестности V_y точки $y \in S$ представить S в виде $x = \varphi(t)$, где $t \in V_t \subset \mathbb{R}^2$ и $\operatorname{rang} \varphi' = 2$. Тогда

$$\int\limits_{V_y} \frac{\nu(x)\, d\sigma(x)}{|x - y|} = \int\limits_{V_t} \frac{\nu(\varphi(t))}{|y - \varphi(t)|} \sqrt{\det\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial t^j} \right\rangle}\, dt,$$

и, применяя утверждение 2, убеждаемся еще и в том, что интеграл (8) представляет функцию $U(y)$, непрерывную во всем пространстве $\mathbb{R}^3$.

Вне носителя заряда, как уже отмечалось, объемный потенциал (4) и потенциал простого слоя (8) бесконечно дифференцируемы. Проводя это дифференцирование под знаком интеграла, единообразно убеждаемся в том, что вне носителя заряда потенциал, как и функция $1/|x-y|$, в $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U = 0$, т. е. является в указанной области гармонической функцией.

* 4. Свертка, фундаментальное решение и обобщенные функции в многомерном случае

a. Свертка в $\mathbb{R}^n$

Определение 2. *Свертка* $u * v$ определенных на $\mathbb{R}^n$ вещественно или комплекснозначных функций u, v задается соотношением

$$(u*v)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)\,dy. \tag{9}$$

Пример 6. Сопоставляя формулы (4) и (9), можно заключить, что, например, потенциал U распределенного в пространстве $\mathbb{R}^3$ с плотностью $\mu(x)$ заряда есть свертка $(\mu * E)$ функции μ и потенциала E единичного заряда, помещенного в начало координат пространства $\mathbb{R}^3$.

Соотношение (9) есть прямое обобщение рассмотренного в § 4 определения свертки. По этой причине все разобранные в § 4 для случая $n = 1$ свойства свертки вместе с их выводами остаются в силе, если там всюду заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n$.

Дельтаобразное семейство в $\mathbb{R}^n$ определяется так же, как и в $\mathbb{R}$ с заменой $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n$ и с пониманием $U(0)$ как окрестности в $\mathbb{R}^n$ точки $0 \in \mathbb{R}^n$.

Понятие равномерной непрерывности функции $f: G \to \mathbb{C}$ на множестве $E \subset G$, а вместе с ним и основное утверждение 5 § 4 о сходимости свертки $f * \Delta_\alpha$ к f, тоже со всеми деталями и следствиями переносится на многомерный случай.

Отметим лишь, что в примере 3 и доказательстве следствия 1 из § 4 при определении функций $\Delta_n(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно следует заменить x на $|x|$. Небольшие видоизменения δ-образного семейства, приведенного в примере 4 § 4, потребуются для доказательства теоремы Вейерштрасса об аппроксимации периодических функции тригонометрическими полиномами. В этом случае речь идет о приближении функции $f(x^1, \ldots, x^n)$, непрерывной и периодической с периодами $T_1, T_2, \ldots, T_n$ по переменным $x^1, x^2, \ldots, x^n$ соответственно.

Утверждение состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно предъявить тригонометрический полином от n переменных с соответствующими периодами $T_1, T_2, \ldots, T_n$, который равномерно с точностью до ε приближает f на $\mathbb{R}^n$.

Мы ограничимся этими замечаниями. Самостоятельная проверка доказанных в § 4 для $n=1$ свойств свертки (9) в случае произвольного $n\in\mathbb{N}$ будет для читателя простым, но полезным упражнением, способствующим адекватному пониманию изложенного в § 4.

b. Обобщенные функции многих переменных. Остановимся теперь на некоторых многомерных элементах введенных в § 4 понятий, связанных с обобщенными функциями.

Пусть, как и прежде, $C^{(\infty)}(G)$ и $C_0^{(\infty)}(G)$ — соответственно обозначения множеств бесконечно дифференцируемых и финитных бесконечно дифференцируемых в области $G\subset\mathbb{R}^n$ функций. Если $G=\mathbb{R}^n$, то будем применять сокращения $C^{(\infty)}$ и $C_0^{(\infty)}$ соответственно. Пусть $m:=(m_1, \ldots, m_n)$ — мультииндекс, а

$$\varphi^{(m)} := \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{m_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{m_n} \varphi.$$

В $C_0^{(\infty)}(G)$ вводится *сходимость функций*; как и в определении 7, § 4 считается, что $\varphi_k\to\varphi$ в $C_0^{(\infty)}(G)$ при $k\to\infty$, если носители всех функций последовательности $\{\varphi_k\}$ содержатся в одном и том же лежащем в G компакте и для любого мультииндекса m $\varphi_k^{(m)} \rightrightarrows \varphi^{(m)}$ на G при $k\to\infty$, т. е. имеет место равномерная сходимость функций и всех их производных.

После этого принимается

Определение 3. Линейное пространство $C_0^{(\infty)}(G)$ с введенной сходимостью обозначается через $\mathscr{D}(G)$ (при $G=\mathbb{R}^n$ через $\mathscr{D}$) и называется *пространством основных* или *пробных функций*.

Линейные непрерывные функционалы на $\mathscr{D}(G)$ называются *обобщенными функциями* или *распределениями*. Они образуют линейное *пространство обобщенных функций*, обозначаемое через $\mathscr{D}'(G)$ (или $\mathscr{D}'$, если $G=\mathbb{R}^n$).

Сходимость в $\mathscr{D}'(G)$, как и в одномерном случае, определяется как слабая (поточечная) сходимость функционалов (см. § 4, определение 6).

Определение регулярной обобщенной функции дословно переносится на многомерный случай.

Остается прежним и определение δ-функции и смещенной в точку $x_0\in G$ δ-функции, обозначаемой через $\delta(x_0)$ или чаще, но не всегда удачно, через $\delta(x-x_0)$.

Рассмотрим теперь некоторые примеры.

Пример 7. Положим

$$\Delta_t(x) := \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\, e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}},$$

где $a>0$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^n$. Покажем, что эти функции, рассматриваемые как регулярные распределения в $\mathbb{R}^n$, сходятся в $\mathscr{D}'$ при $t\to+0$ к δ-функции $\mathbb{R}^n$.

Для доказательства достаточно проверить, что семейство функций Δ_t является δ-образным в $\mathbb{R}^n$ при $t\to+0$.

Используя замену переменной, сведение кратного интеграла к повторному и значение интеграла Эйлера—Пуассона, находим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_t(x)\,dx = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\left|\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right|^2}\,d\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du\right)^n = 1.$$

Далее при любом фиксированном значении $r>0$

$$\int\limits_{B(0,r)} \Delta_t(x)\,dx = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\int\limits_{B\left(0,\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right)} e^{-|\xi^2|}\,d\xi \to 1,$$

когда $t\to+0$.

Учитывая, наконец, неотрицательность функций $\Delta_t(x)$, заключаем, что они действительно составляют δ-образное семейство функций в $\mathbb{R}^n$.

Пример 8. Обобщением δ-функции (отвечающей, например, единичному заряду, помещенному в начало координат пространства $\mathbb{R}^n$) является следующая обобщенная функция δ_S (отвечающая распределению заряда по кусочно гладкой поверхности S с единичной поверхностной плотностью распределения). Действие δ_S на функции $\varphi\in\mathscr{D}$ определяется соотношением

$$\langle\delta_S,\varphi\rangle := \int\limits_S \varphi(x)\,d\sigma.$$

Распределение δ_S, так же как и распределение δ, не является регулярной обобщенной функцией.

Умножение распределения на функцию из $\mathscr{D}$ определяется в $\mathbb{R}^n$ так же, как и в одномерном случае.

Пример 9. Если $\mu\in\mathscr{D}$, то $\mu\delta_S$ есть обобщенная функция, действующая по закону

$$\langle\mu\delta_S,\varphi\rangle = \int\limits_S \varphi(x)\mu(x)\,d\sigma. \tag{10}$$

Если бы функция $\mu(x)$ была определена только на поверхности S, то равенство (10) можно было бы рассматривать как определение обобщенной функции $\mu\delta_S$. Так вводимая обобщенная функция по естественной аналогии называется *простым слоем на поверхности S с плотностью μ*.

Дифференцирование обобщенных функций в многомерном случае определяется по тому же принципу, что и в одномерном, но имеет некоторую специфику.

Если $F\in\mathscr{D}'(G)$ и $G\subset\mathbb{R}^n$, то обобщенная функция $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ определяется соотношением

$$\left\langle\frac{\partial F}{\partial x^i},\varphi\right\rangle := -\left\langle F,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$\langle F^{(m)},\varphi\rangle = (-1)^{|m|}\langle F,\varphi^{(m)}\rangle, \tag{11}$$

где $m=(m_1,\ldots,m_m)$ — мультииндекс и $|m|=\sum\limits_{i=1}^n m_i$.

Естественно проверить, что $\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i}$. Но это следует из равенства правых членов соотношений

$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^i\,\partial x^j}, \varphi \right\rangle = \left\langle F, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j\,\partial x^i} \right\rangle,$$
$$\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^j\,\partial x^i}, \varphi \right\rangle = \left\langle F, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i\,\partial x^j} \right\rangle,$$

вытекающего из классического равенства $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^i}$, справедливого для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$.

Пример 10. Рассмотрим теперь оператор $D = \sum\limits_m a_m D^m$, где $m = (m_1, \ldots$ $\ldots, m_n)$ — мультииндекс, $D^m = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{m_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{m_n}$, a_m — числовые коэффициенты, а сумма распространяется на некоторый конечный набор мультииндексов. Это дифференциальный оператор.

Транспонированным по отношению к оператору D или *сопряженным* к D называется оператор, обозначаемый обычно символом ${}^tD$ или D^* и определяемый соотношением

$$\langle DF, \varphi \rangle =: \langle F, {}^tD\varphi \rangle,$$

которое должно быть выполнено при любых $\varphi \in \mathcal{D}$ и $F \in \mathcal{D}'$. Исходя из равенства (11), можно теперь написать явную формулу

$${}^tD = \sum_m (-1)^{|m|} a_m D^m$$

для оператора, сопряженного к указанному дифференциальному оператору D.

В частности, если все значения $|m|$ четны, оператор D оказывается *самосопряженным*, т. е. для него ${}^tD = D$.

Ясно, что операция дифференцирования в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ сохраняет все свойства дифференцирования в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Рассмотрим, однако, следующий специфически многомерный и важный

Пример 11. Пусть S — гладкое $(n-1)$-мерное подмногообразие $\mathbb{R}^n$, т. е. S — гладкая гиперповерхность. Предположим, что определенная на $\mathbb{R}^n \setminus S$ функция f бесконечно дифференцируема и все ее частные производные имеют предел в каждой точке $x \in S$ при одностороннем подходе к x с любой стороны (локально) поверхности S.

Разность между этими пределами будет скачком $\int \frac{\partial f}{\partial x^i}$ рассматриваемой частной производной в точке x, соответствующим определенному направлению прохода сквозь поверхность S в точке x. При изменении этого направления меняется знак скачка. Скачок, таким образом, можно считать функцией на ориентированной поверхности, если, например, условиться, что направление прохода задается ориентирующей поверхность нормалью.

Функция $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ определена, непрерывна и локально ограничена вне S, причем в силу сделанных допущений f локально является финально ограничен-

ной при подходе к самой поверхности S. Поскольку S — подмногообразие $\mathbb{R}^n$, как бы мы ни доопределили $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ на S, мы получим функцию с разрывами разве что на S, и потому локально интегрируемую в $\mathbb{R}^n$. Но интегрируемые функции, отличающиеся на множестве меры нуль, имеют равные интегралы, поэтому, не заботясь о значениях на S, можно считать, что $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ порождает некоторую регулярную обобщенную функцию $\left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$, действующую по закону

$$\left\langle\left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}, \varphi\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\cdot\varphi\right)(x)\,dx.$$

Покажем теперь, что если f рассматривать как обобщенную функцию, то в смысле дифференцирования обобщенных функций имеет место следующая важная формула:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\} + (\rceil f)_S \cos\alpha_i\delta_S, \tag{12}$$

где последний член понимается в смысле равенства (10); $(\rceil f)_S$ — скачок функции f в точке $x \in S$, соответствующий любому (из двух возможных) направлению единичной нормали $\boldsymbol{n}$ к S в точке x, а $\cos\alpha_i$ — проекция $\boldsymbol{n}$ на ось x^i (т. е. $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_k)$).

◄ Формула (12) обобщает равенство (17) из § 4, которое мы и используем при ее выводе.

Рассмотрим для определенности случай, когда $i = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
\left\langle\frac{\partial f}{\partial x^1}, \varphi\right\rangle &:= -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}\right\rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(f\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)(x)\,dx = \\
&= -\int\limits_{x^2\ldots x^n}\!\!\cdots\int dx^2\ldots dx^n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\,dx^1 = \\
&= \int\limits_{x^2\ldots x^n}\!\!\cdots\int dx^2\ldots dx^n\left[(\rceil f)\varphi + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x^1}\varphi\,dx^1\right] = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f}{\partial x^1}\varphi\,dx + \int\limits_{x^2\ldots x^n}\!\!\cdots\int(\rceil f)\varphi dx^2\ldots dx^n.
\end{aligned}$$

Здесь скачок $\rceil f$ функции f берется в точке $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in S$ при прохождении через нее в направлении координатной оси x_1. В этой же точке берется значение функции φ при вычислении произведения $(\rceil f)\varphi$. Значит, последний интеграл можно записать в виде поверхностного интеграла первого рода

$$\int\limits_S(\rceil f)\varphi\cos\alpha_1\,d\sigma,$$

где α_1 — угол между направлением оси x_1 и нормалью к S в точке x, направленной так, что при прохождении через точку $x \in S$ в направлении этой нормали функция f имеет именно полученный нами скачок $\int f$. Это означает всего-навсего, что $\cos\alpha_1 \geqslant 0$. Остается заметить, что если выбрать другое направление нормали, то для него одновременно изменят знак и скачок функции и косинус угла между направлением оси x^1 и направлением нормали, значит, произведение $(\int f)\cos\alpha_1$ при этом не изменится. ►

Замечание 1. Как видно из проведенного доказательства, формула (12) имеет место уже тогда, когда для функции f определен скачок $(\int f)_S$ в любой точке $x \in S$, а вне S существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, локально интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ хотя бы в несобственном смысле, порождающая регулярную обобщенную функцию $\left\{\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}$.

Замечание 2. В точках $x \in S$, в которых направление оси x^1 не трансверсально S, т. е. касательно к S, могут возникнуть затруднения в определении скачка $\int f$ по такому направлению. Но из доказательства формулы (12) видно, что последний ее член получен в связи с интегралом

$$\int\limits_{x^2 \ldots x^n} \cdots \int (\int f)\varphi \, dx^2 \ldots dx^n.$$

Проекция на плоскость $x^2, \ldots, x^n$ множества E указанных точек имеет $(n-1)$-мерную меру нуль и потому не влияет на значение интеграла. Значит, форму (12) можно считать имеющей смысл и справедливой всегда, если при $\cos\alpha_i = 0$ символу $(\int f)_S \cos\alpha_i$ приписывать значение нуль.

Замечание 3. Аналогичные соображения позволяют пренебрегать и множествами, имеющими площадь нуль, поэтому формулу (12) можно считать доказанной и для кусочно гладких поверхностей.

В качестве следующего примера покажем, как из дифференциального соотношения (12) непосредственно получается классическая интегральная формула Гаусса—Остроградского, причем в том наиболее свободном от излишних аналитических требований виде, о котором мы в свое время поставили читателя в известность.

Пример 12. Пусть G — конечная область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная кусочно гладкой поверхностью S; $\boldsymbol{A} = (A^1, \ldots, A^n)$ — векторное поле, непрерывное в $\overline{G}$ и такое, что функция $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial A^i}{\partial x^i}$ определена в G и интегрируема в G хотя бы в несобственном смысле.

Если считать, что вне $\overline{G}$ поле $\boldsymbol{A}$ равно нулю, то скачок такого поля в любой точке x границы S области G при выходе из области G равен $-\boldsymbol{A}(x)$. Полагая, что $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S, применяя формулу (12) к каждой компоненте A^i поля $\boldsymbol{A}$ и, суммируя эти равенства, приходим к соотношению

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \{\operatorname{div} \boldsymbol{A}\} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n})\delta_S, \tag{13}$$

в котором $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{n}$ в соответствующей точке $x\in S$.

Соотношение (13) — это равенство обобщенных функций. Применим его к функции $\psi\in C_0^{(\infty)}$, равной единице на G (существование и построение такой функции уже неоднократно обсуждалось). Поскольку для любой функции $\varphi\in\mathscr{D}$

$$\langle \operatorname{div}\boldsymbol{A}, \varphi\rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{A}\cdot\nabla\varphi)\,dx \tag{14}$$

(что вытекает непосредственно из определения дифференцирования обобщенной функции), то для нашего поля $\boldsymbol{A}$ и функции ψ, очевидно, $\langle \operatorname{div}\boldsymbol{A}, \psi\rangle = 0$. Но с учетом равенства (13) это дает соотношение

$$0 = \langle\{\operatorname{div}\boldsymbol{A}\}, \psi\rangle - \langle(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\delta_S, \psi\rangle,$$

которое в классической записи

$$0 = \int\limits_G \operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dx - \int\limits_S(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})\,d\sigma \tag{15}$$

совпадает с формулой Гаусса—Остроградского.

Разберем еще несколько важных примеров, связанных с дифференцированием обобщенных функций.

Пример 13. Рассмотрим векторное поле $\boldsymbol{A} = \frac{x}{|x|^3}$, определенное в $\mathbb{R}^3\setminus 0$, и покажем, что в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ обобщенных функций имеет место равенство

$$\operatorname{div}\frac{x}{|x|^3} = 4\pi\delta. \tag{16}$$

Заметим сначала, что при $x\neq 0$ в классическом смысле $\operatorname{div}\frac{x}{|x|^3} = 0$.

Теперь, используя последовательно определение $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ в виде соотношения (14), определение несобственного интеграла, равенство $\operatorname{div}\frac{x}{|x|^3} = 0$ при $x\neq 0$, формулу (15) Гаусса—Остроградского и финитность функции φ, получаем

$$\begin{aligned}\left\langle \operatorname{div}\frac{x}{|x|^3}, \varphi\right\rangle &= -\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{x}{|x|^3}\cdot\nabla\varphi(x)\right)dx = \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} -\int\limits_{\varepsilon<|x|<1/\varepsilon}\left(\frac{x}{|x|^3}\cdot\nabla\varphi(x)\right)dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} -\int\limits_{\varepsilon<|x|<1/\varepsilon}\operatorname{div}\left(\frac{x\varphi(x)}{|x|^3}\right)dx = \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0} -\int\limits_{|x|=\varepsilon}\varphi(x)\frac{(x\cdot n)}{|x|^3}\,d\sigma = 4\pi\varphi(0) = \langle 4\pi\delta, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Для оператора $A\colon \mathscr{D}'(G)\to\mathscr{D}'(G)$, как и прежде, *фундаментальным решением* назовем обобщенную функцию $E\subset\mathscr{D}'(G)$, для которой $A(E)=\delta$.

Пример 14. Проверим, что в $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ регулярная обобщенная функция $E(x)=-\frac{1}{4\pi|x|}$ является фундаментальным решением оператора Лапласа

$$\Delta=\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial}{\partial x^2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial}{\partial x^3}\Big)^2.$$

Действительно, $\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$, а

$$\operatorname{grad} E(x)=\frac{x}{4\pi|x|^3}\quad \text{при } x\neq 0,$$

поэтому равенство

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} E=\delta$$

вытекает из доказанного соотношения (16).

Можно, как и в примере 13, проверить, что при любом $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, в $\mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div}\frac{x}{|x|^n}=\sigma_n\delta, \tag{16$'$}$$

где $\sigma_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Отсюда с учетом соотношения $\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$ можно заключить, что

$$\Delta\ln|X|=2\pi\delta\quad \text{в } \mathbb{R}^2$$

и

$$\Delta\frac{1}{|x|^{n-2}}=-(n-2)\sigma_n\delta\quad \text{в } \mathbb{R}^n,\ n>2.$$

Пример 15. Проверим, что функция

$$E(x,t)=\frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}},$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$, а H — функция Хевисайда (т. е. мы полагаем $E(x,t)=0$ при $t<0$), удовлетворяет уравнению

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\Big)E=\delta.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа по x в $\mathbb{R}^n$, а $\delta=\delta(x,t)$ есть δ-функция в $\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}_t=\mathbb{R}^{n+1}$.

При $t>0$ $E\in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{n+1})$ и прямым дифференцированием убеждаемся в том, что

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\Big)E=0\quad \text{при } t>0.$$

Учитывая это обстоятельство, а также результат примера 7, для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ получаем

$$\begin{aligned}
\Big\langle\Big(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\Big)E,\varphi\Big\rangle &= -\Big\langle E,\Big(\frac{\partial}{\partial t}+a^2\Delta\Big)\varphi\Big\rangle = \\
&= -\int\limits_0^{+\infty}dt\int\limits_{\mathbb{R}^n}E(x,t)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi\Big)\,dx = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^{+\infty}dt\int\limits_{\mathbb{R}^n}E(x,t)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+a^2\Delta\varphi\Big)\,dx = \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}E(x,\varepsilon)\varphi(x,0)\,dx+\int\limits_\varepsilon^{+\infty}dt\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\Delta E\Big)\varphi\,dx\Big] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}E(x,\varepsilon)\varphi(x,0)\,dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}E(x,\varepsilon)(\varphi(x,\varepsilon)-\varphi(x,0))\,dx\Big] = \\
&= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}E(x,\varepsilon)\varphi(x,0)\,dx=\varphi(0,0)=\langle\delta,\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Пример 16. Покажем, что функция

$$E(x,t)=\frac{1}{2a}H(at-|x|),$$

где $a>0$, $x\in\mathbb{R}^1_x$, $t\in\mathbb{R}^1_t$, H — функция Хевисайда, удовлетворяет уравнению

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)E=\delta,$$

в котором $\delta=\delta(x,t)$ есть δ-функция пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_x\times\mathbb{R}^1_t)=\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, полагая для краткости $\Box_a:=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, находим

$$\begin{aligned}
\langle\Box_aE,\varphi\rangle=\langle E,\Box_a\varphi\rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}_x}dx\int\limits_{\mathbb{R}_t}E(x,t)\,\Box_a\varphi(x,t)\,dt = \\
&= \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{\frac{|x|}{a}}^{+\infty}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,dt-\frac{a}{2}\int\limits_0^{+\infty}dt\int\limits_{-at}^{at}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\,dx = \\
&= -\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big(x,\frac{|x|}{a}\Big)\,dx-\frac{a}{2}\int\limits_0^{+\infty}\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(at,t)-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-at,t)\Big]\,dt = \\
&= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\varphi}{dt}(at,t)\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\varphi}{dt}(-at,t)\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\varphi(0,0)+\frac{1}{2}\varphi(0,0)=\varphi(0,0)=\langle\delta,\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

В § 4 мы достаточно подробно изложили роль аппаратной функции оператора и роль свертки в задаче определения входного воздействия u по выходу $\widetilde{u}$ линейного оператора $Au=\widetilde{u}$, сохраняющего сдвиги. Все изложенное там по этому поводу без изменений переносится на многомерный случай. Значит, если нам известно фундаментальное решение E оператора A, т. е. если $AE=\delta$, то можно предъявить и решение u и уравнения $Au=f$ в виде свертки $u=f*E$.

Пример 17. Используя функцию $E(x,t)$ примера 16, можно, таким образом, предъявить решение

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi$$

уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f,$$

являющееся сверткой $f*E$ функций f и E, заведомо существующей в предположении, например, непрерывности функции f. Непосредственным дифференцированием возникшего интеграла по параметрам легко проверить, что $u(x,t)$ — действительно решение уравнения $\Box_a u=f$.

Пример 18. Аналогично на основе результата примера 15 находим решение

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\xi,\tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n}\,e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi$$

уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f$, например, в предположениях непрерывности и ограниченности функции f, обеспечивающих существование написанной свертки $f*E$. Отметим, что эти предположения делаются для примера и далеки от обязательных. Так, с точки зрения обобщенных функций можно было бы ставить вопрос о решении уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f$, допуская в качестве $f(x,t)$ обобщенную функцию $\varphi(x)\cdot\delta(t)$, где $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, а $\delta\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Формальная подстановка такой функции f под знак интеграла приводит к соотношению

$$u(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(\xi)}{[2a\sqrt{\pi t}]^n}\,e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}\,d\xi.$$

Применяя правила дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, можно убедиться, что эта функция является решением уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=0$ при $t>0$. Отметим, что $u(x,t)\to\varphi(x)$, когда $t\to+0$. Это вытекает из результата примера 7, где была установлена δ-образность встретившегося здесь семейства функций.

Пример 19. Наконец, вспоминая полученное в примере 14 фундаментальное решение оператора Лапласа, в трехмерном случае находим решение

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|}$$

уравнения Пуассона $\Delta u = -4\pi f$, которое с точностью до обозначений и перенормировки совпадает с рассмотренным нами ранее потенциалом (4) распределенного в пространстве с плотностью f заряда.

Если в качестве функции f взять $\nu(x)\delta_S$, где S — кусочно гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, то формальная подстановка в интеграл приводит к функции

$$u(x) = \int\limits_S \frac{\nu(\xi)\,d\sigma(\xi)}{|x-\xi|},$$

являющейся, как мы знаем, потенциалом простого слоя, точнее, потенциалом заряда, распределенного по поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ с поверхностной плотностью $\nu(x)$.

Задачи и упражнения

1. a) Рассуждая, как и в примере 3, где была установлена непрерывность объемного потенциала (4), докажите непрерывность потенциала простого слоя (8).

b) Проведите полное доказательство утверждений 4 и 5.

2. a) Покажите, что для любого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ можно построить функцию f класса $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, удовлетворяющую следующим трем условиям одновременно: $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $(0 \leqslant f(x) \leqslant 1)$; $\forall x \in M$ $(f(x) = 1)$; $\operatorname{supp} f \subset M_\varepsilon$, где M_ε — ε-раздутие (т. е. ε-окрестность) множества M.

b) Докажите, что для любого замкнутого в $\mathbb{R}^n$ множества M существует такая неотрицательная функция $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, что $(f(x) = 0) \Longleftrightarrow (x \in M)$.

3. a) Решите задачи 6 и 7 из § 4 применительно к случаю пространства $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности.

b) Покажите, что обобщенная функция δ_S (простой слой) не является регулярной.

4. Используя свертку, докажите следующие варианты аппроксимационной теоремы Вейерштрасса.

a) Любую непрерывную на компактном n-мерном промежутке $I \subset \mathbb{R}^n$ функцию $f: I \to \mathbb{R}$ можно равномерно приблизить на нем алгебраическим многочленом от n переменных.

b) Предыдущее утверждение остается в силе, даже если заменить I произвольным компактом $K \subset \mathbb{R}$ и считать, что $f \in C(K, \mathbb{C})$.

c) Для любого открытого в $\mathbb{R}^n$ множества $G \subset \mathbb{R}^n$ и любой функции $f \in C^{(m)}(G, \mathbb{R})$ найдется такая последовательность $\{P_k\}$ алгебраических многочленов от n переменных, что при любом мультииндексе $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ таком, что $|\alpha| \leqslant m$, на каждом компакте $K \subset G$ будет $P_k^{(\alpha)} \rightrightarrows f^{(\alpha)}$ при $k \to \infty$.

d) Если G — ограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $f \in C^{(\infty)}(\overline{G}, \mathbb{R})$, то существует такая последовательность $\{P_k\}$ алгебраических многочленов от n переменных, что при любом $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $P_k^{(\alpha)} \rightrightarrows f^{(\alpha)}$ на $\overline{G}$, когда $k \to \infty$.

e) Любую периодическую с периодами $T_1, T_2, \ldots, T_n$ по переменным $x^1, \ldots, x^n$ функцию $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ можно в $\mathbb{R}^n$ равномерно аппроксимировать тригонометрическими

многочленами от n переменных, имеющими те же периоды $T_1, T_2, \ldots, T_n$ по соответствующим переменным.

5. Эта задача содержит дальнейшие сведения об усредняющем действии свертки.

a) На основе числового неравенства Минковского в свое время при $p \geqslant 1$ мы получили интегральное неравенство Минковского

$$\Bigl(\int\limits_X |a(x)+b(x)|^p\,dx\Bigr)^{1/p} \leqslant \Bigl(\int\limits_X |a|^p(x)\,dx\Bigr)^{1/p} + \Bigl(\int\limits_X |b|^p(x)\,dx\Bigr)^{1/p}.$$

Оно в свою очередь позволяет предугадать следующее *обобщенное интегральное неравенство Минковского*:

$$\Bigl(\int\limits_X \Bigl|\int\limits_Y f(x,y)\,dy\Bigr|^p\,dx\Bigr)^{1/p} \leqslant \int\limits_Y \Bigl(\int\limits_X |f|^p(x,y)\,dx\Bigr)^{1/p}\,dy.$$

Докажите это неравенство, считая что $p \geqslant 1$, что X, Y — измеримые множества (например, промежутки в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно) и что правая часть неравенства конечна.

b) Применив обобщенное неравенство Минковского к свертке $f * g$, покажите, что при $p \geqslant 1$ имеет место соотношение $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$, где, как всегда, $\|u\|_p = \bigl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^p(x)\,dx\bigr)^{1/p}$.

c) Пусть $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, причем $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ на $\mathbb{R}^n$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$. Положим $\varphi_\varepsilon(x) := \dfrac{1}{\varepsilon}\varphi\Bigl(\dfrac{x}{\varepsilon}\Bigr)$ и $f_\varepsilon := f * \varphi_\varepsilon$ при $\varepsilon > 0$. Покажите, что если $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n)$ (т. е. если существует интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx$), то $f_\varepsilon \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ и $\|f_\varepsilon\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Отметим, что функцию f_ε часто называют *усреднением функции f с ядром φ_ε*.

d) Сохраняя предыдущие обозначения, проверьте, что на любом промежутке $I \subset \mathbb{R}^n$ справедливо следующее неравенство:

$$\|f_\varepsilon - f\|_{p,I} \leqslant \sup_{|h|<\varepsilon} \|\tau_h f - f\|_{p,I},$$

где $\|u\|_{p,I} = \bigl(\int\limits_I |u|^p(x)\,dx\bigr)^{1/p}$, а $\tau_h f(x) = f(x-h)$.

e) Покажите, что если $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n)$, то $\|\tau_h f - f\|_{p,I} \to 0$ при $h \to 0$.

f) Докажите, что для любой функции $f \in \mathcal{R}_p(\mathbb{R}^n)$, $p \geqslant 1$ справедливы соотношения $\|f_\varepsilon\|_p \leqslant \|f\|_p$ и $\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.

g) Пусть $\mathcal{R}_p(G)$ — векторное с нормой $\|\ \|_{p,G}$ пространство абсолютно интегрируемых на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ функций. Покажите, что функции класса $C^{(\infty)}(G) \cap \mathcal{R}_p(G)$ образуют всюду плотное подмножество $\mathcal{R}_p(G)$ и что это же верно и для множества $C_0^{(\infty)}(G) \cap \mathcal{R}_p(G)$.

h) Случаю $p = \infty$ в предыдущей задаче можно сопоставить следующее утверждение: любую непрерывную на G функцию можно в G равномерно аппроксимировать функциями класса $C^{(\infty)}(G)$.

i) Если f — T-периодическая локально абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, то, полагая $\|f\|_{p,T} = \Biggl(\int\limits_a^{a+T} |f|^p(x)\,dx\Biggr)^{1/p}$, будем через $\mathcal{R}_p^T$ обозначать линейное пространство с указанной нормой. Докажите, что $\|f_\varepsilon - f\|_{p,T} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.

j) Пользуясь тем, что свертка двух функций, из которых одна периодическая, сама периодична, покажите, что гладкие периодические функции класса $C^{(\infty)}$ всюду плотны в $\mathcal{R}_p^T$.

6. a) Сохраняя обозначения примера 11 и используя формулу (12), проверьте, что если $f \in C^{(1)}(\overline{\mathbb{R}^n \setminus S})$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right\} + \frac{\partial}{\partial x^j}((\textstyle\int f)_S \cos \alpha_i \delta_S) + \left(\int \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_S \cos \alpha_j \delta_S.$$

b) Покажите, что сумма $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_S \cos \alpha_i$ равна скачку $\left(\int \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_S$ нормальной производной от функции f в соответствующей точке $x \in S$, причем этот скачок не зависит от направления нормали и равен сумме $\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}_1} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}_2}\right)(x)$ нормальных производных от f, взятых в точке x с обеих сторон поверхности S.

c) Проверьте соотношение

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \left(\int \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_S \delta_S + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}((\textstyle\int f)_S \delta_S),$$

где $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ — нормальная производная (т. е. $\left\langle \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}} F, \varphi \right\rangle := -\left\langle F, \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} \right\rangle$), а $(\int f)_S$ — скачок функции f в точке $x \in S$ в направлении нормали $\boldsymbol{n}$.

d) Используя полученное выражение для Δf, докажите справедливость классической формулы Грина

$$\int\limits_G (f \Delta \varphi - \varphi \Delta f)\, dx = \int\limits_S \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{n}} - \varphi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right) d\sigma$$

в предположении, что G — конечная область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная кусочно гладкой поверхностью S; $f, \varphi \in C^{(1)}(\overline{G}) \cap C^{(2)}(G)$, а стоящий слева интеграл существует хотя бы как несобственный.

e) Покажите, что если δ-функция соответствует единичному заряду, помещенному в начале координат 0 пространства $\mathbb{R}^n$, и функция $-\frac{\partial \delta}{\partial x^1}$ отвечает диполю с электрическим моментом $+1$, расположенному в точке 0 и ориентированному вдоль оси x^1 (см. задачу 11e) из § 4), а функция $\nu(x)\delta_S$ — простой слой, отвечает распределению зарядов по поверхности S с поверхностной плотностью $\nu(x)$, то функция $-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}(\nu(x)\delta_S)$, называемая *двойным слоем*, отвечает распределению диполей по поверхности S, ориентированных по нормали $\boldsymbol{n}$ и имеющих поверхностную плотность момента $\nu(x)$.

f) Полагая в формуле Грина $\varphi = \frac{1}{|x-y|}$ и используя результат примера 14, покажите, что любая гармоническая в области G функция f класса $C^{(1)}(\overline{G})$ представляется в виде суммы потенциала простого и двойного слоя, расположенных на границе S области G.

7. a) Функция $\frac{1}{|x|}$ является потенциалом напряженности $\boldsymbol{A} = -\frac{x}{|x|^3}$ электрического поля, создаваемого в пространстве $\mathbb{R}^3$ единичным зарядом, помещенным в начало координат. Нам известно также, что

$$\operatorname{div}\left(-\frac{x}{|x|^3}\right) = 4\pi\delta, \quad \operatorname{div}\left(-\frac{qx}{|x|^3}\right) = 4\pi q\delta, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad}\left(\frac{q}{|x|}\right) = 4\pi\delta.$$

Исходя из этого, объясните, почему надо полагать, что функция $U(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\mu(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|}$ должна удовлетворять уравнению $\Delta U=-4\pi\mu$. Проверьте, что она действительно удовлетворяет написанному уравнению Пуассона.

b) Физическое следствие формулы Гаусса—Остроградского, известное в теории электромагнитного поля как *теорема Гаусса*, состоит в том, что поток через замкнутую поверхность S напряженности электрического поля, создаваемого распределенными в пространстве $\mathbb{R}^3$ зарядами, равен Q/ε_0 (см. с. 261), где Q — полный заряд в области, ограниченной поверхностью S. Докажите эту теорему Гаусса.

8. Проверьте следующие равенства, понимаемые в смысле теории обобщенных функций.

a) $\Delta E=\delta$, если

$$E(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln|x| & \text{при } x\in\mathbb{R}^2,\\[2mm] -\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{n/2}(n-2)}|x|^{-(n-2)} & \text{при } x\in\mathbb{R}^n,\ n>2.\end{cases}$$

b) $(\Delta+k^2)E=\delta$, если $E(x)=-\dfrac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$ или если $E(x)=-\dfrac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$ и $x\in\mathbb{R}^3$.

c) $\square_a E=\delta$, где оператор

$$\square_a=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^2\right],$$

а $E=\dfrac{H(at-|x|)}{2\pi a\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}$ при $x\in\mathbb{R}^2$ или $E=\dfrac{H(t)}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}\equiv\dfrac{H(t)}{2\pi a}\delta(a^2t^2-|x|^2)$ при $x\in\mathbb{R}^3$, $t\in\mathbb{R}$. Здесь $H(t)$ — функция Хевисайда, $S_{at}=\{x\in\mathbb{R}^3\mid |x|=at\}$ — сфера, $a>0$.

d) Используя предыдущие результаты, предъявите решение и уравнения $Au=f$ для соответствующего дифференциального оператора A в виде свертки $f*E$ и проверьте, например, в предположении непрерывности функции f, что полученные вами интегралы, зависящие от параметра, действительно удовлетворяют уравнению $Au=f$.

9. *Дифференцирование интеграла по жидкому объему.*

Пространство заполнено перемещающимся веществом (жидкостью). Пусть $v=v(t,x)$ и $\rho=\rho(t,x)$ — соответственно скорость перемещения и плотность вещества в момент времени t в точке x. Будем наблюдать за перемещением порции вещества, заполняющего в начальный момент область Ω_0.

a) Выразите в виде интеграла массу вещества, заполняющего область Ω_t, полученную из Ω_0 к моменту t, и запишите закон сохранения массы.

b) Продифференцировав интеграл $F(t)=\int\limits_{\Omega_t} f(t,x)\,d\omega$ с переменной областью интегрирования Ω_t (жидкий объем), покажите, что $F'(t)=\int\limits_{\Omega_t}\frac{\partial f}{\partial t}d\omega+\int\limits_{\partial\Omega_t} f\langle v,n\rangle\,d\sigma$, где Ω_t, $\partial\Omega_t$, $d\omega$, $d\sigma$, n, v, $\langle\ ,\ \rangle$ — соответственно область, ее граница, элемент объема, элемент площади, единичная внешняя нормаль, скорость потока в момент t в соответствующих точках и скалярное произведение.

c) Покажите, что $F'(t)$ из задачи b) можно представить в виде

$$F'(t)=\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\operatorname{div}(fv)\right)d\omega.$$

d) Сопоставляя результаты задач a), b), c), получите уравнение неразрывности $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho v)=0$. (См. в этой связи также гл. XIV, § 4, п. 2.)

e) Пусть $|\Omega_t|$ — объем области Ω_t. Покажите, что $\frac{d|\Omega_t|}{dt}=\int\limits_{\Omega_t}\operatorname{div} v\,d\omega$.

f) Покажите, что поле v скорости потока несжимаемой жидкости бездивергентно ($\operatorname{div} v=0$) и что это условие есть математическая запись несжимаемости (сохранения объема) любой порции эволюционирующей среды.

g) Поле $(\dot p,\dot q)$ фазовой скорости гамильтоновой системы классической механики удовлетворяет уравнениям Гамильтона $\dot p=-\frac{\partial H}{\partial q}$, $\dot q=\frac{\partial H}{\partial p}$, где $H=H(p,q)$ — функция Гамильтона системы. Вслед за Лиувиллем покажите, что гамильтонов поток сохраняет фазовый объем. Проверьте также, что функция Гамильтона H (энергия) постоянна вдоль линий тока (траекторий).

Глава XVIII

Ряд Фурье и преобразование Фурье

§ 1. Основные общие представления, связанные с понятием ряда Фурье[1]

1. Ортогональные системы функций

а. Разложение вектора в линейном пространстве. На протяжении всего курса анализа мы неоднократно отмечали, что те или иные классы функций по отношению к стандартным арифметическим операциям образуют линейные пространства. Таковы, например, основные для анализа классы гладких, непрерывных или интегрируемых на области $X \subset \mathbb{R}^n$ вещественно, комплексно или вообще векторнозначных функций.

С точки зрения алгебры равенство

$$f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n,$$

где f, $f_1, \ldots, f_n$ — функции данного класса, а α_i — коэффициенты из поля $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, попросту означает, что вектор f является линейной комбинацией векторов $f_1, \ldots, f_n$ рассматриваемого линейного пространства.

В анализе, как правило, приходится рассматривать «бесконечные линейные комбинации» — ряды функций вида

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k. \tag{1}$$

Определение суммы ряда требует, чтобы в рассматриваемом линейном пространстве была задана некоторая топология (в частности, метрика), позволяющая судить о стремлении к нулю разности $f - S_n$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$.

[1]Ж. Б. Ж. Фурье (1768—1830) — французский математик. Его основной труд «Аналитическая теория теплоты» (1822) содержал выведенное Фурье уравнение теплопроводности и метод разделения переменных (метод Фурье) его решения (см. стр. 480). Ключом в методе Фурье является разложение функции в тригонометрический ряд (ряд Фурье). Исследованием возможности такого разложения занимались впоследствии многие крупные математики. Это, в частности, привело к созданию теории функций действительного переменного, теории множеств, а также способствовало развитию самого понятия функции.

Основным для классического анализа приемом введения метрики на линейном пространстве является определение в этом пространстве той или иной нормы вектора или того или иного скалярного произведения векторов. Обсуждению этих понятий был посвящен § 1 гл. X.

Сейчас мы будем рассматривать только пространства, наделенные скалярным произведением (которое, как и прежде, будем обозначать символом $\langle\ ,\ \rangle$). В таких пространствах можно говорить об ортогональных векторах, ортогональных системах векторов и ортогональных базисах, подобно тому, как это говорилось в знакомом из аналитической геометрии случае трехмерного евклидова пространства.

Определение 1. Векторы x, y линейного пространства, наделенного скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, называются *ортогональными* (относительно этого скалярного произведения), если $\langle x, y\rangle = 0$.

Определение 2. Система векторов $\{x_k; k\in K\}$ называется *ортогональной*, если векторы системы, отвечающие различным значениям индекса k, попарно ортогональны.

Определение 3. Система векторов $\{e_k; k\in K\}$ называется *ортонормированной* (*или ортонормальной*), если для любых индексов $i, j\in K$ выполняется соотношение $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, т. е.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Определение 4. Конечная система векторов $x_1, \ldots, x_n$ называется *линейно независимой*, если равенство $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ возможно, лишь когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ (в первом случае 0 — нулевой вектор пространства, во втором случае 0 — нуль поля коэффициентов).

Произвольная система векторов линейного пространства называется *системой линейно независимых векторов*, если линейно независима каждая ее конечная подсистема.

Основной вопрос, который нас сейчас будет интересовать, это вопрос о разложении вектора пространства по заданной системе линейно независимых векторов.

Имея в виду дальнейшие приложения к пространствам функций (которые могут быть и бесконечномерны), мы должны считаться с тем, что такое разложение может, в частности, привести к ряду типа ряда (1). Именно в этом и будет состоять элемент анализа при рассмотрении того основного и по существу алгебраического вопроса, который мы поставили.

Как известно из курса аналитической геометрии, разложения по ортогональным и ортонормированным системам имеют много технических преимуществ в сравнении с разложениями по произвольным линейно независимым системам (легко вычисляются коэффициенты разложения; по координатам векторов в ортонормированном базисе легко вычисляется скалярное произведение этих векторов и т. д.).

Именно поэтому мы будем в основном интересоваться разложениями по ортогональным системам. В пространствах функций это будут *разложения по ортогональным системам функций* или *ряды Фурье*, изучению которых и посвящена эта глава.

b. Некоторые примеры ортогональных систем функций. Развивая пример 12 из § 1 гл. X, на линейном пространстве $\mathcal{R}_2(X, \mathbb{C})$ локально интегрируемых на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ функций, имеющих интегрируемый на X (в собственном или несобственном смысле) квадрат модуля, введем скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle := \int_X (f \cdot \bar{g})(x)\, dx. \tag{2}$$

Поскольку $|f \cdot \bar{g}| \leqslant \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$, интеграл в равенстве (2) сходится и, значит, корректно определяет величину $\langle f, g\rangle$.

Если речь будет о вещественнозначных функциях, то в соответствующем вещественном пространстве $\mathcal{R}_2(X, \mathbb{R})$ соотношение (2) сводится к равенству

$$\langle f, g\rangle := \int_X (f \cdot g)(x)\, dx. \tag{3}$$

Опираясь на свойства интеграла, легко проверить, что все указанные в § 1 гл. X аксиомы скалярного произведения в этом случае выполнены, если отождествлять функции, отличающиеся лишь на множествах n-мерной меры нуль. Всюду дальше в основном тексте параграфа скалярные произведения функций будут пониматься в смысле равенств (2) и (3).

Пример 1. Вспомним, что при целых m и n

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \cdot e^{-inx}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{если } m = n; \end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \pi, & \text{если } m = n \neq 0, \\ 2\pi & \text{если } m = n = 0; \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0; \tag{6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \pi, & \text{если } m = n \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Эти соотношения показывают, что $\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\}$ является ортогональной системой векторов пространства $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ относительно скалярного произведения (2), а *тригонометрическая система* $\{1, \cos nx, \sin nx; n \in \mathbb{N}\}$ ортогональна в $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Если рассматривать тригонометрическую си-

стему как набор векторов в $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, т. е. допустить линейные комбинации с комплексными коэффициентами, то в силу формул Эйлера $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$, $\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})$, $\sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$ окажется, что рассмотренные системы линейно выражаются друг через друга, т. е. алгебраически эквивалентны. По этой причине систему экспонент $\{e^{inx}; n \in \mathbb{N}\}$  также называют тригонометрической системой или точнее *тригонометрической системой в комплексной записи*.

Соотношения (4)—(7) показывают, что рассмотренные системы ортогональны, но не нормированы, а системы

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx; n \in \mathbb{N}\right\}$$

уже ортонормированы.

Если вместо отрезка $[-\pi, \pi]$ взять произвольный отрезок $[-l, l] \subset \mathbb{R}$, то заменой переменной можно получить аналогичные системы $\{e^{i\frac{\pi}{l}nx}; n \in \mathbb{Z}\}$ и $\left\{1, \cos\frac{\pi}{l}nx, \sin\frac{\pi}{l}nx; n \in \mathbb{N}\right\}$, ортогональные в пространствах $\mathcal{R}_2([-l, l], \mathbb{C})$ и $\mathcal{R}_2([-l, l], \mathbb{R})$, а также соответствующие ортонормированные системы

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{i\frac{\pi}{l}nx}; n \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi}{l}nx, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi}{l}nx; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Пример 2. Пусть I_x — промежуток в $\mathbb{R}^m$, а I_y — промежуток в $\mathbb{R}^n$, и пусть $\{f_i(x)\}$ — ортогональная система функций в $\mathcal{R}_2(I_x, \mathbb{R})$, а $\{g_j(y)\}$ — ортогональная система функций в $\mathcal{R}_2(I_y, \mathbb{R})$. Тогда, как следует из теоремы Фубини, система функций $\{u_{ij}(x, y) := f_i(x)g_j(y)\}$ ортогональна в $\mathcal{R}_2(I_x \times I_y, \mathbb{R})$.

Пример 3. Заметим, что при $\alpha \neq \beta$

$$\int_0^l \sin\alpha x \sin\beta x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\alpha-\beta)l}{\alpha-\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)l}{\alpha+\beta}\right) = \\ = \cos\alpha l \cos\beta l \cdot \frac{\beta \operatorname{tg}\alpha l - \alpha \operatorname{tg}\beta l}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

Значит, если величины α и β таковы, что $\frac{\operatorname{tg}\alpha l}{\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\beta l}{\beta}$, то исходный интеграл равен нулю. Следовательно, если $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < \ldots$ последовательность корней уравнения $\operatorname{tg}\xi l = c\xi$, где c — произвольная постоянная, то система функций $\{\sin(\xi_n x); n \in \mathbb{N}\}$ ортогональна на отрезке $[0, l]$. В частности, при $c = 0$ получаем знакомую систему $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{l}nx\right); n \in \mathbb{N}\right\}$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)u(x) = \lambda u(x),$$

где $q \in C^{(\infty)}([a, b], \mathbb{R})$, а λ — числовой коэффициент. Предположим, что функции $u_1, u_2, \ldots$ класса $C^{(2)}([a, b], \mathbb{R})$ обращаются в нуль на концах отрезка $[a, b]$ и каждая из них удовлетворяет данному уравнению со своим значени-

ем $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ коэффициента λ. Покажем, что если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то функции u_i, u_j ортогональны на $[a, b]$.

Действительно, интегрируя по частям, находим, что

$$\int_a^b \left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)u_i(x)\right]u_j(x)\,dx = \int_a^b u_i(x)\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)u_j(x)\right]dx.$$

В соответствии с уравнением отсюда получаем, что

$$\lambda_i \langle u_i, u_j\rangle = \lambda_j \langle u_i, u_j\rangle$$

и, поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$, теперь заключаем, что $\langle u_i, u_j\rangle = 0$.

В частности, если $q(x) \equiv 0$ на $[a, b]$, а $[a, b] = [0, \pi]$, мы вновь получаем ортогональную на $[0, \pi]$ систему $\{\sin nx; n \in \mathbb{N}\}$.

Дальнейшие примеры, в том числе и примеры важных для математической физики ортогональных систем, читатель найдет в задачах к этому параграфу.

c. Ортогонализация. Хорошо известно, что в конечномерном евклидовом пространстве на основе любой линейно независимой системы векторов каноническим образом (с помощью процесса ортогонализации Грама[1] — Шмидта[2]) можно построить ортогональную и даже ортонормированную систему векторов, эквивалентную данной. Этим же способом, очевидно, и в любом линейном пространстве со скалярным произведением можно ортонормировать любую линейно независимую систему его векторов $\psi_1, \psi_2, \ldots$

Напомним, что процесс ортогонализации, приводящий к ортонормированной системе $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, описывается следующими соотношениями:

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}, \quad \varphi_2 = \frac{\psi_2 - \langle\psi_2, \varphi_1\rangle\varphi_1}{\|\psi_2 - \langle\psi_2, \varphi_1\rangle\varphi_1\|}, \quad \varphi_n = \frac{\psi_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\langle\psi_n, \varphi_k\rangle\varphi_k}{\left\|\psi_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\langle\psi_n, \varphi_k\rangle\varphi_k\right\|}.$$

Пример 5. Процесс ортогонализации линейно независимой системы $\{1, x, x^2, \ldots\}$ в $\mathcal{R}_2([-1, 1], \mathbb{R})$ приводит к так называемой системе ортогональных *многочленов Лежандра*. Отметим, что многочленами Лежандра часто называют не сами многочлены этой ортонормированной системы, а им пропорциональные. Множитель пропорциональности выбирается из

[1]И. П. Грам (1850—1916) — датский математик, продолживший исследования П. Л. Чебышева и выявивший связь между разложениями в ряды по ортогональным системам и проблемой наилучшего квадратичного приближения (см. далее ряды Фурье). Именно в этих исследованиях возникли процесс ортогонализации и известная матрица Грама (см. стр. 175 и систему (18) на стр. 475).

[2]Э. Шмидт (1876—1959) — немецкий математик, изучавший в связи с интегральными уравнениями геометрию гильбертова пространства и описывавший ее языком евклидовой геометрии.

разных соображений: например, чтобы коэффициент при старшей степени многочлена был равен 1 или чтобы значение многочлена при $x=1$ было равно 1. Ортогональность системы при этом, очевидно, не нарушается, а ортонормированность, вообще говоря, теряется.

Стандартные многочлены Лежандра, определяемые формулой Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

нам уже встречались. Для них $P_n(1)=1$. Выпишем несколько первых многочленов Лежандра, нормированных условием равенства единице коэффициента при старшей степени переменной:

$$\widetilde{P}_0(x)\equiv 1, \quad \widetilde{P}_1(x)=x, \quad \widetilde{P}_2(x)=x^2-\frac{1}{3}, \quad \widetilde{P}_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x.$$

Ортонормированные многочлены Лежандра имеют вид

$$\widehat{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x),$$

где $n=0, 1, 2, \ldots$

Прямым вычислением можно убедиться в их ортогональности на отрезке $[-1, 1]$. Принимая указанную выше формулу за определение многочлена $P_n(x)$, проверим ортогональность системы $\{P_n(x)\}$ многочленов Лежандра на отрезке $[-1, 1]$. Для этого достаточно проверить, что многочлен $P_n(x)$ ортогонален многочленам $1, x, \ldots, x^{n-1}$, линейными комбинациями которых получаются многочлены $P_k(x)$ степени $k<n$.

Интегрируя по частям при $k<n$, действительно получаем, что

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)\,dx = \frac{1}{k!\,2^k}\int_{-1}^{1}\frac{d^{k+1}x^k}{dx^{k+1}}\cdot\frac{d^{n-k-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}}\,dx = 0.$$

Некоторые представления об источнике ортогональных систем функций в анализе будут даны в последнем пункте этого параграфа и в задачах к нему, а сейчас мы вернемся к основным общим вопросам, связанным с разложением вектора по векторам заданной системы в линейном пространстве со скалярным произведением.

d. Непрерывность скалярного произведения и теорема Пифагора. Нам предстоит работать не только с конечными, но и с бесконечными суммами (рядами) векторов. Отметим в этой связи свойство непрерывности скалярного произведения, которое позволяет распространить привычные алгебраические свойства скалярного произведения и на случай рядов.

Пусть X — векторное пространство со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$ и с индуцированной им в X нормой $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ (см. § 1 гл. X). Сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = x$ из векторов $x_i \in X$ к вектору $x \in X$ будет пониматься именно в смысле указанной нормы.

Лемма 1 (о непрерывности скалярного произведения). *Пусть* $\langle\ ,\ \rangle : X^2 \to \to \mathbb{C}$ — *скалярное произведение в* $\mathbb{C}$*-линейном пространстве* X. *Тогда*

a) *функция* $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ *непрерывна по совокупности переменных*;

b) *если* $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$, *то* $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\langle x_i, y\rangle$;

c) *если* $e_1, e_2, \ldots$ — *ортонормированная система векторов в* X *и* $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i e_i$, *а* $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y^i e_i$, *то* $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x^i \bar{y}^i$.

◄ Утверждение a) вытекает из неравенства Коши — Буняковского (см. § 1 гл. X):

$$|\langle x - x_0, y - y_0\rangle|^2 \leqslant \|x - x_0\|^2 \cdot \|y - y_0\|^2.$$

Из a) вытекает b), поскольку

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x_i, y\rangle + \left\langle \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i, y \right\rangle,$$

а $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} x_i \to 0$ при $n \to \infty$.

Утверждение c) получается повторным применением b) с учетом соотношения $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. ►

Из доказанной леммы непосредственно вытекает

Теорема 1 (Пифагор[1]). a) *Если* $\{x_i\}$ — *система взаимно ортогональных векторов и* $x = \sum\limits_i x_i$, *то* $\|x\|^2 = \sum\limits_i \|x_i\|^2$.

b) *Если* $\{e_i\}$ — *система ортонормированных векторов и* $x = \sum\limits_i x^i e_i$, *то* $\|x\|^2 = \sum\limits_i |x^i|^2$.

2. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье

a. Определение коэффициентов и ряда Фурье. Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированная, а $\{l_i\}$ — ортогональная системы векторов в пространстве X со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$.

Допустим, $x = \sum\limits_i x^i l_i$. Коэффициенты x^i в таком разложении вектора x находятся непосредственно:

$$x^i = \frac{\langle x, l_i\rangle}{\langle l_i, l_i\rangle}.$$

Если $l_i = e_i$, то выражение еще упрощается:

$$x^i = \langle x, e_i\rangle.$$

[1]Пифагор Самосский (ориентировочно 580—500 до н. э.) — знаменитый древнегреческий математик и философ-идеалист, основатель Пифагорейской школы, в которой, в частности, было сделано потрясшее древних математическое открытие о несоизмеримости стороны и диагонали квадрата. Сама же классическая теорема Пифагора была известна в ряде стран задолго до Пифагора (правда, возможно без доказательства).

Заметим, что формулы для x^i имеют смысл и вполне определены, если дан сам вектор x и ортогональная система $\{l_i\}$ (или $\{e_i\}$). Равенства $x = \sum_i x^i l_i$ (или $x = \sum_i x^i e_i$) для вычисления x^i по этим формулам уже не требуется.

Определение 5. Числа $\left\{\frac{\langle x, l_i\rangle}{\langle l_i, l_i\rangle}\right\}$ называются *коэффициентами Фурье вектора $x \in X$ в ортогональной системе $\{l_i\}$*.

Если система $\{e_i\}$ ортонормирована, то коэффициенты Фурье имеют вид $\{\langle x, e_i\rangle\}$.

С геометрической точки зрения i-й коэффициент Фурье $\langle x, e_i\rangle$ вектора $x \in X$ есть проекция этого вектора на направление единичного вектора e_i. В знакомом случае трехмерного евклидова пространства E^3 с заданным в нем ортонормированным репером e_1, e_2, e_3 коэффициенты Фурье $x^i = \langle x, e_i\rangle$, $i = 1, 2, 3$, суть координаты вектора x в базисе e_1, e_2, e_3, возникающие в разложении $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$.

Если бы вместо трех векторов e_1, e_2, e_3 нам было дано только два e_1, e_2, то разложение $x = x^1 e_1 + x^2 e_2$ по ним имело бы место уже далеко не для каждого вектора $x \in E^3$. Тем не менее, коэффициенты Фурье $x^i = \langle x, e_i\rangle$, $i = 1, 2$, определены и в этом случае, а вектор $x_e = x^1 e_1 + x^2 e_2$ в этом случае является ортогональной проекцией вектора x на плоскость L векторов e_1, e_2. Среди всех векторов этой плоскости вектор x_e выделяется тем, что он наиболее близок к вектору x в том смысле, что для любого вектора $y \in L$ будет $\|x - y\| \geqslant \|x - x_e\|$. В этом и состоит замечательное экстремальное свойство коэффициентов Фурье, к которому мы вернемся ниже в общей ситуации.

Определение 6. Если X — линейное пространство со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, а $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ — ортогональная система ненулевых векторов в X, то любому вектору $x \in X$ можно сопоставить ряд

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle x, l_k\rangle}{\langle l_k, l_k\rangle} l_k. \tag{8}$$

Этот ряд называется *рядом Фурье* вектора x по ортогональной системе $\{l_k\}$.

Если система $\{l_k\}$ конечна, то ряд Фурье сводится к конечной сумме.

В случае ортонормированной системы $\{e_k\}$ ряд Фурье вектора $x \in X$ запишется особенно просто:

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k. \tag{8$'$}$$

Пример 6. Пусть $X = \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Рассмотрим в этом пространстве ортогональную систему $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$ примера 1. Функции $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ отвечает ряд Фурье

$$f \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

по этой системе. Множитель $\frac{1}{2}$ при $a_0(f)$ поставлен, чтобы придать единообразие следующим, вытекающим из определения коэффициентов Фурье, формулам:

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Положим $f(x) = x$. Тогда $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а $b_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Значит, в этом случае получаем:

$$f(x) = x \sim \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx.$$

Пример 7. В пространстве $\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ рассмотрим ортогональную систему $\{e^{ikx}; k \in \mathbb{Z}\}$ примера 1. Пусть $f \in \mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. В соответствии с определением 5 и соотношениями (4), коэффициенты Фурье $\{c_k(f)\}$ функции f в системе $\{e^{ikx}\}$ выражаются формулой:

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \quad \left(= \frac{\langle f(x), e^{ikx}\rangle}{\langle e^{ikx}, e^{ikx}\rangle}\right). \tag{11}$$

Сравнивая равенства (9), (10), (11), с учетом формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ получаем следующие соотношения между коэффициентами Фурье одной и той же функции относительно тригонометрической системы, записанной в действительной и комплексной формах:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & \text{если } k \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & \text{если } k < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Для того, чтобы в формулах (9) и (12) случай $k = 0$ не составлял исключения, принято (считая $b_0 = 0$) через a_0 обозначать не сам начальный коэффициент Фурье, а вдвое большую величину, что и было сделано выше.

b. Основные общие свойства коэффициентов и рядов Фурье. Следующее геометрическое наблюдение является ключевым в этом разделе.

Лемма 2 (о перпендикуляре). *Пусть $\{l_k\}$ — конечная или счетная система ненулевых взаимно ортогональных векторов пространства X и пусть ряд Фурье вектора $x \in X$ по системе $\{l_k\}$ сходится к некоторому вектору $x_l \in X$.*

Тогда в представлении $x = x_l + h$ вектор h ортогонален x_l; более того, h ортогонален всему линейному пространству, порожденному системой векторов $\{l_k\}$, а также его замыканию в X.

◄ Учитывая свойства скалярного произведения, достаточно проверить, что $\langle h, l_m \rangle = 0$ для любого вектора $l_m \in \{l_k\}$.

Нам дано, что

$$h = x - x_l = x - \sum_k \frac{\langle x, l_k \rangle}{\langle l_k, l_k \rangle} l_k.$$

Значит,

$$\langle h, l_m \rangle = \langle x, l_m \rangle - \sum_k \frac{\langle x, l_k \rangle}{\langle l_k, l_k \rangle} \langle l_k, l_m \rangle = \langle x, l_m \rangle - \frac{\langle x, l_m \rangle}{\langle l_m, l_m \rangle} \langle l_m, l_m \rangle = 0. \text{ ►}$$

Геометрически лемма о перпендикуляре очень прозрачна, и мы ее по существу уже отметили, рассмотрев в разделе 2 а систему из двух ортогональных векторов в трехмерном евклидовом пространстве.

На основании этой леммы можно сделать ряд важных общих заключений о свойствах коэффициентов Фурье и рядов Фурье.

Неравенство Бесселя. Учитывая ортогональность векторов x_l и h в разложении $x = x_l + h$, по теореме Пифагора находим, что $\|x\|^2 = \|x_l\|^2 + \|h\|^2 \geqslant \|x_l\|^2$ (гипотенуза не меньше катета). Это соотношение, записанное в терминах коэффициентов Фурье, называется неравенством Бесселя. Выпишем его. По той же теореме Пифагора

$$\|x_l\|^2 = \sum_k \left| \frac{\langle x, l_k \rangle}{\langle l_k, l_k \rangle} \right|^2 \langle l_k, l_k \rangle. \tag{13}$$

Значит,

$$\sum_k \frac{|\langle x, l_k \rangle|^2}{\langle l_k, l_k \rangle} \leqslant \|x\|^2. \tag{14}$$

Это и есть *неравенство Бесселя*. Особенно просто оно выглядит для ортонормированной системы векторов $\{e_k\}$:

$$\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{15}$$

В терминах самих коэффициентов Фурье α_k общее неравенство Бесселя (14) запишется в виде $\sum\limits_k |\alpha_k|^2 \|l_k\|^2 \leqslant \|x\|^2$, что в случае ортонормированной системы сводится к $\sum\limits_k |\alpha_k|^2 \leqslant \|x\|^2$.

Мы поставили знак модуля у коэффициента Фурье, допуская комплексные пространства X. В этом случае коэффициент Фурье может принимать комплексные значения.

Отметим, что при выводе неравенства Бесселя мы воспользовались предположением о существовании вектора x_l и равенством (13). Но если система $\{l_k\}$ конечна, то нет сомнений в существовании вектора x_l (т. е. в сходимости ряда Фурье в X). Значит, неравенство (14) справедливо для любой конечной подсистемы $\{l_k\}$, а тогда и для всей системы тоже.

Пример 8. Для тригонометрической системы (см. формулы (9), (10)) неравенство Бесселя имеет вид

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)|^2+|b_k(f)|^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2(x)\,dx. \tag{16}$$

Для системы $\{e^{ikx};\,k\in\mathbb{Z}\}$ (см. формулу (11)) неравенство Бесселя записывается особенно изящно:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|c_k(f)|^2\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2(x)\,dx. \tag{17}$$

Сходимость рядов Фурье в полном пространстве. Пусть $\sum\limits_k x^k e_k = \sum\limits_k \langle x, e_k\rangle e_k$ — ряд Фурье вектора $x\in X$ по ортонормированной системе $\{e_k\}$. В силу неравенства Бесселя (15) ряд $\sum\limits_k |x^k|^2$ сходится. По теореме Пифагора

$$\|x^m e_m+\ldots+x^n e_n\|^2=|x^m|^2+\ldots+|x^n|^2.$$

По критерию Коши сходимости ряда правая часть этого равенства становится меньше любого $\varepsilon>0$ при всех достаточно больших значениях m и $n>m$. Значит, тогда

$$\|x^m e_m+\ldots+x^n e_n\|<\sqrt{\varepsilon}.$$

Следовательно, ряд Фурье $\sum\limits_k x^k e_k$ удовлетворяет условиям критерия Коши сходимости ряда и сходится, если только исходное пространство X является полным относительно метрики, индуцированной нормой $\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Для упрощения записи мы провели рассуждение для ряда Фурье по ортонормированной системе. Но все можно повторить и для ряда Фурье по любой ортогональной системе.

Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Покажем, что если ряд Фурье $\sum\limits_k x^k e_k=\sum\limits_k\frac{\langle x, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle}e_k$ вектора $x\in X$ по ортонормированной системе $\{e_k\}$ сходится к вектору $x_l\in X$, то именно вектор x_l дает наилучшее приближение вектора x среди всех векторов $y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ пространства L, натянутого на $\{e_k\}$, т. е. для любого $y\in L$

$$\|x-x_l\|\leqslant\|x-y\|,$$

причем равенство здесь возможно только при $y=x_l$.

Действительно, по лемме о перпендикуляре и теореме Пифагора

$$\|x-y\|^2=\|(x-x_l)+(x_l-y)\|^2=\|h+(x_l-y)\|^2=$$
$$=\|h\|^2+\|x_l-y\|^2\geqslant\|h\|^2=\|x-x_l\|^2.$$

Пример 9. Несколько отвлекаясь от нашей основной цели — изучения разложений по ортогональным системам, предположим, что имеется произвольная система линейно независимых векторов $x_1, \ldots, x_n$ в X и ищется наилучшая аппроксимация заданного вектора $x \in X$ линейными комбинациями $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ векторов системы. Поскольку в пространстве L, порожденном векторами $x_1, \ldots, x_n$, процессом ортогонализации можно построить ортонормированную систему $e_1, \ldots, e_n$, порождающую пространство L, то на основании экстремального свойства коэффициентов Фурье можно заключить, что существует, и притом единственный, вектор $x_l \in L$ такой, что $\|x - x_l\| = \inf\limits_{y \in L} \|x - y\|$. Поскольку вектор $h = x - x_l$ ортогонален пространству L, из равенства $x_l + h = x$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \langle x_1, x_1 \rangle \alpha_1 + \ldots + \langle x_n, x_1 \rangle \alpha_n = \langle x, x_1 \rangle \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle x_1, x_n \rangle \alpha_1 + \ldots + \langle x_n, x_n \rangle \alpha_n = \langle x, x_n \rangle \end{cases} \tag{18}$$

на коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ разложения $x_l = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ искомого вектора x_l по векторам системы $x_1, \ldots, x_n$. Существование и единственность решения этой системы вытекают из существования и единственности вектора x_l. В силу теоремы Крамера отсюда, в частности, можно сделать заключение о необращении в нуль определителя этой системы. Иными словами, попутно показано, что определитель Грама системы линейно независимых векторов не равен нулю.

Описанная задача аппроксимации и соответствующая ей система уравнений (18), как мы уже отмечали, возникает, например, при обработке экспериментальных данных по методу Гаусса наименьших квадратов (см. также задачу 1).

c. Полные ортогональные системы и равенство Парсеваля

Определение 7. Система $\{x_\alpha;\ \alpha \in A\}$ векторов нормированного пространства X называется *полной по отношению к множеству* $E \subset X$ (или полной в E), если любой вектор $x \in E$ можно сколь угодно точно в смысле нормы пространства X приблизить конечными линейными комбинациями векторов системы.

Если через $L\{x_\alpha\}$ обозначить линейную оболочку в X векторов системы (т. е. совокупность всех конечных линейных комбинаций векторов системы), то определение 7 можно переформулировать следующим образом:

система $\{x_\alpha\}$ *полна по отношению к множеству* $E \subset X$, если E содержится в замыкании $\overline{L}\{x_\alpha\}$ линейной оболочки векторов системы.

Пример 10. Если $X = E^3$, а e_1, e_2, e_3 — базис в E^3, то система $\{e_1, e_2, e_3\}$ полна в X, а система $\{e_1, e_2\}$ уже не является полной в X, но является полной по отношению к множеству $L\{e_1, e_2\}$ или любому его подмножеству E.

Пример 11. Последовательность функций $1, x, x^2, \ldots$ рассмотрим как систему $\{x^k; k \in 0, 1, 2, \ldots\}$ векторов пространства $\mathscr{R}_2([a, b], \mathbb{R})$ или $\mathscr{R}_2([a, b], \mathbb{C})$. Если $C[a, b]$ — подпространство непрерывных функций, то эта система полна по отношению к множеству $C[a, b]$.

◄ Действительно, какова бы ни была функция $f \in C[a, b]$ и каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, по теореме Вейерштрасса найдется алгебраический многочлен $P(x)$ такой, что $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$. Но тогда

$$\|f - P\| := \sqrt{\int_a^b |f - P|^2(x)\,dx} < \varepsilon\sqrt{b - a}$$

и, значит, линейными комбинациями функций системы можно сколь угодно точно приблизить функцию f в смысле нормы рассматриваемого пространства $\mathscr{R}_2[a, b]$. ►

Отметим, что, в отличие от ситуации примера 10, в нашем случае не каждая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция является конечной линейной комбинацией функций взятой системы, а всего лишь приближается такими линейными комбинациями. Итак, $C[a, b] \subset \bar{L}\{x^n\}$ в смысле нормы пространства $\mathscr{R}_2[a, b]$.

Пример 12. Если из системы функций $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$ удалить одну из функций, например 1, то оставшаяся система $\{\cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$ не будет полной в $\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ или $\mathscr{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.

◄ В самом деле, по экстремальному свойству коэффициентов Фурье наилучшую аппроксимацию функции $f(x) \equiv 1$ среди всех конечных линейных комбинаций

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

данной длины n дает тот тригонометрический многочлен $T_n(x)$, в котором a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции 1 относительно рассматриваемой ортогональной системы $\{\cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$. Но в силу соотношений (5) такой полином наилучшего приближения должен быть нулевым. Значит, всегда

$$\|1 - T_n\| \geqslant \|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx} = \sqrt{2\pi} > 0,$$

и приблизиться к единице ближе, чем на величину $\sqrt{2\pi}$ линейными комбинациями функций системы нельзя. ►

Теорема 2 (условия полноты ортогональной системы). *Пусть X — линейное пространство со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, а $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ — конечная или счетная система ненулевых взаимно ортогональных векторов в X. Тогда следующие условия эквивалентны*:

a) *система* $\{l_k\}$ *полна по отношению к множеству*[1] $E \subset X$;

b) *для любого вектора* $x \in E \subset X$ *имеет место разложение* (*в ряд Фурье*)

$$x = \sum_k \frac{\langle x, l_k \rangle}{\langle l_k, l_k \rangle} l_k; \tag{19}$$

c) *для любого вектора* $x \in E \subset X$ *имеет место равенство* (*Парсеваля*[2])

$$\|x\|^2 = \sum_k \frac{|\langle x, l_k \rangle|^2}{\langle l_k, l_k \rangle}. \tag{20}$$

Особенно простой вид равенства (19) и (20) имеют для ортонормированной системы векторов $\{e_k\}$. В этом случае

$$x = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k \tag{19'}$$

и

$$\|x\| = \sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2. \tag{20'}$$

Таким образом, важное равенство Парсеваля (20) или (20′) — это теорема Пифагора, записанная в терминах коэффициентов Фурье.

Докажем сформулированную теорему.

◄ a) ⇒ b) в силу экстремального свойства коэффициентов Фурье;

b) ⇒ c) по теореме Пифагора;

c) ⇒ a), т. к. ввиду леммы о перпендикуляре (см. раздел b) по теореме Пифагора имеем

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle x, l_k \rangle}{\langle l_k, l_k \rangle} l_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle x, l_k \rangle}{\langle l_k, l_k \rangle} l_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle x, l_k \rangle|^2}{\langle l_k, l_k \rangle}. \text{ ►}$$

Замечание. Отметим, что из равенства Парсеваля вытекает следующее простое необходимое условие для полноты ортогональной системы по отношению к множеству $E \subset X$: в E нет ненулевого вектора, ортогонального всем векторам системы.

В качестве полезного добавления к теореме и сделанному замечанию докажем следующее общее

Утверждение. *Пусть* X — *линейное пространство со скалярным произведением, а* $x_1, x_2, \ldots$ — *система линейно независимых векторов в* X. *Для того, чтобы система* $\{x_k\}$ *была полной в* X,

a) *необходимо, чтобы в* X *не было отличного от нуля вектора, ортогонального всем векторам системы*;

---

[1]Множество E может, в частности, состоять из одного, по тем или иным причинам представляющего интерес, вектора.

[2]М. А. Парсеваль (1755—1836) — французский математик, обнаруживший это соотношение для тригонометрической системы в 1799 г.

b) *в случае, когда X — полное (гильбертово) пространство, достаточно, чтобы в X не было отличного от нуля вектора, ортогонального всем векторам системы.*

◄ a) Если вектор h ортогонален всем векторам системы $\{x_k\}$, то на основании теоремы Пифагора заключаем, что никакая линейная комбинация векторов системы $\{x_k\}$ не может отличаться от h меньше, чем на величину $\|h\|$. Значит, если система $\{x_k\}$ полная, то $\|h\|=0$.

b) Процессом ортогонализации получим из системы $\{x_k\}$ ортонормированную систему $\{e_k\}$, линейная оболочка которой $L\{e_k\}$ совпадает с линейной оболочкой $L\{x_k\}$ исходной системы.

Берем теперь произвольный вектор $x\in X$. Ввиду полноты пространства X ряд Фурье вектора x по системе $\{e_k\}$ сходится к некоторому вектору $x_e \in \in X$. По лемме о перпендикуляре вектор $h=x-x_e$ ортогонален пространству $L\{e_k\}=L\{x_k\}$. По условию $h=0$. Значит, $x=x_e$ и ряд Фурье сходится к самому вектору x. Таким образом, вектор x сколь угодно хорошо приближается конечными линейными комбинациями векторов системы $\{e_k\}$, а следовательно, и конечными линейными комбинациями векторов системы $\{x_k\}$. ►

Условие полноты пространства в пункте b) утверждения является существенным, о чем свидетельствует следующий

Пример 13. Рассмотрим пространство l_2 (см. § 1 гл. X) вещественных последовательностей $a=(a^1, a^2, \dots)$, для которых $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(a^j)^2<\infty$. Скалярное произведение векторов $a=(a^1, a^2, \dots)$ и $b=(b^1, b^2, \dots)$ из l_2 определим стандартным образом: $\langle a, b\rangle := \sum\limits_{j=1}^{\infty} a^j b^j$.

Рассмотрим теперь в l_2 ортонормированную систему

$$e_k=(\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, 1, 0, 0, \dots), \quad k=1, 2, \dots$$

В нее не входит вектор $e_0=(1, 0, 0, \dots)$. К системе $\{e_k; k\in\mathbb{N}\}$ добавим еще вектор $e=(1, 1/2, 1/2^2, 1/2^3, \dots)$ и рассмотрим линейную оболочку $L\{e, e_1, e_2, \dots\}$ указанных векторов. Эту линейную оболочку можно рассматривать как линейное пространство X (подпространство l_2) со скалярным произведением, взятым из l_2.

Отметим, что вектор $e_0=(1, 0, 0, \dots)$, очевидно, не может быть получен конечной линейной комбинацией векторов системы $e, e_1, e_2, \dots$, поэтому он не лежит в X. Вместе с тем, он сколь угодно точно может быть приближен в l_2 такими линейными комбинациями, поскольку

$$e-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}e_k=\Big(1, 0, \dots, 0, \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}, \dots\Big).$$

Значит, мы одновременно установили, что X не замкнуто в l_2 (поэтому X, в отличие от l_2, не полное метрическое пространство), но в то же время

замыкание X в l_2 совпадает с l_2, т. к. система $e_0, e_1, e_2, \ldots$ порождает все пространство l_2.

Теперь заметим, что в $X = L\{e, e_1, e_2, \ldots\}$ нет отличного от нуля вектора, ортогонального всем векторам $e_1, e_2, \ldots$

Действительно, пусть $x \in X$, т. е. $x = \alpha e + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, и пусть $\langle x, e_k \rangle = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\langle x, e_{n+1} \rangle = \frac{\alpha}{2^{n+1}} = 0, \quad \text{т. е. } \alpha = 0.$$

Но тогда $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Значит, мы построили нужный пример: ведь ортогональная система $e_1, e_2, \ldots$ не является полной в X, т. к. она неполна в замыкании X, совпадающем с l_2.

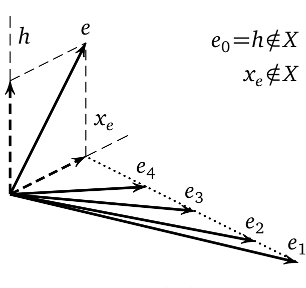


Рис. 103

Рассмотренный пример, разумеется, типично бесконечномерный. На рис. 103 сделана попытка изобразить случившееся.

Отметим, что в бесконечномерном случае (так характерном для анализа) возможность сколь угодно точно приблизить вектор линейными комбинациями векторов системы и возможность разложить вектор в ряд по векторам системы, вообще говоря, разные свойства системы.

Обсуждение этого вопроса и заключительный пример 14 прояснят особую роль ортогональных систем и рядов Фурье, для которых эти свойства имеют место одновременно (о чем говорит доказанная выше теорема).

Определение 8. Система $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ векторов линейного нормированного пространства X называется *базисом пространства* X, если любая конечная ее подсистема состоит из линейно независимых векторов и любой вектор $x \in X$ может быть представлен в виде $x = \sum_k \alpha_k x_k$, где α_k — коэффициенты из поля констант пространства X, а сходимость (в случае бесконечной суммы) понимается по норме пространства X.

Как соотносятся полнота системы векторов и свойство системы быть базисом?

В конечномерном пространстве X полнота в X системы векторов, как следует из соображений компактности и непрерывности, очевидно, равносильна тому, что эта система является и базисом в X. В бесконечномерном случае это, вообще говоря, не так.

Пример 14. Рассмотрим множество $C([-1, 1], \mathbb{R})$ непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ вещественнозначных функций как линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ со стандартным скалярным произведением, определенным формулой (3). Обозначим это пространство символом $C_2([-1, 1], \mathbb{R})$ и рассмотрим в нем систему линейно независимых векторов $1, x, x^2, \ldots$

Эта система полна в пространстве $C_2([-1, 1], \mathbb{R})$ (см. пример 11), но не является базисом.

◄ Покажем сначала, что если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k$ сходится в $C_2([-1,1],\mathbb{R})$, т. е. в смысле среднего квадратичного уклонения на отрезке $[-1,1]$, то он же, рассматриваемый как степенной ряд, сходится поточечно на интервале $]-1,1[$.

Действительно, по необходимому условию сходимости ряда имеем $\|\alpha_k x^k\|\to 0$ при $k\to\infty$. Но

$$\|\alpha_k x^k\|^2=\int_{-1}^{1}(\alpha_k x^k)^2\,dx=\alpha_k^2\frac{2}{2k+1}.$$

Значит, $|\alpha_k|<\sqrt{2k+1}$ при всех достаточно больших значениях k. В таком случае степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k$ заведомо сходится на интервале $]-1,1[$.

Обозначим теперь через φ сумму этого степенного ряда на интервале $]-1,1[$. Заметим, что на каждом отрезке $[a,b]\subset\,]-1,1[$ степенной ряд сходится к $\varphi|_{[a,b]}$ равномерно, а следовательно, и в смысле среднего квадратичного уклонения тоже.

Отсюда следует, что если непрерывная на отрезке $[-1,1]$ функция f является суммой этого ряда в смысле сходимости в пространстве $C_2([-1,1],\mathbb{R})$, то f и φ совпадают на $]-1,1[$.

Но функция φ бесконечно дифференцируема. Значит, если в пространстве $C_2([-1,1],\mathbb{R})$ взять любую не бесконечно дифференцируемую на интервале $]-1,1[$ функцию, то ее уже нельзя в этом пространстве разложить в ряд по системе $\{x^k;\,k=0,1,\dots\}$. ►

Итак, если взять, например, функцию $f(x)=|x|$ и последовательность чисел $\left\{\varepsilon_n=\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}\right\}$, то можно построить последовательность $\{P_n(x);\ n\in\mathbb{N}\}$ конечных линейных комбинаций $P_n(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\ldots+\alpha_n x^n$ элементов системы $\{x^k;\ k\in\mathbb{N}\}$ такую, что $\|f-P_n\|<\frac{1}{n}$, т. е. $P_n\to f$ при $n\to\infty$. Если нужно, то в каждой такой линейной комбинации $P_n(x)$ коэффициенты можно даже считать выбранными единственным наилучшим способом (см. пример 9). Тем не менее, разложения $f=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k$ при этом не возникает по той причине, что при переходе от $P_n(x)$ к $P_{n+1}(x)$ меняется не только последний коэффициент α_{n+1}, но, возможно, и все предыдущие $\alpha_0,\dots,\alpha_n$.

Если же система ортогональная, то этого не происходит ($\alpha_0,\dots,\alpha_n$ не меняются) в силу экстремального свойства коэффициентов Фурье.

Например, можно было бы от системы мономов $\{x^k\}$ перейти к системе ортогональных полиномов Лежандра и разложить $f(x)=|x|$ в ряд Фурье по этой системе.

*** 3. Об одном важном источнике ортогональных систем функций в анализе.** Теперь дадим представление о том, как в конкретных задачах появляются те или иные ортогональные системы функций и возникают ряды Фурье по этим системам.

Пример 15. *Метод Фурье.*

Отрезок $[0, l] \subset \mathbb{R}$ будем считать положением равновесия однородной упругой струны, закрепленной в концах этого отрезка, а в остальном свободной и способной совершать малые поперечные колебания около этого положения равновесия. Пусть $u(x, t)$ — функция, описывающая эти колебания, т. е. в каждый фиксированный момент времени $t = t_0$ график функции $u(x, t_0)$ над отрезком $0 \leqslant x \leqslant l$ задает форму струны в момент t_0. Это, в частности, означает, что $u(0, t) = u(l, t) = 0$ в любой момент t, поскольку концы струны закреплены.

Известно (см., например, гл. XIV, § 4), что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{21}$$

где положительный коэффициент a зависит от плотности и модуля упругости струны.

Одного уравнения (21), конечно, недостаточно для определения функции $u(x, t)$. Из опыта мы знаем, что движение $u(x, t)$ однозначно определится, если, например, задать положение $u(x, 0) = \varphi(x)$ струны в какой-то (будем его называть начальным) момент времени $t = 0$ и скорость $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$ точек струны в этот момент. Так, если мы, оттянув струну, придаем ей форму $\varphi(x)$ и отпускаем, то $\psi(x) \equiv 0$.

Итак, задача о свободных колебаниях струны[1], закрепленной в концах отрезка $[0, l]$, свелась к отысканию такого решения $u(x, t)$ уравнения (21), которое удовлетворяет граничным условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \tag{22}$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x). \tag{23}$$

Для решения подобных задач существует довольно естественная процедура, называемая в математике *методом разделения переменных* или *методом Фурье*. Она состоит в следующем. Решение $u(x, t)$ ищется в виде ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, члены которого $X(x)T(t)$ являются специального вида (с разделенными переменными) решениями данного уравнения, удовлетворяющими граничным условиям. В нашем случае, как мы увидим, это равносильно разложению колебания $u(x, t)$ в сумму простейших гармонических колебаний (точнее, в сумму стоячих волн).

---

[1]Отметим, что начало математическому исследованию колебаний струны положил еще Брук Тейлор.

Действительно, если функция $X(x)T(t)$ удовлетворяет уравнению (21), то $X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$, т. е.

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{24}$$

В уравнении (24) независимые переменные x и t оказались в разных его частях (разделились), поэтому обе части на самом-то деле должны представлять некоторую, одну и ту же, постоянную λ. Если учесть еще граничные условия $X(0)T(t)=X(l)T(t)=0$, которым должно удовлетворять рассматриваемое нами решение специального вида, то его отыскание сводится к одновременному решению уравнений

$$T''(t)=\lambda a^2T(t), \tag{25}$$

$$X''(x)=\lambda X(x) \tag{26}$$

при условии, что $X(0)=X(l)=0$.

Легко написать общее решение каждого из этих уравнений в отдельности:

$$T(t)=A\cos\sqrt{\lambda}at+B\sin\sqrt{\lambda}at, \tag{27}$$

$$X(x)=C\cos\sqrt{\lambda}x+D\sin\sqrt{\lambda}x. \tag{28}$$

Если мы попытаемся удовлетворить условиям $X(0)=X(l)=0$, то получим, что при $\lambda\neq 0$ должно быть $C=0$ и, отбросив тривиальный случай $D=0$, получаем, что $\sin\sqrt{\lambda}l=0$, откуда $\sqrt{\lambda}=\pm n\pi/l$, $n\in\mathbb{N}$.

Таким образом, в уравнениях (25), (26) число λ, оказывается, можно выбирать только среди некоторой специальной серии чисел (так называемых *собственных чисел задачи*), $\lambda_n=(n\pi/l)^2$, где $n\in\mathbb{N}$. Подставляя эти значения λ в выражения (27), (28), получаем серию специальных его решений

$$u_n(x,t)=\sin n\frac{\pi}{l}x\Big(A_n\cos n\frac{\pi a}{l}t+B_n\sin n\frac{\pi a}{l}t\Big), \tag{29}$$

удовлетворяющих граничным условиям $u_n(0,t)=u_n(l,t)=0$ (и описывающих стоячую волну вида $\Phi(x)\cdot\sin(\omega t+\theta)$, в которой каждая точка $x\in[0,l]$ совершает простые гармонические колебания со своей амплитудой $\Phi(x)$, но одной и той же для всех точек частотой ω).

Величины $\omega_n=n\frac{\pi a}{l}$, $n\in\mathbb{N}$, по естественной причине называют *собственными частотами струны*, а ее простейшие гармонические колебания (29) — собственными колебаниями струны. Колебание $u_1(x,t)$ с наименьшей собственной частотой называют *основным тоном струны*, а остальные ее собственные колебания $u_2(x,t), u_3(x,t), \ldots$ называют *обертонами* (именно обертоны создают характерную для данного музыкального инструмента окраску звука, называемую *тембром*).

Мы хотим теперь представить искомое колебание $u(x,t)$ в виде суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ собственных колебаний данной струны. Граничные условия (22)

при этом автоматически выполнены, и надо только позаботиться о выполнении начальных условий (23), которые означают, что

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\frac{\pi}{l}x \tag{30}$$

и

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\pi a}{l} B_n \sin n\frac{\pi}{l}x. \tag{31}$$

Таким образом, дело свелось к нахождению пока еще свободных коэффициентов A_n, B_n, или, что то же самое, к разложению функций φ и ψ в ряд Фурье по системе $\left\{\sin n\frac{\pi}{l}x;\, n\in\mathbb{N}\right\}$, ортогональной на отрезке $[0, l]$.

Полезно заметить, что возникшие из уравнения (26) функции $\left\{\sin n\frac{\pi}{l}x;\right.$ $\left. n\in\mathbb{N}\right\}$ можно рассматривать как собственные векторы линейного оператора $A = \frac{d^2}{dx^2}$, отвечающие его собственным значениям $\lambda_n = n\frac{\pi}{l}$, которые появились из условия, что оператор A действует на пространстве функций класса $C^{(2)}[0, l]$, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0, l]$. Значит, равенства (30), (31) можно трактовать как разложения по собственным векторам данного линейного оператора.

Линейные операторы, связанные с конкретными задачами, являются одним из основных источников ортогональных систем функций в анализе.

Напомним один известный из алгебры факт, вскрывающий причину ортогональности таких систем.

Пусть Z — линейное пространство со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$, а E — некоторое (возможно совпадающее с Z) его подпространство, плотное в Z. Линейный оператор $A\colon E\to Z$ называется *симметрическим*, если для любых векторов $x, y\in E$ выполнено равенство $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. Так вот: *собственные векторы симметрического оператора, отвечающие различным его собственным значениям, ортогональны.*

◄ Действительно, если $Au = \alpha u$, $Av = \beta v$ и $\alpha\neq\beta$, то

$$\alpha\langle u, v\rangle = \langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle = \beta\langle u, v\rangle,$$

откуда следует, что $\langle u, v\rangle = 0$. ►

Полезно теперь с этой точки зрения посмотреть на пример 4, где, в сущности, рассматривались собственные функции оператора $A = \left(\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\right)$, действующего на пространстве функций класса $C^{(2)}[a, b]$, обращающихся в нуль на концах отрезка $[a, b]$. Интегрированием по частям можно убедиться в том, что этот оператор на указанном пространстве является симметрическим (относительно стандартного скалярного произведения (4)), поэтому результат примера 4 является конкретным проявлением отмеченного алгебраического факта.

В частности, когда $q(x) \equiv 0$, из A получается оператор $\frac{d^2}{dx^2}$, который при $[a, b] = [0, l]$ встретился нам в последнем примере 15.

Отметим также, что в рассмотренном примере дело свелось к разложению функций φ и ψ (см. соотношения (30) и (31)) в ряд по собственным функциям оператора $A = \frac{d^2}{dx^2}$. Здесь, конечно, возникает вопрос о принципиальной возможности такого разложения, эквивалентный, как мы теперь понимаем, вопросу о полноте системы собственных функций рассматриваемого оператора в выбранном пространстве функций.

Полнота в $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ тригонометрической системы (и некоторых других конкретных систем ортогональных функций) в явной форме, по-видимому, впервые доказана Ляпуновым[1]. В неявном виде полнота конкретно тригонометрической системы присутствовала уже в работах Дирихле, посвященных исследованию сходимости тригонометрических рядов. Эквивалентное полноте равенство Парсеваля для тригонометрической системы, как уже отмечалось, было обнаружено Парсевалем еще на рубеже XVIII—XIX веков. В общей постановке вопросы полноты ортогональных систем и их приложения в задачах математической физики были одним из основных объектов исследований Стеклова[2], который и ввел в математику само понятие полноты (замкнутости) ортогональной системы. При исследовании вопросов полноты он, кстати, активно использовал метод интегрального усреднения (сглаживания) функции (см. §§ 4, 5 гл. XVII), который поэтому часто называется *методом усреднений Стеклова*.

Задачи и упражнения

1. *Метод наименьших квадратов.* Зависимость $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ величины y от величин $x_1, \ldots, x_n$ изучается экспериментально. В результате m ($\geqslant n$) экспериментов была получена таблица

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	y
a_1^1	a_2^1	$\ldots$	a_n^1	b^1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_1^m	a_2^m	$\ldots$	a_n^m	b^m

в строках которой указан набор $(a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i)$ значений параметров $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующее ему значение b^i величины y, измеренное прибором с определенной точностью. По этим экспериментальным данным требуется получить удобную

---

[1] А. М. Ляпунов (1857—1918) — русский математик и механик, выдающийся представитель школы П. Л. Чебышева, творец теории устойчивости движения. Успешно занимался различными областями математики и механики.

[2] В. А. Стеклов (1864—1926) — русский советский математик, представитель созданной П. Л. Чебышевым петербургской математической школы, основатель школы математической физики в СССР. Его имя носит Математический институт Российской Академии наук.

для расчетов эмпирическую формулу вида $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ искомой линейной функции надо подобрать так, чтобы минимизировать величину $\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\Big(b^k - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^k\Big)^2}$ среднего квадратичного уклонения данных, получаемых по эмпирической формуле, от результатов, полученных в экспериментах.

Проинтерпретируйте этот вопрос как задачу о наилучшей аппроксимации вектора $(b^1, \ldots, b^m)$ линейными комбинациями векторов $(a_i^1, \ldots, a_i^m)$, $i = 1, \ldots, n$, и покажите, что дело сводится к решению системы линейных уравнений типа системы (18).

2. a) Пусть $C[a, b]$ — линейное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с метрикой равномерной сходимости функций на этом отрезке, а $C_2[a, b]$ — то же линейное пространство, но с метрикой среднего квадратичного уклонения функций на этом отрезке (т. е. $d(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f - g|^2(x)\, dx}$). Покажите, что сходимость функций в $C[a, b]$ влечет их сходимость в $C_2[a, b]$, но не обратно, и что пространство $C_2[a, b]$ не является полным, в отличие от пространства $C[a, b]$.

b) Объясните, почему система функций $\{1, x, x^2, \ldots\}$ линейно независима и полна в $C_2[a, b]$, но не является базисом этого пространства.

c) Объясните, почему полиномы Лежандра являются полной ортогональной системой и даже базисом в $C_2[-1, 1]$.

d) Найдите первые четыре члена разложения Фурье функции $\sin \pi x$ на отрезке $[-1, 1]$ по системе полиномов Лежандра.

e) Покажите, что квадрат нормы $\|P_n\|$ в $C_2[-1, 1]$ n-го полинома Лежандра равен

$$\frac{2}{2n+1} \quad \left(= (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n!\, 2^{2n}} \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n\, dx\right).$$

f) Докажите, что среди всех полиномов данной степени n, с коэффициентом 1 при старшей степени переменной, полином Лежандра $\widetilde{P}_n(x)$ является наименее уклоняющимся от нуля в среднем на отрезке $[-1, 1]$.

g) Объясните, почему для любой функции $f \in C_2([-1, 1], \mathbb{C})$ должно быть выполнено равенство

$$\int_{-1}^{1} |f|^2(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(n + \frac{1}{2}\Big) \left| \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx \right|^2,$$

где $\{P_0, P_1, \ldots\}$ — система полиномов Лежандра.

3. a) Покажите, что если система $\{x_1, x_2, \ldots\}$ векторов полна в пространстве X, а пространство X является всюду плотным подмножеством пространства Y, то система $\{x_1, x_2, \ldots\}$ полна также и в Y.

b) Докажите, что линейное пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, всюду плотно в пространстве $\mathscr{R}_2[a, b]$. (В задаче 5g из § 5 гл. XVII утверждалось, что это верно даже для бесконечно дифференцируемых финитных на отрезке $[a, b]$ функций.)

c) Используя аппроксимационную теорему Вейерштрасса, докажите, что тригонометрическая система $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$ полна в $\mathscr{R}_2[-\pi, \pi]$.

d) Покажите, что системы $\{1, x, x^2, \ldots\}$, $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$ полны в $\mathscr{R}_2[-\pi, \pi]$, но первая не является, а вторая является базисом этого пространства.

e) Объясните, почему для любой функции $f \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ справедливо равенство (Парсеваля)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2),$$

где числа a_k, b_k определены формулами (9), (10).

f) Используя результат примера 8, покажите теперь, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$.

4. *Ортогональность с весом.* a) Пусть $p_0, p_1, \ldots, p_n$ — непрерывные положительные в области D функции. Проверьте, что формула

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n}\int_D p_k(x) f^{(k)}(x)\bar{g}^{\,(k)}(x)\,dx$$

задает скалярное произведение в $C^{(n)}(D, \mathbb{C})$.

b) Покажите, что в пространстве $\mathcal{R}(D, \mathbb{C})$ при отождествлении функций, отличающихся лишь на множествах меры нуль, с помощью положительной и непрерывной в D функции p можно ввести следующее скалярное произведение:

$$\langle f, g\rangle = \int_D p(x) f(x)\bar{g}(x)\,dx.$$

Функция p в этом случае называется *весовой функцией*, а если $\langle f, g\rangle = 0$, то говорят, что *функции f и g ортогональны с весом p*.

c) Пусть $\varphi\colon D \to G$ — диффеоморфизм области $D \subset \mathbb{R}^n$ на область $G \subset \mathbb{R}^n$, и пусть $\{u_k(y);\ k \in \mathbb{N}\}$ — ортогональная в смысле стандартного скалярного произведения (2) или (3) система функций в G. Постройте систему функций, ортогональных в D с весом $p(x) = |\det \varphi'(x)|$, а также систему функций, ортогональных в D в смысле стандартного скалярного произведения.

d) Покажите, что система функций $\{e_{m,n}(x, y) = e^{i(mx+ny)};\ m, n \in \mathbb{N}\}$ ортогональна на квадрате $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant \pi \wedge |y| \leqslant \pi\}$.

e) Постройте систему функций, ортогональную на двумерном торе $T^2 \subset \mathbb{R}^2$, заданном параметрическими уравнениями, указанными в примере 4 из § 1 гл. XII. Скалярное произведение функций f и g на торе при этом понимается как поверхностный интеграл $\int\limits_{T^2} f\bar{g}\,d\sigma$.

5. a) Из алгебры известно (и мы это попутно в теории условного экстремума тоже доказали), что каждый симметрический оператор $A\colon E^n \to E^n$, действующий в n-мерном евклидовом пространстве E^n, имеет отличные от нуля собственные векторы. В бесконечномерном случае это, вообще говоря, не так.

Покажите, что линейный оператор $f(x) \mapsto xf(x)$ умножения на независимую переменную является симметрическим в $C_2([a, b], \mathbb{R})$, но не имеет отличных от нуля собственных векторов.

b) *Задача Штурма*[1] — *Лиувилля*, часто возникающая в уравнениях математической физики, состоит в отыскании отличного от тождественного нуля решения уравнения $u''(x) + [q(x) + \lambda p(x)]u(x) = 0$ на промежутке $[a, b]$, удовлетворяющего некоторым краевым условиям, например, $u(a) = u(b) = 0$.

---

[1]Ж. Ш. Ф. Штурм (1803—1855) — французский математик (кстати, иностранный почетный член Петербургской Академии наук); основные работы относятся к решению краевых задач уравнений математической физики.

При этом функции $p(x)$ и $q(x)$ считаются известными, непрерывными на рассматриваемом промежутке $[a, b]$, причем $p(x) > 0$ на $[a, b]$.

Такая задача нам уже встретилась в примере 15, где нужно было решить уравнение (26) при условии, что $X(0) = X(l) = 0$. В этом случае у нас было $q(x) \equiv 0$, $p(x) \equiv 1$ и $[a, b] = [0, l]$. Мы убедились в том, что задача Штурма — Лиувилля, вообще говоря, может оказаться разрешимой лишь при некоторых специальных значениях параметра λ, которые по этой причине называют *собственными значениями* соответствующей *задачи Штурма — Лиувилля*.

Покажите, что если функции f и g являются решениями задачи Штурма — Лиувилля, отвечающими собственным значениям $\lambda_f \neq \lambda_g$, то на отрезке $[a, b]$ выполнено равенство $\frac{d}{dx}(g'f - f'g) = (\lambda_f - \lambda_g)pfg$ и функции f, g ортогональны на $[a, b]$ с весом p.

c) Известно (см. § 4, гл. XIV), что малые колебания неоднородной струны, закрепленной в концах отрезка $[a, b]$, описываются уравнением $(pu'_x)'_x = \rho u''_{tt}$, где $u = u(x, t)$ — функция, задающая форму струны в каждый момент t, $\rho = \rho(x)$ — линейная плотность, а $p = p(x)$ — коэффициент упругости в точке $x \in [a, b]$. Условия закрепления означают, что $u(a, t) = u(b, t) = 0$.

Покажите, что если искать решение этого уравнения в виде $X(x)T(t)$, то дело сведется к системе $T'' = \lambda T$, $(pX')' = \lambda \rho X$, в которой λ — общее для обоих уравнений число.

Таким образом, для функции $X(x)$ возникает задача Штурма — Лиувилля на отрезке $[a, b]$, разрешимая лишь при определенных (собственных) значениях параметра λ. (Считая, что $p(x) > 0$ на $[a, b]$ и что $p \in C^{(1)}[a, b]$, заменой переменной $s = \int\limits_a^x \frac{d\xi}{p(\xi)}$ уравнение $(pX')' = \lambda \rho X$, очевидно, приводится к виду, в котором оно уже не содержит первой производной.)

d) Проверьте, что оператор $S(u) = (p(x)u'(x))' - q(x)u(x)$, действующий на пространстве тех функций класса $C^{(2)}[a, b]$, которые удовлетворяют условиям $u(a) = u(b) = 0$, является симметрическим на этом пространстве (т. е. $\langle Su, v \rangle = \langle u, Sv \rangle$, где $\langle\ ,\ \rangle$ — стандартное скалярное произведение вещественных функций). Проверьте также ортогональность собственных функций оператора S, отвечающих его различным собственным значениям.

e) Покажите, что решения X_1, X_2 уравнения $(pX')' = \lambda \rho X$, отвечающие различным значениям λ_1, λ_2 параметра λ и обращающиеся в нуль на концах отрезка $[a, b]$, ортогональны на $[a, b]$ с весом $\rho(x)$.

6. *Полиномы Лежандра как собственные функции.* a) Используя указанное в примере 5 выражение полинома Лежандра $P_n(x)$, а также равенство $(x^2 - 1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$, покажите, что $P_n(1) = 1$.

b) Дифференцируя тождество $(x^2 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 - 1)^n = 2nx(x^2 - 1)^n$, покажите, что $P_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(x^2 - 1) \cdot P''_n(x) + 2x \cdot P'_n(x) - n(n+1)P_n(x) = 0.$$

c) Проверьте симметричность оператора

$$A := (x^2 - 1)\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}\left[(x^2 - 1)\frac{d}{dx}\right]$$

на пространстве $C^{(2)}[-1, 1] \subset \mathcal{R}_2[-1, 1]$ и, исходя из соотношения $A(P_n) = n(n+1)P_n$, объясните ортогональность полиномов Лежандра.

d) Используя полноту системы $\{1, x, x^2, \dots\}$ в $C^{(2)}[-1, 1]$, покажите, что размерность собственного пространства оператора A, отвечающего его собственному значению $\lambda = n(n+1)$, не может быть больше единицы.

e) Докажите, что оператор $A = \frac{d}{dx}\left[(x^2-1)\frac{d}{dx}\right]$ не может иметь в пространстве $C^{(2)}[-1, 1]$ собственных функций, не входящих в систему $\{P_0(x), P_1(x), \dots\}$ полиномов Лежандра, и собственных значений, отличных от чисел $\{n(n+1); n = 0, 1, 2, \dots\}$.

7. *Сферические функции.* a) В $\mathbb{R}^3$ при решении различных задач (например, задач теории потенциала, связанных с уравнением Лапласа $\Delta u = 0$) решение ищут в виде ряда из решений специального вида. В качестве таковых берут однородные многочлены $S_n(x, y, z)$ степени n, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$. Такие многочлены называются *гармоническими многочленами*. В сферических координатах (r, φ, θ) гармонический многочлен $S_n(x, y, z)$, очевидно, имеет вид $r^n Y_n(\theta, \varphi)$. Возникающие при этом функции $Y_n(\theta, \varphi)$, зависящие только от координат $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ на сфере, называют *сферическими функциями*. (Они являются тригонометрическими многочленами от двух переменных с $2n+1$ свободными коэффициентами у Y_n, что связано с условием $\Delta S_n = 0$.)

Используя формулу Грина, покажите, что при $m \neq n$ функции Y_m, Y_n ортогональны на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$ (в смысле скалярного произведения $\langle Y_m, Y_n\rangle = \iint Y_m \cdot Y_n \, d\sigma$, где поверхностный интеграл берется по сфере $r = 1$).

b) Отправляясь от полиномов Лежандра, можно ввести еще полиномы

$$P_{n,m} = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n}{dx^m}(x), \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

и рассмотреть функции

$$P_n(\cos\theta), \quad P_{n,m}(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad P_{n,m}(\sin\theta)\sin m\varphi. \qquad (*)$$

Оказывается, любая сферическая функция $Y_n(\theta, \varphi)$ с индексом n является линейной комбинацией указанных функций. Принимая это к сведению и учитывая ортогональность тригонометрической системы, покажите, что функции системы $(*)$ образуют ортогональный базис в $(2n+1)$-мерном пространстве сферических функций данного индекса n.

8. *Полиномы Эрмита.* В квантовой механике при исследовании уравнения линейного осциллятора приходится рассматривать функции класса $C^{(2)}(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\bar{g}\, dx$ в $C^{(2)}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, а также специальные функции $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

a) Покажите, что $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$.

b) Докажите, что $H_n(x)$ — полином степени n. Система функций $\{H_0(x), H_1(x), \dots\}$ называется *системой полиномов Эрмита*.

c) Проверьте, что функция $H_n(x)$ удовлетворяет уравнению $H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$.

d) Функции $\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ называют *функциями Эрмита*. Покажите, что $\psi_n''(x) + (2n+1-x^2)\psi_n(x) = 0$ и $\psi_n(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

e) Проверьте, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n \psi_m \, dx = 0$ при $m \neq n$.

f) Покажите, что полиномы Эрмита ортогональны на $\mathbb{R}$ с весом e^{-x^2}.

9. *Полиномы Чебышева—Лагерра*[1] $\{L_n(x); n=0, 1, 2, \dots\}$ можно определить формулой $L_n(x) := e^x \dfrac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}$.

Проверьте, что:

a) $L_n(x)$ есть полином степени n;

b) функция $L_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0;$$

c) система $\{L_n; n=0, 1, 2, \dots\}$ полиномов Чебышева — Лагерра ортогональна с весом e^{-x} на полупрямой $[0, +\infty[$.

10. *Полиномы Чебышева* $\{T_0(x) \equiv 1, T_n(x) = 2^{1-n} \cos n(\arccos x); n \in \mathbb{N}\}$ при $|x| < 1$ можно задать формулой

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Покажите, что:

a) $T_n(x)$ есть полином степени n;

b) $T_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0;$$

c) система $\{T_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ многочленов Чебышева ортогональна с весом $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на промежутке $]-1, 1[$.

11. a) В теории вероятностей и теории функций встречается следующая *система функций Радемахера*[2] $\{\psi_n(x) = \varphi(2^n x);\ n = 0, 1, 2, \dots\}$, где $\varphi(t) = \operatorname{sgn}(\sin 2\pi t)$. Проверьте, что это ортонормированная система на отрезке $[0, 1]$.

b) *Система функций Хаара*[3] $\{\chi_{n,k}(x)\}$, где $n=0, 1, 2, \dots$, а $k=1, 2, 2^2, \dots$ определяется соотношениями

$$\chi_{n,k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \dfrac{2k-2}{2^{n+1}} < x < \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -1, & \text{если } \dfrac{2k-1}{2^{n+1}} < x < \dfrac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{в остальных точках } [0, 1]. \end{cases}$$

Проверьте ортогональность системы Хаара на отрезке $[0, 1]$.

12. a) Покажите, что любое n-мерное векторное пространство со скалярным произведением изометрически изоморфно арифметическому евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ той же размерности.

b) Напомним, что метрическое пространство называется сепарабельным, если в нем имеется счетное всюду плотное подмножество. Докажите, что если линейное пространство со скалярным произведением сепарабельно, как метрическое пространство с индуцированной этим скалярным произведением метрикой, то в нем есть счетный ортонормированный базис.

---

[1] Э. Н. Лагерр (1834—1886) — французский математик.

[2] Г. А. Радемахер (1892—1969) — немецкий (с 1936 г. — американский) математик.

[3] А. Хаар (1885—1933) — венгерский математик.

c) Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство (т. е. X — сепарабельное и полное метрическое пространство с метрикой, индуцированной скалярным произведением в X). Взяв в X ортонормированный базис $\{e_i; i \in \mathbb{N}\}$, построим отображение $X \ni x \mapsto (c_1, c_2, \dots)$, где $c_i = \langle x, e_i \rangle$ — коэффициенты Фурье разложения вектора x по базису $\{e_i\}$. Покажите, что это отображение является биективным, линейным и изометричным отображением X на пространство l_2, рассмотренное в примере 14.

d) Используя рис. 103, укажите, в чем состоит идея построения примера 14, и объясните, почему она связана именно с бесконечномерностью рассматриваемого пространства.

e) Объясните, как построить аналогичный пример в пространстве функций $C[a, b] \subset \mathcal{R}_2[a, b]$.

§ 2. Тригонометрический ряд Фурье

1. Основные виды сходимости классического ряда Фурье

a. Тригонометрический ряд и тригонометрический ряд Фурье. Классический тригонометрический ряд — это ряд вида[1]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

получаемый на базе тригонометрической системы $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$. Коэффициенты $\{a_0, a_k, b_k; k \in \mathbb{N}\}$ здесь вещественные или комплексные числа. Частичные суммы тригонометрического ряда (1) суть *тригонометрические многочлены*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{2}$$

соответствующей степени n.

Если ряд (1) сходится поточечно на $\mathbb{R}$, то его сумма $f(x)$, очевидно, 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$. Она вполне определяется заданием ее ограничения на любой отрезок длины 2π.

Обратно, если дана 2π-периодическая функция на $\mathbb{R}$ (колебания, сигнал и т. п.) и мы желаем разложить ее в сумму некоторых канонических периодических функций, то для этой цели первыми претендентами служат простейшие 2π-периодические функции $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$, представляющие простые гармонические колебания целых частот.

Допустим, нам удалось представить непрерывную функцию в виде суммы

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{3}$$

равномерно сходящегося к ней тригонометрического ряда. Тогда коэффициенты разложения (3) легко и вполне однозначно находятся.

[1] Запись свободного члена в виде $a_0/2$, удобная для рядов Фурье, здесь не обязательна.

Домножая в этом случае равенство (3) последовательно на каждую из функций системы $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$, пользуясь возможностью почленно интегрировать получаемые при этом равномерно сходящиеся ряды и учитывая соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = 2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = 0 \quad \text{при } m \neq n,\ m, n \in \mathbb{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

находим коэффициенты

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

разложения (3) функции f в тригонометрический ряд.

Мы пришли к тем же коэффициентам, какие бы мы имели, рассматривая (3) как разложение Фурье вектора $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ по ортогональной системе $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$. Это не удивительно, поскольку из равномерной сходимости ряда (3), конечно, вытекает и его сходимость в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$, а тогда коэффициентами ряда (3) должны быть коэффициенты Фурье функции f по рассматриваемой ортогональной системе (см. § 1).

Определение 1. Если для функции f имеют смысл интегралы (4), (5), то сопоставляемый f тригонометрический ряд

$$f \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \tag{6}$$

называется *тригонометрическим рядом Фурье функции* f.

Поскольку других рядов Фурье, кроме тригонометрических, в этом параграфе не будет, мы для краткости позволим себе порой опускать слово «тригонометрический» и будем говорить просто «ряд Фурье функции f».

В основном мы будем иметь дело с функциями класса $\mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ или, несколько шире, с функциями, квадрат модуля которых интегрируем (хотя бы в несобственном смысле) на промежутке $]-\pi, \pi[$. Сохраним прежний символ $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ для обозначения линейного пространства таких функций

со стандартным скалярным произведением в нем

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}\,dx. \tag{7}$$

Неравенство Бесселя

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\,dx, \tag{8}$$

справедливое для любой функции $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, показывает, что далеко не каждый тригонометрический ряд (1) может быть рядом Фурье некоторой функции $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$.

Пример 1. Тригонометрический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}},$$

как нам уже известно (см. пример 7 из § 2 гл. XVI), сходится на $\mathbb{R}$, но он не является рядом Фурье никакой функции $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$ расходится.

Итак, изучаться здесь будут не произвольные тригонометрические ряды (1), а ряды Фурье (6) функций класса $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, а также класса абсолютно интегрируемых на $]-\pi, \pi[$ функций.

b. Сходимость в среднем тригонометрического ряда Фурье. Пусть

$$S_n(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \tag{9}$$

— n-я частичная сумма ряда Фурье функции $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$. Отклонение S_n от f можно измерять как в естественной метрике пространства $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, индуцированной скалярным произведением (7), т. е. в смысле *среднего квадратичного уклонения*

$$\|f - S_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f - S_n|^2(x)\,dx} \tag{10}$$

S_n от f на промежутке $[-\pi, \pi]$, так и в смысле поточечной сходимости на этом промежутке.

Первый из указанных видов сходимости для произвольного ряда Фурье был рассмотрен в § 1. Конкретизация полученных там результатов применительно к тригонометрическому ряду Фурье связана прежде всего с тем, что тригонометрическая система $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$ полна в $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ (это уже отмечалось в § 1 и будет независимо доказано в п. 4 настоящего параграфа).

Значит, основная теорема из § 1 в нашем случае позволяет утверждать, что справедлива следующая

Теорема 1 (о сходимости в среднем тригонометрического ряда Фурье). *Ряд Фурье* (6) *любой функции* $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ *сходится к ней в среднем* (10)*, т. е.*

$$f(x) \underset{\mathcal{R}_2}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

и имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(x)\, dx = \frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2). \tag{11}$$

Мы часто будем использовать более компактную комплексную форму записи тригонометрических полиномов и тригонометрических рядов, основанную на формулах Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. Используя их, частичную сумму (9) ряда Фурье можно записать в виде

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{9$'$}$$

а сам ряд Фурье (6) — в виде

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \tag{6$'$}$$

где

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & \text{если } k > 0, \\ \frac{1}{2}a_0, & \text{если } k = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & \text{если } k < 0, \end{cases} \tag{12}$$

т. е.

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

и, значит, c_k — попросту коэффициенты Фурье функции f по системе $\{e^{ikx};\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Обратим внимание на то, что суммирование ряда Фурье (6$'$) понимается в смысле сходимости сумм (9$'$).

Теорема 1 в комплексной записи означает, что для любой функции $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$

$$f(x) \underset{\mathcal{R}_2}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2. \tag{14}$$

c. Поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье. Теорема 1 полностью решает вопрос о сходимости ряда Фурье (6) в среднем, т. е. по норме пространства $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$. Вся дальнейшая часть этого параграфа в основном будет посвящена изучению условий и характера поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье. Мы рассмотрим только наиболее простые аспекты этого вопроса. Исследование поточечной сходимости тригонометрического ряда, как правило, дело настолько тонкое, что, несмотря на традиционное центральное место, которое после Эйлера, Фурье и Римана в теории функций занимали ряды Фурье, до сих пор нет внутреннего описания класса тех функций, которые представляются сходящимся к ним в каждой точке тригонометрическим рядом (*проблема Римана*). До недавнего времени не было даже известно, обязан ли ряд Фурье непрерывной функции сходиться к ней почти всюду (то, что сходимости всюду при этом может не быть, уже знали). В свое время А. Н. Колмогоров[1] даже построил пример всюду расходящегося ряда Фурье функции $f \in L[-\pi, \pi]$ (где $L[-\pi, \pi]$ — пространство функций, интегрируемых по Лебегу на промежутке $[-\pi, \pi]$, получаемое метрическим пополнением пространства $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$), а Д. Е. Меньшов[2] построил тригонометрический ряд (1), содержащий отличные от нуля коэффициенты и сходящийся к нулю почти всюду (*нуль-ряд Меньшова*). Поставленный Н. Н. Лузиным[3] вопрос (*проблема Лузина*) о том, обязан ли ряд Фурье любой функции $f \in L_2[-\pi, \pi]$ (где $L_2[-\pi, \pi]$ — метрическое пополнение пространства $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$) сходиться почти всюду, был решен, причем утвердительно, только в 1966 г. Л. Карлесоном[4]. Из результата Л. Карлесона, в частности, следует, что ряд Фурье любой функции $f \in \mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ (например, непрерывной) обязан сходиться почти во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$.

2. Исследование поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье

a. Интегральное представление частичной суммы ряда Фурье. Обратимся теперь к частичной сумме (9) ряда Фурье (6) и, подставив в ее комплексную запись (9′) выражения (13) коэффициентов Фурье, проделаем сле-

---

[1] А. Н. Колмогоров (1903—1987) — выдающийся советский ученый; работы по теории вероятностей, математической статистике, теории функций, функциональному анализу, топологии, логике, дифференциальным уравнениям и прикладным аспектам математики.

[2] Д. Е. Меньшов (1892—1988) — советский математик, один из наиболее крупных специалистов в теории функций действительного переменного.

[3] Н. Н. Лузин (1883—1950) — русский советский математик, один из наиболее тонких знатоков теории функций, родоначальник большой московской математической школы («Лузитании»).

[4] Л. Карлесон (род. 1928) — выдающийся шведский математик; основные труды относятся к различным областям современного анализа.

дующие преобразования:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \right) dt. \qquad (15)$$

Но

$$D_n(u) := \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} = \frac{e^{i(n+1)u} - e^{-inu}}{e^{iu} - 1} = \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)u} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)u}}{e^{i\frac{1}{2}u} - e^{-i\frac{1}{2}u}}, \qquad (16)$$

причем, как видно из самого определения, $D_n(u) = (2n+1)$, если $e^{iu} = 1$. Значит,

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}, \qquad (17)$$

где отношение считается равным $2n+1$, когда знаменатель дроби обращается в нуль.

Продолжая выкладку (15), теперь имеем

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt. \qquad (18)$$

Мы представили $S_n(x)$ в виде свертки функции f с функцией (17), называемой *ядром Дирихле*.

Как видно из исходного определения (16) функции $D_n(u)$, ядро Дирихле 2π-периодично, четно, и, кроме того,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\, du = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(u)\, du = 1. \qquad (19)$$

Считая функцию f 2π-периодической на $\mathbb{R}$ или периодически продолженной с отрезка $[-\pi, \pi]$ на $\mathbb{R}$, делая в (18) замену переменной, получаем, что

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\, dt. \qquad (20)$$

Делая замену переменной, мы здесь воспользовались тем, что интеграл от периодической функции по любому отрезку, длина которого равна периоду функции, одинаков.

Учитывая четность $D_n(t)$, равенство (20) можно переписать в виде

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t)\, dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (f(x-t) + f(x+t)) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\, dt. \qquad (21)$$

b. Лемма Римана и принцип локализации. Полученное представление (21) частичной суммы тригонометрического ряда Фурье совместно с формулируемым ниже наблюдением Римана служит основой для исследования поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Лемма 1 (Риман). *Если локально интегрируемая функция* $f\colon]\omega_1, \omega_2[\to \mathbb{R}$ *абсолютно интегрируема (хотя бы в несобственном смысле) на промежутке* $]\omega_1, \omega_2[$, *то*

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}\,dx \to 0 \quad \text{при } \lambda \to \infty,\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

◄ Если $]\omega_1, \omega_2[$ — конечный промежуток, а $f(x) \equiv 1$, то (22) проверяется непосредственным интегрированием и переходом к пределу.

Общий случай сведем к этому простейшему.

Фиксируя произвольно $\varepsilon > 0$, выберем сначала отрезок $[a, b] \subset]\omega_1, \omega_2[$ так, чтобы при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ было

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}\,dx - \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx \right| < \varepsilon. \tag{23}$$

Ввиду оценок

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)e^{i\lambda x}\,dx - \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\omega_1}^{a} |f(x)e^{i\lambda x}|\,dx + \int_b^{\omega_2} |f(x)e^{i\lambda x}|\,dx = \int_{\omega_1}^{a} |f|(x)\,dx + \int_b^{\omega_1} |f|(x)\,dx$$

и абсолютной интегрируемости f на $]\omega_1, \omega_2[$, указанный отрезок $[a, b]$, конечно, существует.

Поскольку $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ (точнее $f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a, b])$), то найдется такая нижняя сумма Дарбу $\sum\limits_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j$, где $m_j = \inf\limits_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$, что

$$0 < \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j < \varepsilon.$$

Вводя теперь кусочно постоянную функцию $g(x) = m_j$, если $x \in [x_{j-1}, x_j[$, $j = 1, \ldots, n$, получаем, что $g(x) \leqslant f(x)$ на $[a, b]$ и

$$0 \leqslant \left| \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx - \int_a^b g(x)e^{i\lambda x}\,dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)|\,|e^{i\lambda x}|\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx < \varepsilon. \tag{24}$$

Но

$$\int_a^b g(x)e^{i\lambda x}\,dx = \sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{i\lambda}\sum_{j=1}^{n}(m_j e^{i\lambda x})\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \to 0 \quad \text{при } \lambda\to\infty,\ \lambda\in\mathbb{R}. \qquad (25)$$

Сопоставляя соотношения (22)—(25), получаем то, что и утверждалось. ►

Замечание 1. Отделяя в (22) действительную и мнимую части, получаем, что

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\cos\lambda x\,dx \to 0 \quad \text{и} \quad \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\sin\lambda x\,dx \to 0 \qquad (26)$$

при $\lambda\to\infty$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Если бы в последних интегралах функция f была комплекснозначна, то, отделяя уже в них действительную и мнимую части, мы получили бы, что соотношения (26), а значит, и соотношение (22), на самом-то деле, конечно, справедливы и для комплекснозначных функций $f\colon\,]\,\omega_1,\omega_2[\to\mathbb{C}$.

Замечание 2. Если известно, что $f\in\mathcal{R}_2[-\pi,\pi]$, то в силу неравенства Бесселя (8) можно сразу заключить, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \to 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \to 0$$

при $n\to\infty$, $n\in\mathbb{N}$. Этим дискретным вариантом леммы Римана в принципе уже можно было бы обойтись в тех начальных исследованиях классических рядов Фурье, которые будут здесь проведены.

Возвращаясь теперь к интегральному представлению (21) частичной суммы ряда Фурье, замечаем, что если функция f удовлетворяет условиям леммы Римана, то, поскольку $\sin\frac{1}{2}t \geqslant \sin\frac{1}{2}\delta > 0$ при $0<\delta\leqslant t\leqslant\pi$, мы вправе на основании соотношений (26) записать, что

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}(f(x-t)+f(x+t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt + o(1) \quad \text{при } n\to\infty. \qquad (27)$$

Важное заключение, которое можно сделать, имея равенство (27), состоит в том, что сходимость ряда Фурье в точке вполне определяется поведением функции в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Сформулируем этот принцип в виде следующего утверждения.

Теорема 2 (принцип локализации). *Пусть f и g — вещественно- или комплекснозначные локально интегрируемые на промежутке $]-\pi,\pi[$ и абсолютно интегрируемые на нем* (*хотя бы в несобственном смысле*) *функции.*

Если функции f и g совпадают в сколь угодно малой окрестности точки $x_0 \in]-\pi, \pi[$, то их ряды Фурье

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(g) e^{ikx}$$

сходятся или расходятся в точке x_0 одновременно, а в случае сходимости их суммы в x_0 совпадают[1].

Замечание 3. Как видно из проведенных при получении равенств (21), (27) рассуждений, точка x_0 в принципе локализации может быть и концом отрезка $[-\pi, \pi]$, но тогда (и это существенно!) для совпадения в окрестности точки x_0 периодически продолженных на $\mathbb{R}$ с отрезка $[-\pi, \pi]$ функций f и g необходимо (и достаточно), чтобы исходные функции f и g совпадали в окрестности обоих концов отрезка $[-\pi, \pi]$.

c. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Определение 2. Говорят, что функция $f : \dot{U} \to \mathbb{C}$, заданная в проколотой окрестности точки $x \in \mathbb{R}$, *удовлетворяет в точке x условиям Дини*, если

a) в точке x существуют оба односторонних предела

$$f(x_-) = \lim_{t\to+0} f(x-t), \quad f(x_+) = \lim_{t\to+0} f(x+t);$$

b) интеграл

$$\int_{+0} \frac{(f(x-t)-f(x_-)) + (f(x+t)-f(x_+))}{t}\, dt$$

сходится абсолютно[2].

Пример 2. Если f — непрерывная в $U(x)$ функция, удовлетворяющая в точке x условию Гельдера

$$|f(x+t)-f(x)| \leqslant M|t|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,$$

то, поскольку тогда справедлива оценка

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \leqslant \frac{M}{|t|^{1-\alpha}},$$

функция f удовлетворяет в точке x условиям Дини.

Ясно также, что если определенная в проколотой окрестности $\dot{U}(x)$ точки x непрерывная функция f имеет односторонние пределы $f(x_-)$, $f(x_+)$ и удовлетворяет односторонним условиям Гельдера

$$|f(x+t)-f(x_+)| \leqslant Mt^{\alpha},$$
$$|f(x-t)-f(x_-)| \leqslant Mt^{\alpha},$$

---

[1]Хотя и не обязательно совпадают со значением $f(x_0) = g(x_0)$.

[2]Имеется в виду абсолютная сходимость интеграла $\int\limits_0^{\varepsilon}$ хоть при каком-нибудь значении $\varepsilon > 0$.

где $t>0$, $0<\alpha\leqslant 1$, а M — положительная постоянная, то функция f по той же причине, что и выше, будет удовлетворять условиям Дини.

Определение 3. Вещественно или комплекснозначную функцию f будем называть *кусочно непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если существует такой конечный набор точек $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ этого отрезка, что функция f определена, непрерывна на каждом интервале $]x_{j-1}, x_j[$, $j=1, \ldots, n$, и имеет односторонние пределы при подходе к его концам.

Определение 4. Функцию, имеющую на данном отрезке кусочно непрерывную производную, будем называть *кусочно непрерывно дифференцируемой функцией на этом отрезке*.

Пример 3. Если функция кусочно непрерывно дифференцируема на отрезке, то она удовлетворяет условиям Гельдера с показателем $\alpha=1$ в любой точке этого отрезка (это вытекает из теоремы Лагранжа о конечном приращении). Значит, в силу примера 1 такая функция удовлетворяет условиям Дини в любой точке рассматриваемого отрезка. В концах отрезка, разумеется, проверке подлежит только соответствующая односторонняя пара условий Дини.

Пример 4. Функция $f(x)=\operatorname{sgn} x$ удовлетворяет условиям Дини в любой точке $x\in\mathbb{R}$, в том числе и в нуле.

Теорема 3 (достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке). *Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если функция f удовлетворяет в точке $x\in\mathbb{R}$ условиям Дини, то ее ряд Фурье сходится в точке x, причем*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}=\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}. \tag{28}$$

◄ На основании соотношений (21) и (19)

$$S_n(x)-\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(f(x-t)-f(x_-))+(f(x+t)-f(x_+))}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t\,dt.$$

Поскольку $2\sin\frac{1}{2}t\sim t$ при $t\to+0$, то, благодаря условиям Дини, на основании леммы Римана можно утверждать, что при $n\to\infty$ последний интеграл стремится к нулю. ►

Замечание 4. В связи с доказанной теоремой и принципом локализации отметим, что изменение значения функции в точке не влияет ни на коэффициенты, ни на ряд, ни на частичные суммы ряда Фурье, поэтому сходимость и сумма такого ряда в точке определяется не индивидуальным значением функции в точке, а интегральным средним ее значений в сколь угодно малой окрестности этой точки. Именно это и нашло отражение в теореме 3.

Пример 5. В примере 6 из § 1 мы нашли ряд Фурье

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$$

функции $f(x) = x$ на промежутке $[-\pi, \pi]$. Продолжая функцию $f(x)$ периодично с интервала $]-\pi, \pi[$ на всю числовую ось, можно считать, что указанный ряд является рядом Фурье этой продолженной функции. Тогда на основании теоремы 3 получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = \begin{cases} x, & \text{если } |x| < \pi, \\ 0, & \text{если } |x| = \pi. \end{cases}$$

В частности, при $x = \frac{\pi}{2}$ отсюда следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 6. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $|\alpha| < 1$. Рассмотрим 2π-периодическую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ формулой $f(x) = \cos \alpha x$.

По формулам (4), (5) найдем ее коэффициенты Фурье:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx \, dx = \frac{(-1)^n \sin \pi\alpha}{\pi} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2},$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \sin nx \, dx = 0.$$

По теореме 3 в любой точке $x \in [-\pi, \pi]$ имеет место равенство

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha \sin \pi\alpha}{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2} \cos nx \right).$$

При $x = \pi$ отсюда получаем, что

$$\operatorname{ctg} \pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}. \tag{29}$$

Если $|\alpha| \leqslant \alpha_0 < 1$, то $\left| \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2 - \alpha_0^2}$, поэтому стоящий в правой части равенства (29) ряд сходится равномерно по α на любом отрезке $|\alpha| \leqslant \alpha_0 < 1$. Значит, законно его почленное интегрирование, т. е.

$$\int_0^x \left(\operatorname{ctg} \pi\alpha - \frac{1}{\pi\alpha} \right) d\alpha = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2\alpha \, d\alpha}{\alpha^2 - n^2},$$

и

$$\ln \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \ln |\alpha^2 - n^2| \Big|_0^x,$$

что дает

$$\ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\Big),$$

и окончательно

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big) \quad \text{при } |x| < 1. \tag{30}$$

Мы доказали, таким образом, соотношение (30), на которое в § 3 главы XVII ссылались при выводе формулы дополнения для функции $\Gamma(x)$ Эйлера.

d. Теорема Фейера[1]**.** Рассмотрим теперь последовательность функций

$$\sigma_n(x) := \frac{S_0(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1},$$

являющихся средними арифметическими соответствующих частичных сумм $S_0(x), \ldots, S_n(x)$ тригонометрического ряда Фурье (6) 2π-периодической функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

На основе интегрального представления (20) частичной суммы ряда Фурье имеем

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\mathscr{F}_n(t)\, dt,$$

где

$$\mathscr{F}_n(t) = \frac{1}{n+1}(D_0(t) + \ldots + D_n(t)).$$

Вспоминая явный вид (17) ядра Дирихле и учитывая, что

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\Big(k + \frac{1}{2}\Big)t = \frac{1}{2}\Big(\sin\frac{1}{2}t\Big)^{-1} \sum_{k=0}^{n} (\cos kt - \cos(k+1)t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t},$$

находим

$$\mathscr{F}_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{(n+1)\sin^2 \frac{1}{2}t}.$$

Функция $\mathscr{F}_n$ называется *ядром Фейера*, точнее, *n-м ядром Фейера*.

Учитывая исходное определение (16) ядра Дирихле D_n, можно заключить, что ядро Фейера является гладкой 2π-периодической функцией, значение которой равно $(n+1)$ там, где знаменатель последней дроби обращается в нуль.

Свойства ядер Фейера и Дирихле во многом схожи, но в отличие от ядер Дирихле ядра Фейера еще и неотрицательны, поэтому имеет место следующая

[1] Л. Фейер (1880—1959) — известный венгерский математик.

Лемма 2. *Последовательность функций*

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}_n(x), & \text{если } |x| \leqslant \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi, \end{cases}$$

является δ-образной на $\mathbb{R}$.

◄ Неотрицательность $\Delta_n(x)$ ясна.

Равенство (19) позволяет заключить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathscr{F}_n(x)\,dx = \frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x)\,dx = 1.$$

Наконец, при любом $\delta > 0$

$$0 \leqslant \int_{-\infty}^{-\delta} \Delta_n(x)\,dx = \int_{\delta}^{+\infty} \Delta_n(x)\,dx = \int_{\delta}^{\pi} \Delta_n(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{\delta}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{2}x} \to 0$$

при $n \to \infty$. ►

Теорема 4 (Фейер). *Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция. Тогда,*

a) *если на множестве $E \subset \mathbb{R}$ функция f равномерно непрерывна, то*

$$\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на } E \text{ при } n \to \infty;$$

b) *если $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, то*

$$\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на } \mathbb{R} \text{ при } n \to \infty;$$

c) *если f непрерывна в точке $x \in \mathbb{R}$, то*

$$\sigma_n(x) \to f(x) \quad \text{при } n \to \infty.$$

◄ Утверждения b) и c) являются специальными случаями утверждения a).

Само же утверждение a) является частным случаем общего утверждения 5 из § 4 гл. XVII о сходимости свертки, поскольку

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\mathscr{F}_n(t)\,dt = (f * \Delta_n)(x). \ ►$$

Следствие 1 (теорема Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическими многочленами). *Если функция $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то эта функция может быть сколь угодно точно равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ аппроксимирована тригонометрическими многочленами.*

◄ Продолжая f 2π-периодически, получим непрерывную периодическую на $\mathbb{R}$ функцию, к которой по теореме Фейера равномерно сходятся тригонометрические многочлены $\sigma_n(x)$. ►

Следствие 2. *Если функция f непрерывна в точке x, то ее ряд Фурье либо вовсе расходится в этой точке, либо сходится к $f(x)$.*

◄ Формально в проверке нуждается только случай сходимости. Если последовательность $S_n(x)$ при $n \to \infty$ имеет предел, то тот же предел имеет и последовательность $\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}$. Но по теореме Фейера $\sigma_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$, значит, и $S_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$, если вообще предел $S_n(x)$ при $n \to \infty$ существует. ►

Замечание 5. Отметим, что ряд Фурье непрерывной функции и в самом деле может в некоторых точках расходиться.

3. Гладкость функции и скорость убывания коэффициентов Фурье

a. Оценка коэффициентов Фурье гладкой функции. Начнем с простой, но важной и полезной леммы.

Лемма 3 (о дифференцировании ряда Фурье). *Если непрерывная функция $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, принимающая на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ равные значения $(f(-\pi) = f(\pi))$, кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье ее производной*

$$f' \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f') e^{ikx}$$

может быть получен формальным дифференцированием ряда Фурье

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$$

самой функции, т. е.

$$c_k(f') = ikc_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

◄ Исходя из определения коэффициентов Фурье (13), интегрированием по частям находим

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = ikc_k(f),$$

поскольку $f(\pi)e^{-ik\pi} - f(-\pi)e^{ik\pi} = 0$. ►

Утверждение 1 (о связи гладкости функции и скорости убывания ее коэффициентов Фурье). *Пусть $f \in C^{(m-1)}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ и $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$. Если функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$ порядка m, то*

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{32}$$

и

$$|c_k(f)| = \frac{\gamma_k}{|k|^m} = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \quad \text{при } k \to \infty,\ k \in \mathbb{Z}, \tag{33}$$

причем $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$.

◄ Соотношение (32) получается в результате m-кратного использования равенства (31)

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)c_k(f^{(m-1)}) = \ldots = (ik)^m c_k(f).$$

Полагая $\gamma_k = |c_k(f^{(m)})|$, с учетом неравенства Бесселя

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f^{(m)})|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}|^2(x)\,dx,$$

из (32) получаем соотношение (33). ►

Замечание 6. В доказанном утверждении, как и в лемме 3, вместо условий $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ можно было бы считать, что f является заданной на всей прямой 2π-периодической функцией.

Замечание 7. Если тригонометрический ряд Фурье записывать в форме (6), а не в комплексной форме (6′), то вместо простых соотношений (32) пришлось бы писать заметно более громоздкие равенства, смысл которых, однако, тот же: при указанных условиях ряд Фурье можно дифференцировать почленно (в какой бы из форм (6) или (6′) он ни был задан). Что же касается оценок коэффициентов Фурье $a_k(f)$, $b_k(f)$ ряда (6), то, поскольку $a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f)$, $b_k(f) = i(c_k(f) - c_{-k}(f))$ (см. формулы (12)), из (33) следует, что если функция f удовлетворяет указанным в утверждении условиям, то

$$|a_k(f)| = \frac{\alpha_k}{k^m}, \quad |b_k(f)| = \frac{\beta_k}{k^m}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{33′}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$, причем можно считать $\alpha_k = \beta_k = \gamma_k + \gamma_{-k}$.

b. Гладкость функции и скорость сходимости ее ряда Фурье

Теорема 5. *Если функция $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ такова, что*

a) $f \in C^{(m-1)}[-\pi, \pi]$, $m \in \mathbb{N}$,

b) $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$,

c) *f имеет на $[-\pi, \pi]$ кусочно непрерывную производную $f^{(m)}$ порядка $m \geqslant 1$, то ряд Фурье функции f сходится к f абсолютно и равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, причем отклонение n-й частичной суммы $S_n(x)$ ряда Фурье от $f(x)$ на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет оценку*

$$|f(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}},$$

где $\{\varepsilon_n\}$ — стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел.

◄ Частичную сумму (9) ряда Фурье запишем в компактной форме (9′)

$$S_n(x) = \sum_{-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}.$$

В соответствии с условиями на функцию f, согласно утверждению 1, имеем $|c_k(f)| = \frac{\gamma_k}{|k|^m}$, причем $\sum \frac{\gamma_k}{|k|^m} < \infty$: поскольку $0 \leqslant \frac{\gamma_k}{|k|^m} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\gamma_k^2 + \frac{1}{k^{2m}}\Big)$ и $m \geqslant$

$\geqslant 1$, имеем $\sum \frac{\gamma_k}{|k|^m} < \infty$. Значит, последовательность $S_n(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ равномерно сходится (в силу мажорантного признака Вейерштрасса для рядов или критерия Коши для последовательностей).

В силу теоремы 3 предел $S(x)$ последовательности $S_n(x)$ совпадает с $f(x)$, поскольку функция f удовлетворяет условиям Дини в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$ (см. пример 3) и, ввиду $f(-\pi) = f(\pi)$, функция f периодически продолжается на $\mathbb{R}$ с сохранением условий Дини в любой точке $x \in \mathbb{R}$.

Теперь, используя соотношение (31), имеем возможность приступить к оценке:

$$|f(x) - S_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \Big|\sum_{\pm k=n+1}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\pm k=n+1}^{\infty} |c_k(f)| = \sum_{\pm k=n+1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{|k|^m} \leqslant \left(\sum_{\pm k=n+1}^{\infty} \gamma_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\pm k=n+1}^{\infty} 1/k^{2m}\right)^{1/2}.$$

Первый сомножитель в правой части неравенства Коши—Буняковского стремится к нулю при $n \to \infty$, поскольку $\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$.

Далее (см. рис. 104)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leqslant \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{n^{2m-1}}.$$

Таким образом, получается то, что и утверждает теорема 5. ►

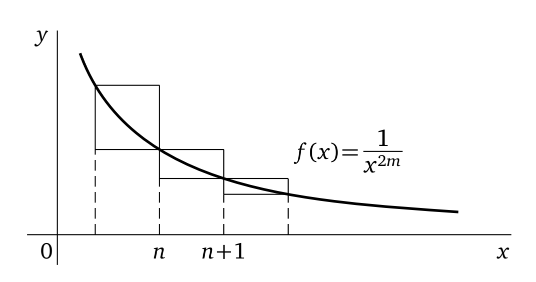


Рис. 104

В связи с полученными результатами сделаем несколько полезных замечаний.

Замечание 8. Из теоремы 5 (и существенно использованной при ее доказательстве теоремы 3) можно легко и независимо от теоремы Фейера вновь получить аппроксимационную теорему Вейерштрасса, сформулированную в следствии 1.

◄ Достаточно доказать ее для вещественнозначных функций. Используя равномерную непрерывность функции f на отрезке $[-\pi, \pi]$, аппроксимируем f на этом отрезке равномерно с точностью до $\varepsilon/2$ кусочно линейной

непрерывной функцией $\varphi(x)$, принимающей на концах отрезка те же значения, что и f, т. е. $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$ (рис. 105). По теореме 5 ряд Фурье функции φ сходится к φ равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$. Взяв частичную сумму этого ряда, уклоняющуюся от $\varphi(x)$ не более чем на $\varepsilon/2$, получим тригонометрический многочлен, аппроксимирующий исходную функцию f с точностью до ε на всем отрезке $[-\pi,\pi]$. ►

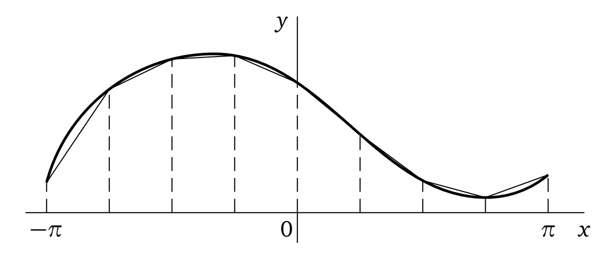


Рис. 105

Замечание 9. Предположим, нам удалось представить функцию f, имеющую особенность — скачок, в виде суммы $f=\varphi+\psi$ некоторой гладкой функции ψ и некоторой простой функции φ, имеющей ту же особенность, что и f (рис. 106). Тогда ряд Фурье функции f окажется суммой быстро и равномерно сходящегося в силу теоремы 5 ряда Фурье функции ψ и ряда Фурье функции φ. Последний можно считать известным, если взять стандартную функцию φ (на рисунке $\varphi(x)=-\pi-x$ при $-\pi<x<0$ и $\varphi(x)=\pi-x$ при $0<x<\pi$).

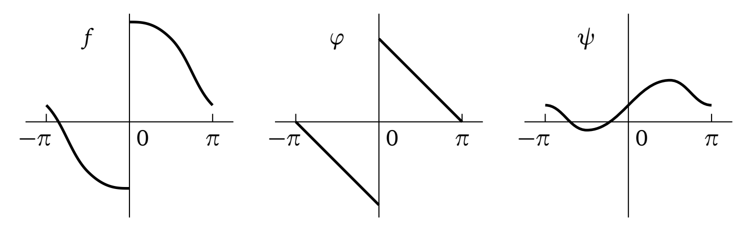


Рис. 106

Это наблюдение используется как в прикладных и вычислительных вопросах, связанных с рядами (*метод* А. Н. Крылова[1] *выделения особенностей* и улучшение сходимости рядов), так и в самой теории тригонометрических рядов Фурье (см., например, *явление Гиббса*[2], описанное в задаче 11).

[1]А. Н. Крылов (1863—1945) — русский советский механик и математик, внесший большой вклад в вычислительную математику и особенно в методы расчета элементов кораблей.

[2]Дж. У. Гиббс (1839 — 1903) — американский физик и математик, один из основоположников термодинамики и статистической механики.

Замечание 10 (об интегрировании ряда Фурье). Благодаря теореме 5 можно сформулировать и доказать следующее дополняющее лемму 3 о дифференцировании ряда Фурье

Утверждение 2. *Если функция* $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *кусочно непрерывна, то соответствие* $f(x) \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$ *после интегрирования превращается в равенство*

$$\int_0^x f(t)\,dt = c_0(f)x + {\sum_{-\infty}^{\infty}}' \frac{c_k(f)}{ik}(e^{ikx} - 1),$$

где штрих свидетельствует об отсутствии в сумме члена с индексом $k = 0$*; суммирование происходит по симметричным частичным суммам* ${\sum\limits_{-n}^{n}}'$*, и при этом ряд сходится равномерно на отрезке* $[-\pi, \pi]$.

◄ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - c_0(f)x$$

на промежутке $[-\pi, \pi]$. Очевидно, $F \in C[-\pi, \pi]$. Далее, $F(-\pi) = F(\pi)$, поскольку

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - 2\pi c_0(f) = 0,$$

что следует из определения $c_0(f)$. Поскольку производная $F'(x) = f(x) - c_0(f)$ функции F кусочно непрерывна, ряд Фурье $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{ikx}$ функции F по теореме 5 сходится к F равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. По лемме 4 $c_k(F) = \frac{c_k(F')}{ik}$ при $k \neq 0$. Но $c_k(F') = c_k(f)$, если $k \neq 0$. Записывая теперь равенство $F(x) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{ikx}$ в терминах функции f и учитывая, что $F(0) = 0$, получаем то, что и утверждалось. ►

4. Полнота тригонометрической системы

a. Теорема о полноте. В заключение вернемся вновь от поточечной сходимости ряда Фурье к его сходимости в среднем (10). Точнее, используя накопленные факты о характере поточечной сходимости ряда Фурье, дадим независимое от уже встречавшегося в задачах доказательство полноты в $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ тригонометрической системы $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$. При этом, как и в п. 1, под $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ или $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ понимается линейное пространство вещественно- или комплекснозначных функций, локально интегрируемых на промежутке $]-\pi, \pi[$ и имеющих интегрируемый на $]-\pi, \pi[$ (хотя бы в несобственном смысле) квадрат модуля; это векторное пространство предполагается наделенным стандартным скалярным произве-

дением (7), порождающим норму, сходимость по которой и есть сходимость в среднем (10).

Теорема, которую мы собираемся доказать, попросту утверждает, что система тригонометрических функций полна в $\mathcal{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$. Но мы сформулируем теорему так, что в самой формулировке будет ключ к излагаемому доказательству. Оно основано на том очевидном факте, что свойство полноты транзитивно: если A приближает B, а B приближает C, то A приближает C.

Теорема 6 (о полноте тригонометрической системы). *Любая функция $f\in\mathcal{R}_2[-\pi,\pi]$ может быть сколь угодно точно приближена в среднем*

a) *финитными на* $]-\pi,\pi[$ *интегрируемыми по Риману на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *функциями*;

b) *финитными кусочно постоянными на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *функциями*;

c) *финитными непрерывными кусочно линейными на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *функциями*;

d) *тригонометрическими полиномами.*

◄ Поскольку теорему, очевидно, достаточно доказать для вещественнозначных функций, то мы и ограничимся этим случаем.

a) Из определения несобственного интеграла следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx=\lim_{\delta\to+0}\int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} f^2(x)\,dx.$$

Значит, каково бы ни было число $\varepsilon>0$, найдется число $\delta>0$ такое, что функция

$$f_\delta(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } |x|<\pi-\delta,\\ 0, & \text{если } \pi-\delta\leqslant|x|\leqslant\pi,\end{cases}$$

будет отличаться в среднем на $[-\pi,\pi]$ от f меньше, чем на ε, поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-f_\delta)^2(x)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi+\delta} f^2(x)\,dx+\int_{\pi-\delta}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

b) Достаточно проверить, что любую функцию вида f_δ можно аппроксимировать в $\mathcal{R}_2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ кусочно постоянными финитными на $[-\pi,\pi]$ функциями. Но функция f_δ уже интегрируема по Риману на отрезке $[-\pi+\delta,\pi-\delta]$. Значит, она ограничена на нем некоторой постоянной M, и, кроме того, существует такое разбиение $-\pi+\delta=x_0<x_1<\ldots<x_n=\pi-\delta$ этого отрезка, что соответствующая ему нижняя интегральная сумма Дарбу $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$ функции f_δ отличается от интеграла f_δ по отрезку $[-\pi+\delta,\pi+\delta]$ меньше чем на $\varepsilon>0$.

Полагая теперь

$$g(x)=\begin{cases} m_i, & \text{если } x\in\,]x_{i-1},x_i[,\ i=1,\dots,n,\\ 0 & \text{в остальных точках отрезка } [-\pi,\pi],\end{cases}$$

получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f_\delta-g)^2(x)\,dx\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}|f_\delta-g|\,|f_\delta+g|(x)\,dx\leqslant 2M\int_{-\pi+\delta}^{-\pi+\delta}(f_\delta-g)(x)\,dx\leqslant 2M\varepsilon,$$

и, значит, действительно f_δ можно сколь угодно точно в среднем на отрезке $[-\pi,\pi]$ аппроксимировать кусочно постоянными на этом отрезке функциями, обращающимися в нуль в окрестности концов отрезка $[-\pi,\pi]$.

c) Теперь уже достаточно научиться приближать в среднем указанные в b) функции. Пусть g — такая функция. Все ее точки разрыва $x_1,\dots,x_n$ лежат в интервале $]-\pi,\pi[$. Их конечное число, поэтому, каково бы ни было число $\varepsilon>0$, можно подобрать число $\delta>0$ столь маленькое, что δ-окрестности точек $x_1,\dots,x_n$ не пересекаются, содержатся строго внутри интервала $]-\pi,\pi[$ и $2\delta nM<\varepsilon$, где $M=\sup\limits_{|x|\leqslant\pi}|g(x)|$. Заменяя теперь функцию g на отрезках $[x_i-\delta,x_i+\delta]$, $i=1,\dots,n$, линейной функцией, интерполирующей значения $g(x_i-\delta)$ и $g(x_i+\delta)$, которые функция g принимает на концах соответствующего отрезка, мы получим кусочно линейную непрерывную и финитную на $[-\pi,\pi]$ функцию g_δ. По построению $|g_\delta(x)|\leqslant M$ на $[-\pi,\pi]$, значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi}(g-g_\delta)^2(x)\,dx\leqslant 2M\int_{-\pi}^{\pi}|g-g_\delta|(x)\,dx=$$

$$=2M\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta}|g-g_\delta|(x)\,dx\leqslant 2M\cdot(2M\cdot2\delta)\cdot n<4M\varepsilon,$$

и возможность аппроксимации доказана.

d) Осталось показать, что тригонометрическим полиномом можно в среднем на отрезке $[-\pi,\pi]$ приблизить любую функцию класса c). Но ведь при любом $\varepsilon>0$ для любой функции типа g_δ по теореме 5 найдется тригонометрический многочлен T_n, равномерно с точностью до ε аппроксимирующий g_δ на отрезке $[-\pi,\pi]$. Значит, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}(g_\delta-T_n)^2(x)\,dx<2\pi\varepsilon^2$, и возможность сколь угодно точной аппроксимации в среднем на отрезке $[-\pi,\pi]$ любой функции класса c) посредством тригонометрических полиномов установлена.

Ссылаясь на неравенство треугольника в $\mathcal{R}_2[-\pi,\pi]$, можно теперь заключить, что и вся теорема 6 о полноте в $\mathcal{R}_2[-\pi,\pi]$ указанных классов функций тоже доказана. ►

b. Скалярное произведение и равенство Парсеваля. После доказанной полноты в $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ тригонометрической системы на основании теоремы 1 можем утверждать, что для любой функции $f \in \mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ имеет место равенство

$$f = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx) \tag{34}$$

или, в комплексной записи, равенство

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_j(f) e^{ikx}, \tag{35}$$

где сходимость понимается как сходимость по норме пространства $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$, т. е. в среднем, а предельный переход в (35) совершается при $n \to \infty$ по суммам вида $S_n(x) = \sum\limits_{-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$.

Если переписать равенства (34), (35) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} f = \frac{a_0(f)}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k(f) \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + b_k(f) \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \Big), \tag{34$'$}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{35$'$}$$

то в правых частях окажутся ряды по ортонормированным системам

$$\Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx; k \in \mathbb{N} \Big\}, \quad \Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}; k \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Значит, на основании общего закона вычисления скалярного произведения векторов, по их координатам в ортонормированном базисе (см. лемму 1 из § 1) можно утверждать, что для любых функций f и g из $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi} \langle f, g \rangle = \frac{a_0(f) \bar{a}_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \bar{a}_k(g) + b_k(f) \bar{b}_k(g)) \tag{36}$$

или, в иной записи, равенство

$$\frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) \bar{c}_k(g), \tag{37}$$

где, как всегда,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \bar{g}(x)\, dx.$$

В частности, при $f=g$ из (36) и (37) получаем записанное в двух эквивалентных между собой формах классическое равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\|f\|^2=\frac{|a_0(f)|^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)|^2+|b_k(f)|^2), \tag{38}$$

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k(f)|^2. \tag{39}$$

Мы уже отмечали, что с геометрической точки зрения равенство Парсеваля можно рассматривать как бесконечномерный вариант теоремы Пифагора.

На основе равенства Парсеваля легко доказать следующее полезное

Утверждение 3 (о единственности ряда Фурье). *Пусть f и g — функции из $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$. Тогда*

a) *если тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\quad\left(=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}\right)$$

сходится к f в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$, то он является рядом Фурье функции f;

b) *если функции f и g имеют один и тот же ряд Фурье, то они совпадают почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$, т. е. $f=g$ в $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$.*

◄ Утверждение a) на самом деле есть частный случай общего факта единственности разложения вектора в ряд по ортогональной системе. Скалярное умножение, как мы знаем (см. лемму 1b § 1), немедленно показывает, что коэффициентами такого разложения являются коэффициенты Фурье и только они.

Утверждение b) можно получить из равенства Парсеваля с учетом доказанной полноты в $\mathcal{R}_2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ тригонометрической системы.

Поскольку разность $(f-g)$ имеет нулевой ряд Фурье, то в силу равенства Парсеваля $\|f-g\|_{\mathcal{R}_2}=0$. Значит, функции f и g совпадают во всех точках непрерывности, т. е. почти всюду. ►

Замечание 11. Рассматривая ряды Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, мы в свое время отметили, что различные функции класса $C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ могут иметь одинаковые ряды Тейлора (в некоторых точках $a\in\mathbb{R}$). Этот контраст с только что доказанной теоремой единственности рядов Фурье не следует слишком абсолютизировать, поскольку всякая теорема единственности относительна в том смысле, что она относится к определенному пространству и определенному виду сходимости.

Например, в пространстве аналитических функций (т. е. функций, допускающих локально представление в виде поточечно сходящегося к ним степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$) две различные функции в любой точке имеют не совпадающие тейлоровские разложения.

Если, в свою очередь, при изучении тригонометрических рядов отказаться от пространства $\mathcal{R}_2[-\pi, \pi]$ и рассматривать поточечную сходимость тригонометрического ряда, то, как уже отмечалось (см. стр. 494), можно построить тригонометрический ряд, не все коэффициенты которого равны нулю и который тем не менее почти всюду сходится к нулю. По утверждению 3 такой нуль-ряд, конечно, не сходится к нулю в смысле среднего квадратичного уклонения.

В заключение в качестве иллюстрации использования свойств тригонометрических рядов Фурье рассмотрим следующий принадлежащий Гурвицу[1] вывод классического изопериметрического неравенства в двумерном случае. Чтобы избавиться от громоздких выражений и случайных технических трудностей, мы будем пользоваться комплексной записью.

Пример 7. Между объемом V области в евклидовом пространстве E^n, $n \geqslant 2$ и $(n-1)$-мерной площадью F, ограничивающей область гиперповерхности, имеется соотношение

$$n^n v_n V^{n-1} \leqslant F^n, \tag{40}$$

называемое *изопериметрическим неравенством*; здесь v_n — объем единичного n-мерного шара в E^n. Равенство в изопериметрическом неравенстве (40) имеет место только для шара.

Название «изопериметрическое» связано с классической геометрической задачей отыскания среди замкнутых плоских кривых данной длины L той кривой, которая ограничивает наибольшую площадь S. В этом случае неравенство (40) означает, что

$$4\pi S \leqslant L^2. \tag{41}$$

Именно это неравенство мы теперь и докажем, считая, что рассматриваемая кривая является гладкой и задана параметрически в виде $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, где s — натуральный параметр (длина) вдоль кривой, а функции φ и ψ принадлежат классу $C^{(1)}[0, L]$. Условие замкнутости кривой означает, что $\varphi(0) = \varphi(L)$, $\psi(0) = \psi(L)$.

Перейдем от s к параметру $t = 2\pi \frac{s}{L} - \pi$, изменяющемуся от $-\pi$ до π, и будем считать, что наша кривая задана в параметрическом виде

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi, \tag{42}$$

причем

$$x(-\pi) = x(\pi), \quad y(-\pi) = y(\pi). \tag{43}$$

Соотношения (42) запишем в виде одной комплекснозначной функции

$$z = z(t), \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi, \tag{42'}$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$, и ввиду (43) $z(-\pi) = z(\pi)$.

[1] А. Гурвиц (1859—1919) — немецкий математик, ученик Ф. Клейна.

Заметим, что
$$|z'(t)|^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$
и, значит, при нашем выборе параметра t
$$|z'(t)|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}. \tag{44}$$

Учитывая далее, что $\bar{z}z' = (x - iy)(x' + iy') = (xx' + yy') + i(xy' - x'y)$, и пользуясь равенствами (43), запишем в комплексном виде формулу площади области, ограниченной замкнутой кривой (42):
$$S = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (xy' - yx')(t)\,dt = \frac{1}{2i}\int_{-\pi}^{\pi} z'(t)\bar{z}(t)\,dt. \tag{45}$$

Напишем теперь разложение функции (42′) в ряд Фурье
$$z(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$
тогда
$$z'(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikt}.$$

Равенства (44) и (45) означают, в частности, что
$$\frac{1}{2\pi}\|z'\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|^2\,dt = \frac{L^2}{4\pi^2},$$
а
$$\frac{1}{2\pi}\langle z', z\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z'(t)\bar{z}(t)\,dt = \frac{i}{\pi}S.$$

В терминах коэффициентов Фурье, как следует из равенств (37), (39), полученные соотношения приобретают вид
$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} |kc_k|^2,$$
$$S = \pi \sum_{-\infty}^{\infty} kc_k\bar{c}_k.$$

Таким образом,
$$L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{-\infty}^{\infty} (k^2 - k)|c_k|^2.$$

Правая часть этого равенства, очевидно, неотрицательна и обращается в нуль только при условии, что $c_k = 0$, когда $k \in \mathbb{Z}$ и $k \neq 0, 1$.

Итак, неравенство (41) доказано, и заодно получено уравнение
$$z(t) = c_0 + c_1 e^{it}, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi,$$
той кривой, для которой оно превращается в равенство. Это комплексный вид параметрического уравнения окружности с центром в точке c_0 комплексной плоскости и радиуса $|c_1|$.

Задачи и упражнения

1. a) Покажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{при } 0 < x < 2\pi,$$

и найдите сумму этого ряда в остальных точках $x \in \mathbb{R}$.

Используя предыдущее разложение и пользуясь правилами действий с тригонометрическими рядами Фурье, покажите теперь, что:

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ при $0 < x < \pi$;

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ при $0 < x < \pi$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx = \frac{x}{2}$ при $|x| < \pi$;

e) $x^2 = \frac{\pi}{3} + 4 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$ при $|x| < \pi$.

f) $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

g) $\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

h) Нарисуйте графики сумм встретившихся здесь тригонометрических рядов над всей осью $\mathbb{R}$. Используя полученные результаты, найдите суммы следующих числовых рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

2. Покажите, что:

a) если $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ нечетная (четная) функция, то ее коэффициенты Фурье имеют следующую особенность: $a_k(f) = 0$ $(b_k(f) = 0)$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$;

b) если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ имеет период $2\pi/m$, то ее коэффициенты Фурье $c_k(f)$ могут быть отличны от нуля, лишь когда k кратно m;

c) если $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ вещественнозначна, то при любом $k \in \mathbb{N}$ $c_k(f) = \bar{c}_{-k}(f)$;

d) $|a_k(f)| \leqslant 2 \sup\limits_{|x|<\pi} |f(x)|$, $|b_k(f)| \leqslant 2 \sup\limits_{|x|<\pi} |f(x)|$, $|c_k(f)| \leqslant \sup\limits_{|x|<\pi} |f(x)|$.

3. a) Покажите, что каждая из систем функций $\{\cos kx;\ k = 0, 1, \ldots\}$, $\{\sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$ полна в пространстве $\mathscr{R}_2[a, a+\pi]$ при любом значении $a \in \mathbb{R}$.

b) Разложите функцию $f(x) = x$ в промежутке $[0, \pi]$ по каждой из этих двух систем.

c) Нарисуйте графики сумм найденных рядов над всей числовой осью.

d) Укажите тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = |x|$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ и выясните, сходится ли он равномерно к этой функции на всем отрезке $[-\pi, \pi]$.

4. Ряд Фурье $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}$ функции f можно рассматривать как специальный случай степенного ряда $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$ $\left(= \sum\limits_{-\infty}^{-1} c_k z^k + \sum\limits_{0}^{+\infty} c_k z^k\right)$, в котором z пробегает единичную окружность комплексной плоскости (т. е. $z = e^{it}$).

Покажите, что если коэффициенты Фурье $c_k(f)$ функции $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ убывают так быстро, что $\varliminf\limits_{k\to-\infty} |c_k(f)|^{1/k} = c_- > 1$, а $\varlimsup\limits_{k\to+\infty} |c_k(f)|^{1/k} = c_+ < 1$, то:

a) функцию f можно рассматривать как след на единичной окружности некоторой функции, представимой в кольце $c_-^{-1} < |z| < c_+^{-1}$ рядом $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$;

b) при $z = x + iy$ и $\ln \dfrac{1}{c_-} < y < \ln \dfrac{1}{c_+}$ ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikz}$ сходится абсолютно (и, в частности, его сумма не зависит от порядка суммирования членов);

c) в любой полосе комплексной плоскости, задаваемой условиями $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b$, где $\ln \dfrac{1}{c_-} < a < b < \ln \dfrac{1}{c_+}$, ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikz}$ сходится абсолютно и равномерно;

d) используя разложение $e^z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \ldots$ и формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, покажите, что

$$1 + \frac{\cos x}{1!} + \ldots + \frac{\cos nx}{n!} + \ldots = e^{\cos x} \cos(\sin x),$$
$$\frac{\sin x}{1!} + \ldots + \frac{\sin nx}{n!} + \ldots = e^{\cos x} \sin(\sin x);$$

e) используя разложения $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \ldots$, $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \ldots$, проверьте, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)!} = \sin(\cos x)\operatorname{ch}(\sin x),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)!} = \cos(\cos x)\operatorname{sh}(\sin x),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 2nx}{(2n)!} = \cos(\cos x)\operatorname{ch}(\sin x),$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2nx}{(2n)!} = \cos(\cos x)\operatorname{sh}(\sin x).$$

5. Проверьте, что:

a) системы $\left\{1, \cos k\dfrac{2\pi}{T}x, \sin k\dfrac{2\pi}{T}x;\ k \in \mathbb{N}\right\}$, $\left\{e^{ik\frac{2\pi}{T}x};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ ортогональны и полны в пространстве $\mathcal{R}_2([a, a+T], \mathbb{C})$ при любом $a \in \mathbb{R}$;

b) коэффициенты Фурье $a_k(f)$, $b_k(f)$, $c_k(f)$ T-периодической функции f по указанным системам не зависят от того, раскладывается ли функция в ряд Фурье на отрезке $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ или на любом ином отрезке вида $[a, a+T]$;

c) если $c_k(f)$ и $c_k(g)$ — коэффициенты Фурье T-периодических функций f и g, то

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\bar{g}(x)\,dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f)\bar{c}_k(g);$$

d) коэффициенты Фурье $c_k(h)$ нормированной множителем $\dfrac{1}{T}$ «свертки»

$$h(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)g(t)\,dt$$

T-периодических гладких функций f и g и коэффициенты Фурье $c_k(f)$, $c_k(g)$ самих функций f и g связаны соотношением $c_k(h) = c_k(f)c_k(g)$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Докажите, что если α несоизмеримо с π, то:

a) $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} e^{ik(x+n\alpha)} = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\, dt$;

b) для любой непрерывной 2π-периодической функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x+n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt.$$

7. Докажите следующие утверждения:

a) Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x}\, dx \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\Bigl(x+\frac{\pi}{\lambda}\Bigr) - f(x) \right| dx.$$

b) Если функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$ и, кроме того, g по модулю ограничена на $\mathbb{R}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) g(t) e^{i\lambda t}\, dt =: \varphi_\lambda(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{на } \mathbb{R} \text{ при } \lambda \to \infty.$$

c) Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на периоде функция, то остаток $S_n(x) - f(x)$ ее тригонометрического ряда Фурье может быть представлен в виде

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (\Delta^2 f)(x, t) D_n(t)\, dt,$$

где D_n — n-е ядро Дирихле, а $(\Delta^2 f)(x, t) = f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)$.

d) Для любого $\delta \in]0, \pi[$ полученную выше формулу остатка можно привести к виду

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\delta} \frac{\sin nt}{t} (\Delta^2 f)(x, t)\, dt + o(1),$$

где $o(1)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, причем равномерно на каждом отрезке $[a, b]$, на котором функция f ограничена.

e) Если функция $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ удовлетворяет на отрезке $[-\pi, \pi]$ условию Гельдера $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|^\alpha$ (где M и α — положительные числа) и, кроме того, $f(-\pi) = f(\pi)$, то ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на всем отрезке.

8. a) Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция, имеющая кусочно гладкую производную $f^{(m)}$ порядка m ($m \in \mathbb{N}$), то f можно представить в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_m(t-x) f^{(m)}(t)\, dt,$$

где $B_m(u) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos(ku + m\pi/2)}{k^m}$, $m \in \mathbb{N}$.

b) Пользуясь указанным в задаче 1 разложением в ряд Фурье функции $\dfrac{\pi - x}{2}$ на промежутке $[0, 2\pi]$, докажите, что $B_1(u)$ — многочлен степени 1, а $B_m(u)$ — многочлен степени m на отрезке $[0, 2\pi]$. Эти многочлены называются *многочленами Бернулли*.

c) Проверьте, что при любом $m \in \mathbb{N}$ $\int\limits_{0}^{2\pi} B_m(u)\, du = 0$.

9. a) Пусть $x_m = \dfrac{2\pi m}{2n+1}$, $m=0, 1, \ldots, 2n$. Проверьте, что

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}\cos kx_m \cos lx_m = \delta_{kl},$$
$$\frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n}\sin kx_m \sin lx_m = \delta_{kl},$$
$$\sum_{m=0}^{2n}\sin kx_m \cos lx_m = 0,$$

где k, l — неотрицательные целые числа, а $\delta_{kl}=0$ при $k \neq l$ и $\delta_{kl}=1$ при $k=l$.

b) Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на периоде функция. Отрезок $[0, 2\pi]$ разобьем точками $x_m = \dfrac{2\pi m}{2n+1}$, $m = 0, 1, \ldots, 2n$, на $2n+1$ равных отрезков. Интегралы

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

вычислим приближенно по формуле прямоугольников, соответствующей этому разбиению отрезка $[0, 2\pi]$. Тогда получим величины

$$\widetilde{a}_k(f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n} f(x_m)\cos kx_m,$$
$$\widetilde{b}_k(f) = \frac{2}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n} f(x_m)\sin kx_m,$$

которые и подставим в n-ю частичную сумму $S_n(f, x)$ ряда Фурье функции f вместо соответствующих коэффициентов $a_k(f)$ и $b_k(f)$.

Докажите, что при этом получится тригонометрический полином $\widetilde{S}_n(f, x)$ порядка n, интерполирующий функцию f в узлах x_m, $m = 0, 1, \ldots, 2n$, т. е. в этих точках $f(x_m) = \widetilde{S}(f, x_m)$.

10. Пусть функция $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и кусочно дифференцируема, и пусть ее производная f' интегрируема в квадрате на промежутке $]a, b[$. Используя равенство Парсеваля, докажите, что:

a) если $[a, b] = [0, \pi]$, то при выполнении любого из двух условий $f(0) = f(\pi) = 0$ или $\int_0^\pi f(x)\,dx = 0$ справедливо *неравенство Стеклова*

$$\int_0^\pi f^2(x)\,dx \leqslant \int_0^\pi (f')^2(x)\,dx,$$

в котором равенство возможно лишь при $f(x) = a\cos x$;

b) если $[a, b] = [-\pi, \pi]$ и одновременно выполнены два условия $f(-\pi) = f(\pi)$ и $\int_{-\pi}^\pi f(x)\,dx = 0$, то справедливо *неравенство Виртингера*

$$\int_{-\pi}^\pi f^2(x)\,dx \leqslant \int_{-\pi}^\pi (f')^2(x)\,dx,$$

где равенство возможно лишь при $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

11. *Явление Гиббса* — так называется описываемая ниже особенность поведения частичных сумм тригонометрического ряда Фурье, «впервые обнаруженная Уилбрейамом (1848 г.) и позже (1898 г.) переоткрытая Гиббсом». (Математическая энциклопедия, том 1, Москва, 1977 г.)

a) Покажите, что

$$\operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \quad \text{при } |x|<\pi.$$

b) Проверьте, что функция $S_n(x)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ имеет максимум при $x=\frac{\pi}{2n}$ и что при $n\to\infty$

$$S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2n}}{(2k-1)\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{n}\to\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx\approx 1{,}179.$$

Таким образом, колебание $S_n(x)$ при $n\to\infty$ около точки $x=0$ примерно на 18 % превышает скачок самой функции $\operatorname{sgn} x$ в этой точке (проскакивание $S_n(x)$ «по инерции»).

c) Нарисуйте предел графиков функций $S_n(x)$ задачи b).

Пусть теперь вообще $S_n(f,x)$ — n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f, и пусть при $n\to\infty$ $S_n(f,x)\to f(x)$ в проколотой окрестности $0<|x-\xi|<\delta$ точки ξ, в которой f имеет односторонние пределы $f(\xi_-)$ и $f(\xi_+)$. Для определенности будем считать, что $f(\xi_-)\leqslant f(\xi_+)$.

Говорят, что в точке ξ имеет место *явление Гиббса для сумм* $S_n(f,x)$, если $\varliminf\limits_{n\to\infty} S_n(f,x)<f(\xi_-)\leqslant f(\xi_+)<\varlimsup\limits_{n\to\infty} S_n(f,x)$.

d) Используя замечание 9, покажите, что для любой функции вида $\varphi(x)+c\operatorname{sgn}(x-\xi)$, где $c\neq 0$, $|\xi|<\pi$, а $\varphi\in C^{(1)}[-\pi,\pi]$, в точке ξ имеет место явление Гиббса.

12. *Многомерные тригонометрические ряды Фурье.* a) Проверьте, что система функций $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{ikx}$, где $k=(k_1,\ldots,k_n)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $kx=k_1x_1+\ldots+k_nx_n$ и $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}$, ортонормальна на любом n-мерном кубе $I=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a_j\leqslant x_j\leqslant a_j+2\pi,\ j=1,2,\ldots,n\}$.

b) Интегрируемой на I функции f сопоставим сумму $f\sim\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikx}$, где $c_k(f)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_I f(x)e^{-ikx}\,dx$. Эта сумма называется *рядом Фурье функции f по системе* $\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{ikx}\right\}$, а числа $c_k(f)$ называются *коэффициентами Фурье функции f по системе* $\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{ikx}\right\}$.

В многомерном случае ряд Фурье часто суммируют с помощью сумм

$$S_N(x)=\sum_{|k|\leqslant N}c_k(f)e^{ikx},$$

где запись $|k|\leqslant N$ означает, что $N=(N_1,\ldots,N_n)$ и $|k_j|\leqslant N_j$, $j=1,\ldots,n$.

Покажите, что для любой 2π-периодической по каждой из переменных функции $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$

$$S_N(x)=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_I\prod_{j=1}^{n}D_{N_j}(t_j-x_j)f(t)\,dt=\frac{1}{\pi^n}\int_{-\pi}^{\pi}\ldots\int_{-\pi}^{\pi}f(t-x)\prod_{j=1}^{n}D_{N_j}(t_j)dt_1\ldots dt_n,$$

где $D_{N_j}(u)$ — N_j-е одномерное ядро Дирихле.

c) Докажите, что *сумма Фейера*

$$\sigma_N(x) := \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(x) = \frac{1}{(N_1+1)\cdot\ldots\cdot(N_n+1)}\sum_{k_1=0}^{N_1}\ldots\sum_{k_n=0}^{N_n} S_{k_1\ldots k_n}(x)$$

2π-периодической по каждой из n переменных функции $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ может быть представлена в виде

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi^n}\int_I f(t-x)\Phi_N(t)\,dt,$$

где $\Phi_N(u)=\prod_{j=1}^{n}\mathscr{F}_N(u_j)$, а $\mathscr{F}_{N_j}$ — N_j-е одномерное ядро Фейера.

d) Распространите теперь теорему Фейера на n-мерный случай.

e) Покажите, что если 2π-периодическая по каждой из переменных функция f абсолютно интегрируема на периоде I хотя бы в несобственном смысле, то $\int_I |f(x+u)-f(x)|\,dx \to 0$ при $u\to 0$ и $\int_I |f-\sigma_N|(x)\,dx \to 0$ при $N\to\infty$.

f) Докажите, что две абсолютно интегрируемые на кубе I функции f и g могут иметь совпадающие ряды Фурье (т. е. $c_k(f)=c_k(g)$ для любого мультииндекса k) в том лишь случае, когда $f(x)=g(x)$ почти всюду на I. Это усиление утверждения 3 о единственности ряда Фурье.

g) Проверьте, что исходная ортонормальная система $\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{ikx}\right\}$ полна в $\mathscr{R}_2(I)$, значит, ряд Фурье любой функции $f\in\mathscr{R}_2(I)$ сходится к f в среднем на I.

h) Пусть f — 2π-периодическая по каждой из переменных функция класса $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$. Проверьте, что $c_k(f^{(\alpha)})=i^{|\alpha|}k^\alpha c_k(f)$, где $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $k=(k_1,\ldots,k_n)$, $|\alpha|=|\alpha_1|+\ldots+|\alpha_n|$, $k^\alpha=k_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot k_n^{\alpha_n}$, α_j — неотрицательные целые.

i) Пусть f — 2π-периодическая по каждой из переменных функция класса $C^{(mn)}(\mathbb{R}^n)$. Покажите, что если для каждого мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ такого, что α_j есть 0 или m (при любом $j=1,\ldots,n$), выполнена оценка $\frac{1}{(2\pi)^n}\int_I |f^{(\alpha)}|^2(x)\,dx \leqslant M^2$, то

$$|f(x)-S_N(x)| \leqslant \frac{CM}{\underline{N}^{m-\frac{1}{2}}},$$

где $\underline{N}=\min\{N_1,\ldots,N_n\}$, а C — постоянная, зависящая от m, но не зависящая от N и от $x\in I$.

j) Заметьте, что если какая-то последовательность непрерывных функций сходится в среднем на промежутке I к функции f и одновременно сходится равномерно к функции φ, то $f(x)=\varphi(x)$ на I.

Используя это наблюдение, докажите, что если 2π-периодическая по каждой из n-переменных функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ принадлежит классу $C^{(1)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

13. *Ряды Фурье обобщенных функций*. Любую 2π-периодическую функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ можно рассматривать как функцию $f(s)$ точки на единичной окружности Γ (точка фиксируется значением s натурального параметра $0\leqslant s\leqslant 2\pi$).

Сохраняя обозначения § 4 гл. XVII, рассмотрим на Γ пространство $\mathscr{D}(\Gamma)$ функций класса $C^{(\infty)}(\Gamma)$ и пространство $\mathscr{D}'(\Gamma)$ обобщенных функций, т. е. линейных непрерывных функционалов на $\mathscr{D}(\Gamma)$. Действие (значение) функционала $F\in\mathscr{D}'(\Gamma)$ на функцию $\varphi\in\mathscr{D}(\Gamma)$ будем обозначать символом $F(\varphi)$, избегая символа $\langle F,\varphi\rangle$, использованного в этой главе для обозначения эрмитова скалярного произведения (7).

Каждая интегрируемая на Γ функция f может рассматриваться как элемент $\mathcal{D}'(\Gamma)$ (регулярная обобщенная функция), действующий на функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ по формуле

$$f(\varphi) = \int_0^{2\pi} f(s)\varphi(s)\,ds.$$

Сходимость последовательности $\{F_n\}$ обобщенных функций пространства $\mathcal{D}'(\Gamma)$ к обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, как обычно, означает, что для любой функции $\varphi \in \in \mathcal{D}'(\Gamma)$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\varphi) = F(\varphi).$$

a) Используя то обстоятельство, что для любой функции $\varphi \in C^{(\infty)}(\Gamma)$ по теореме 5 на Γ справедливо соотношение $\varphi(s) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(\varphi)e^{iks}$ и, в частности, равенство $\varphi(0) = = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k(\varphi)$, покажите, что в смысле сходимости в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Gamma)$

$$\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}e^{iks} \to \delta \quad \text{при } n \to \infty.$$

Здесь δ — тот элемент пространства $\mathcal{D}'(\Gamma)$, действие которого на функцию $\varphi \in \in \mathcal{D}(\Gamma)$ определено соотношением $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

b) Если $f \in \mathcal{R}(\Gamma)$, то коэффициенты Фурье функции f по системе $\{e^{iks}\}$, определенные стандартным образом, можно записать в виде

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{-iks}\,ds = \frac{1}{2\pi}f(e^{-iks}).$$

По аналогии определим теперь коэффициенты Фурье $c_k(F)$ любой обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ формулой $c_k(F) = \dfrac{1}{2\pi}F(e^{-iks})$, имеющей смысл, поскольку $e^{-iks} \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

Так любой обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ сопоставляется ее ряд Фурье

$$F \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(F)e^{iks}.$$

Покажите, что $\delta \sim \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{2\pi}e^{iks}$.

c) Докажите следующий замечательный по своей простоте и открывающейся свободе действий факт: ряд Фурье любой обобщенной функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ сходится к F (в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{D}'(\Gamma)$).

d) Покажите, что ряд Фурье функции $F \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ (как и сама функция F и как любой сходящийся ряд обобщенных функций) можно дифференцировать почленно любое число раз.

e) Исходя из равенства $\delta = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{2\pi}e^{iks}$, найдите ряд Фурье функции δ'.

f) Вернемся теперь с окружности Γ на прямую ℝ и рассмотрим функции e^{iks} как регулярные обобщенные функции пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (т. е. как линейные непрерывные функционалы на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ финитных на ℝ функций класса $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$).

Любая локально интегрируемая функция f может рассматриваться как элемент пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (*регулярная обобщенная функция из* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$), действующий на

функции $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ по закону $f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$. Сходимость в $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ определяется стандартным образом:

$$\big(\lim_{n\to\infty} F_n = F\big) := \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \quad \big(\lim_{n\to\infty} F_n(\varphi) = F(\varphi)\big).$$

Покажите, что в смысле сходимости в $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ справедливо следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k),$$

в обеих частях которого подразумевается предельный переход при $n \to \infty$ по симметричным частичным суммам $\sum\limits_{-n}^{n}$, а $\delta(x - x_0)$, как всегда, обозначает сдвинутую в точку x_0 δ-функцию пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, т. е. $\delta(x - x_0)(\varphi) = \varphi(x_0)$.

§ 3. Преобразование Фурье

1. Представление функции интегралом Фурье

a. Спектр и гармонический анализ функции. Пусть $f(t)$ — T-периодическая функция, например, периодический сигнал частоты $1/T$ как функция времени. Будем считать, что функция f абсолютно интегрируема на периоде. Раскладывая f в ряд Фурье (в случае достаточной регулярности f ряд Фурье, как известно, сходится к f) и преобразовывая этот ряд

$$f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos k\omega_0 t + b_k(f) \sin k\omega_0 t) =$$
$$= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\omega_0 t} = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(k\omega_0 t + \arg c_k), \quad (1)$$

получаем представление f в виде суммы постоянного члена $\frac{a_0}{2} = c_0$ — *среднего значения f по периоду* и *синусоидальных компонент* с частотами $\nu_0 = \frac{1}{T}$ (*основная частота*), $2\nu_0$ (*вторая гармоническая частота*), и т. д. Вообще k-*я гармоническая компонента* $2|c_k| \cos\Big(k\frac{2\pi}{T}t + \arg c_k\Big)$ сигнала $f(t)$ имеет *частоту* $k\nu_0 = \frac{k}{T}$, *круговую частоту* $k\omega_0 = 2\pi k\nu_0 = \frac{2\pi}{T}k$, *амплитуду* $2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ и *фазу* $\arg c_k = -\operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}$.

Разложение периодической функции (сигнала) в сумму простых гармонических колебаний называют *гармоническим анализом функции* f. Числа $\{c_k(f);\ k \in \mathbb{Z}\}$ или $\{a_0(f), a_k(f), b_k(f);\ k \in \mathbb{N}\}$ называют *спектром функции* (сигнала) f. Периодическая функция, таким образом, имеет *дискретный спектр*.

Прикинем (на эвристическом уровне), что произойдет с разложением (1) при неограниченном увеличении периода T сигнала f.

Полагая для упрощения записи $l = \frac{T}{2}$ и $\alpha_k = k\frac{\pi}{l}$, перепишем разложение

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\frac{\pi}{l}t}$$

в следующем виде:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \Big(c_k \frac{l}{\pi}\Big) e^{ik\frac{\pi}{l}t}\, \frac{\pi}{l}, \tag{2}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\alpha_k t}\, dt$$

и, значит,

$$c_k \frac{l}{\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\alpha_k t}\, dt.$$

Считая, что при $l \to +\infty$ мы приходим в пределе к рассмотрению произвольной абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f, введем вспомогательную функцию

$$c(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}\, dt, \tag{3}$$

значения которой в точках $\alpha = \alpha_k$ мало отличаются от величин $c_k \frac{l}{\pi}$ в формуле (2). В таком случае

$$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} c(\alpha_k) e^{i\alpha_k t}\, \frac{\pi}{l}, \tag{4}$$

где $\alpha_k = k\frac{\pi}{l}$ и $\alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{l}$. Последняя сумма напоминает интегральную сумму и при измельчении разбиения, происходящего при $l \to \infty$, получаем

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha)e^{i\alpha t}\, d\alpha. \tag{5}$$

Таким образом, вслед за Фурье мы пришли к разложению функции f в континуальную линейную комбинацию гармоник переменной частоты и фазы.

Интеграл (5) ниже будет назван интегралом Фурье. Это континуальный эквивалент ряда Фурье. Функция $c(\alpha)$ в нем — аналог коэффициента Фурье. Она будет названа преобразованием Фурье функции f (заданной на всей прямой $\mathbb{R}$). Формула (3) преобразования Фурье вполне эквивалентна формуле коэффициентов Фурье. Функцию $c(\alpha)$ естественно считать *спектром функции* (сигнала) f. В отличие от рассматриваемого ранее случая периодического сигнала f и соответствующего ему дискретного спектра (в виде коэффициентов Фурье), спектр $c(\alpha)$ произвольного сигнала может не обра-

щаться в нуль на целых промежутках и даже на всей прямой (*непрерывный спектр*).

Пример 1. Найдем функцию, имеющую следующий финитный спектр:

$$c(\alpha)=\begin{cases} h, & \text{если } |\alpha|\leqslant a,\\ 0, & \text{если } |\alpha|>a. \end{cases} \tag{6}$$

◄ По формуле (5) при $t\neq 0$ находим

$$f(t)=\int\limits_{-a}^{a} he^{i\alpha t}\,d\alpha = h\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{it}=2h\frac{\sin at}{t}, \tag{7}$$

а когда $t=0$, получаем $f(0)=2ha$, что совпадает с пределом $2h\frac{\sin at}{t}$ при $t\to 0$. ►

Представление функции в виде (5) называют *представлением функции в виде интеграла Фурье*. Ниже мы обсудим условия, при которых такое представление возможно, а сейчас рассмотрим еще один

Пример 2. Пусть P — прибор, обладающий следующими свойствами: это линейный преобразователь сигналов (т. е. $P\Bigl(\sum\limits_j a_j f_j\Bigr)=\sum\limits_j a_j P(f_j)$), сохраняющий периодичность сигнала (т. е. $P(e^{i\omega t})=p(\omega)e^{i\omega t}$, где коэффициент $p(\omega)$ зависит от частоты ω периодического сигнала $e^{i\omega t}$).

Мы употребляем компактную комплексную форму записи, хотя, конечно, все можно переписать и через функции $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$.

Функция $p(\omega)=:R(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ называется *спектральной характеристикой прибора P*, ее модуль $R(\omega)$ принято называть *частотной характеристикой*, а аргумент $\varphi(\omega)$ — *фазовой характеристикой* прибора P. Сигнал $e^{i\omega t}$, пройдя через прибор, преобразуется на выходе в сигнал $R(\omega)e^{i(\omega t+\varphi(\omega))}$, измененный по амплитуде благодаря множителю $R(\omega)$ и сдвинутый по фазе ввиду наличия слагаемого $\varphi(\omega)$.

Предположим, что нам известны спектральная характеристика $p(\omega)$ прибора P и сигнал $f(t)$, поступивший на вход прибора, а требуется узнать сигнал $x(t)=P(f)(t)$ на выходе прибора.

Представив сигнал $f(t)$ в виде интеграла Фурье (5) и пользуясь линейностью прибора P и интеграла, находим

$$x(t)=P(f)(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\omega)p(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

В частности, если

$$p(\omega)=\begin{cases} 1 & \text{при } |\omega|\leqslant\Omega,\\ 0 & \text{при } |\omega|>\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

то

$$x(t)=\int\limits_{-\Omega}^{\Omega} c(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

и, как видно из определения спектральной характеристики прибора,

$$P(e^{i\omega t}) = \begin{cases} e^{i\omega t} & \text{при } |\omega| \leqslant \Omega, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \Omega. \end{cases}$$

Прибор P со спектральной характеристикой (8) пропускает (фильтрует) без искажения частоты, не превосходящие Ω, и срезает всю ту часть сигнала, которая относится к высоким частотам (превышающим Ω). По этой причине такой прибор в радиотехнике называют *идеальным фильтром низкой частоты* (*с верхней граничной частотой* Ω).

Перейдем теперь к математической стороне дела и к более тщательному рассмотрению возникших здесь понятий.

b. Определение преобразования Фурье и интеграла Фурье. В соответствии с формулами (3) и (5) введем

Определение 1. Функция

$$\mathscr{F}[f](\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx \tag{9}$$

называется *преобразованием Фурье* функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Интеграл здесь понимается в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx := \lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-i\xi x}\, dx,$$

и считается, что он существует.

Если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, то, поскольку $|f(x)e^{-ix\xi}| = |f(x)|$ при $x, \xi \in \mathbb{R}$, для любой такой функции имеет смысл преобразование Фурье (9), причем интеграл (9) сходится абсолютно и равномерно по ξ на всей прямой $\mathbb{R}$.

Определение 2. Если $c(\xi) = \mathscr{F}[f](\xi)$ — преобразование Фурье функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, то сопоставляемый f интеграл

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \tag{10}$$

понимаемый в смысле главного значения, называется *интегралом Фурье функции* f.

Коэффициенты Фурье и ряд Фурье периодической функции являются, таким образом, дискретными аналогами преобразования Фурье и интеграла Фурье соответственно.

Определение 3. Понимаемые в смысле главного значения интегралы

$$\mathscr{F}_c[f](\xi) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\xi x\,dx, \tag{11}$$

$$\mathscr{F}_s[f](\xi) := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\xi x\,dx \tag{12}$$

называются соответственно *косинус- и синус-преобразованиями Фурье функции* f.

Полагая $c(\xi)=\mathscr{F}[f](\xi)$, $a(\xi)=\mathscr{F}_c[f](\xi)$, $b(\xi)=\mathscr{F}_s[f](\xi)$, получаем отчасти уже знакомое нам по рядам Фурье соотношение

$$c(\xi)=\frac{1}{2}(a(\xi)-ib(\xi)). \tag{13}$$

Как видно из соотношений (11), (12),

$$a(-\xi)=a(\xi), \quad b(-\xi)=-b(\xi). \tag{14}$$

Формулы (13), (14) показывают, что преобразования Фурье вполне определяются на всей прямой $\mathbb{R}$, если они известны лишь для неотрицательных значений аргумента.

С физической точки зрения это вполне естественный факт — спектр сигнала надо знать для частот $\omega\geqslant 0$; отрицательные частоты α в (3) и (5) — плод формы записи. Действительно,

$$\int_{-A}^{A} c(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = \left(\int_{-A}^{0}+\int_{0}^{A}\right)c(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = \int_{0}^{A}(c(\xi)e^{ix\xi}+c(-\xi)e^{-ix\xi})\,d\xi = \\ = \int_{0}^{A}(a(\xi)\cos x\xi + b(\xi)\sin x\xi)\,d\xi,$$

и, значит, интеграл Фурье (10) можно представить в виде

$$\int_{0}^{\infty}(a(\xi)\cos x\xi + b(\xi)\sin x\xi)\,d\xi, \tag{10$'$}$$

вполне соответствующем классической форме записи ряда Фурье. Если функция f вещественнозначна, то из формул (13), (14) в этом случае следует

$$c(-\xi)=\overline{c(\xi)}, \tag{15}$$

поскольку в этом случае $a(\xi)$ и $b(\xi)$ — вещественные функции на $\mathbb{R}$, что видно из их определений (11), (12). Впрочем, равенство (15) при условии $\overline{f(x)}=f(x)$ получается и непосредственно из определения (9) преобразования Фурье, если учесть, что знак сопряжения можно вносить под знак

интеграла. Последнее наблюдение позволяет заключить, что для любой функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ справедливо равенство

$$\mathscr{F}[\bar{f}](-\xi)=\overline{\mathscr{F}[f](\xi)}. \tag{16}$$

Полезно также заметить, что если f — вещественная и четная функция, т. е. $\overline{f(x)}=f(x)=f(-x)$, то

$$\begin{gathered}\overline{\mathscr{F}_c[f](\xi)}=\mathscr{F}_c[f](\xi),\quad \mathscr{F}_s[f](\xi)\equiv 0,\\ \overline{\mathscr{F}[f](\xi)}=\mathscr{F}[f](\xi)=\mathscr{F}[f](-\xi);\end{gathered} \tag{17}$$

если f — вещественная и нечетная функция, т. е. $\overline{f(x)}=f(x)=-f(-x)$, то

$$\begin{gathered}\mathscr{F}_c[f](\xi)\equiv 0,\quad \overline{\mathscr{F}_s[f](\xi)}=\mathscr{F}[f](\xi),\\ \overline{\mathscr{F}[f](\xi)}=-\mathscr{F}[f](\xi)=\mathscr{F}[f](-\xi);\end{gathered} \tag{18}$$

а если f — чисто мнимая функция, т. е. $\overline{f(x)}=-f(x)$, то

$$\mathscr{F}[\bar{f}](-\xi)=-\overline{\mathscr{F}[f](\xi)}. \tag{19}$$

Заметим, что если f — вещественнозначная функция, то ее интеграл Фурье $(10')$ можно записать также в виде

$$\int_0^\infty \sqrt{a^2(\xi)+b^2(\xi)}\cos(x\xi+\varphi(\xi))\,d\xi=2\int_0^\infty |c(\xi)|\cos(x\xi+\varphi(\xi))\,d\xi,$$

где $\varphi(\xi)=-\operatorname{arctg}\dfrac{b(\xi)}{a(\xi)}=\arg c(\xi)$.

Пример 3. Найдем преобразование Фурье функции $f(t)=\dfrac{\sin at}{t}$ (считая $f(0)=a\in\mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f](\alpha)&=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\sin at}{t}e^{-i\alpha t}\,dt=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\frac{\sin at\cos\alpha t}{t}\,dt=\\ &=\frac{2}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin at\cos\alpha t}{t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(a+\alpha)t}{t}+\frac{\sin(a-\alpha)t}{t}\right)dt=\\ &=\frac{1}{2\pi}(\operatorname{sgn}(a+\alpha)+\operatorname{sgn}(a-\alpha))\int_0^\infty\frac{\sin u}{u}\,du=\begin{cases}\frac{1}{2}\operatorname{sgn}a, & \text{если } |\alpha|\leqslant|a|,\\ 0, & \text{если } |\alpha|>|a|,\end{cases}\end{aligned}$$

поскольку нам известно значение интеграла Дирихле

$$\int_0^\infty\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Значит, если считать $a \geqslant 0$ и взять функцию $f(t) = 2h\frac{\sin at}{t}$ из равенства (7), то мы, как и следовало ожидать, получаем в качестве ее преобразования Фурье указанный соотношениями (6) спектр этой функции.

Рассмотренная в примере 3 функция f не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ и ее преобразование Фурье имеет разрывы. О том, что преобразование Фурье абсолютно интегрируемых функций не имеет разрывов, говорит следующая

Лемма 1. *Если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ локально интегрируема и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то*

a) *ее преобразование Фурье $\mathcal{F}[f](\xi)$ определено при любом значении $\xi \in \mathbb{R}$;*

b) $\mathcal{F}[f] \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$;

c) $\sup\limits_{\xi} |\mathcal{F}[f](\xi)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$;

d) $\mathcal{F}[f](\xi) \to 0$ *при* $\xi \to \infty$.

◄ Мы уже отмечали, что $|f(x)e^{-ix\xi}| \leqslant |f(x)|$, откуда следует абсолютная и равномерная по $\xi \in \mathbb{R}$ сходимость интеграла (9). Этим одновременно доказаны пп. a) и c) леммы.

Пункт d) следует из леммы Римана (см. § 2).

Для фиксированного конечного $A \geqslant 0$ оценка

$$\left| \int\limits_{-A}^{A} f(x)(e^{-ix(\xi+h)} - e^{-ix\xi})\, dx \right| \leqslant \sup_{|x| \leqslant A} |e^{-ixh} - 1| \int\limits_{-A}^{A} |f(x)|\, dx$$

устанавливает непрерывность по ξ интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-A}^{A} f(x) e^{-ix\xi}\, dx,$$

равномерная сходимость которого при $A \to +\infty$ позволяет заключить, что $\mathcal{F}[f] \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. ►

Пример 4. Найдем преобразование Фурье функции $f(t) = e^{-t^2/2}$:

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\alpha t}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \cos \alpha t\, dt.$$

Дифференцируя последний интеграл по параметру α и интегрируя затем по частям, находим, что

$$\frac{d\mathcal{F}[f]}{d\alpha}(\alpha) + \alpha \mathcal{F}[f](\alpha) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d}{d\alpha} \ln \mathcal{F}[f](\alpha) = -\alpha.$$

Значит, $\mathcal{F}[f](\alpha) = ce^{-\alpha^2/2}$, где c — постоянная, которую, пользуясь интегралом Эйлера — Пуассона (см. гл. XVII, § 2, пример 17), находим из соотношения

$$c = \mathcal{F}[f](0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}.$$

Итак, мы нашли, что $\mathscr{F}[f](\alpha) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\alpha^2/2}$, и одновременно показали, что $\mathscr{F}_c[f](\alpha) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\alpha^2/2}$, а $\mathscr{F}_s[f](\alpha) \equiv 0$.

c. Нормировка преобразования Фурье. Преобразование Фурье (3) и интеграл Фурье (5) мы получили как естественные континуальные аналоги коэффициентов Фурье $c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$ и ряда Фурье $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ периодической функции f в тригонометрической системе $\{e^{ikx};\ k \in \mathbb{Z}\}$. Эта система не является ортонормированной, и лишь простота записи в ней тригонометрического ряда Фурье заставляет по традиции рассматривать ее вместо значительно более естественной ортонормированной системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. В этой нормированной системе ряд Фурье имеет вид $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{c}_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, а коэффициенты Фурье определяются формулами $\hat{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$.

Аналогом таких естественных коэффициентов Фурье и такого ряда Фурье в континуальном случае были бы преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \tag{21}$$

и интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \tag{22}$$

отличающиеся от рассмотренных выше лишь нормировочным множителем.

В симметричных формулах (21), (22) практически сливаются «коэффициент» Фурье и «ряд» Фурье, поэтому в дальнейшем мы будем, по существу, интересоваться только свойствами интегрального преобразования (21), называя его *нормированным преобразованием Фурье* или, если не возникает недоразумений, просто *преобразованием Фурье функции* f.

Вообще, интегральным оператором или интегральным преобразованием принято называть оператор A, действующий на функции f по закону

$$A(f)(y) = \int\limits_X K(x, y) f(x)\, dx,$$

где $K(x, y)$ — заданная функция, называемая *ядром интегрального оператора*, а $X \subset \mathbb{R}^n$ — множество, по которому происходит интегрирование и на котором считаются определенными подынтегральные функции. Поскольку y — свободный параметр из некоторого множества Y, то $A(f)$ есть функция на этом множестве Y.

В математике существует ряд важных интегральных преобразований, и среди них преобразование Фурье занимает одну из самых ключевых позиций. Это обстоятельство имеет довольно глубокие корни и связано с замеча-

тельными свойствами преобразования (21), которые мы в какой-то степени опишем и продемонстрируем в работе в оставшейся части параграфа.

Итак, будем рассматривать нормированное преобразование Фурье (21).

Наряду с обозначениями $\hat{f}$ для нормированного преобразования Фурье, введем следующее обозначение

$$\tilde{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x}\, dx, \quad \text{т. е. } \tilde{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi). \tag{23}$$

Формулы (21), (22) говорят о том, что

$$\tilde{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}} = f, \tag{24}$$

т. е. интегральные преобразования (21), (22) взаимно обратны. Значит, если (21) есть преобразование Фурье, то интегральный оператор (23) естественно назвать *обратным преобразованием Фурье*.

Ниже будут подробно обсуждены и обоснованы некоторые замечательные свойства преобразования Фурье. Например,

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi), \quad \widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\, \hat{f} \cdot \hat{g}, \quad \|\hat{f}\| = \|f\|,$$

т. е. преобразование Фурье переводит операцию дифференцирования в операцию умножения на независимую переменную; преобразование Фурье свертки функций сводится к умножению их преобразований Фурье; преобразование Фурье сохраняет норму (равенство Парсеваля) и тем самым является изометрическим преобразованием соответствующего пространства функций.

Но начнем мы с формулы обращения (24).

По поводу еще одной удобной нормировки преобразования Фурье см. задачу 10.

d. Достаточные условия представимости функции интегралом Фурье. Мы сейчас докажем теорему, вполне аналогичную как по форме, так и по содержанию, теореме о сходимости в точке тригонометрического ряда Фурье. Чтобы максимально сохранить знакомый вид прежних формул и преобразований, мы в этом пункте используем ненормированное преобразование Фурье $c(\xi)$ вместе с его несколько громоздким, но порой удобным обозначением $\mathscr{F}[f](\xi)$. В дальнейшем, изучая интегральное преобразование Фурье как таковое, мы, как правило, будем работать с нормированным преобразованием Фурье $\hat{f}$ функции f.

Теорема 1 (о сходимости интеграла Фурье в точке). *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — абсолютно интегрируемая функция, кусочно непрерывная на каждом конечном отрезке числовой оси $\mathbb{R}$.*

Если функция f удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условиям Дини, то ее интеграл Фурье ((5), (10), (10′), (22)) *сходится в этой точке к значению $\frac{1}{2}(f(x_-) + f(x_+))$, равному полусумме левого и правого пределов функции в этой точке.*

◄ По лемме 1 преобразование Фурье $c(\xi)=\mathcal{F}[f](\xi)$ функции f непрерывно на $\mathbb{R}$ и, значит, интегрируемо на любом отрезке $[-A, A]$. Подобно тому, как мы преобразовывали частичную сумму ряда Фурье, проведем теперь следующие преобразования частичного интеграла Фурье:

$$S_A(x)=\int_{-A}^{A} c(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi=\int_{-A}^{A}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\xi}\,dt\right)e^{ix\xi}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-A}^{A} e^{i(x-t)\xi}\,d\xi\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{i(x-t)A}-e^{-i(x-t)A}}{i(x-t)}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin(x-t)A}{x-t}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(f(x-u)+f(x+u))\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Произведенное во втором от начала выкладки равенстве изменение порядка интегрирования законно. В самом деле, ввиду кусочной непрерывности f для любого конечного $B>0$ справедливо равенство

$$\int_{-A}^{A}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} f(t)e^{-it\xi}\,dt\right)e^{ix\xi}\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} f(t)\left(\int_{-A}^{A} e^{i(x-t)\xi}\,d\xi\right)dt,$$

из которого при $B\to+\infty$, учитывая равномерную сходимость по ξ интеграла $\int_{-B}^{B} f(x)e^{-it\xi}\,dt$, получаем нужное нам равенство.

Теперь воспользуемся значением интеграла Дирихле (20) и завершим наши преобразования:

$$S_A(x)-\frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{(f(x-u)-f(x_-))+(f(x+u)-f(x_+))}{u}\sin Au\,du.$$

Полученный интеграл стремится к нулю при $A\to\infty$. Поясним это и тем самым закончим доказательство теоремы.

Представим этот интеграл в виде суммы интегралов по промежутку $]0, 1]$ и по промежутку $[1, +\infty[$. Первый из этих двух интегралов стремится к нулю при $A\to+\infty$ ввиду условий Дини и леммы Римана. Второй интеграл есть сумма четырех интегралов, отвечающих четырем слагаемым $f(x-u)$, $f(x+u)$, $f(x_-)$, $f(x_+)$. К первым двум из этих четырех интегралов опять применима лемма Римана, а последние два с точностью до постоянного множителя приводятся к виду

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du=\int_{A}^{+\infty}\frac{\sin v}{v}\,dv.$$

Но при $A \to +\infty$ последний интеграл стремится к нулю, поскольку интеграл Дирихле (20) сходится. ►

Замечание 1. В доказательстве теоремы 1 мы фактически рассматривали сходимость интеграла в смысле главного значения. Но если сопоставить записи (10) и (10′) интеграла Фурье, то становится очевидным, что именно рассмотренное понимание сходимости интеграла (10) отвечает сходимости интеграла (10′).

Из доказанной теоремы получаем, в частности,

Следствие 1. *Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — непрерывная, абсолютно интегрируемая функция.*

Если в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ функция f дифференцируема или имеет конечные односторонние производные, или удовлетворяет условию Гельдера, то она представляется своим интегралом Фурье.

Итак, для функций указанных классов оба равенства (3), (5) или (21), (22) имеют место, и мы тем самым доказали для таких функций формулу обращения преобразования Фурье.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 5. Предположим, что известен сигнал $v(t) = P(f)(t)$ на выходе прибора P, рассмотренного в примере 2, а мы хотим найти сигнал $f(t)$, поданный на вход прибора P.

В примере 2 мы показали, что f и v связаны соотношением

$$v(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(\omega)p(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega,$$

где $c(\omega) = \mathscr{F}[f](\omega)$ — спектр сигнала f (ненормированное преобразование Фурье функции f), а p — спектральная характеристика прибора P. Считая все эти функции достаточно регулярными, на основе доказанного заключаем, что тогда

$$c(\omega)p(\omega) = \mathscr{F}[v](\omega).$$

Отсюда находим $c(\omega) = \mathscr{F}[f](\omega)$. Зная $c(\omega)$, интегралом Фурье (10) найдем сигнал f.

Пример 6. Пусть $a > 0$ и

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}e^{-i\xi x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{a+i\xi}.$$

Обсуждая само определение преобразования Фурье, мы уже отметили в пункте b ряд его очевидных свойств. Отметим еще, что если $f_{-}(x) := f(-x)$, то $\mathscr{F}[f_{-}](\xi) = \mathscr{F}[f](-\xi)$. Это элементарная замена переменной в интеграле.

Возьмем теперь функцию $e^{-a|x|} = f(x) + f(-x) =: \varphi(x)$.
Тогда
$$\mathscr{F}[\varphi](\xi) = \mathscr{F}[f](\xi) + \mathscr{F}[f](-\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+\xi^2}.$$

Если же взять функцию $\psi(x) = f(x) - f(-x)$, являющуюся нечетным продолжением функции e^{-ax}, $x > 0$, на всю числовую ось, то
$$\mathscr{F}[\psi](\xi) = \mathscr{F}[f](\xi) - \mathscr{F}[f](-\xi) = -\frac{i}{\pi}\frac{\xi}{a^2+\xi^2}.$$

Используя теорему 1, точнее, ее следствие, получаем, что
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix\xi}}{a+i\xi}\,d\xi = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{если } x > 0,\\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 0,\\ 0, & \text{если } x < 0;\end{cases}$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{ae^{ix\xi}}{a^2+\xi^2}\,d\xi = e^{-a|x|};$$
$$\frac{i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi e^{ix\xi}}{a^2+\xi^2}\,d\xi = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{если } x > 0,\\ 0, & \text{если } x = 0,\\ -e^{ax}, & \text{если } x < 0.\end{cases}$$

Все интегралы здесь понимаются в смысле главного значения, хотя второй, ввиду его абсолютной сходимости, можно понимать и в смысле обычного несобственного интеграла.

Отделяя в двух последних интегралах действительные и мнимые части, находим уже встречавшиеся нам интегралы Лапласа
$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x\xi}{a^2+\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2a}e^{-a|x|}, \quad \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x\xi}{a^2+\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2}e^{-a|x|}\operatorname{sgn} x.$$

Пример 7. На основе примера 4 легко найти (элементарной заменой переменной), что если
$$f(x) = e^{-a^2x^2}, \quad \text{то} \quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}a}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}.$$

Очень поучительно проследить за одновременной эволюцией графиков функций f и $\hat{f}$ при изменении параметра a от $1/\sqrt{2}$ до 0. Чем «сосредоточеннее» одна из функций, тем «размазаннее» другая. Это обстоятельство тесно связано с квантово-механическим принципом Гейзенберга. (См. в этой связи задачи 6, 7.)

Замечание 2. Заканчивая обсуждение вопроса о возможности представления функции интегралом Фурье, отметим, что, как показывают совместно примеры 1 и 3, сформулированные в теореме 1 и ее следствии условия на функцию f являются достаточными, но не являются необходимыми для возможности такого представления.

2. Взаимосвязь дифференциальных и асимптотических свойств функции и ее преобразования Фурье

a. Гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье. Уже из леммы Римана следует, что преобразование Фурье любой абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции стремится на бесконечности к нулю. Это уже отмечалось и в доказанной выше лемме 1. Теперь мы покажем, что, подобно коэффициентам Фурье, преобразование Фурье тем быстрее стремится к нулю, чем глаже функция, от которой оно берется. Взаимный с этим факт будет состоять в том, что чем быстрее стремится к нулю функция, от которой берется преобразование Фурье, тем глаже ее преобразование Фурье.

Начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 2. *Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция, обладающая локально кусочно непрерывной производной f' на $\mathbb{R}$. Если при этом*

a) *функция f' интегрируема на $\mathbb{R}$, то $f(x)$ имеет предел и при $x \to -\infty$, и при $x \to +\infty$;*

b) *функции f и f' интегрируемы на $\mathbb{R}$, то $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$.*

◄ При указанных ограничениях на функции f, f' имеет место формула Ньютона — Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

В условиях a) правая часть этого равенства имеет предел как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

Если же имеющая пределы на бесконечности функция f интегрируема на $\mathbb{R}$, то оба эти предела, очевидно, обязаны быть равны нулю. ►

Теперь докажем

Утверждение 1 (о связи гладкости функции и скорости убывания ее преобразования Фурье). *Если $f \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $(k = 0, 1, \ldots)$ и все функции f, $f', \ldots, f^{(k)}$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то*

a) *при любом $n \in \{0, 1, \ldots, k\}$*

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi), \tag{25}$$

b) $\hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\xi^k}\right)$ *при $\xi \to 0$.*

◄ Если $k = 0$, то a) тривиально верно, а b) следует из леммы Римана.

Пусть $k > 0$. По лемме 2 функции $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$ стремятся к нулю при $x \to \infty$. Учитывая это, выполним интегрирование по частям:

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{-i\xi x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \biggl(f^{(k-1)}(x) e^{-i\xi x}\Big|_{x=-\infty}^{+\infty} +$$

$$+ (i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k-1)}(x) e^{-i\xi x}\,dx \biggr) = \ldots = \frac{(i\xi)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\,dx = (i\xi)^k \hat{f}(\xi).$$

Таким образом, равенство (25) установлено. Это очень важное соотношение и мы к нему еще вернемся отдельно.

Мы показали, что $\hat{f}(\xi)=(i\xi)^{-k}\widehat{f^{(k)}}(\xi)$, но по лемме Римана $\widehat{f^{(k)}}(\xi)\to 0$ при $\xi\to 0$, поэтому утверждение b) тоже доказано. ►

b. Скорость убывания функции и гладкость ее преобразования Фурье. Ввиду почти полного совпадения прямого и обратного преобразований Фурье справедливо следующее, дополнительное к утверждению 1,

Утверждение 2 (о связи скорости убывания функции и гладкости ее преобразования Фурье). *Если локально интегрируемая функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ такова, что функция $x^k f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то*

a) *преобразование Фурье функции f принадлежит классу $C^{(k)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$;*

b) *имеет место равенство*

$$\hat{f}^{(k)}(\xi)=(-i)^k\widehat{x^k f(x)}(\xi). \tag{26}$$

◄ Для $k=0$ соотношение (26) тривиально выполнено, а непрерывность $\hat{f}(\xi)$ уже была доказана в лемме 1. Если $k>0$, то при $n<k$ на бесконечности имеет место оценка $|x^n f(x)|\leqslant|x^k f(x)|$, из которой следует абсолютная интегрируемость функции $x^n f(x)$. Но $|x^n f(x)e^{-i\xi x}|\leqslant|x^n f(x)|$, что позволяет, ссылаясь на равномерную по параметру ξ сходимость соответствующих интегралов, последовательно провести их дифференцирование под знаком интеграла:

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx,$$

$$\hat{f}'(\xi)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\xi x}\,dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\hat{f}^{(k)}(\xi)=\frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)e^{-i\xi x}\,dx.$$

Последний интеграл по лемме 1 является функцией, непрерывной по ξ на всей числовой прямой. Значит, действительно, $\hat{f}\in C^{(k)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. ►

c. Пространство быстро убывающих функций

Определение 4. Обозначим символом $\mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ или более коротким символом $\mathscr{S}$ совокупность всех функций $f\in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^\beta f^{(\alpha)}(x)|<\infty,$$

каковы бы ни были неотрицательные целые числа α и β. Такие функции называют *быстро убывающими* (при $x\to\infty$).

Совокупность быстро убывающих функций, очевидно, образует линейное пространство относительно стандартных операций сложения функций и умножения функции на комплексное число.

Пример 8. Функция e^{-x^2} или, например, все финитные функции класса $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ входят в $\mathscr{S}$ (см. задачу 8 в конце параграфа).

Лемма 3. *Ограничение преобразования Фурье на $\mathscr{S}$ является автоморфизмом $\mathscr{S}$ как линейного пространства.*

◄ Проверим, что $(f \in \mathscr{S}) \Rightarrow (\hat{f} \in \mathscr{S})$.

Для этого заметим сначала, что по утверждению 2а) $\hat{f} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Далее заметим, что операция умножения на x^α $(\alpha \geqslant 0)$ и операция D дифференцирования не выводят из класса быстро убывающих функций. Значит, при любых целых неотрицательных значениях α и β из того, что $f \in \mathscr{S}$, следует, что функция $D^\beta(x^\alpha f(x))$ принадлежит пространству $\mathscr{S}$. Ее преобразование Фурье по лемме Римана стремится к нулю на бесконечности. Но по формулам (25), (26)

$$\widehat{D^\beta(x^\alpha f(x))}(\xi) = i^{\alpha+\beta}\xi^\beta \hat{f}^{(\alpha)}(\xi),$$

и мы показали, что $\xi^\beta \hat{f}^{(\alpha)}(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$, т. е. $\hat{f} \in \mathscr{S}$.

Покажем теперь, что $\widehat{\mathscr{S}} = \mathscr{S}$, т. е. что преобразование Фурье отображает $\mathscr{S}$ на все множество $\mathscr{S}$.

Напомним, что прямое и обратное преобразования Фурье связаны простым соотношением $\hat{f}(\xi) = \tilde{f}(-\xi)$. Изменение знака аргумента функции, очевидно, является операцией, переводящей множество $\mathscr{S}$ в себя. Значит, обратное преобразование Фурье тоже переводит пространство $\mathscr{S}$ в себя.

Наконец, если f — произвольная функция из $\mathscr{S}$, то, по доказанному, $\varphi = \tilde{f} \in \mathscr{S}$ и по формуле обращения (24) получаем, что $f = \widehat{\varphi}$.

Линейность преобразования Фурье очевидна, поэтому лемма 3 теперь полностью доказана. ►

3. Важнейшие аппаратные свойства преобразования Фурье

a. Некоторые определения, обозначения и примеры. Выше мы достаточно подробно рассмотрели преобразование Фурье заданной на вещественной прямой функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. В частности, мы уяснили связь, существующую между свойствами регулярности самой функции и соответствующими свойствами ее преобразования Фурье. Теперь, когда этот вопрос в принципе решен, мы будем рассматривать преобразования Фурье только достаточно регулярных функций, чтобы в концентрированной форме и без технических осложнений изложить фундаментальные аппаратные свойства преобразования Фурье. Взамен мы рассмотрим не только одномерное, но и многомерное преобразование Фурье и выведем его основные свойства практически независимо от изложенного выше.

Желающие ограничиться одномерным случаем могут ниже считать $n = 1$.

Определение 5. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — локально интегрируемая на $\mathbb{R}^n$ функция. Функция

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx \tag{27}$$

называется *преобразованием Фурье функции f*.

При этом имеется в виду, что $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n$, а интеграл считается сходящимся в следующем смысле главного значения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n := \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} \ldots \int\limits_{-A}^{A} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

В таком случае многомерное преобразование Фурье (27) можно рассматривать как n одномерных преобразований Фурье, проведенных по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Тогда, когда функция f абсолютно интегрируема, вопрос о том, в каком смысле понимается интеграл (27), вообще не возникает.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — мультииндексы, состоящие из неотрицательных целых чисел α_j, β_j, $j = 1, \ldots, n$, и пусть, как всегда, D^α обозначает оператор дифференцирования $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ порядка $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, а $x^\beta := x_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$.

Определение 6. Обозначим символом $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ или, если не возникает недоразумений, символом $\mathscr{S}$, совокупность всех функций $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty,$$

каковы бы ни были неотрицательные мультииндексы α и β. Такие функции называют *быстро убывающими* (при $x \to \infty$).

Множество $\mathscr{S}$ с алгебраическими операциями сложения функций и умножения функции на комплексное число, очевидно, является линейным пространством.

Пример 9. Функция $e^{-|x|^2}$, где $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, и все финитные функции класса $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ входят в $\mathscr{S}$.

Если $f \in \mathscr{S}$, то интеграл в соотношении (27), очевидно, сходится абсолютно и равномерно по ξ, на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Более того, если $f \in \mathscr{S}$, то в соответствии со стандартными правилами этот интеграл можно дифференцировать сколько угодно раз по любой из переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Таким образом, если $f \in \mathscr{S}$, то $\hat{f} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

Пример 10. Найдем преобразование Фурье функции $\exp(-|x|^2/2)$.

При интегрировании быстро убывающих функций, очевидно, можно пользоваться теоремой Фубини и, если требуется, то можно беспрепятственно менять порядок несобственных интегрирований.

В данном случае, используя теорему Фубини и пример 4, находим

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{2}}\cdot e^{-i(\xi,x)}\,dx = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_j^2}{2}}e^{-i\xi_j x_j}\,dx_j = \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{\xi_j^2}{2}} = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}.$$

Теперь выделим и докажем основные аппаратные свойства преобразования Фурье, считая, чтобы избежать технических осложнений, что преобразование Фурье применяется к функциям класса $\mathcal{S}$. Это примерно так, как если бы научиться оперировать (считать) рациональными числами, а не полным пространством $\mathbb{R}$ сразу. Процесс пополнения единообразен. См. по этому поводу задачу 5.

b. Линейность. Линейность преобразования Фурье очевидна: она следует из линейности интеграла.

c. Взаимоотношения оператора дифференцирования и преобразования Фурье. Имеют место формулы

$$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = (i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi), \tag{28}$$

$$\widehat{(x^\alpha f(x))}(\xi) = (i)^{|\alpha|}D^\alpha \hat{f}(\xi). \tag{29}$$

◄ Первая из них получается, как и формула (25), интегрированием по частям (разумеется, с предварительным использованием теоремы Фубини, если речь идет о пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n>1$).

Формула (29) обобщает соотношение (26) и получается прямым дифференцированием интеграла (27) по параметрам $\xi_1, \ldots, \xi_n$. ►

Замечание 3. Ввиду очевидной оценки

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx < +\infty,$$

из равенства (28) вытекает, что $\hat{f}(\xi)\to 0$ при $\xi\to\infty$, какова бы ни была функция $f\in\mathcal{S}$, поскольку $D^\alpha f\in\mathcal{S}$.

Далее, совместное использование формул (28), (29) позволяет написать, что

$$\widehat{D^\beta(x^\alpha f(x))}(\xi) = (i)^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\beta D^\alpha \hat{f}(\xi),$$

откуда следует, что если $f\in\mathcal{S}$, то при любых неотрицательных мультииндексах α и β имеем $\xi^\beta D^\alpha\hat{f}(\xi)\to 0$, когда $\xi\to\infty$ в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, показано, что

$$(f\in\mathcal{S}) \Rightarrow (\hat{f}\in\mathcal{S}).$$

d. Формула обращения

Определение 7. Оператор, определяемый (вместе с его обозначением) равенством

$$\tilde{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i(\xi,x)}\,dx, \tag{30}$$

называется *обратным преобразованием Фурье*.

Имеет место следующая *формула обращения преобразования Фурье*:

$$\tilde{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}} = f \tag{31}$$

или в форме интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)}\, d\xi. \tag{32}$$

Используя теорему Фубини, формулу (31) можно немедленно получить из соответствующей формулы (24) для одномерного преобразования Фурье, но мы, как и обещали, проведем короткое независимое доказательство этой формулы.

◄ Покажем сначала, что для любых функций $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)}\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) f(x+y)\, dy. \tag{33}$$

Оба интеграла имеют смысл, поскольку $f, g \in \mathscr{S}$, а по замечанию 3 тогда и $\hat{f}, \hat{g} \in \mathscr{S}$.

Преобразуем интеграл, стоящий в левой части доказываемого равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)}\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(\xi,y)}\, dy\right) e^{i(x,\xi)}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-i(\xi, y-x)}\, d\xi \right) f(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y-x) f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(y) f(x+y)\, dy.$$

Законность проведенного изменения порядка интегрирования не вызывает сомнений ввиду того, что f и g — быстро убывающие функции. Итак, равенство (33) проверено.

Заметим теперь, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon\xi) e^{i(y,\xi)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\varepsilon^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(u) e^{-(y, u/\varepsilon)}\, du = \varepsilon^{-n} \hat{g}(y/\varepsilon),$$

значит, в силу равенства (33)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\varepsilon\xi)\hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)}\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \hat{g}(y/\varepsilon) f(x+y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(u) f(x+\varepsilon u)\, du.$$

Учитывая абсолютную и равномерную по ε сходимость крайних интегралов последней цепочки равенств, при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$g(0) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)}\, d\xi = f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(u)\, du.$$

Положим здесь $g(x)=e^{-|x|^2/2}$. В примере 10 мы видели, что $\hat{g}(u)=e^{-|u|^2/2}$. Вспоминая интеграл Эйлера — Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$, с помощью теоремы Фубини заключаем, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|u|^2/2}\,du=(2\pi)^{n/2}$, и в результате получаем равенство (32). ►

Замечание 4. В отличие от одного равенства (32), означающего, что $\hat{\tilde{f}}=f$, в соотношениях (31) присутствует еще равенство $\tilde{\hat{f}}=f$. Но оно немедленно вытекает из доказанного, поскольку $\tilde{f}(\xi)=\hat{f}(-\xi)$ и $\widehat{f(-x)}=\widetilde{f(x)}$.

Замечание 5. Мы уже видели (см. замечание 3), что если $f\in\mathcal{S}$, то $\hat{f}\in\mathcal{S}$, а значит, и $\tilde{f}\in\mathcal{S}$, т. е. $\widehat{\mathcal{S}}\subset\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}\subset\mathcal{S}$. Из соотношения $\tilde{\hat{f}}=\hat{\tilde{f}}=f$ теперь заключаем, что $\widetilde{\mathcal{S}}=\widehat{\mathcal{S}}=\mathcal{S}$.

e. Равенство Парсеваля. Так принято называть соотношение

$$\langle f,g\rangle=\langle\hat{f},\hat{g}\rangle, \tag{34}$$

которое в развернутой форме означает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{g}(x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi)\,d\xi. \tag{34$'$}$$

Из (34), в частности, следует, что

$$\|f\|^2=\langle f,f\rangle=\langle\hat{f},\hat{f}\rangle=\|\hat{f}\|^2. \tag{35}$$

С геометрической точки зрения равенство (34) означает, что преобразование Фурье сохраняет скалярное произведение между функциями (векторами пространства $\mathcal{S}$) и, значит, является изометрией пространства $\mathcal{S}$.

Равенством Парсеваля иногда называют также соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx, \tag{36}$$

которое получается из равенства (33), если положить там $x=0$. Основное равенство Парсеваля (34) получается из соотношения (36), если в нем вместо g написать $\bar{\hat{g}}$ и воспользоваться тем, что $(\hat{\bar{\hat{g}}})=\bar{g}$ (ибо $\bar{\hat{g}}=\tilde{\bar{g}}$ и $\hat{\tilde{g}}=\tilde{\hat{g}}=g$).

f. Преобразование Фурье и свертка. Имеют место следующие важные соотношения:

$$(\widehat{f*g})=(2\pi)^{n/2}\hat{f}\cdot\hat{g}, \tag{37}$$

$$(\widehat{f\cdot g})=(2\pi)^{-n/2}\hat{f}*\hat{g} \tag{38}$$

(называемые иногда *формулами Бореля*), которые связывают операции свертки и умножения функций посредством преобразования Фурье.

Докажем эти формулы:

◄
$$(f*g)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x) e^{-i(\xi,x)}\, dx =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, dy \Bigg) e^{-i(\xi,x)}\, dx =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi,y)} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i(\xi,x-y)}\, dx \Bigg) dy =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi,y)} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{-i(\xi,u)}\, du \Bigg) dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i(\xi,y)} \hat{f}(\xi)\, dy = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Законность проведенного изменения порядка интегрирования не вызывает сомнений, если $f, g \in \mathscr{S}$.

Формула (38) может быть получена аналогичной выкладкой, если воспользоваться формулой обращения (32). Впрочем, равенство (38) можно вывести из уже доказанного соотношения (37), если вспомнить, что $\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}} = f$, $\tilde{\bar{f}} = \bar{\hat{f}}$, $\bar{\tilde{f}} = \hat{\bar{f}}$ и что $\overline{u \cdot v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$, $\overline{u * v} = \bar{u} * \bar{v}$. ►

Замечание 6. Если в формулы (37), (38) подставить $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ вместо f и g и применить к обеим частям полученных равенств обратное преобразование Фурье, то придем к соотношениям

$$\widetilde{f \cdot g} = (2\pi)^{-n/2} (\tilde{f} * \tilde{g}), \tag{37'}$$
$$\widetilde{f * g} = (2\pi)^{n/2} (\tilde{f} \cdot \tilde{g}). \tag{38'}$$

4. Примеры приложений. Продемонстрируем теперь преобразование Фурье (и отчасти аппарат рядов Фурье) в работе.

a. Волновое уравнение. Успешное использование преобразования Фурье в уравнениях математической физики связано (в математическом отношении) прежде всего с тем, что преобразование Фурье заменяет операцию дифференцирования алгебраической операцией умножения.

Пусть, например, ищется функция $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению

$$a_0 u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n u(x) = f(x),$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — постоянные коэффициенты, а f — известная функция. Применяя к обеим частям этого равенства преобразование Фурье (в предположения достаточной регулярности функций u и f), благодаря соотношению (28) получим алгебраическое уравнение

$$(a_0(i\xi)^n + a_1(i\xi)^{n-1} + \ldots + a_n)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

относительно $\hat{u}$. Найдя из него $\hat{u}(\xi)=\dfrac{\hat{f}(\xi)}{P(i\xi)}$, обратным преобразованием Фурье получаем $u(x)$.

Применим эту идею к отысканию функции $u=u(x,t)$, удовлетворяющей в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a>0)$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x).$$

Здесь и в следующем примере мы не будем останавливаться на обосновании промежуточных выкладок, потому что, как правило, легче бывает найти нужную функцию и непосредственно проверить, что она решает поставленную задачу, чем обосновать и преодолеть все возникающие по дороге технические трудности. Существенную роль в принципиальной борьбе с этими трудностями, кстати, играют обобщенные функции, о чем уже упоминалось.

Итак, рассматривая t как параметр, сделаем преобразование Фурье по x обеих частей нашего уравнения. Тогда, считая возможным выносить дифференцирование по параметру t за знак интеграла, с одной стороны, и, пользуясь формулой (28), с другой стороны, получим

$$\hat{u}''_{tt}(\xi,t)=-a^2\xi^2\hat{u}(\xi,t),$$

откуда находим

$$\hat{u}(\xi,t)=A(\xi)\cos a\xi t+B(\xi)\sin a\xi t.$$

В силу начальных данных

$$\hat{u}(\xi,0)=\hat{f}(\xi)=A(\xi),$$
$$\hat{u}'_t(\xi,0)=\widehat{(u'_t)}(\xi,0)=\hat{g}(\xi)=a\xi B(\xi).$$

Таким образом,

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi)\cos a\xi t+\frac{\hat{g}(\xi)}{a\xi}\sin a\xi t=$$
$$=\frac{1}{2}\hat{f}(\xi)(e^{ia\xi}+e^{-ia\xi t})+\frac{1}{2}\frac{\hat{g}(\xi)}{ia\xi}(e^{ia\xi t}-e^{-ia\xi t}).$$

Домножая это равенство на $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix\xi}$ и интегрируя по ξ, короче, взяв обратное преобразование Фурье и используя формулу (28), непосредственно получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(f(x-at)+f(x+at))+\frac{1}{2}\int_0^t (g(x-a\tau)+g(x+a\tau))\,d\tau.$$

b. Уравнение теплопроводности. Еще один элемент аппарата преобразований Фурье (а именно формулы (37′), (38′)), оставшийся в тени при рассмотрении предыдущего примера, хорошо проявляется при отыскании функции $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющей во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad (a > 0)$$

и начальному условию $u(x, 0) = f(x)$.

Здесь, как всегда, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Выполнив преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^n$, получим в силу (28) обыкновенное уравнение

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = a^2 (i)^2 (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2) \hat{u}(\xi, t),$$

из которого следует, что

$$\hat{u}(\xi, t) = c(\xi) e^{-a^2 |\xi|^2 t},$$

где $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$. Учитывая, что $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$, находим

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \cdot e^{-a^2 |\xi|^2 t}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, с учетом соотношения (37′) получаем

$$u(x, t) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) E_0(y - x, t)\, dy,$$

где $E_0(x, t)$ — та функция, преобразованием Фурье которой по x получается функция $e^{-a^2|\xi|^2 t}$. Обратное преобразование Фурье по ξ функции $e^{-a^2|\xi|^2 t}$, в сущности, нам уже известно из примера 10. Сделав очевидную замену переменной, найдем

$$E_0(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} \right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.$$

Полагая $E(x, t) = (2\pi)^{-n/2} E_0(x, t)$, находим уже знакомое нам (см. гл. XVII, § 4, пример 15) фундаментальное решение

$$E(x, t) = (2a\sqrt{\pi t})^{-n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \quad (t > 0)$$

уравнения теплопроводности и формулу

$$u(x, t) = (f * E)(x, t)$$

для решения, удовлетворяющего начальному условию $u(x, 0) = f(x)$.

c. Формула Пуассона. Так называется следующее соотношение:

$$\sqrt{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(n) \tag{39}$$

между функцией $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (пусть $\varphi\in\mathscr{S}$) и ее преобразованием Фурье $\widehat{\varphi}$. Формула (39) получается при $x=0$ из равенства

$$\sqrt{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\pi n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(n)e^{inx}, \tag{40}$$

которое мы и докажем, считая, что φ — быстро убывающая функция.

◄ Поскольку $\varphi,\widehat{\varphi}\in\mathscr{S}$, ряды в обеих частях равенства (40) сходятся абсолютно (поэтому их можно сумммировать как угодно) и равномерно по x на всей прямой $\mathbb{R}$. Далее, поскольку производные быстро убывающей функции сами являются функциями класса $\mathscr{S}$, то можно заключить, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\pi n)$ принадлежит классу $C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Функция f, очевидно, 2π-периодическая. Пусть $\{\hat{c}_k(f)\}$ — ее коэффициенты Фурье по ортонормированной системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx};\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Тогда

$$\hat{c}_k(f):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-ikx}\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\varphi(x+2\pi n)e^{-ikx}\,dx=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)}\varphi(x)e^{-ikx}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ikx}\,dx=:\widehat{\varphi}(k).$$

Но f — гладкая 2π-периодическая функция, поэтому ее ряд Фурье сходится к ней в любой точке $x\in\mathbb{R}$. Значит, в любой точке $x\in\mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\pi n)=f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{c}_n(f)\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(n)e^{inx}.\ ►$$

Замечание 7. Как видно из доказательства, соотношения (39), (40) справедливы далеко не только для функции класса $\mathscr{S}$. Но если все же $\varphi\in\mathscr{S}$, то равенство (40) можно сколько угодно раз дифференцировать почленно по аргументу x, получая как следствие новые соотношения между φ, φ', … и $\widehat{\varphi}$.

d. Теорема Котельникова[1]**.** Этот пример, основанный, как и предыдущий, на красивом комбинировании ряда и интеграла Фурье, имеет прямое отношение к теории передачи информации по каналу связи. Чтобы он не показался искусственным, напомним, что в силу ограниченных возможностей наших органов чувств мы способны воспринимать сигналы только в определенном диапазоне частот. Например, ухо «слышит» в диапазоне от 20 герц

[1] В. А. Котельников (1908—2005) — советский ученый, известный специалист в теории радиосвязи.

до 20 килогерц. Таким образом, какие бы ни были сигналы, мы, подобно фильтру (см. п. 1), вырезаем только ограниченную часть их спектра и воспринимаем их как сигналы с финитным спектром.

Будем поэтому сразу считать, что передаваемый или получаемый нами сигнал $f(t)$ (где t — время, $-\infty < t < \infty$) имеет финитный спектр, отличный от нуля лишь для частот ω, величина которых не превышает некоторого критического значения $a > 0$. Итак, $\hat{f}(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| > a$, поэтому представление

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

для функции с финитным спектром сводится к интегралу лишь по промежутку $[-a, a]$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{41}$$

На отрезке $[-a, a]$ функцию $\hat{f}(\omega)$ разложим в ряд Фурье

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\hat{f}) e^{i\frac{\pi\omega}{a}k} \tag{42}$$

по системе $\left\{e^{i\frac{\pi\omega}{a}k};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, ортогональной и полной на этом отрезке. Учитывая формулу (41), для коэффициентов $c_k(\hat{f})$ этого ряда получаем следующее простое выражение:

$$c_k(\hat{f}) := \frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{a} \hat{f}(\omega) e^{-i\frac{\pi\omega}{a}k}\, d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} f\Big(-\frac{\pi}{a}k\Big). \tag{43}$$

Подставляя ряд (42) в интеграл (41), с учетом соотношений (43) находим

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} \Bigg(\frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{\pi}{a}k\Big) e^{i\omega t - i\frac{\pi k}{a}\omega}\Bigg) d\omega = \\ = \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{\pi}{a}k\Big) \int\limits_{-a}^{a} e^{i\omega\left(t-\frac{\pi}{a}k\right)}\, d\omega.$$

Вычислив эти элементарные интегралы, приходим к *формуле Котельникова*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{\pi}{a}k\Big) \frac{\sin a\Big(t - \frac{\pi}{a}k\Big)}{a\Big(t - \frac{\pi}{a}k\Big)}. \tag{44}$$

Формула (44) показывает, что для восстановления сообщения, описываемого функцией $f(t)$ с финитным спектром, сосредоточенным в полосе частот $|\omega| \leqslant a$, достаточно передать по каналу связи лишь значения $f(k\Delta)$ (называемые *отсчетными значениями*) данной функции через равные промежутки времени $\Delta = \pi/a$.

Это утверждение в совокупности с формулой (44) принадлежит В. А. Котельникову и называется *теоремой Котельникова* или *теоремой отсчетов*.

Замечание 8. Сама по себе интерполяционная формула (44) была известна в математике еще до работы В. А. Котельникова (1933 г.). Но в этой работе впервые было указано фундаментальное значение разложения (44) для современной цифровой (кодово-импульсной) записи и передачи непрерывных сообщений по каналу связи. В общем виде этот вопрос был позднее исследован выдающимся американским инженером-математиком Клодом Шенноном, работа которого 1948 года легла в фундамент теории информации.

Замечание 9. Реально время передачи и приема сообщения ограничено, поэтому вместо всего ряда (44) берут некоторую его частичную сумму $\sum\limits_{-N}^{N}$. Специальные исследования посвящены оценке возникающих при этом погрешностей.

Замечание 10. Если считать, что количество информации, передаваемой по каналу связи, пропорционально количеству отсчетных значений, то в соответствии с формулой (44) пропускная способность канала связи пропорциональна ширине a полосы пропускаемых им частот.

Задачи и упражнения

1. a) Запишите подробно доказательства соотношений (16)—(19).

b) Рассматривая преобразование Фурье как отображение $f \mapsto \hat{f}$, покажите, что оно обладает следующими часто используемыми свойствами:

$$f(at) \mapsto \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(правило изменения масштаба);

$$f(t-t_0) \mapsto \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t_0}$$

(сдвиг входного сигнала — фурье-прообраза — по времени, или *теорема о переносе*),

$$[f(t+t_0) \pm f(t-t_0)] \mapsto \begin{cases} \hat{f}(\omega)2\cos\omega t_0, \\ \hat{f}(\omega)2\sin\omega t_0; \end{cases}$$

$$f(t)e^{\pm i\omega_0 t} \mapsto \hat{f}(\omega \pm \omega_0)$$

(сдвиг преобразования Фурье по частоте);

$$f(t)\cos\omega_0 t \mapsto \frac{1}{2}[\hat{f}(\omega-\omega_0) + \hat{\omega} + \omega_0)],$$

$$f(t)\sin\omega_0 t \mapsto \frac{1}{2}[\hat{f}(\omega-\omega_0) - \hat{\omega} + \omega_0)]$$

(амплитудная модуляция гармонического сигнала);

$$f(t)\sin^2\frac{\omega_0 t}{2} \mapsto \frac{1}{4}[2\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega-\omega_0) - \hat{f}(\omega+\omega_0)].$$

c) Найдите преобразования Фурье (или, как говорят, *фурье-образы*) следующих функций:

$$\Pi_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & \text{при } |t| \leqslant A, \\ 0 & \text{при } |t| > A \end{cases}$$

(*прямоугольный импульс*);

$$\Pi_A(t)\cos\omega_0 t$$

(гармонический сигнал, промодулированный прямоугольным импульсом);

$$\Pi_A(t+2A) + \Pi_A(t-2A)$$

(два прямоугольных импульса одинаковой полярности);

$$\Pi_A(t-A) - \Pi_A(t+A)$$

(два прямоугольных импульса разной полярности);

$$\Lambda_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{A}\left(1 - \frac{|t|}{A}\right) & \text{при } |t| \leqslant A, \\ 0 & \text{при } |t| > A \end{cases}$$

(треугольный импульс);

$$\cos at^2 \text{ и } \sin at^2 \ (a > 0);$$
$$|t|^{-1/2} \text{ и } |t|^{-1/2}e^{-a|t|} \ (a > 0).$$

d) Найдите фурье-прообразы следующих функций:

$$\operatorname{sinc}\frac{\omega A}{\pi}, \quad 2i\frac{\sin^2\omega A}{\omega A}, \quad 2\operatorname{sinc}^2\frac{\omega A}{\pi},$$

где $\operatorname{sinc}\frac{x}{\pi} := \frac{\sin x}{x}$ — *функция отсчетов*.

e) Используя предыдущие результаты, найдите значения уже встречавшихся нам интегралов:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx, \ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx, \ \int_{-\infty}^{\infty}\cos x^2\,dx, \ \int_{-\infty}^{\infty}\sin x^2\,dx.$$

f) Проверьте, что интеграл Фурье функции $f(t)$ можно записать в любом из следующих видов:

$$f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{it\omega}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega(x-t)}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos 2\omega(x-t)\,dx.$$

2. Пусть $f = f(x,y)$ — решение двумерного уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ в полуплоскости $y \geqslant 0$, удовлетворяющее условиям $f(x,0) = g(x)$ и $f(x,y) \to 0$ при $y \to +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

a) Проверьте, что преобразование Фурье $\hat{f}(\xi, y)$ функции f по переменной x имеет вид $\hat{g}(\xi)e^{-y|\xi|}$.

b) Найдите фурье-прообраз функции $e^{-y|\xi|}$ по переменной ξ.

c) Получите теперь уже встречавшееся нам (гл. XVII, § 4, пример 5) представление функции f в виде интеграла Пуассона

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-\xi)^2+y^2} g(\xi)\,d\xi.$$

3. Напомним, что *n-м моментом функции* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ называется величина $M_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)\,dx$. В частности, если f — плотность распределения вероятностей, т. е. $f(x)\geqslant 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, то $x_0 = M_1(f)$ есть математическое ожидание случайной величины x с распределением f, а дисперсия $\sigma^2 := \int_{-\infty}^{\infty}(x-x_0)^2 f(x)\,dx$ этой случайной величины представляется в виде $\sigma^2 = M_2(f) - M_1^2(f)$.

Рассмотрим следующее преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx$$

функции f. Раскладывая $e^{-i\xi x}$ в ряд, покажите, что:

a) $\hat{f}(\xi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n M_n(f)}{n!}\xi^n$ если, например, $f\in\mathscr{S}$.

b) $M_n(f) = (i)^n \hat{f}^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, \ldots$

c) Пусть теперь f вещественнозначна, тогда $\hat{f}(\xi) = A(\xi)e^{\varphi(\xi)}$, где $A(\xi)$ — модуль, а $\varphi(\xi)$ — аргумент $\hat{f}(\xi)$, причем $A(\xi) = A(-\xi)$ и $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$. Положим для нормировки, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Проверьте, что тогда

$$\hat{f}(\xi) = 1 + i\varphi'(0)\xi + \frac{A''(0)-(\varphi'(0))^2}{2}\xi^2 + o(\xi^2) \quad (\xi\to 0)$$

и

$$x_0 := M_1(f) = -\varphi'(0), \quad \text{а } \sigma^2 = M_1^2(f) - M_2(f) = -A''(0).$$

4. a) Проверьте, что функция $e^{-a|x|}$ $(a\geqslant 0)$, как и все ее производные, определенные при $x\neq 0$, убывает на бесконечности быстрее любой отрицательной степени переменной $|x|$ и тем не менее эта функция не принадлежит классу $\mathscr{S}$.

b) Убедитесь в том, что преобразование Фурье этой функции бесконечно дифференцируемо на $\mathbb{R}$, но не принадлежит классу $\mathscr{S}$ (и все потому, что $e^{-a|x|}$ не дифференцируема при $x = 0$).

5. a) Покажите, что функции класса $\mathscr{S}$ плотны в пространстве $\mathscr{R}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ абсолютно интегрируемых с квадратом функций $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, наделенном скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}(f\cdot\bar{g})(x)\,dx$ и порожденными им нормой $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2(x)\,dx\right)^{1/2}$ и метрикой $d(f, g) = \|f-g\|$.

b) Рассмотрим теперь $\mathscr{S}$ как метрическое пространство $(\mathscr{S}, d)$ с указанной метрикой d (сходимости в смысле среднего квадратичного уклонения на $\mathbb{R}^n$). Пусть

$L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ или, короче, L_2 — пополнение метрического пространства $(\mathscr{S}, d)$ (см. гл. IX, § 5). Каждый элемент $f \in L_2$ определяется последовательностью $\{\varphi_k\}$ функций $\varphi_k \in \mathscr{S}$, которая является последовательностью Коши в смысле метрики d.

Покажите, что тогда и последовательность $\{\widehat{\varphi}_k\}$ фурье-образов функций φ_k является последовательностью Коши в $\mathscr{S}$ и, следовательно, задает определенный элемент $\hat{f} \in L_2$, который естественно назвать преобразованием Фурье элемента $f \in L_2$.

c) Покажите, что в L_2 естественным образом вводится линейная структура и скалярное произведение, относительно которых преобразование Фурье $L_2 \xrightarrow{\hat{}} L_2$ оказывается линейным изометрическим отображением L_2 на себя.

d) На примере функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ можно видеть, что если $f \in \mathscr{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, то не обязательно $f \in \mathscr{R}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Тем не менее, если $f \in \mathscr{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, то, поскольку f — локально интегрируема, можно рассмотреть функцию

$$\hat{f}_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x) e^{-i\xi x}\, dx.$$

Проверьте, что $\hat{f}_A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ и $\hat{f}_A \in \mathscr{R}_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

e) Докажите, что $\hat{f}_A$ сходится в L_2 к некоторому элементу $\hat{f} \in L_2$ и $\|\hat{f}_A\| \to \|\hat{f}\| = \|f\|$ при $A \to +\infty$ (это — теорема Планшереля[1]).

6. *Принцип неопределенности.* Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ — функции класса $\mathscr{S}$ (или элементы пространства L_2 из задачи 5), причем $\psi = \widehat{\varphi}$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2(p)\, dp = 1$. В таком случае функции $|\varphi|^2$ и $|\psi|^2$ можно рассматривать как некоторые плотности распределения вероятностей случайных величин x и p соответственно.

a) Покажите, что сдвигом по аргументу (специальным выбором начала отсчета аргумента) функции φ, не меняя величины $\|\widehat{\varphi}\|$, можно получить новую функцию φ такую, что $M_1(|\varphi|^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x|\varphi|^2(x)\, dx = 0$, а затем, не меняя $M_1(|\varphi|^2) = 0$, можно аналогичным сдвигом по аргументу функции ψ добиться того, что $M_1(|\psi|^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p|\psi|^2(p)\, dp = 0$.

b) Рассмотрите при вещественном параметре α величину

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha x \varphi(x) + \varphi'(x)|^2\, dx \geqslant 0$$

и, опираясь на равенство Парсеваля и формулу $\widehat{\varphi'}(p) = ip\widehat{\varphi}(p)$, покажите, что $\alpha^2 M_2(|\varphi|^2) - \alpha + M_2(|\psi|^2) \geqslant 0$. (Определения M_1 и M_2 см. в задаче 3.)

c) Получите отсюда соотношение

$$M_2(|\varphi|^2) \cdot M_2(|\psi|^2) \geqslant 1/4.$$

Это соотношение показывает, что чем более «сосредоточена» сама функция φ, тем «размытее» ее преобразование Фурье и обратно (см. в этой связи примеры 1, 7 и задачу 7b).

---

[1]М. Планшерель (1885—1967) — швейцарский математик.

В квантовой механике это соотношение, называемое *принципом неопределенности*, приобретает конкретный физический смысл. Например, нельзя одновременно измерить точно и координату квантовой частицы, и ее импульс. Этот фундаментальный факт (называемый *принципом неопределенности Гейзенберга*[1]), в математическом отношении совпадает с найденным выше соотношением между $M_2(|\varphi|^2)$ и $M_2(|\psi|^2)$.

Следующие три задачи дают начальное представление о преобразовании Фурье обобщенных функций.

7. a) Используя пример 1, найдите спектр сигнала, выражаемого функцией

$$\Delta_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha} & \text{при } |t| \leqslant \alpha, \\ 0 & \text{при } |t| > \alpha. \end{cases}$$

b) Проследите за изменением функции $\Delta_\alpha(t)$ и ее спектра при $\alpha \to +0$ и скажите, каким, по вашему мнению, следует считать спектр единичного импульса, выражаемого δ-функцией.

c) Используя пример 2, найдите теперь сигнал $\varphi(t)$ на выходе идеального фильтра низкой частоты (с верхней граничной частотой a), возникающий как ответ на единичный импульс $\delta(t)$.

d) Опираясь на полученный результат, истолкуйте теперь физический смысл членов ряда Котельникова (44) и предложите принципиальную схему передачи сигнала $f(t)$, имеющего финитный спектр, основанную на формуле Котельникова (44).

8. *Пространство Л. Шварца.* Проверьте, что:

a) Если $\varphi \in \mathscr{S}$, а P — полином, то $(P \cdot \varphi) \in \mathscr{S}$.

b) Если $\varphi \in \mathscr{S}$, то $D^\alpha \varphi \in \mathscr{S}$ и $D^\beta(PD^\alpha \varphi) \in \mathscr{S}$, где α и β — неотрицательные мультииндексы, а P — полином.

c) В $\mathscr{S}$ вводится следующее понятие сходимости. Последовательность $\{\varphi_k\}$ функций $\varphi_k \in \mathscr{S}$ считается сходящейся к нулю, если для любых неотрицательных мультииндексов α, β последовательность функций $\{x^\beta D^\alpha \varphi_k\}$ сходится к нулю равномерно на $\mathbb{R}^n$. Соотношение $\varphi_k \to \varphi \in \mathscr{S}$ будет означать, что $(\varphi - \varphi_k) \to 0$ в $\mathscr{S}$.

Линейное пространство $\mathscr{S}$ быстро убывающих функций, наделенное указанной сходимостью, называется *пространством Шварца*.

Покажите, что если $\varphi_k \to \varphi$ в $\mathscr{S}$, то и $\widehat{\varphi}_k \to \widehat{\varphi}$ в $\mathscr{S}$ при $k \to \infty$. Таким образом, преобразование Фурье является линейным непрерывным преобразованием пространства Шварца.

9. *Пространство $\mathscr{S}'$ обобщенных функций умеренного роста*. Линейные непрерывные функционалы, определенные на пространстве $\mathscr{S}$ быстро убывающих функций, называют *обобщенными функциями медленного* или *умеренного роста*. Линейное пространство таких функционалов (сопряженное к пространству $\mathscr{S}$) обозначают символом $\mathscr{S}'$. Значение функционала $F \in \mathscr{S}'$ на функции $\varphi \in \mathscr{S}$ будем записывать символом $F(\varphi)$.

a) Пусть $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — полином от n переменных, а $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — локально интегрируемая функция, допускающая на бесконечности оценку $|f(x)| \leqslant |P(x)|$ (т. е., быть может, растущая при $x \to \infty$, но умеренно: не быстрее, чем степенным образом). Покажите, что тогда f можно считать (регулярным) элементом пространства $\mathscr{S}'$, если положить

$$f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{S}).$$

[1] В. Гейзенберг (1901—1976) — немецкий физик, один из создателей квантовой механики.

b) Умножение обобщенной функции $F \in \mathscr{S}'$ на обычную функцию $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ определяется, как всегда, соотношением $(fF)(\varphi) := F(f\varphi)$. Проверьте, что для обобщенных функций класса $\mathscr{S}'$ корректно определено умножение не только на функции $f \in \mathscr{S}$, но и на полиномы $P: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

c) Дифференцирование обобщенных функций $F \in \mathscr{S}'$ определяется традиционным способом: $(D^\alpha F)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} F(D^\alpha \varphi)$.

Покажите, что это определение корректно, т. е. если $F \in \mathscr{S}'$, то и $D^\alpha F \in \mathscr{S}'$ при любом неотрицательном целочисленном мультииндексе $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

d) Если f и φ достаточно регулярные функции (например, класса $\mathscr{S}$), то, как видно из соотношения (36), имеет место равенство

$$\hat{f}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)\,dx = f(\widehat{\varphi}).$$

Это равенство (Парсеваля) и кладут в основу определения преобразования Фурье $\widehat{F}$ обобщенной функции $F \in \mathscr{S}'$, полагая по определению, что $\widehat{F}(\varphi) := F(\widehat{\varphi})$.

Благодаря инвариантности пространства $\mathscr{S}$ относительно преобразования Фурье, это определение корректно для любого элемента $F \in \mathscr{S}$.

Покажите, что оно не является корректным для обобщенных функций пространства $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, действующих на пространстве $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ гладких финитных функций. Именно этим обстоятельством и объясняется роль пространства $\mathscr{S}$ Шварца в теории преобразования Фурье и его применении к обобщенным функциям.

e) В задаче 7 мы получили начальное представление о преобразовании Фурье δ-функции. Преобразование Фурье δ-функции можно было бы наивно искать прямо по общему определению преобразования Фурье регулярной функции. Тогда мы нашли бы, что

$$\hat{\delta}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) e^{-i(\xi,x)}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Покажите теперь, что при корректном отыскании преобразования Фурье обобщенной функции $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, т. е., исходя из равенства $\hat{\delta}(\varphi) = \delta(\widehat{\varphi})$, получается (то же самое), что $\delta(\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}}$. Итак, преобразование Фурье δ-функции есть постоянная функция. (Можно перенормировать преобразование Фурье так, чтобы эта константа была равна единице, см задачу 10.)

f) Сходимость в $\mathscr{S}'$, как всегда в обобщенных функциях, понимается в следующем смысле: $(F_n \to F$ в $\mathscr{S}'$ при $n \to \infty) := (\forall \varphi \in \mathscr{S}\ (F_n(\varphi) \to F(\varphi)$ при $n \to \infty))$.

Проверьте формулу обращения (интеграл Фурье) для δ-функции:

$$\delta(x) = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-A}^{A} \cdots \int \hat{\delta}(\xi) e^{i(x,\xi)}\,d\xi.$$

g) Пусть $\delta(x - x_0)$, как обычно, означает сдвиг δ-функции в точку x_0, т. е. $\delta(x - x_0)(\varphi) = \varphi(x_0)$. Проверьте, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \quad \left(= \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} \delta(x-n)\right)$$

сходится в пространстве $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, (здесь $\delta \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ и $n \in \mathbb{Z}$).

h) Используя возможность почленно дифференцировать сходящийся ряд обобщенных функций и учитывая равенство из задачи 13f, § 2, покажите, что если $F = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$, то

$$\widehat{F} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi n).$$

i) Используя соотношение $\widehat{F}(\varphi) = F(\widehat{\varphi})$, получите из предыдущего результата формулу Пуассона (39).

j) Докажите следующее соотношение (*θ-формула*)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{t}n^2} \quad (t > 0),$$

играющее важную роль в теории эллиптических функции и теории теплопроводности.

10. Если преобразование Фурье $\breve{\mathscr{F}}[f]$ функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ определить формулой

$$\breve{f}(\nu) := \breve{\mathscr{F}}[f](\nu) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt,$$

то многие относящиеся к преобразованию Фурье формулы станут особенно простыми и изящными.

a) Проверьте, что $\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \breve{f}\left(\frac{u}{2\pi}\right)$.

b) Покажите, что $\breve{\mathscr{F}}[\breve{\mathscr{F}}[f]](t) = f(-t)$, т. е.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \breve{f}(\nu)e^{2\pi i\nu t}\,d\nu.$$

Это наиболее естественная форма разложения $f(t)$ по гармоникам различных частот ν, а $\breve{f}(\nu)$ в этом разложении есть *частотный спектр функции f*.

c) Проверьте, что $\breve{\delta} = 1$ и $\breve{1} = \delta$.

d) Убедитесь в том, что формула Пуассона (39) теперь принимает особенно изящный вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \breve{\varphi}(n).$$

Глава XIX

Асимптотические разложения

Большинство явлений, с которыми нам приходится сталкиваться, в математическом отношении характеризуется некоторым набором числовых параметров с довольно сложной зависимостью между ними. Однако описание явления, как правило, существенно упрощается, если известно, что некоторые из этих параметров или их комбинации очень велики или, наоборот, очень малы.

Пример 1. При описании относительных движений, происходящих со скоростями v, много меньшими скорости света ($|v| \ll c$), вместо преобразований Лоренца (гл. I, § 3, пример 3)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

можно использовать преобразования Галилея

$$x' = x - vt, \quad t' = t,$$

поскольку $v/c \approx 0$.

Пример 2. Период

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

колебаний маятника через параметр $k^2 = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$ связан с углом φ_0 максимального отклонения маятника от положения устойчивого равновесия (см. гл. VI, § 4). Если колебания малы, т. е. $\varphi_0 \approx 0$, то для периода таких колебаний получается простая формула

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Пример 3. Пусть на частицу массы m действует возвращающая ее в положение равновесия сила, пропорциональная величине отклонения (пружина с коэффициентом жесткости k), и сила сопротивления среды, пропорциональная (с коэффициентом α) квадрату скорости частицы. Уравнение движения в этом случае имеет вид (см. гл. V, § 6)

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x}^2 + kx = 0.$$

Если среда «разрежается», то $\alpha \to 0$ и, надо полагать, движение становится близким к описываемому уравнением

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

(гармонические колебания частоты $\sqrt{\frac{k}{m}}$), а если среда «густеет», то $\alpha \to \infty$ и, поделив на α, получаем в пределе уравнение $\dot{x}^2 = 0$, т. е. $x(t) \equiv \text{const}$.

Пример 4. Если $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превосходящих $x \in \mathbb{R}$, то, как известно (см. гл. III, § 2), при больших значениях x величину $\pi(x)$ с малой относительной погрешностью можно находить по формуле

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}.$$

Пример 5. Куда более тривиальными, но не менее важными являются соотношения

$$\sin x \approx x \quad \text{или} \quad \ln(1+x) \approx x,$$

относительная погрешность в которых тем меньше, чем ближе x к нулю (см. гл. V, § 3). Эти соотношения при желании могут быть уточнены,

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!}x^3, \quad \ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2,$$

приписыванием одного или более следующих членов, получаемых по формуле Тейлора.

Итак, задача состоит в том, чтобы найти обозримое, удобное и в существенном правильное описание изучаемого явления, используя специфику ситуации, возникающей, когда какой-то характеризующий явление параметр (или комбинация параметров) мал (стремится к нулю) или, наоборот, велик (стремится к бесконечности).

Значит, по существу речь снова идет о теории предельного перехода.

Задачи такого рода называются *асимптотическими*. Они возникают, как можно понять, практически во всех отделах математики и естествознания.

Решение асимптотической задачи обычно состоит из следующих этапов: выполнение предельного перехода и отыскание (главного члена) асимптотики, т. е. удобного упрощенного описания явления; оценка погрешности, возникающей при использовании найденной асимптотической формулы, и выяснение области ее применимости; уточнение главного члена асимптотики, аналогичное (но далеко не всегда столь алгоритмичное) процессу дописывания следующего члена в формуле Тейлора.

Методы решения асимптотических задач (называемые *асимптотическими методами*) обычно весьма тесно связаны со спецификой задачи. К числу редких достаточно общих и в то же время элементарных асимптотических методов, конечно, относится формула Тейлора — одно из наиболее важных соотношений дифференциального исчисления.

Эта глава должна дать читателю начальные представления об элементарных асимптотических методах анализа.

В первом параграфе мы введем общие понятия и определения, относящиеся к элементарным асимптотическим методам, а во втором используем их при изложении метода Лапласа построения асимптотического разложения интегралов Лапласа. Этот метод, найденный Лапласом в его исследованиях по предельным теоремам теории вероятностей, является важнейшей составной частью развитого впоследствии Риманом метода перевала, излагаемого обычно в курсе комплексного анализа. Дальнейшие сведения о различных асимптотических методах анализа можно найти в специальных книгах, цитированных в списке литературы. В них также имеется обширная бибилиография, относящаяся к этому кругу вопросов.

§ 1. Асимптотическая формула и асимптотический ряд

1. Основные определения

a. Асимптотические оценки и асимптотические равенства. Начнем для полноты с некоторых напоминаний и пояснений.

Определение 1. Пусть $f\colon X\to Y$ и $g\colon X\to Y$ — вещественно-, комплексно- или вообще векторнозначные (в соответствии с природой множества Y) функции, определенные на множестве X, и пусть $\mathcal{B}$ — база в X. Тогда соотношения

$$f=O(g) \text{ или } f(x)=O(g(x)), \qquad x\in X,$$
$$f=O(g) \text{ или } f(x)=O(g(x)) \text{ при базе } \mathcal{B},$$
$$f=o(g) \text{ или } f(x)=o(g(x)) \text{ при базе } \mathcal{B}$$

означают по определению, что в равенстве $|f(x)|=\alpha(x)|g(x)|$ вещественная функция $\alpha(x)$ является, соответственно, ограниченной на X, финально ограниченной при базе $\mathcal{B}$ и бесконечно малой при базе $\mathcal{B}$.

Эти соотношения обычно называют *асимптотическими оценками* (функции f).

Соотношение

$$f\sim g \text{ или } f(x)\sim g(x) \text{ при базе } \mathcal{B},$$

по определению означающее, что $f(x)=g(x)+o(g(x))$ при базе $\mathcal{B}$, называют обычно *асимптотической эквивалентностью* или *асимптотическим равенством*[1] указанных *функций при базе* $\mathcal{B}$.

Асимптотические оценки и асимптотические равенства объединяют термином *асимптотические формулы*.

Там, где указание аргумента функции несущественно, принята сокращенная форма обозначений $f=o(g)$, $f=O(g)$, или $f\sim g$, которой мы уже систематически пользовались.

[1] Полезно иметь в виду также часто употребляемый для обозначения асимптотических равенств символ $\simeq$.

Если $f=O(g)$ и одновременно $g=O(f)$, то пишут $f \asymp g$ и говорят, что f и g — *величины одного порядка* при данной базе.

В наших дальнейших рассмотрениях $Y=\mathbb{C}$ или $Y=\mathbb{R}$; $X\subset\mathbb{C}$, или $X\subset\mathbb{R}$; $\mathscr{B}$ — как правило, одна из баз $X\ni x\to 0$ или $X\ni x\to\infty$.

Используя введенные обозначения, можно, в частности, написать, что

$$\cos x = O(1), \quad x\in\mathbb{R},$$
$$\cos z \neq O(1), \quad z\in\mathbb{C},$$
$$\ln e^z = 1+z+o(z) \quad \text{при } z\to 0,\ z\in\mathbb{C},$$
$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+o(x) \quad \text{при } x\to 0,\ x\in\mathbb{R},$$
$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x}+o\Bigl(\frac{x}{\ln x}\Bigr) \quad \text{при } x\to +\infty,\ x\in\mathbb{R}.$$

Замечание 1. По поводу асимптотических равенств полезно заметить, что они являются всего лишь предельными соотношениями, использование которых в вычислительных целях возможно, но после дополнительной работы, связанной с оценкой остатка. Об этом мы уже говорили, обсуждая формулу Тейлора. Кроме того, надо иметь в виду, что асимптотическая эквивалентность, вообще говоря, позволяет проводить вычисления с малой относительной, но не малой абсолютной погрешностью. Так, например, при $x\to+\infty$ разность $\pi(x)-\frac{x}{\ln x}$ не стремится к нулю, поскольку при каждом значении x, являющемся простым числом, функция $\pi(x)$ имеет единичный скачок. Вместе с тем, относительная погрешность от замены $\pi(x)$ на $\frac{x}{\ln x}$ стремится к нулю:

$$\frac{o\Bigl(\frac{x}{\ln x}\Bigr)}{\Bigl(\frac{x}{\ln x}\Bigr)} \to 0 \quad \text{при } x\to+\infty.$$

Это обстоятельство, как мы увидим ниже, приводит к важным в вычислительном отношении асимптотическим рядам, следящим за относительной, а не за абсолютной погрешностью приближения и потому часто расходящимся, в отличие от классических рядов, для которых абсолютная величина разности между приближаемой функцией и n-й частичной суммой ряда стремится к нулю при $n\to+\infty$.

Рассмотрим некоторые примеры получения асимптотических формул.

Пример 6. Трудоемкость вычисления значений $n!$ или $\ln n!$ возрастает при увеличении $n\in\mathbb{N}$. Воспользуемся, однако, тем, что n велико и получим при этом условии удобную асимптотическую формулу для приближенного вычисления $\ln n!$

Из очевидных соотношений

$$\int_1^n \ln x\,dx = \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln x\,dx < \sum_{k=1}^{n}\ln k < \sum_{k=2}^{n}\int_{k}^{k+1}\ln x\,dx = \int_2^{n+1}\ln x\,dx$$

следует, что

$$0 < \ln n! - \int_1^n \ln x\,dx < \int_1^2 \ln x\,dx + \int_n^{n+1} \ln x\,dx < \ln 2(n+1).$$

Но

$$\int_1^n \ln x\,dx = n(\ln n - 1) + 1 = n\ln n - (n-1),$$

поэтому при $n \to \infty$

$$\ln n! = \int_1^n \ln x\,dx + O(\ln 2(n+1)) = n\ln n - (n-1) + O(\ln n) = n\ln n + O(n).$$

Поскольку $O(n) = o(n\ln n)$, когда $n \to +\infty$, относительная погрешность формулы $\ln n! \approx n\ln n$ стремится к нулю при $n \to +\infty$.

Пример 7. Покажем, что при $x \to +\infty$ функция

$$f_n(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^n}\,dt \quad (n \in \mathbb{R})$$

асимптотически эквивалентна функции $g_n(x) = x^{-n}e^x$. Поскольку $g_n(x) \to \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то, применяя правило Лопиталя, находим, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f_n'(x)}{g_n'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-n}e^x}{x^{-n}e^x - nx^{-n-1}e^x} = 1.$$

Пример 8. Найдем поточнее асимптотическое поведение функции

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt,$$

которая лишь постоянным слагаемым отличается от интегральной экспоненты

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$f(x) = \frac{e^t}{t}\Big|_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,dt = \left(\frac{e^t}{t} + \frac{e^t}{t^2}\right)\Big|_1^x + \int_1^x \frac{2e^t}{t^3}\,dt =$$

$$= \left(\frac{e^t}{t} + \frac{1!\,e^t}{t^2} + \frac{2!\,e^t}{t^3}\right)\Big|_1^x + \int_1^x \frac{3!\,e^t}{t^4}\,dt =$$

$$= e^t\left(\frac{0!}{t} + \frac{1!}{t^2} + \frac{2!}{t^3} + \ldots + \frac{(n-1)!}{t^n}\right)\Big|_1^x + \int_1^x \frac{n!\,e^t}{t^{n+1}}\,dt.$$

Последний интеграл, как показано в примере 7, есть $O(x^{-(n+1)}e^x)$ при $x \to +\infty$. Включая в $O(x^{-(n+1)}e^x)$ еще и получаемую при подстановке $t=1$ постоянную $-e\sum_{k=1}^{n}(k-1)!$, находим, что

$$f(x) = e^x \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{x^k} + O\Big(\frac{e^x}{x^{n+1}}\Big) \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Погрешность $O\Big(\frac{e^x}{x^{n+1}}\Big)$ приближенного равенства

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{x^k} e^x$$

асимптотически бесконечно мала по сравнению с каждым, в том числе и последним, членом написанной суммы. Вместе с тем, при $x \to +\infty$ каждый следующий член суммы есть бесконечно малая в сравнении с предшествующим членом, поэтому естественно написать неограниченную уточняющуюся последовательность подобных формул в виде ряда, порожденного функцией f:

$$f(x) \simeq e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Отметим, что этот ряд, очевидно, расходится при любом значении $x \in \mathbb{R}$, поэтому нельзя писать

$$f(x) = e^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Таким образом, мы имеем здесь дело с некоторым новым и явно полезным *асимптотическим* пониманием ряда, связанным, в отличие от классического случая, с относительным, а не абсолютным приближением рассматриваемой функции. Частичные суммы такого ряда, в отличие от классического случая, используются не столько для приближения значения функции в конкретных точках, сколько для описания коллективного поведения значений функции при рассматриваемом предельном переходе (который в нашем примере состоял в стремлении x к $+\infty$).

b. Асимптотическая последовательность и асимптотический ряд

Определение 2. Последовательность асимптотических формул

$$\begin{aligned}
&f(x) = \psi_0(x) + o(\psi_0(x)),\\
&f(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + o(\psi_1(x)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x) + o(\psi_n(x)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

справедливых при некоторой базе $\mathcal{B}$ в множестве X, где определены рас-

сматриваемые функции, записывают в виде соотношения

$$f(x) \simeq \psi_0(x) + \psi_1(x) + \ldots + \psi_n(x) + \ldots$$

или, короче, в виде $f(x) \simeq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \psi_k(x)$ и называют *асимптотическим разложением функции f при данной базе $\mathscr{B}$*.

Из этого определения видно, что в асимптотическом разложении всегда

$$o(\psi_n(x)) = \psi_{n+1}(x) + o(\psi_{n+1}(x)) \quad \text{при базе } \mathscr{B}$$

и, значит, при любом значении $n = 0, 1, \ldots$

$$\psi_{n+1}(x) = o(\psi_n(x)) \quad \text{при базе } \mathscr{B},$$

т. е. каждый следующий член разложения доставляет поправку, асимптотически более тонкую по сравнению с предшествующим членом.

Асимптотические разложения обычно появляются в виде линейной комбинации

$$c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots$$

функций той или иной удобной для конкретной задачи последовательности $\{\varphi_n(x)\}$.

Определение 3. Пусть X — множество с заданной в нем базой $\mathscr{B}$. Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ определенных на X функций называется *асимптотической последовательностью при базе $\mathscr{B}$*, если $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ при базе $\mathscr{B}$ (каковы бы ни были два соседние члена φ_n, φ_{n+1} этой последовательности) и если на любом элементе базы $\mathscr{B}$ ни одна из функций $\varphi_n \in \{\varphi_n(x)\}$ не равна нулю тождественно.

Замечание 2. Условие, что $(\varphi_n|_B)(x) \not\equiv 0$ на элементах B базы $\mathscr{B}$ естественно, поскольку в противном случае все функции $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots$ были бы равны нулю тождественно на B и система $\{\varphi_n\}$ оказалась бы в асимптотическом отношении тривиальной.

Пример 9. Следующие последовательности, очевидно, являются асимптотическими:

a) $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ при $x \to 0$;

b) $1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^n}, \ldots$ при $x \to \infty$;

c) $x^{p_1}, x^{p_2}, \ldots, x^{p_n}, \ldots$ при базе $x \to 0$, если $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$, при базе $x \to \infty$, если $p_1 > p_2 > \ldots > p_n > \ldots$;

d) последовательность $\{g(x)\varphi_n(x)\}$, полученная из асимптотической умножением всех ее членов на одну и ту же функцию.

Определение 4. Если $\{\varphi_n\}$ — асимптотическая последовательность при базе $\mathscr{B}$, то асимптотическое разложение вида

$$f(x) \simeq c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots$$

называется *асимптотическим разложением* или *асимптотическим рядом функции f по асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$ при базе $\mathscr{B}$*.

Замечание 3. Понятие асимптотического ряда (применительно к степенным рядам) было сформулировано Пуанкаре (1886), активно использовавшего асимптотические разложения в своих исследованиях по небесной механике, но сами асимптотические ряды, как и некоторые методы их получения, встречались в математике еще раньше. По поводу возможного обобщения понятия асимптотического разложения в смысле Пуанкаре (которое мы изложили в определениях 2—4) см. задачу 5 в конце параграфа.

2. Общие сведения об асимптотических рядах

a. Единственность асимптотического разложения. Говоря об асимптотическом поведении функции при некоторой базе $\mathcal{B}$, мы интересуемся лишь характером предельного поведения функции, поэтому если какие-то две, вообще говоря, различные, функции f и g совпадают на некотором элементе базы $\mathcal{B}$, то они имеют одинаковое асимптотическое поведение при базе $\mathcal{B}$ и в асимптотическом смысле должны считаться совпадающими.

Далее, если заранее фиксировать асимптотическую последовательность $\{\varphi_n\}$, по которой желательно вести асимптотическое разложение, то надо считаться с ограниченными возможностями любой такой системы функций $\{\varphi_n\}$. А именно, найдутся функции, которые при данной базе бесконечно малы в сравнении с любым членом φ_n асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$.

Пример 10. Пусть $\varphi_n(x)=\frac{1}{x^n}$, $n=0, 1, \ldots$, тогда $e^{-x}=o(\varphi_n(x))$ при $x\to\to+\infty$.

Таким образом, естественно принять

Определение 5. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая последовательность при базе $\mathcal{B}$, то функция f такая, что для каждого $n=0, 1, \ldots$, $f(x)=o(\varphi_n(x))$ при базе $\mathcal{B}$, называется *асимптотическим нулем относительно последовательности* $\{\varphi_n(x)\}$.

Определение 6. Функции f и g будем называть *асимптотически совпадающими при базе* $\mathcal{B}$ *относительно последовательности функций* $\{\varphi_n\}$, асимптотической при базе $\mathcal{B}$, если разность $f-g$ этих функций является асимптотическим нулем относительно последовательности $\{\varphi_n\}$.

Утверждение 1 (о единственности асимптотического разложения). *Пусть* $\{\varphi_n\}$ — *асимптотическая последовательность функций при некоторой базе* $\mathcal{B}$.

a) *Если функция* f *допускает асимптотическое разложение по последовательности* $\{\varphi_n\}$ *при базе* $\mathcal{B}$, *то это разложение единственно.*

b) *Если функции* f *и* g *допускают асимптотическое разложение по системе* $\{\varphi_n\}$, *то эти разложения идентичны в том и только в том случае, когда функции* f *и* g *асимптотически совпадают при базе* $\mathcal{B}$ *относительно последовательности* $\{\varphi_n\}$.

◄ a) Пусть функция φ не равна нулю тождественно на элементах базы $\mathcal{B}$.

Покажем, что если $f(x)=o(\varphi(x))$ при базе $\mathcal{B}$ и одновременно $f(x)=c\varphi(x)+o(\varphi(x))$ при базе $\mathcal{B}$, то $c=0$.

Действительно, $|f(x)| \geqslant |c\varphi(x)| - |o((\varphi(x))| = |c|\,|\varphi(x)| - o(|\varphi(x)|)$ при базе $\mathscr{B}$, поэтому, если $|c| > 0$, то найдется элемент B_1 базы $\mathscr{B}$, в любой точке которого будет выполнено неравенство $|f(x)| \geqslant \frac{|c|}{2}|\varphi(x)|$. Если же $f(x) = o(\varphi(x))$ при базе $\mathscr{B}$, то найдется элемент B_2 базы $\mathscr{B}$, в любой точке которого $|f(x)| \leqslant \frac{|c|}{3}|\varphi(x)|$. Значит, в любой точке $x \in B_1 \cap B_2$ должно быть выполнено неравенство $\frac{|c|}{2}|\varphi(x)| \leqslant \frac{|c|}{3}|\varphi(x)|$ или, в предположении, что $|c| \neq 0$ неравенство $3|\varphi(x)| \leqslant 2|\varphi(x)|$. Но это невозможно, если $\varphi(x) \neq 0$ хотя бы в одной точке $x \in B_1 \cap B_2$.

Рассмотрим теперь асимптотическое разложение функции f по последовательности $\{\varphi_n\}$.

Пусть $f(x) = c_0\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$ и $f(x) = \tilde{c}_0\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$ при базе $\mathscr{B}$. Вычитая второе равенство из первого, получаем, что $0 = (c_0 - \tilde{c}_o)\varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$ при базе $\mathscr{B}$. Но $0 = o(\varphi_0(x))$ при базе $\mathscr{B}$, значит, по доказанному $c_0 - \tilde{c}_0 = 0$.

Если совпадение коэффициентов $c_0 = \tilde{c}_0, \ldots, c_{n-1} = \tilde{c}_{n-1}$ двух разложений функции f по системе $\{\varphi_n\}$ уже доказано, то из равенств

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + \ldots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + c_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x)),$$
$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + \ldots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + \tilde{c}_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x))$$

тем же способом получаем, что и $c_n = \tilde{c}_n$.

Ссылаясь на принцип индукции, заключаем, что утверждение a) верно.

b) Если при любом $n = 0, 1, \ldots$ $f(x) = c_0\varphi_0(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x))$ и $g(x) = c_0\varphi_0(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + o(\varphi_n(x))$ при базе $\mathscr{B}$, то при любом $n = 0, 1, \ldots$ $f(x) - g(x) = o(\varphi_n(x))$ при базе $\mathscr{B}$, и, значит, функции f и g асимптотически совпадают относительно асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$.

Обратное утверждение следует из a), поскольку асимптотический нуль, в качестве которого мы возьмем разность $f - g$, должен иметь только нулевое асимптотическое разложение. ►

Замечание 4. Мы обсудили вопрос о единственности асимптотического разложения. Подчеркнем, однако, что само по себе асимптотическое разложение функции по заданной наперед асимптотической последовательности возможно далеко не всегда. Не всегда же две функции f и g вообще должны быть связаны одним из асимптотических соотношений $f = O(g)$, $f = o(g)$, или $f \sim g$ при базе $\mathscr{B}$.

Довольно общая асимптотическая формула Тейлора, например, указывает конкретный класс функций (имеющих при $x = 0$ производные до порядка n), каждая из которых заведомо допускает асимптотическое представление

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n)$$

при $x \to 0$. Но вот уже функции $x^{1/2}$ нельзя дать асимптотическое разложение по системе $1, x, x^2, \ldots$ Таким образом, асимптотическую последователь-

ность и асимптотическое разложение не следует отождествлять с некоторым каноническим базисом и разложением по нему любой асимптотики. Возможных видов асимптотического поведения много больше того, что может описать фиксированная асимптотическая последовательность, поэтому описание асимптотического поведения функции — это не столько разложение по заранее заданной асимптотической системе, сколько ее отыскание. Нельзя, например, вычисляя неопределенный интеграл от элементарной функции, заранее требовать, чтобы ответ был композицией определенных элементарных функций, потому что он вообще может не быть элементарной функцией. Поиск асимптотических формул, подобно вычислению неопределенных интегралов, представляет интерес лишь в той степени, в какой ответ проще и доступнее для исследования, чем исходное выражение.

b. Допустимые действия с асимптотическими формулами. Элементарные арифметические свойства символов o и O (такие, как $o(g)+o(g)=o(g)$, $o(g)+O(g)=O(g)+O(g)=O(g)$ и т. п.) были рассмотрены еще в теории предела (гл. III, § 2, утверждение 4). Из этих свойств и определения асимптотического разложения вытекает очевидное

Утверждение 2 (о линейности асимптотических разложений). *Если функции f и g допускают асимптотические разложения*

$$f \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n, \quad g \simeq \sum_{n=0}^{\infty} b_n\varphi_n$$

по асимптотической последовательности $\{\varphi_n\}$ при базе $\mathcal{B}$, то их линейная комбинация $\alpha f+\beta g$ также допускает такое разложение, причем

$$(\alpha f+\beta g) \simeq \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)\varphi_n.$$

Дальнейшие свойства асимптотических разложений и вообще асимптотических формул будут относиться ко все более специальным случаям.

Утверждение 3 (об интегрировании асимптотических равенств). *Пусть f — функция, непрерывная на промежутке $I=[a;\omega[$ (или на промежутке $I=\,]\omega,a]$).*

a) *Если функция $g(x)$ непрерывна, неотрицательна на промежутке I, а интеграл $\int_a^\omega g(x)\,dx$ расходится, то из соотношений*

$$f(x)=O(g(x)), \quad f(x)=o(g(x)), \quad f(x)\sim g(x) \quad \text{при } I\ni x\to\omega$$

вытекает соответственно, что

$$F(x)=O(G(x)), \quad F(x)=o(G(x)) \quad \text{и} \quad F(x)\sim G(x),$$

где

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{и} \quad G(x)=\int_a^x g(t)\,dt.$$

b) *Если непрерывные положительные на промежутке* $I=[a,\omega[$ *функции* $\varphi_n(x)$, $n=0,1,\ldots$, *образуют асимптотическую последовательность при* $I\ni x\to\omega$, *а интегралы* $\Phi_n(x)=\int\limits_x^\omega \varphi_n(t)\,dt$ *при* $x\in I$ *сходятся, то функции* $\Phi_n(x)$, $n=0,1,\ldots$, *тоже образуют асимптотическую последовательность при* $I\ni x\to\omega$.

c) *Если интеграл* $\mathscr{F}(x)=\int\limits_x^\omega f(x)\,dx$ *сходится и функция* f *имеет асимптотическое разложение* $f(x)\simeq\sum\limits_{n=0}^\infty c_n\varphi_n(x)$ *при* $I\ni x\to\omega$ *по указанной в* b) *асимптотической последовательности* $\{\varphi_n(x)\}$, *то для* $\mathscr{F}$ *справедливо асимптотическое разложение* $\mathscr{F}(x)\simeq\sum\limits_{n=0}^\infty c_n\Phi_n(x)$.

◄ a) Если $f(x)=O(g(x))$ при $I\ni x\to\omega$, то найдутся точка $x_0\in I$ и постоянная M такие, что $|f(x)|\leqslant Mg(x)$ при $x\in[x_0,\omega[$. Значит, при $x\in[x_0,\omega[$ имеем $\left|\int\limits_a^x f(t)\,dt\right|\leqslant\left|\int\limits_a^{x_0} f(t)\,dt\right|+M\int\limits_{x_0}^x g(t)\,dt=O\left(\int\limits_a^x g(t)\,dt\right)$.

Для доказательства оставшихся двух соотношений можно воспользоваться (как и в примере 7) правилом Лопиталя, учитывая, что $G(x)=\int\limits_a^x g(t)\,dt\to\to\infty$ при $I\ni x\to\omega$. В результате получим, что

$$\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

b) Поскольку $\Phi_n(x)\to 0$ при $I\ni x\to\omega$ $(n=0,1,\ldots)$, то, вновь применяя правило Лопиталя, находим, что

$$\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\Phi_{n+1}(x)}{\Phi_n(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\Phi'_{n+1}(x)}{\Phi'_n(x)}=\lim_{I\ni x\to\omega}\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}=0.$$

c) Функция $r_n(x)$ в соотношении

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+r_n(x),$$

как разность непрерывных на I функций, сама непрерывна на I и, очевидно, $R_n(x)=\int\limits_x^\omega r_n(t)\,dt\to 0$ при $I\ni x\to\omega$. Но $r_n(x)=o(\varphi_n(x))$ при $I\ni x\to\omega$ и $\Phi_n(x)\to 0$ при $I\ni x\to\omega$, поэтому из того же правила Лопиталя следует, что в равенстве

$$\mathscr{F}(x)=c_0\Phi_0(x)+c_1\Phi_1(x)+\ldots+c_n\Phi_n(x)+R_n(x)$$

величина $R_n(x)$ есть $o(\Phi_n(x))$ при $I\ni x\to\omega$. ►

Замечание 5. Дифференцирование асимптотических равенств и асимптотических рядов, вообще говоря, незаконно.

Пример 11. Функция $f(x)=e^{-x}\sin(e^x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и является асимптотическим нулем относительно асимптотической последовательности $\left\{\frac{1}{x^n}\right\}$ при $x\to+\infty$. Производные от функций $\frac{1}{x^n}$ снова с

точностью до множителя имеют вид $\frac{1}{x^k}$, однако функция $f'(x) = -e^x \sin(e^x) + \cos(e^x)$ не только не является асимптотическим нулем, но вообще не имеет асимптотического разложения по последовательности $\left\{\frac{1}{x^n}\right\}$ при $x \to +\infty$.

3. Степенные асимптотические ряды. Остановимся в заключение на степенных асимптотических разложениях, которые встречаются особенно часто, хотя порой и в некотором обобщенном виде, как это было в примере 8.

Мы будем рассматривать разложения по последовательности $\{x^n;\ n = 0, 1, \dots\}$, асимптотической при $x \to 0$, и по последовательности $\left\{\frac{1}{x^n};\ n = 0, 1, \dots\right\}$, асимптотической при $x \to \infty$. Поскольку с точностью до замены $x = \frac{1}{u}$ это один и тот же объект, мы сформулируем очередное утверждение только для разложений по первой последовательности и отметим затем специфику некоторых из приводимых формулировок в случае разложений по второй последовательности.

Утверждение 4. *Пусть* 0 — *предельная точка множества* E, *и пусть*

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \\ g(x) &\simeq b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \end{aligned} \qquad \text{при } E \ni x \to 0.$$

Тогда при $E \ni x \to 0$

a) $(\alpha f + \beta g)(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$;

b) $(f \cdot g)(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, *где* $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$, $n = 0, 1, \dots$;

c) *если* $b_0 \neq 0$, *то* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, *где коэффициенты* d_n *находятся из рекуррентных соотношений*

$$a_0 = b_0 d_0, \quad a_1 = b_0 d_1 + b_1 d_0, \dots, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k d_{n-k}, \dots;$$

d) *если* E — *проколотая окрестность или полуокрестность точки* 0, *а* f *непрерывна на* E, *то*

$$\int_0^x f(t)\,dt \simeq a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots$$

e) *если в дополнение к условиям* d) $f \in C^{(1)}(E)$ *и*

$$f'(x) \simeq a'_0 + a'_1 x + \dots,$$

то $a'_n = (n+1) a_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$

◄ a) Это частный случай утверждения 2.

b) Используя свойства символа $o(\ )$ (см. гл. III, § 2, утверждение 4), получаем, что

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x) = \\ &= (a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+o(x^n))(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+o(x^n)) = \\ &= (a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)x^n+o(x^n)\end{aligned}$$

при $E\ni x\to 0$.

c) Если $b_0\neq 0$, то $g(x)\neq 0$ при x, близких к нулю, поэтому можно рассматривать отношение $\frac{f(x)}{g(x)}=h(x)$. Проверим, что если в представлении $h(x)=d_0+d_1x+\ldots+d_nx^n+r_n(x)$ коэффициенты $d_0, \ldots, d_n$ выбраны в соответствии с утверждением c), то $r_n(x)=o(x^n)$ при $E\ni x\to 0$. Из тождества $f(x)=g(x)h(x)$ получаем, что

$$\begin{aligned}a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+o(x^n) &= \\ &= (b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n+o(x^n))(d_0+d_1x+\ldots+d_nx^n+r_n(x)) = \\ &= (b_0d_0)+(b_0d_1+b_1d_0)x+\ldots+(b_0d_n+b_1d_{n-1}+\ldots+b_nd_0)x^n+ \\ &\qquad +b_0r_n(x)+o(r_n(x))+o(x^n),\end{aligned}$$

откуда следует, что $o(x^n)=b_0r_n(x)+o(r_n(x))+o(x^n)$ или $r_n(x)=o(x^n)$ при $E\ni$ $\ni x\to 0$, поскольку $b_0\neq 0$.

d) Это вытекает из утверждения 3c), если положить там $\omega=0$ и вспомнить, что $-\int\limits_x^0 f(t)\,dt=\int\limits_0^x f(t)\,dt$.

e) Поскольку функция $f'(x)$ непрерывна на $]0, x]$ (или $[x, 0[$) и ограничена (стремится к a_0' при $x\to 0$), то интеграл $\int\limits_0^x f'(x)\,dt$ существует. Очевидно, $f(x)=a_0+\int\limits_0^x f'(t)\,dt$, так как $f(x)\to a_0$ при $x\to 0$. Подставляя в это равенство асимптотическое разложение $f'(x)$ и пользуясь доказанным в d), получаем, что

$$f(x)\simeq a_0+a_0'(x)+\frac{a_1'}{2}x^2+\ldots+\frac{a_{n-1}'}{n}x^n+\ldots$$

Из единственности асимптотического разложения (утверждение 1) следуют теперь соотношения $a_n'=(n+1)a_{n+1}$, $n=0, 1, \ldots$ ►

Следствие 1. *Если U — окрестность (полуокрестность) бесконечности в $\mathbb{R}$, а функция f непрерывна в U и имеет асимптотическое разложение*

$$f(x)\simeq a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+\ldots \quad \textit{при } U\ni x\to\infty,$$

то взятый по лежащему в U промежутку интеграл

$$\mathscr{F}(x)=\int\limits_x^\infty\left(f(t)-a_0-\frac{a_1}{t}\right)dt$$

сходится и имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\mathscr{F}(x) \simeq \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \ldots + \frac{a_n}{nx^n} + \ldots \quad \text{\textit{при} } U \ni x \to \infty.$$

◄ Сходимость интеграла очевидна, поскольку

$$f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \sim \frac{a_2}{t^2} \quad \text{при } U \ni t \to \infty.$$

Остается, ссылаясь, например, на утверждение 3d), проинтегрировать асимптотическое разложение

$$f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \simeq \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \ldots + \frac{a_n}{t^n} \ldots \quad \text{при } U \ni t \to \infty. \text{ ►}$$

Следствие 2. *Если в дополнение к условиям следствия* 1 *известно, что* $f \in C^{(1)}(U)$, *и* f' *допускает асимптотическое разложение*

$$f'(x) \simeq a'_0 + \frac{a'_1}{x} + \frac{a'_2}{x^2} + \ldots + \frac{a'_n}{x^n} + \ldots \quad \text{\textit{при} } U \ni x \to \infty,$$

то это разложение можно получить формальным дифференцированием разложения функции f, *причем*

$$a'_n = -(n-1)a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots, \quad \text{\textit{и}} \quad a'_0 = a'_1 = 0.$$

◄ Поскольку $f'(x) = a'_0 + \frac{a'_1}{x} + O(1/x^2)$ при $U \ni x \to \infty$, то

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = a'_0 x + a'_1 \ln x + O(1)$$

при $U \ni x \to \infty$, и так как $f(x) \simeq a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$, а последовательность $x, \ln x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots$ асимптотическая при $U \ni x \to \infty$, утверждение 1 позволяет заключить, что $a'_0 = a'_1 = 0$. Теперь, интегрируя разложение $f'(x) \simeq \simeq \frac{a'_2}{x^2} + \frac{a'_3}{x^3} + \ldots$, в силу следствия 1 получаем разложение функции $f(x)$, и на основании единственности разложения приходим к соотношениям $a'_n = = -(n-1)a_{n-1}$ при $n = 2, 3, \ldots$ ►

Задачи и упражнения

1. a) Пусть $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ при $|z| > \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$. Покажите, что тогда $h(z) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ при $\mathbb{C} \ni z \to \infty$.

b) Считая, что искомое решение $y(x)$ уравнения $y'(x) + y^2(x) = \sin \frac{1}{x^2}$ при $x \to \infty$ имеет асимптотическое разложение $y(x) \simeq \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}$, найдите первые три члена этого разложения.

c) Докажите, что если $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ при $|z| < r$, $z \in \mathbb{C}$, а $g(z) \simeq b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ при $\mathbb{C} \ni z \to 0$, то в некоторой проколотой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$ определена функция $f \circ g$ и $(f \circ g)(z) \simeq c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ при $\mathbb{C} \ni z \to 0$, где коэффициенты $c_0, c_1, \ldots$ получаются подстановкой ряда в ряд так же, как и для сходящихся степенных рядов.

2. Покажите, что:

a) если f — непрерывная, положительная и монотонная функция при $x \geqslant 0$, то

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_{0}^{n} f(x)\,dx + O(f(n)) + O(1) \quad \text{при } n \to \infty;$$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln n + c + o(1)$ при $n \to \infty$;

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha}(\ln k)^{\beta} \sim \dfrac{n^{\alpha+1}(\ln n)^{\beta}}{\alpha+1}$ при $n \to \infty$ и $\alpha > -1$.

3. Интегрированием по частям найдите асимптотические разложения при $x \to +\infty$ следующих функций:

a) $\Gamma_s(x) = \int\limits_{x}^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$ — *неполная гамма-функция*;

b) $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt$ является *функцией вероятности ошибок* (напомним, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ — интеграл Эйлера — Пуассона);

c) $F(x) = \int\limits_{x}^{+\infty} \dfrac{e^{it}}{t^{\alpha}}\,dt$, если $\alpha > 0$.

4. Используя результат предшествующей задачи, найдите асимптотические разложения при $x \to +\infty$ следующих функций:

a) $\operatorname{Si}(x) = \int\limits_{0}^{x} \dfrac{\sin t}{t}\,dt$ — *интегральный синус* (напомним, что $\int\limits_{0}^{\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx = \dfrac{\pi}{2}$ — интеграл Дирихле);

b) $C(x) = \int\limits_{0}^{x} \cos \dfrac{\pi}{2}t^2\,dt$, $S(x) = \int\limits_{0}^{x} \sin \dfrac{\pi}{2}t^2\,dt$ — *интегралы Френеля* (напомним, что $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x^2\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} \sin x^2\,dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$).

5. Эрдейи[1] принадлежит следующее обобщение введенного Пуанкаре и рассмотренного выше понятия разложения по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$.

Пусть X — множество, $\mathscr{B}$ — база в X, $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая при базе $\mathscr{B}$ последовательность функций на X. Если заданные на X функции $f(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, … таковы, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \psi_k(x) + o(\varphi_n(x)) \quad \text{при базе } \mathscr{B},$$

то пишут

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x), \quad \{\varphi_n(x)\} \text{ при базе } \mathscr{B},$$

и говорят, что имеется *асимптотическое в смысле Эрдейи разложение* функции f при базе $\mathscr{B}$.

---

[1] А. Эрдейи (1908—1977) — английский математик.

a) Обратите внимание на то, что в задаче 4 вы получили разложения асимптотические в смысле Эрдейи, если считать $\varphi_n(x) = x^{-n}$, $n = 0, 1, \ldots$

b) Покажите, что асимптотические в смысле Эрдейи разложения не обладают свойством единственности (функции ψ_n можно менять).

c) Покажите, что если заданы множество X, база $\mathcal{B}$ в X, функция f на X и последовательности $\{\mu_n(x)\}$ и $\{\varphi_n(x)\}$, вторая из которых является асимптотической при базе $\mathcal{B}$, то разложение

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu_n(x), \quad \{\varphi_n(x)\} \text{ при базе } \mathcal{B},$$

где a_n — числовые коэффициенты, либо вообще невозможно, либо единственно.

6. *Равномерные асимптотические оценки.*

Пусть X — множество, $\mathcal{B}_X$ — база в X, и пусть $f(x, y)$, $g(x, y)$ — определенные на множестве X и зависящие от параметра $y \in Y$ (векторнозначные) функции. Положим $|f(x, y)| = \alpha(x, y)|g(x, y)|$. Говорят, что асимптотические соотношения

$$f(x, y) = o(g(x, y)), \quad f(x, y) = O(g(x, y)), \quad f(x, y) \sim g(x, y)$$

при базе $\mathcal{B}_X$ *равномерны по параметру* y *на множестве* Y, если соответственно $\alpha(x, y) \rightrightarrows 0$ на Y при базе $\mathcal{B}_X$, $\alpha(x, y)$ равномерно по $y \in Y$ финально ограничена при базе $\mathcal{B}_X$ и, наконец, $f = \alpha \cdot g + o(g)$, где $\alpha(x, y) \rightrightarrows 1$ на Y при базе $\mathcal{B}_X$.

Покажите, что если в множестве $X \times Y$ ввести базу $\mathcal{B} = \{B_x \times Y\}$, элементы которой суть прямые произведения элементов B_x базы $\mathcal{B}_X$ и множества Y, то указанные определения соответственно равносильны тому, что

$$f(x, y) = o(g(x, y)), \quad f(x, y) = O(g(x, y)), \quad f(x, y) \sim g(x, y) \quad \text{при базе } \mathcal{B}.$$

7. *Равномерные асимптотические разложения.*

Асимптотическое разложение

$$f(x, y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\varphi_n(x) \quad \text{при базе } \mathcal{B}_X$$

называется *равномерным относительно параметра* y *на множестве* Y, если в равенствах

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k(y)\varphi_k(x) + r_n(x, y), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

имеет место равномерная по $y \in Y$ оценка $r_n(x, y) = o(\varphi_n(x))$ при базе $\mathcal{B}_X$ в множестве X.

a) Пусть Y — измеримое (ограниченное) множество в $\mathbb{R}^n$, и пусть при каждом фиксированном значении $x \in X$ функции $f(x, y)$, $a_0(y)$, $a_0(y)$, ... интегрируемы на Y. Покажите, что если при этих условиях асимптотическое разложение

$$f(x, y) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y)\varphi_n(x)$$

при базе $\mathcal{B}_X$ равномерно по параметру $y \in Y$, то справедливо также асимптотическое разложение

$$\int\limits_Y f(x, y)\,dy \simeq \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int\limits_Y a_n(y)\,dy\Big)\varphi_n(x) \quad \text{при базе } \mathcal{B}_X.$$

b) Пусть $Y=[c,d]\subset\mathbb{R}$. Предположим, что функция $f(x,y)$ при каждом фиксированном $x\in X$ непрерывно дифференцируема по y на отрезке Y и при некотором $y_0\in Y$ допускает асимптотическое разложение

$$f(x,y_0)\simeq\sum_{n=0}^{\infty}a_n(y_0)\varphi_n(x)\quad\text{при базе }\mathscr{B}_X.$$

Докажите, что если при этом имеет место равномерное по $y\in Y$ асимптотическое разложение

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\simeq\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(y)\varphi_n(x)\quad\text{при базе }\mathscr{B}_X$$

с непрерывными по y коэффициентами $\alpha_n(y)$, $n=0,1,\ldots$, то исходная функция $f(x,y)$ имеет асимптотическое разложение $f(x,y)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(y)\varphi_n(x)$ при базе $\mathscr{B}_X$, равномерное по $y\in Y$, его коэффициенты $a_n(y)$, $n=0,1,\ldots$, гладко на промежутке Y зависят от y и $\dfrac{da_n}{dy}(y)=\alpha_n(y)$.

8. Пусть $p(x)$ — гладкая, положительная на отрезке $c\leqslant x\leqslant d$ функция.

a) Решите уравнение $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}(x,\lambda)=\lambda^2p(x)u(x,\lambda)$ в случае, когда $p(x)\equiv1$ на $[c,d]$.

b) Пусть $0<m\leqslant p(x)\leqslant M<+\infty$ на $[c,d]$, и пусть $u(c,\lambda)=1$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(c,\lambda)=0$. Оцените снизу и сверху величину $u(x,\lambda)$ при $x\in[c,d]$.

c) Считая, что $\ln u(x,\lambda)\simeq\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x)\lambda^{1-n}$ при $\lambda\to+\infty$, где $c_0(x),c_1(x),\ldots$ — гладкие функции, и, пользуясь тем, что $\left(\dfrac{u'}{u}\right)'=\dfrac{u''}{u}-\left(\dfrac{u'}{u}\right)^2$, покажите, что $c_0'^2(x)=p(x)$ и $\left(c''_{n-1}+\sum\limits_{k=0}^{n}c'_k\cdot c'_{n-k}\right)(x)=0$.

§ 2. Асимптотика интегралов (метод Лапласа)

1. Идея метода Лапласа. В этом параграфе будет изложен метод Лапласа — один из немногих достаточно общих методов построения асимптотики интеграла, зависящего от параметра. Мы ограничимся рассмотрением интегралов вида

$$F(\lambda)=\int_a^b f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx,\tag{1}$$

где $S(x)$ — вещественнозначная функция, а λ — параметр. Такие интегралы обычно называют *интегралами Лапласа*.

Пример 1. *Преобразование Лапласа*

$$L(f)(\xi)=\int_0^{+\infty}f(x)e^{-\xi x}\,dx$$

является частным случаем интеграла Лапласа.

Пример 2. Сам Лаплас применял свой метод к интегралам вида

$$\int_a^b f(x)\varphi^n(x)\,dx, \quad \text{где } n\in\mathbb{N}, \text{ а } \varphi(x)>0 \text{ на }]a,b[.$$

Такой интеграл тоже является частным случаем общего интеграла Лапласа (1), поскольку $\varphi^n(x)=\exp(n\ln\varphi(x))$.

Нас будет интересовать асимптотика интеграла (1) при больших значениях параметра λ, точнее, при $\lambda\to+\infty$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Чтобы при описании основной идеи метода Лапласа не отвлекаться на второстепенные детали, будем считать, что в интеграле (1) $[a,b]=I$ — конечный отрезок, функции $f(x)$ и $S(x)$ гладкие на I, причем $S(x)$ имеет единственный, и притом строгий, максимум $S(x_0)$ в точке $x_0\in I$. Тогда функция $\exp(\lambda S(x))$ тоже имеет строгий максимум в точке x_0, который тем более резко возвышается над остальными значениями этой функции на отрезке I, чем больше значение параметра λ. В результате, если $f(x)\not\equiv 0$ в окрестности x_0, то весь интеграл (1) можно заменить интегралом по сколь угодно малой окрестности точки x_0, допуская при этом относительную погрешность, стремящуюся к нулю при $\lambda\to+\infty$. Это наблюдение называется *принципом локализации*. Обращая историческую последовательность событий, можно было бы сказать, что этот принцип локализации для интегралов Лапласа очень напоминает принцип локального действия δ-образных семейств функций и самой δ-функции.

Теперь, когда интеграл берется только по малой окрестности точки x_0, функции $f(x)$ и $S(x)$ можно заменить главными членами их тейлоровских разложений при $I\ni x\to x_0$.

Остается найти асимптотику получаемого канонического интеграла, что делается без особого труда.

В последовательном выполнении этих этапов и состоит по существу метод Лапласа отыскания асимптотики интеграла.

Пример 3. Пусть $x_0=a$, $S'(a)\neq 0$ и $f(a)\neq 0$, что бывает, например, когда функция $S(x)$ монотонно убывает на отрезке $[a,b]$. При этих условиях $f(x)=f(a)+o(1)$ и $S(x)=S(a)+(x-a)S'(a)+o(1)$, когда $I\ni x\to a$. Реализуя идею метода Лапласа, при малом $\varepsilon>0$ и $\lambda\to+\infty$ находим, что

$$F(\lambda)\sim\int_a^{a+\varepsilon} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx\sim f(a)e^{\lambda S(a)}\int_0^{\varepsilon} e^{\lambda t S'(a)}\,dt=-\frac{f(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)}(1-e^{\lambda S'(a)\varepsilon}).$$

Поскольку $S'(a)<0$, отсюда следует, что в рассматриваемом случае

$$F(\lambda)\sim-\frac{f(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)} \quad \text{при } \lambda\to+\infty. \tag{2}$$

Пример 4. Пусть $a < x_0 < b$. Тогда $S'(x_0) = 0$, и мы предположим, что $S''(x_0) \neq 0$, т. е. $S''(x_0) < 0$, поскольку x_0 — точка максимума.

Используя разложения

$$f(x) = f(x_0) + o(x - x_0) \quad \text{и} \quad S(x) = S(x_0) + \frac{1}{2}S''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2),$$

справедливые при $x \to x_0$, находим, что при малом $\varepsilon > 0$ и $\lambda \to +\infty$

$$F(\lambda) \sim \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx \sim f(x_0)e^{\lambda S(x_0)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2}\,dt.$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменной $\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2 = -u^2$ (ведь $S''(x_0) < 0$), получаем

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2}\,dt = \sqrt{-\frac{2}{\lambda S''(x_0)}} \int_{-\varphi(\lambda,\varepsilon)}^{\varphi(\lambda,\varepsilon)} e^{-u^2}\,du,$$

где $\varphi(\lambda, \varepsilon) = \sqrt{-\frac{\lambda S''(x_0)}{2}}\,\varepsilon \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi},$$

находим теперь главный член асимптотики интеграла Лапласа в рассматриваемом случае:

$$F(\lambda) \sim \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} f(x_0)e^{\lambda S(x_0)} \quad \text{при } \lambda \to +\infty. \tag{3}$$

Пример 5. Если $x_0 = a$, но $S'(x_0) = 0$ и $S''(x_0) < 0$, то, рассуждая, как и в примере 4, на сей раз получим, что

$$F(\lambda) \sim \int_{a}^{a+\varepsilon} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx \sim f(x_0)e^{\lambda S(x_0)} \int_{0}^{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}\lambda S''(x_0)t^2}\,dt,$$

и, значит,

$$F(\lambda) \sim \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}} f(x_0)e^{\lambda S(x_0)} \quad \text{при } \lambda \to +\infty. \tag{4}$$

Мы получили на эвристическом уровне три наиболее употребительные формулы (2)—(4), относящиеся к асимптотике интеграла (1) Лапласа.

Из приведенных рассмотрений ясно, что метод Лапласа с успехом можно использовать при исследовании асимптотики любого интеграла

$$\int_X f(x, \lambda)\,dx \quad \text{при } \lambda \to +\infty, \tag{5}$$

если: a) для этого интеграла имеет место принцип локализации (т. е. весь интеграл можно заменить эквивалентным ему при $\lambda \to +\infty$ интегралом, взятым по сколь угодно малым окрестностям некоторых выделенных точек) и b) если в локализованном интеграле подынтегральную функцию удается заменить более простой, для которой асимптотика, с одной стороны, совпадает с искомой, а с другой стороны, легко находится.

Если, например, в интеграле (1) функция $S(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ несколько точек локального максимума $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то, используя аддитивность интеграла, заменим его с малой относительной погрешностью суммой таких же интегралов, но взятых по столь малым окрестностям $U(x_j)$ точек максимума $x_0, x_1, \ldots, x_n$, что в них содержится только по одной такой точке. Асимптотика интеграла

$$\int\limits_{U(x_j)} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

как уже говорилось, не зависит от величины самой окрестности $U(x_j)$, и потому асимптотическое разложение этого интеграла при $\lambda \to +\infty$ обозначают символом $F(\lambda, x_j)$ и называют *вкладом точки x_j в асимптотику интеграла* (1).

Принцип локализации в его общей формулировке, таким образом, означает, что асимптотика интеграла (5) получается как сумма $\sum\limits_j F(\lambda, x_j)$ вкладов всех критических в том или ином отношении точек подынтегральной функции.

Для интеграла (1) это точки максимума функции $S(x)$ и, как видно из формул (2)—(4), основной вклад вносят только те точки локального максимума, в которых достигается значение абсолютного максимума функции $S(x)$ на отрезке $[a, b]$.

В следующих пунктах этого параграфа мы разовьем высказанные здесь общие соображения и затем рассмотрим некоторые полезные приложения метода Лапласа. Для многих приложений изложенного уже достаточно. Ниже будет также показано, как получать не только главный член асимптотики, но и весь асимптотический ряд.

2. Принцип локализации для интеграла Лапласа

Лемма 1 (об экспоненциальной оценке). *Пусть $M = \sup\limits_{a<x<b} S(x) < \infty$, и пусть при некотором значении $\lambda_0 > 0$ интеграл* (1) *сходится абсолютно. Тогда он сходится абсолютно при любом $\lambda \geqslant \lambda_0$, и при таких значениях λ справедлива оценка*

$$|F(\lambda)| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)e^{\lambda S(x)}|\,dx \leqslant Ae^{\lambda M}, \tag{6}$$

где $A \in \mathbb{R}$.

◄ Действительно, при $\lambda \geqslant \lambda_0$

$$|F(\lambda)| = \left| \int_a^b f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx \right| = \left| \int_a^b f(x) e^{\lambda_0 S(x)} e^{(\lambda-\lambda_0)S(x)}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{(\lambda-\lambda_0)M} \int_a^b |f(x) e^{\lambda_0 S(x)}|\, dx = \left(e^{-\lambda_0 M} \int_a^b |f(x) e^{\lambda_0 S(x)}|\, dx \right) e^{\lambda M}. \ ►$$

Лемма 2 (об оценке вклада точки максимума). *Пусть интеграл* (1) *сходится абсолютно при некотором значении* $\lambda = \lambda_0$, *и пусть внутри или на границе промежутка* I *интегрирования нашлась такая точка* x_0, *в которой* $S(x_0) = \sup\limits_{a<x<b} S(x) = M$. *Если функции* $f(x)$ *и* $S(x)$ *непрерывны в точке* x_0, *причем* $f(x_0) \neq 0$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой достаточно малой окрестности* $U_I(x_0)$ *точки* x_0 *в* I *имеет место оценка*

$$\left| \int_{U_I(x_0)} f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx \right| \geqslant B e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)} \tag{7}$$

с постоянной $B > 0$, *справедливая при* $\lambda \geqslant \max\{\lambda_0, 0\}$.

◄ При фиксированном $\varepsilon > 0$ возьмем любую окрестность $U_I(x_0)$, в пределах которой $|f(x)| \geqslant \frac{1}{2}|f(x_0)|$ и $S(x_0) - \varepsilon \leqslant S(x) \leqslant S(x_0)$. Считая f вещественнозначной, можем заключить теперь, что в пределах $U_I(x)$ значения функции f одного знака. Это позволяет при $\lambda \geqslant \max\{\lambda_0, 0\}$ записать, что

$$\left| \int_{U_I(x_0)} f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx \right| = \int_{U_I(x_0)} |f(x)| e^{\lambda S(x)}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{U_I(x_0)} \frac{1}{2}|f(x_0)| e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}\, dx = B e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}. \ ►$$

Утверждение 1 (принцип локализации). *Пусть интеграл* (1) *сходится абсолютно при некотором значении* $\lambda = \lambda_0$, *и пусть внутри или на границе промежутка* I *интегрирования функция* $S(x)$ *имеет единственную точку* x_0 *абсолютного максимума, т. е. вне любой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0

$$\sup_{I \setminus U(x_0)} S(x) < S(x_0).$$

Если при этом функции $f(x)$, $S(x)$ *непрерывны в точке* x_0 *и* $f(x_0) \neq 0$, *то*

$$F(\lambda) = F_{U_I(x_0)}(\lambda)(1 + O(\lambda^{-\infty})) \quad \text{при } \lambda \to +\infty, \tag{8}$$

где $U_I(x_0)$ — *произвольная окрестность* x_0 *в* I,

$$F_{U_I(x_0)}(\lambda) := \int_{U_I(x_0)} f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx,$$

а $O(\lambda^{-\infty})$ — *функция, которая есть* $o(\lambda^{-n})$ *при* $\lambda \to +\infty$ *и любом* $n \in \mathbb{N}$.

◄ Из леммы 2 следует, что если окрестность $U_I(x_0)$ достаточно мала, то каково бы ни было число $\varepsilon > 0$ при $\lambda \to +\infty$ финально выполняется неравенство
$$|F_{U_I(x_0)}(\lambda)| > e^{\lambda(S(x_0)-\varepsilon)}. \tag{9}$$

Вместе с тем в силу леммы 1 для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 справедлива оценка
$$\int\limits_{I\setminus U(x_0)} |f(x)|e^{\lambda S(x)}\,dx \leqslant Ae^{\lambda\mu} \quad \text{при } \lambda \to +\infty, \tag{10}$$
где $A > 0$ и $\mu = \sup\limits_{x\in I\setminus U(x_0)} S(x) < S(x_0)$.

Сопоставляя эту оценку с неравенством (9), легко заключить, что неравенство (9) имеет место финально при $\lambda \to +\infty$ для любой окрестности $U_I(x_0)$ точки x_0.

Теперь остается написать, что
$$F(\lambda) = F_I(\lambda) = F_{U_I(x_0)}(\lambda) + F_{I\setminus U(x_0)}(\lambda),$$
и, сославшись на оценки (9), (10), заключить о справедливости соотношения (8). ►

Итак, установлено, что с относительной погрешностью порядка $O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to +\infty$ можно, описывая асимптотику интеграла Лапласа (1), заменить его интегралом по сколь угодно малой окрестности $U_I(x_0)$ точки x_0 абсолютного максимума функции $S(x)$ на промежутке интегрирования I.

3. Канонические интегралы и их асимптотика

Лемма 3 (о каноническом виде функции в окрестности критической точки). *Если вещественнозначная функция $S(x)$ в окрестности (полуокрестности) точки $x_0 \in \mathbb{R}$ принадлежит классу гладкости $C^{(n+k)}$, причем*
$$S'(x_0) = \ldots = S^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad S^{(n)}(x_0) \neq 0,$$
а $k \in \mathbb{N}$ или $k = \infty$, то существуют такие окрестности (полуокрестности) I_x точки x_0, I_y точки 0 в $\mathbb{R}$ и такой диффеоморфизм $\varphi \in C^{(k)}(I_y, I_x)$, что
$$S(\varphi(y)) = S(x_0) + sy^n, \quad \textit{когда } Y \in I_y \textit{ и } s = \operatorname{sgn} S^{(n)}(x_0).$$

При этом
$$\varphi(0) = x_0 \quad \textit{и} \quad \varphi'(0) = \left(\frac{n!}{|S^{(n)}(x_0)|}\right)^{1/n}.$$

◄ Воспользовавшись формулой Тейлора с интегральным видом остатка
$$S(x) = S(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!}\int\limits_0^1 S^{(n)}(x_0 + t(x-x_0))(1-t)^{n-1}\,dt,$$

представим разность $S(x)-S(x_0)$ в виде

$$S(x)-S(x_0)=(x-x_0)^n r(x),$$

где функция

$$r(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 S^{(n)}(x_0+t(x-x_0))(1-t)^{n-1}\,dt$$

в силу теоремы о дифференцировании интеграла по параметру x принадлежит классу $C^{(k)}$, причем $r(x_0)=\frac{1}{n!}S^{(n)}(x_0)\neq 0$. Значит, функция $y=\psi(x)=$ $=(x-x_0)\sqrt[n]{|r(x)|}$ в некоторой окрестности (полуокрестности) I_x точки x_0 также принадлежит классу гладкости $C^{(k)}$ и даже монотонна, поскольку

$$\psi'(x_0)=\sqrt[n]{|r(x_0)|}=\left(\frac{|S^{(n)}(x_0)|}{n!}\right)^{1/n}\neq 0.$$

В таком случае рассматриваемая на I_x функция ψ имеет обратную функцию $\psi^{-1}=\varphi$, определенную на промежутке $I_y=\psi(I_x)$, содержащем точку $0=$ $=\psi(x_0)$. При этом $\varphi\in C^{(k)}(I_y, I_x)$.

Далее, $\varphi'(0)=(\psi'(x_0))^{-1}=\left(\frac{n!}{|S^{(n)}(x_0)|}\right)^{1/n}$. Наконец, по самому построению $S(\varphi(y))=S(x_0)+sy^n$, где $s=\operatorname{sgn} r(x_0)=\operatorname{sgn} S^{(n)}(x_0)$. ►

Замечание 1. Наибольший интерес представляют обычно следующие случаи: $n=1$ или 2, а $k=1$ или ∞.

Утверждение 2 (о редукции). *Пусть в интеграле* (1) *отрезок интегрирования $I=[a,b]$ конечный и выполнены следующие условия*:

a) $f, S\in C(I,\mathbb{R})$;

b) $\max\limits_{x\in I} S(x)$ *достигается только в одной точке* $x_0\in I$;

c) $S\in C^{(n)}(U_I(x_0),\mathbb{R})$ *в некоторой окрестности* $U_I(x_0)$ *точки* x_0 (*рассматриваемой в пределах промежутка* I);

d) $S^{(n)}(x_0)\neq 0$, *и если* $1<n$, *то* $S^{(1)}(x_0)=\ldots=S^{(n-1)}(x_0)=0$.

Тогда при $\lambda\to+\infty$ *интеграл* (1) *с погрешностью, определяемой принципом локализации* (8), *может быть заменен интегралом вида*

$$R(\lambda)=e^{\lambda S(x_0)}\int_{I_y} r(y)e^{-\lambda y^n}\,dy,$$

где $I_y=[-\varepsilon,\varepsilon]$, *или* $I_y=[0,\varepsilon]$, ε — *сколь угодно малое положительное число, а функция* r *того же класса гладкости на* I_y, *что и функция* f *в окрестности точки* x_0.

◄ Используя принцип локализации, заменим интеграл (1) интегралом по такой окрестности $I_x=U_I(x_0)$ точки x_0, в которой выполнены условия леммы 3. Сделав замену переменной $x=\varphi(y)$, получим

$$\int_{I_x} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx=\left(\int_{I_y} f(\varphi(y))\varphi'(y)e^{-\lambda y^n}\,dy\right)e^{\lambda S(x_0)}. \tag{11}$$

Знак минус в показателе $(-\lambda y^n)$ связан с тем, что по условию $x_0 = \varphi(0)$ есть точка максимума. ►

Асимптотику канонических интегралов, к которым в основных случаях приводится интеграл Лапласа (1), дает

Лемма 4 (Ватсон[1]). *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < a \leqslant \infty$ *и* $f \in C([0, a], \mathbb{R})$. *Тогда относительно асимптотики интеграла*

$$W(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha}\, dx \tag{12}$$

при $\lambda \to +\infty$ *справедливы следующие утверждения*:

a) *Главный член асимптотики интеграла* (12) *имеет вид*

$$W(\lambda) = \frac{1}{\alpha} f(0) \Gamma(\beta/\alpha) \lambda^{-\frac{\beta}{\alpha}} + O\bigl(\lambda^{-\frac{\beta+1}{\alpha}}\bigr), \tag{13}$$

если известно, что $f(x) = f(0) + O(x)$ *при* $x \to 0$.

b) *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + O(x^{n+1})$ *при* $x \to 0$, *то*

$$W(\lambda) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma\Bigl(\frac{k+\beta}{\alpha}\Bigr) \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} + O\bigl(\lambda^{-\frac{n+\beta+1}{\alpha}}\bigr). \tag{14}$$

c) *Если* f — *бесконечно дифференцируема при* $x = 0$, *то имеет место асимптотическое разложение*

$$W(\lambda) \simeq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \Gamma\Bigl(\frac{k+\beta}{\alpha}\Bigr) \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}}, \tag{15}$$

которое можно дифференцировать по λ *любое число раз.*

◄ Представим интеграл (12) в виде суммы интегралов по промежуткам $]0, \varepsilon]$ и $[\varepsilon, a[$, где ε — сколь угодно малое положительное число.

По лемме 1

$$\left| \int_\varepsilon^a x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha}\, dx \right| \leqslant A e^{-\lambda \varepsilon^\alpha} = O(\lambda^{-\infty}) \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

поэтому

$$W(\lambda) = \int_0^\varepsilon x^{\beta-1} f(x) e^{-\lambda x^\alpha}\, dx + O(\lambda^{-\infty}) \quad \text{при } \lambda \to +\infty.$$

В случае b) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + r_n(x)$, где $r_n \in C[0, \varepsilon]$ и $|r_n(x)| \leqslant C x^{n+1}$ на отрезке $[0, \varepsilon]$. Значит,

$$W(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^\varepsilon x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^\alpha}\, dx + c(\lambda) \int_0^\varepsilon x^{n+\beta} e^{-\lambda x^\alpha}\, dx + o(\lambda^{-\infty}),$$

где $c(\lambda)$ — ограниченная величина при $\lambda \to +\infty$.

[1] Дж. Н. Ватсон (Уотсон) (1886—1965) — английский математик.

По лемме 1 при $\lambda \to +\infty$

$$\int_0^{\varepsilon} x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^\alpha}\,dx = \int_0^{+\infty} x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^\alpha}\,dx + O(\lambda^{-\infty}).$$

Но

$$\int_0^{+\infty} x^{k+\beta-1} e^{-\lambda x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma\Big(\frac{k+\beta}{\alpha}\Big)\lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}},$$

откуда теперь и следует формула (14) и ее частный случай — формула (13).

Разложение (15) вытекает из равенства (14) и формулы Тейлора.

Возможность дифференцировать разложение (15) по λ следует из того, что производная интеграла (12) по параметру λ есть интеграл того же типа (12) и для $W'(\lambda)$ можно в соответствии с формулой (15) предъявить в явном виде асимптотическое разложение при $\lambda \to +\infty$, совпадающее с тем, которое получается формальным дифференцированием исходного разложения (15). ►

Пример 6. Рассмотрим преобразование Лапласа

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\lambda x}\,dx,$$

уже встречавшееся нам в примере 1. Если этот интеграл сходится абсолютно при некотором значении $\lambda = \lambda_0$, а функция f бесконечно дифференцируема при $x = 0$, то по формуле (15) находим, что

$$F(\lambda) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\lambda^{-(k+1)} \quad \text{при } \lambda \to +\infty.$$

4. Главный член асимптотики интеграла Лапласа

Теорема 1 (о типичном главном члене асимптотики). *Пусть в интеграле* (1) *отрезок интегрирования $I = [a, b]$ конечный, $f, S \in C(I, \mathbb{R})$ и $\max_{x\in I} S(x)$ достигается только в одной точке $x_0 \in I$.*

Пусть также известно, что $f(x_0) \neq 0$, $f(x) = f(x_0) + O(x - x_0)$ при $I \ni x \to x_0$, а функция S принадлежит классу гладкости $C^{(k)}$ в окрестности точки x_0.

Тогда:

a) *если $x_0 = a$, $k = 2$ и $S'(x_0) \neq 0$ (т. е. $S'(x_0) < 0$), то*

$$F(\lambda) = \frac{f(x_0)}{-S'(x_0)} e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-1}[1 + O(\lambda^{-1})] \quad \text{при } \lambda \to +\infty; \tag{2'}$$

b) *если $a < x_0 < b$, $k = 3$ и $S''(x_0) \neq 0$ (т. е. $S''(x_0) < 0$), то*

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-1/2}[1 + O(\lambda^{-1/2})] \quad \text{при } \lambda \to +\infty; \tag{3'}$$

c) *если* $x_0 = a$, $k = 3$, $S'(a) = 0$ *и* $S''(a) \neq 0$ *(т. е.* $S''(a) < 0$*), то*

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{-2S''(x_0)}} f(x_0) e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-1/2} [1 + O(\lambda^{-1/2})] \quad \text{при } \lambda \to +\infty. \qquad (4')$$

◄ Используя принцип локализации и делая замену переменной $x = \varphi(y)$, указанную в лемме 3, придем, согласно утверждению 2 о редукции, к следующим соотношениям:

a) $F(\lambda) = e^{\lambda s(x_0)} \left(\int\limits_0^\varepsilon (f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) e^{-\lambda y}\, dy + O(\lambda^{-\infty}) \right)$;

b) $F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) e^{-\lambda y^2}\, dy + O(\lambda^{-\infty}) \right) =$

$$= e^{\lambda S(x_0)} \left(\int\limits_0^\varepsilon ((f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) + (f \circ \varphi)(-y) \varphi'(-y)) e^{-\lambda y^2}\, dy + O(\lambda^{-\infty}) \right);$$

c) $F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \left(\int\limits_0^\varepsilon (f \circ \varphi)(y) \varphi'(y) e^{-\lambda y^2}\, dy + O(\lambda^{-\infty}) \right)$.

Функция $(f \circ \varphi)\varphi'$ при сформулированных выше требованиях удовлетворяет условиям леммы Ватсона. Остается применить лемму Ватсона (формула (14) при $n = 0$) и вспомнить выражения для $\varphi(0)$, и $\varphi'(0)$, указанные в лемме 3. ►

Итак, мы обосновали формулы (2)—(4) вместе с той замечательно простой, ясной и эффективной рецептурой, которая привела нас в разделе 1 к этим формулам.

Рассмотрим некоторые примеры приложений доказанной теоремы.

Пример 7. *Асимптотика гамма-функции*. Функцию

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int\limits_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t}\, dt \quad (\lambda > -1)$$

можно представить в виде интеграла Лапласа

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} e^{\lambda \ln t}\, dt,$$

и если при $\lambda > 0$ сделать замену переменной $t = \lambda x$, то придем к интегралу

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda+1} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda(x - \ln x)}\, dx,$$

который можно исследовать средствами доказанной теоремы.

Функция $S(x) = \ln x - x$ имеет единственную точку максимума $x = 1$ на промежутке $]0, +\infty[$, причем $S''(1) = -1$. На основании принципа локализации (утверждение 1) и утверждения b) теоремы 1 заключаем, что

$$\Gamma(\lambda + 1) = \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e} \right)^\lambda [1 + O(\lambda^{-1/2})] \quad \text{при } \lambda \to +\infty.$$

В частности, вспоминая, что $\Gamma(n+1)=n!$ при $n\in\mathbb{N}$, получаем классическую *формулу Стирлинга*[1]

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n [1+O(n^{-1/2})] \quad \text{при } n\to\infty,\ n\in\mathbb{N}.$$

Пример 8. *Асимптотика функции Бесселя*

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos n\theta\, d\theta,$$

где $n\in\mathbb{N}$. Здесь $f(\theta)=\cos n\theta$, $S(\theta)=\cos\theta$, $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\pi} S(\theta)=S(0)=1$, $S'(0)=0$, $S''(0)=-1$, поэтому на основе утверждения c) теоремы 1

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}[1+O(x^{-1/2})] \quad \text{при } x\to+\infty.$$

Пример 9. Пусть $f\in C^{(1)}([a,b],\mathbb{R})$, $S\in C^{(2)}([a,b],\mathbb{R})$, причем $S(x)>0$ на $[a,b]$ и $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} S(x)$ достигается только в одной точке $x_0\in[a,b]$. Если $f(x_0)\neq 0$, $S'(x_0)=0$ и $S''(x_0)\neq 0$, то, переписав интеграл

$$\mathscr{F}(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)[S(x)]^\lambda\, dx$$

в форме интеграла Лапласа

$$\mathscr{F}(\lambda) = \int\limits_a^b f(x)e^{\lambda\ln S(x)}\, dx,$$

на основании утверждений b) и c) теоремы 1 получаем, что при $\lambda\to+\infty$

$$\mathscr{F}(\lambda) = \varepsilon f(x_0)\sqrt{\frac{2\pi}{-S''(x_0)}}[S(x_0)]^{\lambda+1/2}\lambda^{-1/2}[1+O(\lambda^{-1/2})],$$

где $\varepsilon=1$, если $a<x_0<b$ и $\varepsilon=1/2$, если $x_0=a$ или $x_0=b$.

Пример 10. *Асимптотика полиномов Лежандра*

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n\, d\theta$$

при $n\to\infty$, $n\in\mathbb{N}$, в области $x>1$ может быть получена как частный случай предыдущего примера, когда $f\equiv 1$,

$$S(\theta) = x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta, \quad \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} S(\theta) = S(0) = x+\sqrt{x^2-1},$$
$$S'(0)=0, \quad S''(0) = -\sqrt{x^2-1}.$$

[1] См. также задачу 10 к § 3 гл. VII.

Таким образом,

$$P_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi n}\,\sqrt[4]{x^2-1}}[1+O(n^{-1/2})] \quad \text{при } n \to +\infty,\ n \in \mathbb{N}.$$

*** 5. Асимптотические разложения интегралов Лапласа.** Теорема 1 дает только главные члены характерной асимптотики интеграла Лапласа (1) и к тому же при условии, что $f(x_0) \neq 0$. В целом это, конечно, наиболее типичная ситуация, и поэтому теорема 1, несомненно, является ценным результатом. Однако уже лемма Ватсона показывает, что асимптотика интеграла Лапласа порой может быть доведена до асимптотического разложения. Такая возможность особенно важна, когда $f(x_0) = 0$ и теорема 1 ничего не дает.

Совсем отбросить условие $f(x_0) \neq 0$, не заменив его ничем, разумеется, нельзя, оставаясь в рамках метода Лапласа: ведь если $f(x) \equiv 0$ в окрестности точки x_0 максимума функции $S(x)$ или если $f(x)$ очень быстро стремится к нулю при $x \to x_0$, то точка x_0 может и не быть ответственной за асимптотику интеграла. Теперь, когда в результате проведенных рассмотрений мы уже пришли к определенному типу $\{e^{\lambda c}\lambda^{-p_k}\}$ $(p_0 < p_1 < \ldots)$ последовательностей, асимптотических при $\lambda \to +\infty$, можно говорить об асимптотическом нуле по отношению к такой последовательности и, не предполагая, что $f(x_0) \neq 0$, можно следующим образом сформулировать принцип локализации: *асимптотика интеграла Лапласа* (1) *при* $\lambda \to +\infty$ *с точностью до асимптотического нуля по отношению к асимптотической последовательности* $\{e^{\lambda S(x_0)}\lambda^{-p_k}\}$ $(p_0 < p_1 < \ldots)$ *совпадает с асимптотикой порции этого интеграла, взятой по сколь угодно малой окрестности точки* x_0, *если это единственная точка максимума функции* $S(x)$ *на промежутке интегрирования.*

Мы не будем, однако, возвращаться к рассмотрению и уточнению этих вопросов, а, считая f и S функциями класса $C^{(\infty)}$, дадим вывод соответствующих асимптотических разложений, использующий лемму 1 об экспоненциальной оценке, лемму 3 о замене переменной и лемму 4 Ватсона.

Теорема 2 (об асимптотическом разложении). *Пусть* $I = [a, b]$ — *конечный отрезок,* $f, S \in C(I, \mathbb{R})$, $\max\limits_{x \in I} S(x)$ *достигается только в одной точке* $x_0 \in I$ *и* $f, S \in C^{(\infty)}(U_I(x_0), \mathbb{R})$ *в некоторой окрестности* $U_I(x_0)$ *точки* x_0. *Тогда относительно асимптотики интеграла* (1) *справедливы следующие утверждения*:

а) *Если* $x_0 = a$, $S^{(m)}(a) \neq 0$, $S^{(j)}(a) = 0$ *для* $1 \leqslant j < m$, *то*

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-1/m} e^{\lambda S(a)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k/m} \quad \text{при } \lambda \to +\infty, \tag{16}$$

где

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1} m^k}{k!} \Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right) \left(h(x,a)\frac{d}{dx}\right)^k (f(x)h(x,a))\Big|_{x=a},$$

$$h(x,a) = (S(a) - S(x))^{1-1/m}/S'(x).$$

b) *Если* $a<x_0<b$, $S^{(2m)}(x_0)\neq 0$, $S^{(j)}(x_0)=0$ *для* $1\leqslant j<2m$, *то*

$$F(\lambda)\simeq \lambda^{-1/2m}e^{\lambda S(x_0)}\sum_{k=0}^{\infty} c_k\lambda^{-k/m} \quad \text{при } \lambda\to+\infty, \tag{17}$$

где

$$c_k=2\frac{(-1)^{2k+1}(2m)^{2k}}{(2k)!}\Gamma\Bigl(\frac{2k+1}{2m}\Bigr)\Bigl(h(x,x_0)\frac{d}{dx}\Bigr)^{2k}(f(x)h(x,x_0))\Big|_{x=x_0},$$
$$h(x,x_0)=(S(x_0)-S(x))^{1-\frac{1}{2m}}/S'(x).$$

c) *Если* $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ *и* $f(x)\sim\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ *при* $x\to x_0$, *то главный член асимптотики в случаях* a) *и* b) *соответственно имеет вид*

$$F(\lambda)=\frac{1}{m}\lambda^{-\frac{n+1}{m}}e^{\lambda S(a)}\,\Gamma\Bigl(\frac{n+1}{m}\Bigr)\Bigl(\frac{m!}{|S^m(a)|}\Bigr)^{\frac{n+1}{m}}\Bigl[\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)+O\bigl(\lambda^{-\frac{n+1}{m}}\bigr)\Bigr], \tag{18}$$

$$F(\lambda)=\frac{1}{m}\lambda^{-\frac{n+1}{2m}}e^{\lambda S(x_0)}\,\Gamma\Bigl(\frac{n+1}{2m}\Bigr)\Bigl(\frac{(2m)!}{|S^{2m}(x_0)|}\Bigr)^{\frac{n+1}{2m}}\Bigl[\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)+O\bigl(\lambda^{-\frac{n+1}{2m}}\bigr)\Bigr]. \tag{19}$$

d) *Разложения* (16), (17) *можно дифференцировать по* λ *любое число раз.*

◄ Из леммы 1 следует, что в наших условиях с точностью до величины вида $e^{\lambda S(x_0)}O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda\to\infty$ интеграл (1) можно заменить интегралом по сколь угодно малой окрестности точки x_0.

Сделав в такой окрестности замену переменной $x=\varphi(y)$, указанную в лемме 3, приведем последний интеграл к виду

$$e^{-\lambda S(x_0)}\int\limits_{I_y}(f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)e^{-\lambda y^{\alpha}}\,dy, \tag{20}$$

где $I_y=[0,\varepsilon]$, $\alpha=m$, если $x_0=a$ и $I_y=[-\varepsilon,\varepsilon]$, $\alpha=2m$, если $a<x_0<b$.

Окрестность, в которой производилась замена $x=\varphi(y)$, можно считать столь малой, что обе функции f, S в ней бесконечно дифференцируемы. Тогда и полученную под знаком интеграла (20) функцию $(f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)$ можно считать бесконечно дифференцируемой.

Если $I_y=[0,\varepsilon]$, т. е. в случае $x_0=a$, к интегралу (20) непосредственно применима лемма 4 Ватсона и наличие разложения (16) тем самым уже доказано.

Если же $I_y=[-\varepsilon,\varepsilon]$, т. е. в случае $a<x_0<b$, приводим интеграл (20) к виду

$$e^{\lambda S(x_0)}\int\limits_0^{\varepsilon}[(f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)+(f\circ\varphi)(-y)\varphi'(-y)]\,e^{-\lambda y^{2m}}\,dy \tag{21}$$

и, вновь применяя лемму Ватсона, получаем разложение (17).

Возможность дифференцировать разложения (16), (17) следует из того, что при наших условиях интеграл (1) можно дифференцировать по λ, и при этом снова получается интеграл, удовлетворяющий условиям теоремы.

Для него выписываются разложения (16), (17), и можно непосредственно убедиться в том, что эти разложения действительно совпадают с теми, которые получаются формальным дифференцированием разложений (16), (17) исходных интегралов.

Остановимся теперь на формулах для коэффициентов a_k и c_k. По лемме Ватсона $a_k = \frac{1}{k!\,m}\frac{d\Phi}{dy^k}(0)\,\Gamma\Big(\frac{k+1}{m}\Big)$, где $\Phi(y) = (f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)$.

Учитывая, однако, что

$$\begin{gathered}S(\varphi(y)) - S(a) = -y^m,\\ S'(x)\varphi'(y) = -my^{m-1},\\ \varphi'(y) = -m(S(a)-S(x))^{1-\frac{1}{m}}/S'(x),\\ \frac{d}{dy} = \varphi'(y)\frac{d}{dx},\\ \Phi(y) = f(x)\varphi'(y),\end{gathered}$$

получаем

$$\frac{d^k\Phi}{dy^k}(0) = (-m)^{k+1}\Big(h(x,a)\frac{d}{dx}\Big)^k(f(x)h(x,a))\Big|_{x=a},$$

где $h(x,a) = (S(a)-S(x))^{1-\frac{1}{m}}/S'(x)$.

Аналогично получаются формулы для коэффициентов c_k применением леммы Ватсона к интегралу (21).

Полагая $\psi(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y) + f(\varphi(-y))\varphi'(-y)$, можно записать, что при $\lambda\to+\infty$

$$\int_0^\varepsilon \psi(y)e^{-\lambda y^{2m}}\,dy \simeq \frac{1}{2m}\sum_{n=0}^\infty \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}\,\Gamma\Big(\frac{n+1}{2m}\Big)\lambda^{-\frac{n+1}{2m}}.$$

Но, $\psi^{(2k+1)}(0) = 0$ ввиду четности функции $\psi(y)$, поэтому последнее асимптотическое разложение можно переписать в виде

$$\int_0^\varepsilon \psi(y)e^{-\lambda y^{2m}}\,dy \simeq \frac{1}{2m}\sum_{k=0}^\infty \frac{\psi^{(2k)}(0)}{(2k)!}\,\Gamma\Big(\frac{2k+1}{2m}\Big)\lambda^{-\frac{2k+1}{2m}}.$$

Остается заметить, что $\psi^{(2k)}(0) = 2\Phi^{(2k)}(0)$, где $\Phi(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y)$. Теперь формула для c_k получается из уже установленной формулы коэффициента a_k заменой в ней k на $2k$ и удвоением результата такой подстановки.

Для получения главных членов (18), (19) асимптотических разложений (16), (17) при указанном в с) условии

$$f(x) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + O((x-x_0)^{n+1}),$$

где $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, достаточно вспомнить, что $x = \varphi(y)$, $x_0 = \varphi(0)$, $x - x_0 = \varphi'(0)y + O(y^2)$, т. е.

$$(f\circ\varphi)(y) = y^n\Big(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\varphi'(0))^n + O(y)\Big)$$

и

$$(f\circ\varphi)(y)\varphi'(y)=y^n\Bigl(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(\varphi'(0))^{n+1}+O(y)\Bigr)$$

при $y\to 0$, поскольку $\varphi'(0)=\Bigl(\frac{m!}{|S^{(m)}(a)|}\Bigr)^{1/m}\neq 0$, если $x_0=a$ и $\varphi'(0)=$ $=\Bigl(\frac{(2m)!}{|S^{(2m)}(x_0)|}\Bigr)^{1/2m}\neq 0$, если $a<x_0<b$.

Остается подставить полученные выражения соответственно в интегралы (20), (21) и воспользоваться формулой (13) из леммы Ватсона. ►

Замечание 2. Из формулы (18) при $n=0$ и $m=1$ вновь получаем формулу (2′).

Аналогично из (19) при $n=0$ и $m=1$ получаем соотношение (3′).

Наконец, равенство (4′) получается из равенства (18) при $n=0$ и $m=2$.

Все это, разумеется, в условиях теоремы 2.

Замечание 3. Теорема 2 относится к случаю, когда функция $S(x)$ имеет на отрезке $I=[a,b]$ единственную точку максимума. Если же таких точек несколько $x_1,\ldots,x_n$, то интеграл (1) разбивают в сумму таких интегралов, асимптотика каждого из которых уже описывается теоремой 2. То есть в этом случае асимптотика получается как сумма $\sum\limits_{j=1}^{n}F(\lambda,x_j)$ вкладов указанных точек максимума.

Легко себе представить, что при этом могут произойти некоторые или даже полные взаимные уничтожения.

Пример 11. Если $S\in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $S(x)\to-\infty$ при $x\to\infty$, то

$$F(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}S'(x)e^{\lambda S(x)}\,dx\equiv 0\quad\text{при }\lambda>0.$$

Значит, в этом случае такая интерференция вкладов заведомо должна иметь место. С формальной точки зрения приведенный пример может показаться неубедительным, поскольку раньше речь шла о конечном отрезке интегрирования. Однако этот вопрос снимает следующее важное

Замечание 4. В теоремах 1 и 2 для облегчения и без того громоздких формулировок мы считали, что промежуток интегрирования I — конечный, а интеграл (1) — собственный. На самом же деле, если вне любой окрестности $U(x_0)$ точки максимума $x_0\in I$ выполнено неравенство $\sup\limits_{I\setminus U(x_0)}S(x)<S(x_0)$, то лемма 1 уже позволяет заключить, что интегралы, взятые по промежуткам, лежащим вне $U(x_0)$, экспоненциально малы в сравнении с $e^{\lambda S(x_0)}$ при $\lambda\to+\infty$ (разумеется, при условии, что интеграл (1) абсолютно сходится хотя бы при некотором значении $\lambda=\lambda_0$).

Таким образом, и теорема 1, и теорема 2 применимы также к несобственным интегралам, если выполнены указанные только что условия.

Замечание 5. Полученные в теореме 2 формулы для коэффициентов ввиду их громоздкости обычно удается использовать лишь для получения

нескольких первых членов асимптотики, нужных в конкретных вычислениях. Общий вид асимптотического разложения более простой, чем указанный в теореме 2, по этим формулам для коэффициентов a_k, c_k получить удается крайне редко. И все же такие ситуации встречаются. Рассмотрим для разъяснения самих формул следующие примеры.

Пример 12. Асимптотику функции

$$\operatorname{Erf}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

при $x \to +\infty$ легко получить интегрированием по частям:

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} u^{-2}e^{-u^2}\, du = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{3e^{-x^2}}{2^2x^3} + \int_x^{+\infty} u^{-4}e^{-u^2}\, du = \ldots,$$

откуда после очевидных оценок следует, что

$$\operatorname{Erf}(x) \simeq \frac{e^{-x^2}}{2x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k}x^{-2k} \quad \text{при } x \to +\infty. \tag{22}$$

Получим теперь это разложение, исходя из теоремы 2.

Сделав замену $u = xt$, приходим к представлению

$$\operatorname{Erf}(x) = x\int_1^{+\infty} e^{-x^2t^2}\, dt.$$

Полагая здесь $\lambda = x^2$ и обозначая переменную интегрирования, как и в теореме 2, буквой x, сводим вопрос к отысканию асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int_1^{\infty} e^{-\lambda x^2}\, dx, \tag{23}$$

поскольку $\operatorname{Erf}(x) = xF(x^2)$.

Интеграл (23) с учетом замечания 4 удовлетворяет условию теоремы 2: $S(x) = -x^2$, $S'(x) = -2x < 0$ при $1 \leqslant x < +\infty$, $S'(1) = -2$, $S(1) = -1$.

Итак, $x_0 = a = 1$, $m = 1$, $f(x) \equiv 1$, $h(x, a) = \frac{1}{-2x}$, $h(x, a)\frac{d}{dx} = \frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}$.

Значит,

$$\left(\frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}\right)^0\left(-\frac{1}{2x}\right) = -\frac{1}{2x} = \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1},$$

$$\left(\frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}\right)^1\left(-\frac{1}{2x}\right) = -\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2x}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2(-1)x^{-3},$$

$$\left(\frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}\right)^2\left(-\frac{1}{2x}\right) = \left(-\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\right)^1\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2(-1)x^{-3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3(-1)(-3)x^{-5},$$

. . . .

$$\left(\frac{1}{-2x}\frac{d}{dx}\right)^k\left(-\frac{1}{2x}\right) = -\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}x^{-(2k+1)}.$$

Полагая $x=1$, находим, что

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\Gamma(k+1)\left(-\frac{(2k-1)!!}{2^{k+!}}\right) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}.$$

Выписав теперь асимптотическое разложение (16) для интеграла (23), с учетом соотношения $\operatorname{Erf}(x) = xF(x^2)$ получаем разложение (22) для функции $\operatorname{Erf}(x)$ при $x \to +\infty$.

Пример 13. В примере 7, исходя из представления

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda(x-\ln x)}\, dx, \tag{24}$$

мы получили главный член асимптотики функции $\Gamma(\lambda+1)$ при $\lambda \to +\infty$. Попробуем теперь, пользуясь теоремой 2b), уточнить найденную ранее формулу.

Для некоторого упрощения дальнейшей записи заменим в интеграле (24) x на $x+1$. Тогда получим, что

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda} \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{\lambda(\ln(1+x)-x)}\, dx,$$

и дело свелось к исследованию асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{\lambda(\ln(1+x)-x)}\, dx \tag{25}$$

при $\lambda \to +\infty$. Здесь $S(x) = \ln(1+x) - x$, $S'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$, $S'(0) = 0$, т. е. $x_0 = 0$, $S''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $S''(0) = -1 \neq 0$, т. е. с учетом замечания 4 выполнены условия b) теоремы 2, где надо положить еще $f(x) \equiv 1$ и $m = 1$, так как $S''(0) \neq 0$.

Функция $h(x, x_0) = h(x)$ в данном случае имеет следующий вид:

$$h(x) = -\frac{1+x}{x}(x - \ln(1+x))^{1/2}.$$

Если мы хотим найти первые два члена асимптотики, то нам надо вычислить при $x=0$

$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^0 (h(x)) = h(x),$$
$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^1 (h(x)) = h(x)\frac{dh}{dx}(x),$$
$$\left(h(x)\frac{d}{dx}\right)^2 (h(x)) = \left(h(x)\frac{d}{dx}\right)\left(h(x)\frac{dh}{dx}(x)\right) = h(x)\left[\left(\frac{dh}{dx}\right)^2(x) + h(x)\frac{d^2h}{dx}(x)\right].$$

Это вычисление, как видно, легко сделать, если найти значения $h(0)$, $h'(0)$, $h''(0)$, которые в свою очередь можно получить из тейлоровского

разложения функции $h(x)$, $x \geqslant 0$ в окрестности нуля:

$$h(x) = -\frac{1+x}{x}\left[x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)\right)\right]^{1/2} =$$
$$= -\frac{1+x}{x}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)\right]^{1/2} =$$
$$= -\frac{1+x}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{4}x^2 + O(x^3)\right]^{1/2} =$$
$$= -\frac{1+x}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{7}{36}x^2 + O(x^3)\right) =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{5}{36\sqrt{2}}x^2 + O(x^3).$$

Таким образом, $h(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $h'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, $h''(0) = \frac{5}{18\sqrt{2}}$,

$$\left(h(x)\frac{x}{dx}\right)^0 (h(x))\Big|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\left(h(x)\frac{x}{dx}\right)^1 (h(x))\Big|_{x=0} = -\frac{1}{3},$$
$$\left(h(x)\frac{x}{dx}\right)^2 (h(x))\Big|_{x=0} = -\frac{1}{12\sqrt{2}},$$
$$c_0 = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2\pi},$$
$$c_1 = -2\frac{(2)^2}{2!}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{12\sqrt{2}}\right) = 4\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{12}.$$

Значит, при $\lambda \to \infty$

$$F(\lambda) = \sqrt{2\pi}\,\lambda^{-1/2}\left(1 + \frac{1}{12}\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})\right),$$

т. е. при $\lambda \to +\infty$

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\left(1 + \frac{1}{12}\lambda^{-1} + O(\lambda^{-2})\right). \tag{26}$$

Полезно иметь в виду, что асимптотические разложения (16), (17) можно находить также, следуя доказательству теоремы 2, без привлечения указанных в формулировке теоремы 2 выражений для коэффициентов.

В качестве примера получим вновь, но несколько иначе, асимптотику интеграла (25).

Используя принцип локализации и делая в окрестности нуля замену $x = \varphi(y)$ такую, что $0 = \varphi(0)$, $S(\varphi(y)) = \ln(1+\varphi(y)) - \varphi(y) = -y^2$, сводим вопрос к исследованию асиптотики интеграла

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi'(y)e^{-\lambda y^2}\,dy = \int_{0}^{\varepsilon} \psi(y)e^{-\lambda y^2}\,dy,$$

где $\psi(y) = \varphi'(y) + \varphi'(-y)$. Асимптотическое разложение последнего интеграла получается на основании леммы Ватсона

$$\int\limits_0^{\varepsilon} \psi(y)e^{-\lambda y^2}\,dy \simeq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}\Gamma\Big(\frac{k+1}{2}\Big)\lambda^{-(k+1)/2} \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

что с учетом соотношений $\psi^{(2k+1)}(0) = 0$, $\psi^{(2k)}(0) = 2\varphi^{(2k+1)}(0)$ дает асимптотический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{(2k)!}\Gamma\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\lambda^{-(k+1/2)} = \lambda^{-1/2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{k!\,2^{2k}}\lambda^{-k}.$$

Итак, для интеграла (25) получаем асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \simeq \lambda^{-1/2}\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(2k+1)}(0)}{k!\,2^{2k}}\lambda^{-k}, \tag{27}$$

где $x = \varphi(y)$ такая гладкая функция, что $x - \ln(1+x) = y^2$ в окрестности нуля (по x и по y).

Если мы хотим найти первые два члена асимптотики, то в общую формулу (27) надо подставить конкретные значения $\varphi'(0)$ и $\varphi^{(3)}(0)$.

Быть может, не бесполезно продемонстрировать следующий прием для вычисления этих значений, который вообще можно использовать для получения тейлоровского разложения обратной функции по разложению прямой функции.

Считая, что $x > 0$ при $y > 0$, из соотношения

$$x - \ln(1+x) = y^2$$

последовательно получаем

$$\frac{1}{2}x^2\Big(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\Big) = y^2,$$

$$x = \sqrt{2}y\Big(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\Big)^{-1/2} =$$

$$= \sqrt{2}y\Big(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}x^2 + O(x^3)\Big) =$$

$$= \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{3}yx - \frac{\sqrt{2}}{12}yx^2 + O(yx^3).$$

Но $x \sim \sqrt{2}y$ при $y \to 0$ $(x \to 0)$, поэтому, используя уже полученное представление x, можно продолжить эту выкладку и получить, что при $y \to 0$

$$x = \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{3}y\Big(\sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{3}yx + O(y^3)\Big) - \frac{\sqrt{2}}{12}y(\sqrt{2}y)^2 + O(y^4) =$$

$$= \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{2}{9}y^2x - \frac{\sqrt{2}}{6}y^3 + O(y^4) =$$

$$= \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{2}{9}y^2(\sqrt{2}y) - \frac{\sqrt{2}}{6}y^3 + O(y^4) = \sqrt{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{\sqrt{2}}{18}y^3 + O(y^4).$$

Таким образом, для интересующих нас величин $\varphi'(0)$, $\varphi^{(3)}(0)$ получаем следующие значения: $\varphi'(0)=\sqrt{2}$, $\varphi^{(3)}(0)=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Подставляя их в формулу (27), находим, что

$$F(\lambda)=\lambda^{-1/2}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12}\lambda^{-1}+O(\lambda^{-2})\right) \quad \text{при } \lambda\to+\infty,$$

откуда вновь можно получить формулу (26).

В заключение сделаем еще два замечания, относящиеся к обсуждаемым в этом параграфе вопросам.

Замечание 6 (о методе Лапласа в многомерном случае). Отметим, что метод Лапласа с успехом применяется и при исследовании асимптотики кратных интегралов Лапласа

$$F(\lambda)=\int\limits_X f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx,$$

в которых $x\in\mathbb{R}^n$, X — область в $\mathbb{R}^n$, f, S — вещественнозначные функции в X.

Для таких интегралов справедлива лемма 1 об экспоненциальной оценке, в силу которой исследование асимптотики такого интеграла сводится к исследованию асимптотики его порции

$$\int\limits_{U(x_0)} f(x)e^{\lambda S(x)}\,dx,$$

взятой по окрестности точки x_0 максимума функции $S(x)$.

Если это невырожденный максимум, т. е. $S''(x_0)\neq 0$, то по лемме Морса (см. ч. I, гл. VIII, § 6) существует замена переменной $x=\varphi(y)$ такая, что $S(x_0)-S(\varphi(y))=|y|^2$, где $|y|^2=(y^1)+\ldots+(y^n)^2$. Тем самым дело сводится к каноническому интегралу

$$\int\limits_I (f\circ\varphi)(y)\,\det\varphi'(y)e^{-\lambda|y|^2}\,dy,$$

который в случае гладких функций f, S, применяя теорему Фубини, можно исследовать, опираясь на доказанную выше лемму Ватсона (см. в этой связи задачи 8—11).

Замечание 7 (о методе стационарной фазы). Метод Лапласа в его расширенной трактовке, как мы уже отмечали, это:

1° определенный принцип локализации (лемма 1 об экспоненциальной оценке),

2° способ локального приведения интеграла к каноническому виду (лемма Морса) и

3° описание асимптотики канонических интегралов (лемма Ватсона).

Идея локализации нам уже ранее встречалась при изучении δ-образных семейств функций, а также при исследовании ряда и преобразования Фурье (лемма Римана, гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье, сходимость ряда и интеграла Фурье).

Важное место в математике и ее приложениях занимают интегралы вида

$$\widetilde{F}(\lambda) = \int\limits_X f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx,$$

где $x \subset \mathbb{R}^n$, называемые *интегралами Фурье*. Интеграл Фурье отличается от интеграла Лапласа лишь скромным множителем i в показателе. Это приводит, однако, к тому, что при вещественных λ и $S(x)$ получается $|e^{i\lambda S(x)}| = 1$ и, значит, идея доминантного максимума при исследовании асимптотики интеграла Фурье непригодна.

Пусть $X = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$, $f \in C_0^{(\infty)}([a, b], \mathbb{R})$ (т. е. f — финитна на $[a, b]$), $S \in \in C^{(\infty)}([a, b], \mathbb{R})$ и $S'(x) \neq 0$ на $[a, b]$.

Интегрируя по частям и используя лемму Римана (см. задачу 12), получаем, что

$$\int\limits_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \frac{1}{i\lambda}\int\limits_a^b \frac{f(x)}{S'(x)}\,de^{i\lambda S(x)} = -\frac{1}{i\lambda}\int\limits_a^b \frac{d}{dx}\Big(\frac{f}{S'}\Big)(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int\limits_a^b f_1(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = \ldots = \frac{1}{\lambda^n}\int\limits_a^b f_n(x)e^{i\lambda S(x)}\,dx = o(\lambda^{-n}) \quad \text{при } \lambda \to \infty.$$

Таким образом, если $S'(0) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$, то за счет все увеличивающейся при $\lambda \to \infty$ частоты осцилляции функции $e^{i\lambda S(x)}$ интеграл Фурье по отрезку $[a, b]$ оказывается величиной типа $O(\lambda^{-\infty})$.

Функция $S(x)$ в интеграле Фурье называется *фазовой функцией*. Таким образом, для интеграла Фурье имеет место свой принцип локализации, называемый *принципом стационарной фазы*. Согласно этому принципу асимптотика интеграла Фурье (в случае $f \in C_0^{(\infty)}$) с точностью до величины $O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to \infty$ совпадает с асимптотикой порции интеграла Фурье, взятой по окрестности $U(x_0)$ стационарной точки x_0 фазовой функции (т. е. точки x_0, в которой $S'(x_0) = 0$).

После этого заменой переменной дело приводится к каноническому интегралу

$$E(\lambda) = \int\limits_0^\varepsilon f(x)e^{i\lambda x^\alpha}\,dx,$$

асимптотика которого описывается специальной леммой Эрдейи, имеющей для интеграла Фурье ту же роль, что и лемма Ватсона для интеграла Лапласа.

Указанная схема исследования асимптотики интеграла Фурье называется *методом стационарной фазы*.

Природа принципа локализации в методе стационарной фазы совсем иная, чем в случае интеграла Лапласа, но общая схема метода Лапласа, как видно, оказывается пригодной и здесь.

Некоторые подробности, относящиеся к методу стационарной фазы, читатель найдет в задачах 12—17.

Задачи и упражнения

Метод Лапласа в одномерном случае.

1. a) Функция $h(x)=e^{-\lambda x^\alpha}$ при $\alpha>0$ достигает максимума, когда $x=0$. При этом $h(x)$ есть величина порядка 1 в δ-окрестности точки $x=0$ размера $\delta=O(\lambda^{-1/\alpha})$.

Используя лемму 1, покажите, что если $0<\delta<1$, то интеграл

$$W(\lambda)=\int\limits_{c(\lambda,\delta)}^{a} x^{\beta-1}f(x)e^{-\lambda x^\alpha}\,dx,$$

где $c(\lambda,\delta)=\lambda^{\frac{\delta-1}{\alpha}}$, имеет порядок $O(e^{-A\lambda^\delta})$ при $\lambda\to+\infty$; A — положительная постоянная.

b) Докажите, что если функция f непрерывна при $x=0$, то

$$W(\lambda)=\alpha^{-1}\Gamma(\beta/\alpha)[f(0)+o(1)]\lambda^{-\beta/\alpha}\quad\text{при }\lambda\to+\infty.$$

c) В теореме 1, a), условие $f(x)=f(x_0)+O(x-x_0)$ можно ослабить, заменив его условием непрерывности f в точке x_0. Покажите, что при этом сохраняется тот же главный член асимптотики, но, вообще говоря, не само равенство (2′), в котором теперь $O(x-x_0)$ заменяется на $o(1)$.

2. a) Числа Бернулли B_{2k} определяются из соотношения

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}=-\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}t^{2k-1},\quad |t|<2\pi.$$

Известно, что

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x)=\ln x+\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-tx}\,dt.$$

Покажите, что

$$\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)(x)\simeq\ln x-\frac{1}{2x}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k}x^{-2k}\quad\text{при }x\to+\infty.$$

b) Докажите, что при $x\to+\infty$

$$\ln\Gamma(x)\simeq\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{1}{2}\ln 2\pi+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{2k(2k-1)}x^{-2k+1}.$$

Это асимптотическое разложение называется *рядом Стирлинга*.

c) Используя ряд Стирлинга, получите первые два члена асимптотики функции $\Gamma(x+1)$ при $x\to+\infty$ и сравните ваш результат с полученным в примере 13.

d) Следуя методу примера 13 и независимо от этого пользуясь рядом Стирлинга, покажите, что

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\quad\text{при }x\to+\infty.$$

3. a) Пусть $f\in C([0,a],\mathbb{R})$, $S\in C^{(1)}([0,a],\mathbb{R})$, $S(x)>0$ на $[0,a]$ и $S(x)$ достигает максимума при $x=0$, причем $S'(0)\neq 0$. Покажите, что если $f(0)\neq 0$, то

$$I(\lambda):=\int\limits_0^a f(x)S^\lambda(x)\,dx\sim-\frac{f(0)}{\lambda S'(0)}S^{\lambda+1}(0)\quad\text{при }\lambda\to+\infty.$$

b) Получите асимтотическое разложение

$$I(\lambda) \simeq S^{\lambda+1}(0) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-(k+1)} \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

если дополнительно известно, что $f, S \in C^{(\infty)}([0, a], \mathbb{R})$.

4. a) Покажите, что

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}(1 + O(n^{-1})) \quad \text{при } n \to +\infty.$$

b) Выразите этот интеграл через эйлеровы интегралы и покажите, что при $n \in \mathbb{N}$ он равен $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$.

c) Получите формулу Валлиса $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$.

d) Найдите второй член асимптотического разложения исходного интеграла при $n \to +\infty$.

5. a) Покажите, что $\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ при $n \to +\infty$.

b) Найдите следующий член асимптотики этого интеграла.

6. Покажите, что если $\alpha > 0$, то при $x \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} t^{-\alpha t} t^x\, dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{e^\alpha}} x^{1/2\alpha} \exp\left(\frac{\alpha}{e} x^{1/\alpha}\right).$$

7. a) Найдите главный член асимптотики интеграла

$$\int_0^{+\infty} (1+t)^n e^{-nt}\, dt \quad \text{при } n \to +\infty.$$

b) Используя полученный результат и тождество $k!\, n^{-k} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-nt} t^k\, dt$, покажите, что

$$\sum_{k=0}^{n} c_n^k k!\, n^{-k} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}(1 + O(n^{-1})) \quad \text{при } n \to +\infty.$$

Метод Лапласа в многомерном случае.

8. *Лемма об экспоненциальной оценке.* Пусть $M = \sup\limits_{x\in d} S(x)$, и пусть при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ интеграл

$$F(\lambda) = \int_{D\subset\mathbb{R}^n} f(x) e^{\lambda S(x)}\, dx \qquad (*)$$

сходится абсолютно. Покажите, что тогда он сходится абсолютно при $\lambda \geqslant \lambda_0$ и

$$|f(\lambda)| \leqslant \int_D |f(x) e^{\lambda S(x)}|\, dx \leqslant A e^{\lambda M} \quad (\lambda \geqslant \lambda_0),$$

где A — положительная постоянная.

9. *Лемма Морса.* Пусть x_0 — невырожденная критическая точка функции $S(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, определенной и принадлежащей классу $C^{(\infty)}$ в окрестности точки x_0. Тогда существуют окрестности U и V точек $x = x_0$, $y = 0$ и диффеоморфизм $\varphi: V \to U$ класса $C^{(\infty)}(V, U)$ такие, что

$$S(\varphi(y)) = S(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \nu_j (y^j)^2,$$

$\det \varphi'(0) = 1$, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — собственные числа матрицы $S''_{xx}(x_0)$, а $y = (y^1, \ldots, y^n)$ — координаты точки $y \in \mathbb{R}^n$.

Докажите эту несколько конкретизированную форму леммы Морса, исходя из леммы Морса, изложенной в части I, гл. VIII, § 6.

10. *Асимптотика канонического интеграла.* a) Пусть $t = (t_1, \ldots, t_n)$, $V = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t_j| \leqslant \delta,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, $a \in C^{(\infty)}(V, \mathbb{R})$. Рассмотрим функцию

$$F_1(\lambda, t') = \int_{-\delta}^{\delta} a(t_1, \ldots, t_n) e^{-\frac{\lambda \nu_1}{2} t_1^2}\, dt_1,$$

где $t' = (t_2, \ldots t_n)$, $\nu_1 > 0$. Покажите, что $F_1(\lambda, t') \simeq \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t') \lambda^{-(k+1/2)}$ при $\lambda \to +\infty$; это разложение равномерно по $t' \in V' \in \{t' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |t_j| \leqslant \delta,\ j = 2, \ldots, n\}$ и $a_k \in C^{(\infty)}(V', \mathbb{R})$ при любом $k = 0, 1, \ldots$

b) Домножая $F_1(\lambda, t')$ на $e^{-\frac{\lambda \nu_2}{2} t_2^2}$ и обосновав законность почленного интегрирования соответствующего асимптотического разложения, получите асимптотическое разложение функции

$$F_2(\lambda, t'') = \int_{-\delta}^{\delta} F_1(\lambda, t') e^{-\frac{\lambda \nu_2}{2} t_2^2}\, dt_2 \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

где $t'' = (t_3, \ldots, t_n)$, $\nu_2 > 0$.

c) Докажите, что для функции

$$A(\lambda) = \int_{-\delta}^{\delta} \ldots \int_{-\delta}^{\delta} a(t_1, \ldots, t_n) e^{-\frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{n} \nu_j t_j^2}\, dt_1 \ldots dt_n,$$

где $\nu_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$, имеет место асимптотическое разложение

$$A(\lambda) \simeq \lambda^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k} \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

где $a_0 = \sqrt{\dfrac{(2\pi)^n}{\nu_1 \cdot \ldots \cdot \nu_n}}\, a(0)$.

11. *Асимптотика интеграла Лапласа в многомерном случае.* a) Пусть D — замкнутая, ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $f, S \in C(D, \mathbb{R})$, $\max\limits_{x \in D} S(x))$ достигается только в некоторой внутренней точке x_0 области D; $f, S \in C^{(\infty)}$ в некоторой окрестности точки x_0, причем $\det S''(x_0) \neq 0$.

Докажите, что если интеграл $(*)$ абсолютно сходится для какого-нибудь значения $\lambda = \lambda_0$, то

$$F(\lambda) \simeq e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-n/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k} \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

причем это разложение можно дифференцировать по λ любое число раз, а его главный член имеет вид

$$F(\lambda) = e^{\lambda S(x_0)} \lambda^{-n/2} \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{|\det S''(x_0)|}} (f(x_0) + O(\lambda^{-1})).$$

b) Проверьте, что если в предыдущем утверждении вместо $f, S \in C^{(\infty)}$ известно лишь, что $f \in C$, а $S \in C^{(3)}$ в окрестности точки x_0, то при $\lambda \to +\infty$ главный член асимптотики останется тем же, с заменой $O(\lambda^{-1})$ на $o(1)$ при $\lambda \to +\infty$.

Метод стационарной фазы в одномерном случае.

12. *Обобщение леммы Римана.* a) Докажите следующее обобщение леммы Римана.

Пусть $S \in C^{(1)}([a, b], \mathbb{R})$ и $S'(x) \neq 0$ на $[a, b] =: I$. Тогда для любой абсолютно интегрируемой на промежутке I функции f имеет место соотношение

$$\widetilde{F}(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\, dx \to 0 \quad \text{при } \lambda \to \infty,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

b) Проверьте, что если, сверх того, известно, что $f \in C^{(n+1)}(I, \mathbb{R})$, а $S \in C^{(n+2)}(I, \mathbb{R})$, то при $\lambda \to \infty$

$$\widetilde{F}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (i\lambda)^{-(k+1)} \left(\frac{1}{S'(x)} \frac{d}{dx}\right)^k \frac{f(x)}{S'(x)}\bigg|_a^b + o(\lambda^{-(n+1)}).$$

c) Выпишите главный член асимптотики функции $\widetilde{F}(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) Покажите, что если $S \in C^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$, а $f|_{[a,c]} \in C^{(2)}[a, c]$, $f|_{[c,b]} \in C^{(2)}[c, b]$, но $f \notin C^{(2)}[a, b]$, то функция $\widetilde{F}(\lambda)$ не обязана быть величиной $o(\lambda^{-1})$ при $\lambda \to \infty$.

e) Докажите, что когда $f, S \in C^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$, функция $\widetilde{F}(\lambda)$ допускает разложение в асимптотический ряд при $\lambda \to \infty$.

f) Найдите асимптотические разложения при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$ следующих интегралов: $\int_0^\varepsilon (1+x)^{-\alpha} \psi_j(x, \lambda)\, dx$, $j = 1, 2, 3$, если $\alpha > 0$, а $\psi_1 = e^{i\lambda x}$, $\psi_2 = \cos \lambda x$, $\psi_3 = \sin \lambda x$.

13. *Принцип локализации* a) Пусть $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C_0^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$, $S \in C^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$ и $S'(x) \neq 0$ на I. Докажите, что тогда

$$\widetilde{F}(\lambda) := \int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)}\, dx = O(|\lambda|^{-\infty}) \quad \text{при } \lambda \to \infty.$$

b) Пусть $f \in C_0^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$, $S \in C^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$; $x_1, \ldots, x_m$ — конечное число стационарных точек функции $S(x)$, вне которых $S'(x) \neq 0$ на I. Обозначим через $\widetilde{F}(\lambda, x_j)$ интеграл от функции $f(x)e^{i\lambda S(x)}$ по окрестности $U(x_j)$ точки x_j, $j = 1, \ldots, m$, не содержащей в замыкании других критических точек. Докажите, что

$$\widetilde{F}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{F}(\lambda, x_j) + O(|\lambda|^{-\infty}) \quad \text{при } \lambda \to \infty.$$

14. *Асимптотика интеграла Фурье в одномерном случае*. a) В достаточно общей ситуации отыскание асимптотики одномерного интеграла Фурье благодаря принципу локализации сводится к описанию асимптотики канонического интеграла

$$E(\lambda) = \int_0^a x^{\beta-1} f(x)e^{i\lambda x^\alpha}\, dx,$$

для которого справедлива следующая

Лемма Эрдейи. *Пусть* $\alpha \geqslant 1$, $\beta > 0$, $f \in C^{(\infty)}([0,a],\mathbb{R})$ *и* $f^{(k)}(a)=0$, $k=0,1,2,\dots$ *Тогда*

$$E(\lambda) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-\frac{k+\beta}{\alpha}} \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

где

$$a_k = \frac{1}{\alpha}\Gamma\Big(\frac{k+\beta}{\alpha}\Big) e^{i\frac{\pi}{2}\frac{k+\beta}{\alpha}} \frac{f^{(k)}(0)}{k!},$$

причем это разложение можно дифференцировать по λ *любое число раз.*

Пользуясь леммой Эрдейи, докажите следующее утверждение.

Пусть $I=[x_0-\delta, x_0+\delta]$ — конечный отрезок, $f, S \in C^{(\infty)}(I,\mathbb{R})$, причем $f \in C_0(I,\mathbb{R})$, а S имеет на I единственную стационарную точку x_0, где $S'(x_0)=0$, но $S''(x_0) \neq 0$. Тогда при $\lambda \to +\infty$

$$\widetilde{F}(\lambda, x_0) := \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) e^{i\lambda S(x)}\,dx \simeq e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} S''(x_0)} e^{i\lambda S(x_0)} \lambda^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k}$$

и главный член асимптотики имеет вид

$$\widetilde{F}(\lambda, x_0) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(x_0)|}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} S''(x_0) + \lambda S(x_0)\right)} (f(x_0) + O(\lambda^{-1})).$$

b) Рассмотрите функцию Бесселя целого индекса $n \geqslant 0$:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi.$$

Покажите, что

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\Big(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O(x^{-1}) \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Метод стационарной фазы в многомерном случае

15. *Принцип локализации.* a) Докажите следующее утверждение. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $f \in C_0^{(\infty)}(D,\mathbb{R})$, $S \in C^{(\infty)}(D,\mathbb{R})$, $\operatorname{grad} S(x) \neq 0$ при $x \in \operatorname{supp} f$ и

$$\widetilde{F}(\lambda) := \int_D f(x) e^{i\lambda S(x)}\,dx. \tag{$**$}$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется такая положительная постоянная $A(k)$, что при $\lambda \geqslant 1$ имеет место оценка $|\widetilde{F}(\lambda)| \leqslant A(k)\lambda^{-k}$, и, значит, $\widetilde{F}(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to +\infty$.

b) Пусть по-прежнему $f \in C_0^{(\infty)}(D,\mathbb{R})$, $S \in C^{(\infty)}(D,\mathbb{R})$, но S имеет в D конечное число критических точек $x_1, \dots, x_m$, вне которых $\operatorname{grad} S(x) \neq 0$. Обозначим через $\widetilde{F}(\lambda, x_j)$ интеграл от функции $f(x)e^{i\lambda S(x)}$ по такой окрестности $U(x_j)$ точки x_j, в замыкании которой нет критических точек, отличных от точки x_j. Докажите, что

$$\widetilde{F}(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{F}(\lambda, x_j) + O(\lambda^{-\infty}) \quad \text{при } \lambda \to +\infty.$$

16. *Приведение к каноническому интегралу.* Если x_0 — невырожденная критическая точка функции $S \in C^{(\infty)}(D,\mathbb{R})$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^n$, то по лемме Морса (см. задачу 9) существует такая локальная замена переменных $x=\varphi(y)$, что $x_0=\varphi(0)$, $S(\varphi(y)) = S(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (y^j)^2$, где $\varepsilon_j = \pm 1$, $y=(y^1,\dots,y^n)$, причем $\det \varphi'(y) > 0$.

Используя принцип локализации (задача 15), покажите теперь, что если $f \in C_0^{(\infty)}(D, \mathbb{R})$, $S \in C^{(\infty)}(D, \mathbb{R})$, S имеет в D не более конечного числа критических точек и все они невырождены, то исследование асимптотики интеграла $(**)$ сводится к исследованию асимптотики специального интеграла

$$\Psi(\lambda) := \int_{-\delta}^{\delta} \dots \int_{\delta}^{\delta} \psi(y^1, \dots, y^n) e^{\frac{i\lambda}{2} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (y^j)^2} \, dy^1 \dots dy^n.$$

17. *Асимптотика интеграла Фурье в многомерном случае*. а) Используя лемму Эрдейи (задача 14 а)) и план действий, описанный в задаче 10, докажите, что если D — область в $\mathbb{R}^n$, $f, S \in C^{(\infty)}(D, \mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f$ — компакт в D, x_0 — единственная, и притом невырожденная, критическая точка функции S в D, то для интеграла $(**)$ при $\lambda \to +\infty$ имеет место асимптотическое разложение

$$\widetilde{F}(\lambda) \simeq \lambda^{-n/2} e^{i\lambda S(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k},$$

которое можно дифференцировать по λ любое число раз.

Главный член асимптотики имеет вид

$$\widetilde{F}(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \exp\left[i\lambda S(x_0) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S''(x_0)\right] \times \\ \times |\det S''(x_0)|^{-1/2} [f(x_0) + O(\lambda^{-1})] \quad \text{при } \lambda \to +\infty.$$

Здесь $S''(x)$ — симметрическая и по условию невырожденная матрица вторых частных производных функции S в точке x_0 (*гессиан*), а $\operatorname{sgn} S''(x_0)$ — сигнатура этой матрицы (или соответствующей ей квадратичной формы), т. е. разность $\nu_+ - \nu_-$ между числом положительных и числом отрицательных собственных значений матрицы $S''(x_0)$.

Некоторые вопросы и задачи коллоквиумов

III семестр

Ряды и интегралы, зависящие от параметра

Вопросы коллоквиума см. Вопросы к экзамену 1—11.

Задачи, рекомендуемые к вопросам коллоквиума

1. Пусть P — полином. Вычислите $\left(e^{t\frac{d}{dx}}\right)P(x)$.

2. Проверьте, что вектор-функция $e^{tA}x_0$ решает задачу Коши $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ ($\dot{x} = Ax$ — система уравнений, задаваемая матрицей A).

3. Найдите с точностью до $o(1/n^3)$ асимптотику положительных корней $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ уравнения $\sin x + 1/x = 0$ при $n \to \infty$.

4. a) Покажите, что $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - \ldots$ Сколько членов этого ряда надо взять, чтобы знать $\ln 2$ с точностью до 10^{-3}?

b) Проверьте что $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+t}{1-t} = t + \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{1}{5}t^5 + \ldots$ Используя это разложение, удобно вычислять $\ln x$, полагая $x = \dfrac{1+t}{1-t}$.

c) Полагая в b) $t = 1/3$, найдите, что $\dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 + \ldots$ Сколько членов этого ряда надо взять, чтобы знать $\ln 2$ с точностью до 10^{-3}? Сравните с тем, что было в a).

Это один из приемов улучшения сходимости.

5. Проверьте, что в смысле Абеля

a) $1 - 1 + 1 \ldots = \dfrac{1}{2}$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k\varphi = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$, $\varphi \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

c) $\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos k\varphi = 0$, $\varphi \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Докажите лемму Адамара:

a) если $f \in C^{(1)}(U(x_0))$, то $f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0)$, где $\varphi \in C(U(x_0))$ и $\varphi(x_0) = f'(x_0)$;

b) если $f \in C^{(n)}(U(x_0))$, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1} + \varphi(x)(x - x_0)^n,$$

где $\varphi \in C(U(x_0))$ и $\varphi(x_0) = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$.

c) Как выглядят эти соотношения в координатной записи, когда $x = (x^1, \ldots, x^n)$, то есть когда f — функция n переменных?

7. a) Проверьте, что функция

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

удовлетворяет уравнению Бесселя $y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$.

b) Попробуйте решить это уравнение, используя степенные ряды.

c) Найдите степенные разложения функции $J_0(x)$.

8. Проверьте справедливость при $x \to +\infty$ асимптотических разложений:

a) $\Gamma(\alpha, x) := \int\limits_x^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \simeq e^{-x} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k+1)} x^{\alpha-k}$,

b) $\operatorname{Erf}(x) := \int\limits_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-x^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(3/2-k) x^{2k-1}}$.

9. a) Вслед за Эйлером найдите, что ряд $1 - 1!\,x + 2!\,x^2 - 3!\,x^3 + \ldots$ связан с функцией

$$S(x) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\, dt.$$

b) Сходится ли этот ряд?

c) Дает ли он асимптотическое разложение $S(x)$ при $x \to 0$?

10. a) Линейный прибор A, характеристики которого постоянны во времени, в ответ на входной сигнал $\delta(t)$ в виде δ-функции выдал сигнал (функцию) $E(t)$. Каков будет ответ прибора на входной сигнал $f(t)$, $-\infty < t < +\infty$?

b) Всегда ли по преобразованному сигналу $\hat{f} := Af$ однозначно восстанавливается исходный сигнал f?

IV семестр

Интегральное исчисление (функции многих переменных)

В учебном плане четвертого семестра последнее время происходили изменения, которые, в частности, касались курса анализа. Менялось количество часов, сдвигались сроки коллоквиума, его даже отменяли или устраивали в конце семестра. Учитывая это, студентам был дан весь список экзаменационных вопросов с договоренностью, что в коллоквиум войдет то, что будет прочитано к назначенной дате его проведения.

Задачи, рекомендуемые к вопросам коллоквиума

Ниже за отделенным скобкой номером вопроса через тире идут номера страниц и рекомендуемых задач, находящихся на этих страницах.

1) 110 — 2, 3. 2) 110 — 4. 3) 114 — 1, 3, 4. 4) 118 — 1, 2; 119 — 3, 4.
5) 126 — 6, 7; 222 — 6. 6) 141 — 9; 197 — 5, 6. 7) 149 — 1; 150 — 5, 7.
8) 160 — 2, 3; 180 — 1; 181 — 4. 9) 167 — 1, 2, 3, 4; 198 — 11. 10) 325 — 1; 326 — 2.
11) 198 — 9; 326 — 3. 12) 327 — 4. 13) 198 — 8, 10. 14) 208 — 3; 209 — 4, 5; 213 — 9.
15) 236 — 1; 238 — 10; 239 — 13, 14. 16) 183 — 10; 221 — 5. 17) 256 — 1; 256 — 2.
18) 266 — 1, 2, 3; 267 — 4; 268 — 8. 19) 280 — 7; 282 — 13, 14. 20) 281 — 11, 12.
21) 239 — 11; 257 — 8. 22) 256 — 4, 5, 6.

Вопросы к экзамену

III семестр

Ряды и интегралы, зависящие от параметра

1. Критерий Коши сходимости ряда. Теорема сравнения и основные достаточные признаки сходимости (мажорантный, интегральный, Абеля—Дирихле). Ряд $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

2. Равномерная сходимость семейств и рядов функций. Критерий Коши и основные достаточные признаки равномерной сходимости ряда функций (мажорантный, Абеля—Дирихле).

3. Достаточные условия коммутирования двух предельных переходов. Непрерывность, интегрирование, дифференцирование и предельный переход.

4. Область сходимости и характер сходимости степенного ряда. Формула Коши—Адамара. Теорема Абеля (вторая). Тейлоровские разложения основных элементарных функций. Формула Эйлера. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда.

5. Несобственный интеграл. Критерий Коши и основные достаточные признаки сходимости (мажорантный, Абеля—Дирихле).

6. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Критерий Коши и основные достаточные признаки равномерной сходимости (мажорантный, Абеля—Дирихле).

7. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование собственного интеграла, зависящего от параметра.

8. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра. Интеграл Дирихле.

9. Эйлеровы интегралы. Области определения, дифференциальные свойства, формулы понижения, различные представления, взаимосвязь. Интеграл Пуассона.

10. Дельтаобразные семейства функций. Теорема о сходимости свертки. Классическая теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции алгебраическим многочленом.

11. Векторное пространство со скалярным произведением. Непрерывность скалярного произведения и связанные с этим его алгебраические

свойства. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Теорема Пифагора. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье. Примеры скалярных произведений и ортогональных систем в пространствах функций.

12. Лемма о перпендикуляре. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя и сходимость ряда Фурье. Условия полноты ортонормированной системы.

13. Классический (тригонометрический) ряд Фурье в вещественной и комплексной форме. Лемма Римана. Принцип локализации и сходимость ряда Фурье в точке. Пример: разложение $\cos(\alpha x)$ в ряд Фурье и разложение $\sin(\pi x)/\pi x$ в бесконечное произведение.

14. Гладкость функции, скорость убывания ее коэффициентов Фурье и скорость сходимости ее ряда Фурье.

15. Полнота тригонометрической системы и сходимость в среднем тригонометрического ряда Фурье.

16. Преобразование Фурье и интеграл Фурье (формула обращения). Пример: вычисление $\hat{f}$ для $f(x) := \exp(-a^2x^2)$.

17. Преобразование Фурье и оператор дифференцирования. Гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье. Равенство Парсеваля. Преобразование Фурье как изометрия пространства быстро убывающих функций.

18. Преобразование Фурье и свертка. Решение одномерного уравнения теплопроводности.

19. Восстановление переданного сигнала по спектральной функции прибора и принятому сигналу. Теорема отсчетов (формула Котельникова—Шеннона).

20. Асимптотическая последовательность и асимптотический ряд. Пример: асимптотическое разложение функции $\mathrm{Ei}(x)$. Различие между сходящимися и асимптотическими рядами. Асимптотика интеграла Лапласа (главный член). Формула Стирлинга.

IV семестр

Интегральное исчисление (функции многих переменных)

1. Интеграл Римана на n-мерном промежутке. Критерий Лебега существования интеграла.

2. Критерий Дарбу существования интеграла от вещественнозначной функции на n-мерном промежутке.

3. Интеграл по множеству. Мера Жордана множества и ее геометрический смысл. Критерий Лебега существования интеграла по измеримому множеству. Линейность и аддитивность интеграла.

4. Оценки интеграла.

5. Сведение кратного интеграла к повторному: теорема Фубини и ее важнейшие следствия.

6. Формула замены переменных в кратном интеграле. Инвариантность меры и интеграла.

7. Несобственные кратные интегралы: основные определения, мажорантный признак сходимости, канонические интегралы. Вычисление интеграла Эйлера—Пуассона.

8. Поверхность размерности k в $\mathbb{R}^n$ и основные способы ее задания. Абстрактное k-мерное многообразие. Край k-мерного многообразия как $(k-1)$-мерное многообразие без края.

9. Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Способы задания ориентации абстрактного многообразия и (гипер)поверхности в $\mathbb{R}^n$.

Ориентируемость края ориентируемого многообразия. Согласованная ориентация многообразия и края.

10. Касательный вектор и касательное пространство к многообразию в точке. Интерпретация касательного вектора как дифференциального оператора.

11. Дифференциальная форма в области $D \subset \mathbb{R}^n$. Примеры: дифференциал функции, форма работы, форма потока. Координатная запись дифференциальной формы. Операция внешнего дифференцирования.

12. Отображение объектов и сопряженное отображение функций на этих объектах. Преобразование точек и векторов касательных пространств в этих точках при гладком отображении. Перенос функций и дифференциальных форм при гладком отображении. Рецепт выполнения переноса форм в координатном виде.

13. Коммутирование переноса дифференциальных форм с операциями их внешнего умножения и дифференцирования. Дифференциальная форма на многообразии. Инвариантность (корректность) операций над дифференциальными формами.

14. Схема подсчета работы и потока. Интеграл от k-формы по k-мерной гладкой ориентированной поверхности. Учет ориентации. Независимость интеграла от выбора параметризации. Общее определение интеграла от дифференциальной k-формы по k-мерному компактному ориентированному многообразию.

15. Формула Грина на квадрате, ее вывод, интерпретация и запись на языке интегралов от соответствующих дифференциальных форм. Общая формула Стокса. Редукция к k-мерному промежутку и доказательство для k-мерного промежутка. Классические интегральные формулы анализа как конкретные варианты общей формулы Стокса.

16. Форма объема в $\mathbb{R}^n$ и на поверхности. Зависимость формы объема от ориентации. Интеграл первого рода и его независимость от ориентации. Площадь и масса материальной поверхности как интегралы первого рода. Запись формы объема k-мерной поверхности $S^k \subset \mathbb{R}^n$ в локальных параметрах и запись формы объема гиперповерхности $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в декартовых координатах объемлющего пространства.

17. Основные дифференциальные операторы теории поля (grad, rot, div) и их связь с оператором d внешнего дифференцирования в евклидовом ориентированном пространстве $\mathbb{R}^3$.

18. Запись работы и потока поля в виде интегралов первого рода. Основные интегральные формулы теории поля в $\mathbb{R}^3$ как векторная запись классических интегральных формул анализа.

19. Потенциальное поле и его потенциал. Точные и замкнутые формы. Дифференциальный необходимый признак точности формы и потенциальности векторного поля, его достаточность в односвязной области. Интегральный критерий точности 1-форм и векторных полей.

20. Локальная точность замкнутой формы (лемма Пуанкаре). Глобальный анализ. Гомологии и когомологии. Теорема де Рама (формулировка).

21. Примеры приложений формулы Стокса (Гаусса—Остроградского): вывод основных уравнений механики сплошной среды. Физический смысл градиента, ротора и дивергенции.

22. Оператор набла Гамильтона и работа с ним. Градиент, ротор и дивергенция в триортогональных криволинейных координатах.

Экзаменационное задание
(математический анализ, третий семестр)

1. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}$ вещественнозначных функций, определенных, например, на отрезке $[0, 1]$.

a) Какие виды сходимости последовательности функций вы знаете?

b) Дайте определение каждой из них.

c) Какова связь между ними? (Докажите эту связь или приведите поясняющий пример, когда такой связи нет.)

2. Дана 2π-периодическая функция f. Она тождественно равна нулю на интервале $]-\pi, 0[$ и $f(x) = 2x$ на отрезке $[0, \pi]$. Найдите сумму S стандартного тригонометрического ряда Фурье этой функции.

3. a) Известно разложение функции $(1+x)^{-1}$ в степенной ряд («геометрическая прогрессия»). Получите отсюда степенное разложение функции $\ln(1+x)$ и обоснуйте ваши действия.

b) Каков радиус сходимости полученного ряда?

c) Сходится ли этот ряд при $x = 1$ и, если да, будет ли его сумма равна $\ln 2$? Почему?

4. a) Известно, что спектральная функция (характеристика) p линейного прибора (оператора) A всюду отлична от нуля. Как, зная функцию p и полученный сигнал $g = Af$, найти переданный сигнал f?

b) Пусть функция p такова: $p(\omega) \equiv 1$ при $|\omega| \leqslant 10$ и $p(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| > 10$. Пусть известен спектр $\hat{g}$ (преобразование Фурье) принятого сигнала g, а именно, $\hat{g}(\omega) \equiv 1$ при $|\omega| \leqslant 1$ и $\hat{g}(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| > 1$. Наконец, пусть известно, что входной сигнал f не содержит частот за пределами частот, пропускаемых прибором A (т. е. за пределами частот $|\omega| \leqslant 10$). Найдите входной сигнал f.

5. Используя Г-функцию Эйлера и метод Лапласа, получите весьма ценную асимптотическую формулу Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Промежуточное контрольное задание (математический анализ, четвертый семестр)

1. Вычислите значения приведенных ниже форм ω в $\mathbb{R}^n$ на указанных наборах векторов:

a) $\omega = x^2\,dx^1$ на векторе $\xi = (1, 2, 3) \in T\mathbb{R}^3_{(1,2,3)}$;

b) $\omega = dx^1 \wedge dx^3 + x^1\,dx^2 \wedge dx^4$ на упорядоченной паре векторов $\xi_1, \xi_2 \in$ $\in T\mathbb{R}^4_{(1,0,0,0)}$. (Полагаем $\xi_1 = (\xi_1^1, \ldots, \xi_1^4)$, $\xi_2 = (\xi_2^1, \ldots, \xi_2^4)$.)

2. Пусть $f^1, \ldots, f^n$ — гладкие функции аргумента $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Выразите форму $df^1 \wedge \ldots \wedge df^n$ в терминах форм $dx^1, \ldots, dx^n$.

3. В области $D \subset \mathbb{R}^3$ действует векторное поле сил F. Рассчитываем работу, необходимую для перемещения в этом поле из точки $a \in D$ в точку $b \in D$ вдоль гладкого пути $\gamma \subset D$.

a) Напишите формулу для подсчета этой работы в виде интеграла первого и второго рода (т. е. в терминах ds и dx, dy, dz соответственно).

b) Проверьте, что в гравитационном поле F эта работа не зависит от пути. Чему она равна?

4. a) В области $D \subset \mathbb{R}^3$ имеется векторное поле V (например, поле скорости некоторого течения). Напишите формулу для подсчета потока векторного поля V через ориентированную поверхность $S = S^2_+ \subset D$ в виде интеграла первого и второго рода (т. е. в терминах $d\sigma$ и $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ соответственно).

b) Взят выпуклый многогранник $D \subset \mathbb{R}^3$. На каждой его грани построен вектор, направленный вдоль внешней нормали и по величине равный площади соответствующей грани. Физика говорит, что сумма этих векторов равна нулю (иначе построим вечный двигатель). Математика дает то же. Покажите это.

c) Прямым расчетом выведите закон Архимеда (подсчитайте выталкивающую силу, действующую на тело, погруженное, например, в наполненную водой ванну, как результирующую давления на поверхность тела).

Дополнение 1

Ряд как инструмент (вводная лекция)

В геологии сначала найдут, разведают месторождение, а потом разрабатывают. В математике так же. Аксиоматика и полезный формализм возникают как результат решения конкретных вопросов и задач. Они не падают с неба, как это может показаться неопытному студенту, когда всё начинается с аксиом.

Этот семестр в значительной степени посвящен рядам, т. е. по существу пределу последовательности. Чтобы замечательно эффективный аппарат теории рядов не свелся к абстрактному исследованию сходимости ряда (существованию некоего предела), дадим хотя бы начальное представление о том, где и как работает этот инструмент.

§ 0. Разминка

a. Букашка на резинке (задача, предложенная Л. Б. Окунем А. Д. Сахарову).[1]

Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет букашка. Каждый раз, как только она проползает 1 см, вы растягиваете резинку на 1 км. Доползет ли букашка до вашей руки? Если да, то приблизительно сколько ей на это потребуется времени?

b. Интеграл и оценка сумм. После некоторого размышления для ответа на предыдущий вопрос вам может оказаться полезной сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Вспомните интеграл и покажите, что $S_n - 1 < \int\limits_1^n \frac{1}{x}\,dx < S_{n-1}$.

[1] Мартин Гарднер в своей книге «Путешествие во времени» (Москва, Мир, 1990, с. 133) пишет: «Эту замечательную задачу в духе парадокса Зенона об Ахиллесе и черепахе придумал Д. Уилкин из Новой Каледонии. Впервые она была опубликована в декабре 1972 г. в разделе занимательных задач французского ежемесячника *Science et Vie*, который с присущим ему блеском ведет Пьер Берлокен».

c. От обезьяны до доктора наук всего 10^6 лет. Литлвуд в своей известной книжке «Математическая смесь», говоря о больших числах, писал, что 10^6 лет — время, необходимое для превращения обезьяны в доктора наук[1].

Поспеет ли букашка на защиту или хотя бы к концу света?

§ 1. Экспонента

a. Степенные разложения функций exp, cos, sin. Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + r_n(x),$$

где $r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}e^{\xi} \cdot x^{n+1}$ и $|\xi| < |x|$;

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + r_{2n}(x),$$

где $r_{2n}(x) = \frac{1}{(2n+1)!}\cos\left(\xi + \frac{\pi}{2}(2n+1)\right)x^{2n+1}$ и $|\xi| < |x|$;

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + r_{2n+1}(x),$$

где $r_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!}\sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(2n+2)\right)x^{2n+2}$ и $|\xi| < |x|$.

Поскольку при $n \to \infty$ для любого фиксированного значения $x \in \mathbb{R}$ остаточный член в каждой из приведенных формул, очевидно, стремится к нулю, то пишут

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$$

b. Выход в комплексную область и формула Эйлера. Подставим в правую часть первого из этих равенств вместо x комплексное число ix. Тогда после простых арифметических преобразований мы вслед за Эйлером получим замечательное соотношение

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Положив здесь $x = \pi$, найдем, что $e^{i\pi} + 1 = 0$. Это знаменитое равенство, соединяющее фундаментальные константы математики: e — анализ, i — алгебра, π — геометрия, 1 — арифметика, 0 — логика.

---

[1] Дж. Литлвуд, Математическая смесь. Москва, Физматлит, 1962, с. 111.

Мы определили функцию exp для чисто мнимых значений аргумента и получили формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, из которой, очевидно, также следует, что

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

c. Экспонента как предел. Мы знаем, что $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ при $n \to \infty$ и $x \in \mathbb{R}$. Естественно полагать, что $e^z := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, где теперь $z = x + iy$ — произвольное комплексное число. Подсчет этого предела дает $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Проверьте это и получите формулы для $\cos z$ и $\sin z$.

d. Умножение рядов и основное свойство экспоненты. Выражение $e^x(\cos y + i \sin y)$ для e^{x+iy} естественнее получить прямо из соотношения $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, если, конечно, оно справедливо и для комплексных значений аргумента функции exp.

Проверим это прямым умножением. Пусть u и v — комплексные числа. Полагая $e^u := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}u^k$ и $e^v := \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}v^m$, находим

$$e^u \cdot e^v = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}u^k\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}v^m\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{m!}u^k v^m =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+m=n} \frac{1}{k!}\frac{1}{m!}u^k v^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(u+v)^n = e^{u+v}.$$

Мы воспользовались тем, что $\sum\limits_{k+m=n} \frac{n!}{k!\,m!}u^k v^m = (u+v)^n$, поскольку $uv = vu$.

e. Экспонента от матрицы и роль коммутативности. А что если в выражении

$$e^A = 1 + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots$$

считать A квадратной матрицей, полагая, что и 1 обозначает единичную матрицу I того же размера? Например, если A — единичная матрица, то, как легко проверить, e^A окажется диагональной матрицей с элементами e на главной диагонали.

Вычислите $\exp A$ для следующих матриц A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть A_1 и A_2 — последние две матрицы второго порядка. Найдите e^{A_1}, e^{A_2} и убедитесь, что $e^{A_1} \cdot e^{A_2} \neq e^{A_1+A_2}$. В чем тут дело?

Покажите, что $e^{tA} = I + tA + o(t)$ при $t \to 0$.

Проверьте, что $\det(I + tA) = 1 + t \cdot (\operatorname{tr} A) + o(t)$, где $\operatorname{tr} A$ — след квадратной матрицы A.

Выведите важное соотношение: $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

f. Экспонента от оператора и формула Тейлора. Пусть $P(x)$ — многочлен, а $A = \frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования. Тогда $(AP)(x) = \frac{dP}{dx}(x) = P'(x)$.

Проверьте, что соотношение $\exp\left(t\frac{d}{dx}\right)P(x) = P(x+t)$ является знакомой вам формулой Тейлора.

Кстати, сколько членов ряда для e^x надо взять, чтобы получить многочлен, позволяющий вычислять e^x на отрезке $[-3, 5]$ с точностью до 10^{-2}?

§ 2. Бином Ньютона

a. Степенное разложение функций $(1+x)^\alpha$. Зная для натуральных значений α формулу степени бинома

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

Ньютон понял, что она справедлива для любых α, только сумма при этом может быть бесконечной.

Например, $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$, если $|x| < 1$.

b. Интегрирование ряда и разложение $\ln(1+x)$. Проинтегрировав последний ряд по отрезку $[0, x]$, найдем, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots \quad \text{при } |x| < 1.$$

c. Разложения $(1 + x^2)^{-1}$ и $\operatorname{arctg} x$. Аналогично написав разложение $(1 + x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ и проинтегрировав его по отрезку $[0, x]$, получим разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots,$$

из которого при $x = 1$ вроде бы следует, что $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

Может быть это и так (и действительно это так), но чувствуется, что мы уже выходим на границы дозволенного. Следующий пример только усилит наши опасения.

d. Разложение $(1-x)^{-1}$ и вычислительные странности. При $x = 1$ разложение $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ приводит к равенству $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Расставив в нем скобки, можно получить $\frac{1}{2} = (1-1) + (1-1) + \ldots = 0$, а можно получить и $\frac{1}{2} = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1$.

После такого приходится ставить под сомнение почти все, что мы так успешно и беззаботно делали, перемножая бесконечные суммы (ряды), переставляя и группируя в них члены, интегрируя их. Во всем этом явно надо разобраться. Этим мы вскоре займемся, а пока упомянем еще одну область использования рядов.

§ 3. Решение дифференциальных уравнений

a. Метод неопределенных коэффициентов. Рассмотрим простейшее уравнение $\ddot{x}+x=0$ гармонических колебаний и будем искать его решение в виде ряда $x(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots$ Подставляя ряд в уравнение, собирая члены с одинаковыми степенями t и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в обеих частях уравнения, получим бесконечную систему соотношений:

$$2a_2+a_0=0, \quad 2\cdot 3a_3+a_1=0, \quad 3\cdot 4a_4+a_2=0, \quad \ldots$$

Если начальные условия $x(0)=x_0$ и $x'(0)=v_0$ даны, то из $x(t)=a_0+a_1t+{}+a_2t^2+\ldots$ и $x'(t)=a_1+a_2t+\ldots$ при $t=0$ находим $a_0=x_0$ и $a_1=v_0$. Зная a_0 и a_1, теперь можно последовательно однозначно найти остальные коэффициенты разложения.

Например, если $x(0)=0$ и $x'(0)=1$, то

$$x(t)=t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5-\ldots=\sin t,$$

а если $x(0)=1$ и $x'(0)=0$, то

$$x(t)=1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4-\ldots=\cos t.$$

b. Использование экспоненты. А что если решение искать в виде $x(t)={}=e^{\lambda t}$? Тогда $\ddot{x}+x=e^{\lambda t}(\lambda^2+1)=0$ и, следовательно, $\lambda^2+1=0$, т. е. $\lambda=i$ или $\lambda=-i$.

Но что это за странные комплексное колебания $x(t)=e^{it}$, $x(t)=e^{-it}$ или $x(t)=c_1e^{it}+c_2e^{-it}$?

Проанализируйте ситуацию и доделайте все же задачу до конца, например, если $x(0)=0$ и $x'(0)=1$ или если $x(0)=1$ и $x'(0)=0$. Вспомните формулу Эйлера и сравните ваши результаты с полученными выше.

§ 4. Общая идея приближения и разложения

a. Смысл позиционной системы счисления. Иррациональные числа. Вспомним, что означает привычная запись $\pi=3{,}1415926\ldots$ или вообще десятичная дробь $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ Ведь это сумма $a_010^0+a_110^{-1}+a_210^{-2}+{}+a_310^{-3}+\ldots$

Мы знаем, что конечные дроби отвечают рациональным числам, а запись иррационального числа требует бесконечного числа десятичных знаков и, следовательно, требует рассмотрения бесконечного числа слагаемых и бесконечных сумм — рядов.

Если мы обрываем этот ряд на каком-то месте, мы получаем рациональное число. С ним мы обычно и работаем. Что при этом произошло? Мы

упростили объект, позволив себе некоторую ошибку. Т. е. мы приближаем сложный объект (здесь иррациональное число) удобными нам объектами (здесь рациональными числами), допуская при этом некоторую ошибку, которую называем точностью приближения. Улучшение точности приводит к усложнению приближающего объекта. Компромисс приходится искать в соответствии с конкретными обстоятельствами.

b. Разложение вектора по базису и аналогии в рядах. В линейной алгебре и геометрии мы раскладываем векторы по базису. Традиционная для анализа запись

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \ldots$$

фактически означает то же самое, если считать, что базисом является набор функций $e_n = x^n$. Это ряд Тейлора функции f в точке $x_0 = 0$.

Аналогично, если какой-то периодический сигнал или процесс $f(t)$ подвергают спектральному анализу, то интересуются его разложением $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$ на простейшие гармонические колебания. Такие ряды называются классическими (или тригонометрическими) рядами Фурье.

Новое, что тут имеет место в сравнении с ситуацией линейной алгебры, состоит в том, что рассматривается бесконечная сумма, которая понимается как некоторый предел конечных сумм.

Значит, кроме структуры линейного пространства, в пространстве наших объектов должно быть определено то или иное понятие близости объектов, позволяющее говорить о пределе последовательности самих объектов или их сумм.

c. Расстояние. Близость объектов определяется наличием того или иного понятия окрестности объекта (окрестности точки пространства). Это называется заданием топологии пространства. В топологических пространствах можно говорить о пределе и непрерывности.

Если в пространстве тем или иным способом введено расстояние между объектами — точками пространства, то автоматически определена и окрестность точки, и даже точнее, любая ее δ-окрестность.

Расстояние между точками одного и того же пространства можно измерять по-разному. Например, расстояние между двумя непрерывными функциями на отрезке можно измерять максимумом модуля разности функций на этом отрезке (равномерная метрика), а можно измерять величиной интеграла от модуля разности функций на этом отрезке (интегральная метрика). Выбор метрики диктуется содержанием рассматриваемой задачи.

Дополнение 2

Замена переменных в кратном интеграле (вывод и первое обсуждение формулы замены переменных[1])

§ 1. Постановка вопроса и эвристический вывод формулы замены переменных

Рассматривая интеграл в одномерном случае, мы получили в свое время важную формулу замены переменной в таком интеграле. Теперь наша задача состоит в том, чтобы найти формулу замены переменных в общем случае. Уточним вопрос.

Пусть D_x — множество в $\mathbb{R}^n$, f — интегрируемая на D_x функция, а $\varphi : D_t \to \to D_x$ — отображение $t \mapsto \varphi(t)$ множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на D_x. Спрашивается, по какому закону, зная f и φ, находить функцию ψ в D_t так, чтобы иметь равенство

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t} \psi(t)\,dt,$$

позволяющее сводить вычисление интеграла по D_x к вычислению интеграла по D_t?

Предположим сначала, что D_t есть промежуток $I \subset \mathbb{R}^n$, а $\varphi : I \to D_x$ — диффеоморфное отображение этого промежутка на D_x. Любому разбиению P промежутка I на промежутки $I_1, I_2, \ldots, I_k$ соответствует разложение D_x на множества $\varphi(I_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Если все эти множества измеримы и пересекаются попарно лишь по множествам меры нуль, то в силу аддитивности интеграла

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\varphi(I_i)} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если f непрерывна на D_x, то по теореме о среднем

$$\int\limits_{\varphi(I_i)} f(x)\,dx = f(\xi_i)\,\mu(\varphi(I_i)),$$

где $\xi_i \in \varphi(I_i)$. Поскольку $f(\xi_i) = f(\varphi(\tau_i))$, где $\tau_i = \varphi^{-1}(\xi_i)$, то нам остается связать $\mu(\varphi(I_i))$ с $\mu(I_i) = |I_i|$.

---

[1]Фрагмент лекций с альтернативным и независимым доказательством формулы замены переменных.

Если бы φ было линейным преобразованием, то $\varphi(I_i)$ был бы параллелепипедом, объем которого, как известно из аналитической геометрии и алгебры, был бы равен $|\det\varphi'|\,\mu(I_i)$. Но диффеоморфизм локально является почти линейным отображением, поэтому если размеры промежутков I_i достаточно малы, то с малой относительной погрешностью можно считать, что $\mu(\varphi(I_i))\approx|\det\varphi'(\tau_i)|\,\mu(I_i)$ (можно показать, что при некотором выборе точки $\tau_i\in I_i$ будет иметь место даже точное равенство). Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\varphi(I_i)} f(x)\,dx\approx\sum_{i=1}^{k} f(\varphi(\tau_i))\,|\det\varphi'(\tau_i)|\cdot|I_i|. \tag{2}$$

Но справа в этом приближенном равенстве стоит интегральная сумма от функции $f(\varphi(t))\,|\det\varphi'(t)|$ по промежутку I, отвечающая разбиению P этого промежутка с отмеченными точками τ. В пределе при $\lambda(P)\to 0$ из (1) и (2) получаем

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx=\int\limits_{D_t} f(\varphi(t))\,|\det\varphi'(t)|\,dt. \tag{3}$$

Это и есть искомая формула вместе с ее объяснением. Намеченный путь к ней можно пройти со всеми обоснованиями. Собственно, нам надо только показать законность последнего предельного перехода, предполагавшего, что стоящий в (3) справа интеграл существует, а также уточнить использованную связь $\mu(\varphi(I_i))\approx|\det\varphi'(\tau_i)|\cdot|I_i|$.

Проделаем это.

§ 2. Некоторые свойства гладких отображений и диффеоморфизмов

a. Напомним, что любое гладкое отображение φ замкнутого ограниченного промежутка $I\subset\mathbb{R}^n$ (как и любого выпуклого компакта) является липшицевым. Это следует из теоремы о конечном приращении и ограниченности φ' (в силу непрерывности) на компакте:

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant\sup_{\tau\in[t_1,t_2]}\|\varphi'(\tau)\|\cdot|t_2-t_1|\leqslant L|t_2-t_1|. \tag{4}$$

b. Это, в частности, означает, что при отображении φ расстояние между точками не может увеличиться более, чем в L раз.

Например, если какое-то множество $E\subset I$ имело диаметр d, то диаметр его образа $\varphi(E)$ не больше чем Ld, и множество $\varphi(E)$ можно покрыть (n-мерным) кубиком с ребром величины Ld и объемом $(Ld)^n$.

Так, если E — n-мерный кубик с ребром δ и объемом δ^n, то его образ покрывается стандартным координатным кубиком объема $(L\sqrt{n}\delta)^n$.

c. Из этого следует, что при гладком отображении образ множества меры нуль также является множеством меры нуль (в смысле n-мерной меры). [Ведь в определении множества меры нуль, как легко заметить, можно ограничиться покрытиями из кубиков вместо покрытий общими n-мерными промежутками — «прямоугольными параллелепипедами».]

Если гладкое отображение $\varphi\colon D_t \to D_x$ к тому же имеет и гладкое обратное отображение $\varphi^{-1}\colon D_x \to D_t$, т. е. если φ — диффеоморфизм, то, очевидно, и прообраз множества меры нуль тоже имеет меру нуль.

d. Поскольку при диффеоморфизме якобиан $\det\varphi'$ отображения всюду отличен от нуля, а само отображение взаимно однозначно, то (в силу теоремы об обратной функции) внутренние точки любого множества при таком отображении переходят во внутренние точки образа этого множества, а граничные точки — в граничные точки образа.

Вспоминая определение допустимого (измеримого по Жордану) множества как ограниченного множества, граница которого имеет меру нуль, можем заключить, что при диффеоморфизме образ измеримого множества также является измеримым множеством.

(Это верно и для любых гладких отображений.) Но для диффеоморфизмов еще и прообраз измеримого множества, очевидно, является измеримым множеством.

e. Последнее, в частности, означает, что если $\varphi\colon D_t \to D_x$ — диффеоморфизм, то из существования интеграла, стоящего в левой части доказываемой формулы (3), вытекает (на основании критерия Лебега) и существование интеграла, стоящего справа.

§ 3. Связь мер образа и прообраза при диффеоморфизме

Покажем теперь, что если $\varphi\colon I \to \varphi(I)$ — диффеоморфизм, то

$$\mu(\varphi(I)) = \int\limits_I \det\varphi'(t)\,dt, \tag{5}$$

в предположении положительности подынтегральной функции $\det\varphi'$.

Отсюда по теореме о среднем, в частности, получится, что найдется такая точка $\tau \in I$, что

$$\mu(\varphi(I)) = \det\varphi'(\tau)|I|. \tag{6}$$

Формула (5) фактически есть частный случай формулы (3), когда $f \equiv 1$.

Для линейных отображений она известна, хотя, возможно, без обсуждения деталей, связанных с тем, что она справедлива по отношению к линейным отображениям не только простейших параллелепипедов, но и любых измеримых множеств. Поясним это. Известно, что линейное отображение

раскладывается в композицию простейших, которые, с точностью до возможной перестановки пар координат, сводятся к изменению только одной из них: умножению на число или добавлению к одной из координат другой. Теорема Фубини позволяет сказать, что в первом случае объем любого измеримого множества умножится на тот же множитель, что и умножаемая координата (точнее, на его модуль, если рассматриваются неориентированные объемы). Во втором случае фигура хотя и меняется, но ее объем остается прежним, поскольку соответствующие одномерные сечения лишь сдвигаются, сохраняя линейную меру. Наконец, перестановка пары координат меняет ориентацию пространственного репера (определитель такого линейного преобразования равен -1), но не меняет значения неориентированного объема фигур. (На языке теоремы Фубини это просто смена порядка двух интегрирований.)

Остается вспомнить, что детерминант композиции линейных отображений является произведением детерминантов сомножителей.

Итак, считая, что для линейных и аффинных отображений формула (5) уже установлена, докажем ее для произвольного диффеоморфизма с положительным якобианом.

a. Воспользуемся еще раз теоремой о конечном приращении, но теперь чтобы оценить возможное отклонение отображения $\varphi\colon I\to\varphi(I)$ от аффинного отображения $t\mapsto A(t)=\varphi(a)+\varphi'(a)(t-a)$, где t — переменная, а a — фиксированная точка промежутка I. Отображение $A\colon I\to A(I)$ есть просто линейная часть тейлоровского разложения отображения φ в точке $a\in I$.

Применяя к функции $t\mapsto\varphi(t)-\varphi'(a)(t-a)$ теорему о конечном приращении, находим

$$|\varphi(t)-\varphi(a)-\varphi'(a)(t-a)|\leqslant\sup_{\tau\in[a,t]}\|\varphi'(\tau)-\varphi'(a)\|\cdot|t-a|. \tag{7}$$

Учитывая равномерную непрерывность непрерывной функции φ' на компакте I, из (7) заключаем, что существует неотрицательная функция $\delta\mapsto\varepsilon(\delta)$, стремящаяся к нулю при $\delta\to+0$, такая что для любых точек $t,a\in I\subset\mathbb{R}^n$

$$|t-a|\leqslant\sqrt{n}\delta\ \Rightarrow\ |\varphi(t)-A(t)|=|\varphi(t)-\varphi(a)-\varphi'(a)(t-a)|\leqslant\varepsilon(\delta)\delta. \tag{8}$$

b. Теперь перейдем непосредственно к доказательству формулы (5).

Позволим себе сначала маленькое техническое облегчение: будем считать, что длины ребер параллелепипеда I соизмеримы и, следовательно, его можно разбить на одинаковые кубики $\{I_i\}$ сколь угодно малого размера ребер $\delta_i=\delta$ и объема $\delta_i^n=\delta^n$, т. е. $I=\bigcup_i I_i$ и $|I|=\sum_i|I_i|=\sum_i\delta_i^n$.

В каждом кубике I_i фиксируем некоторую точку a_i, построим соответствующее аффинное отображение $A_i(t)=\varphi(a_i)-\varphi'(a_i)(t-a_i)$, рассмотрим

образ $A_i(\partial I_i)$ границы ∂I_i кубика I_i при отображении A_i и возьмем $\varepsilon(\delta)\delta$-окрестность этого образа, которую обозначим через Δ_i.

В силу (8) образ $\varphi(\partial I_i)$ границы ∂I_i кубика I_i при диффеоморфизме φ лежит в Δ_i. Значит, имеют место следующие включения и неравенства:

$$A_i(I_i) \setminus \Delta_i \subset \varphi(I_i) \subset A_i(I_i) \cup \Delta_i$$
$$|A_i(I_i)| - |\Delta_i| \leqslant |\varphi(I_i)| \leqslant |A_i(I_i)| + |\Delta_i|.$$

Суммируя их, находим, что

$$\sum_i |A_i(I_i)| - \sum_i |\Delta_i| \leqslant |\varphi(I)| = \sum_i |\varphi(I_i)| \leqslant \sum_i |A_i(I_i)| + \sum_i |\Delta_i|. \tag{9}$$

Но при $\delta \to +0$

$$\sum_i |A_i(I_i)| = \sum_i \det \varphi'(a_i)|I_i| \to \int_I \det \varphi'(t)\, dt,$$

поэтому для доказательства формулы (5) в нашем случае осталось проверить, что $\sum_i |\Delta_i| \to 0$ при $\delta \to +0$.

c. Оценим сверху объем $|\Delta_i|$, опираясь на оценки (4) и (8). Согласно (4) ребра параллелепипеда $A_i(I_i)$ имеют длину не большую, чем $L\delta$, где $\delta = \delta_i$ — длина ребра кубика I_i. Поэтому $(n-1)$-мерная «площадь» каждой из $2n$ граней параллелепипеда $A_i(I_i)$ не больше чем $(L\delta)^{n-1}$. Мы берем $\varepsilon(\delta)\delta$-окрестность такой грани. Ее объем оценивается величиной $(2+2)\varepsilon(\delta)\delta(L\delta)^{n-1}$, где вторая двойка написана для поглощения вклада скругленных частей этой окрестности, возникающих около края самой грани. Таким образом, $|\Delta_i| < 2n \cdot 4L^{n-1}\varepsilon(\delta)\delta^n$, поэтому

$$\sum_i |\Delta_i| < 8nL^{n-1} \sum_i \varepsilon(\delta)\delta_i^n = 8nL^{n-1}\varepsilon(\delta)|I|,$$

и мы видим, что $\sum_i |\Delta_i| \to 0$ при $\delta \to +0$.

d. Проведенная оценка величины $|\Delta_i|$ заодно показывает, что сколь угодно малое уменьшение ребер исходного промежутка I, которое, возможно, следовало бы сделать, чтобы получить их соизмеримость, в пределе не влияет на результат.

§ 4. Некоторые примеры, замечания и обобщения

Итак, формула (3) для случая $D_t = I$ и непрерывной функции f доказана. Рассмотрим и обсудим некоторые примеры. Эти обсуждения заодно покажут, что на самом деле мы уже доказали формулу (3) не только для $D_t = I$ и не только для непрерывной функции f.

a. Пренебрежимые множества. Используемые на практике замены переменных или формулы преобразования координат иногда имеют те или иные особенности (например, где-то может быть нарушение взаимной однозначности, обращение в нуль якобиана или отсутствие дифференцируемости). Как правило, эти особенности бывают на множествах меры нуль и потому сравнительно легко преодолеваются.

Например, если нам нужно перейти от интеграла по кругу к интегралу по прямоугольнику, мы часто делаем замену переменных

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{10}$$

Это хорошо известные формулы перехода от полярных координат к декартовым на плоскости. При этом отображении прямоугольник $I = \{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$ преобразуется в круг $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$. Это отображение гладкое, но оно не является диффеоморфизмом: вся сторона прямоугольника I, на которой $r=0$, переходит при этом отображении в одну точку $(0,0)$; образы точек $(r,0)$ и $(r,2\pi)$ совпадают. Однако если рассмотреть, например, множества $I\setminus\partial I$ и $K\setminus E$, где E — объединение границы ∂K круга K и радиуса, идущего в точку $(0,R)$, то ограничение отображения (10) на область $I\setminus\partial I$ окажется ее диффеоморфизмом на область $K\setminus E$. Значит, если вместо прямоугольника I взять лежащий строго внутри него чуть меньший прямоугольник I_δ, то к нему и его образу K_δ применима формула (6). А тогда, исчерпывая прямоугольник I такими прямоугольниками I_δ и замечая, что при этом их образы K_δ исчерпывают круг K, что $|I_\delta|\to|I|$ и $|K_\delta|\to|K|$, в пределе получаем формулу (6) применительно к самой исходной паре K, I.

Сказанное, естественно, относится и к общей полярной (сферической) системе координат в $\mathbb{R}^n$.

Разовьем сделанное наблюдение.

b. Исчерпания и предельные переходы. *Исчерпанием множества* $E\subset\mathbb{R}^m$ будем называть такую последовательность измеримых множеств $\{E_n\}$, что $E_n\subset E_{n+1}\subset E$ при любом $n\in\mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Лемма. *Если $\{E_n\}$ — исчерпание измеримого множества E, то*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n) = \mu(E)$;

b) *для любой функции $f\in\mathcal{R}(E)$ также $f|_{E_n}\in\mathcal{R}(E_n)$ и*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

◄ a) Поскольку $E_n\subset E_{n+1}\subset E$, то $\mu(E_n)\leqslant\mu(E_{n+1})\leqslant\mu(E)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)\leqslant\mu(E)$. Для доказательства равенства a) покажем, что выполняется также неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)\geqslant\mu(E)$.

Граница ∂E множества E — компакт меры нуль, поэтому ее можно покрыть конечным числом открытых промежутков, сумма объемов которых меньше наперед заданной величины $\varepsilon > 0$. Пусть Δ — объединение всех этих открытых промежутков. Тогда множество $O = E \cup \Delta$ открыто в $\mathbb{R}^m$, причем по построению O содержит замыкание $\overline{E}$ множества E и $\mu(O) \leqslant \mu(E) + \mu(\Delta) < < \mu(E) + \varepsilon$.

Для каждого множества E_n исчерпания $\{E_n\}$ повторим описанное построение со значением $\varepsilon_n = \varepsilon/2^n$. Получим последовательность открытых множеств $O_n = E_n \cup \Delta_n$ таких, что $E_n \subset O_n$, $\mu(O_n) \leqslant \mu(E_n) + \mu(\Delta_n) < \mu(E_n) + \varepsilon_n$ и

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset E.$$

Система открытых множеств $\Delta, O_1, O_2, \ldots$ образует открытое покрытие компакта $\overline{E}$.

Пусть $\Delta, O_1, O_2, \ldots, O_k$ — извлеченное из него конечное покрытие компакта $\overline{E}$. Поскольку $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k$, то множества $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_k, E_k$ тоже образуют покрытие $\overline{E}$ и, значит,

$$\mu(E) \leqslant \mu(\overline{E}) \leqslant \mu(E_k) + \mu(\Delta) + \mu(\Delta_1) + \ldots + \mu(\Delta_k) < \mu(E_k) + 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\mu(E) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

b) То, что $f|_{E_n} \in \mathcal{R}(E_n)$, нам хорошо известно и следует из критерия Лебега существования интеграла по измеримому множеству. По условию $f \in \in \mathcal{R}(E)$, значит, существует постоянная M такая, что $|f(x)| \leqslant M$ на E. Из аддитивности интеграла и общей оценки интеграла получаем

$$\left| \int\limits_E f(x)\,dx - \int\limits_{E_n} f(x)\,dx \right| = \left| \int\limits_{E\setminus E_n} f(x)\,dx \right| \leqslant M\mu(E \setminus E_n).$$

Отсюда с учетом доказанного в a) заключаем, что утверждение b) действительно справедливо. ►

Аддитивность интеграла и возможность исчерпания области интегрирования такими областями, где формула замены переменных заведомо действует, позволяет применять ее и к исходным областям. Вообще, идея исчерпания лежит в основе многих конструкций анализа, в частности в основе определения несобственного интеграла.

Мы привели прямое доказательство формулы замены переменной. Свободно владеющие дифференциальным исчислением функций многих переменных могли бы предпочесть иной подход, например, тот, который изложен в учебнике. Там же (в основном тексте и в задачах) стоит взглянуть на формулировки важных математических фактов, которые тесно связаны с разбираемыми вопросами.

Дополнение 3

Многомерная геометрия и функции очень многих переменных (концентрация мер и законы больших чисел)

§ 0. Наблюдение

Почти весь объем многомерного тела находится в малой окрестности границы тела.

a. Проверьте это на примерах куба и шара. Покажите, что если с тысячемерного арбуза радиуса 1 метр снять корку толщины 1 см, то останется меньше тысячной доли исходного арбуза.

b. Если сферу $S^{n-1}(r) \subset \mathbb{R}^n$ ортогонально спроектировать на гиперплоскость, проходящую через центр сферы, то получится шар (дважды покрытый) той же размерности $n-1$ и того же радиуса r. Учитывая полученное выше, заметьте (пока на качественном уровне), что почти вся площадь сферы $S^{n-1}(r)$ при $n \gg 1$ сосредоточена в малой окрестности экватора — пересечения сферы и указанной гиперплоскости.

§ 1. Сфера и случайные векторы

a. Сфера $S^{n-1}(r)$ радиуса r с центром в начале координат n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ проектируется ортогонально на координатную ось. Получается отрезок $[-r, r]$. Фиксируем отрезок $[a, b] \subset [-r, r]$. Пусть $S[a, b]$ — площадь той части $S^{n-1}_{[a,b]}(r)$ сферы $S^{n-1}(r)$, которая проектируется в отрезок $[a, b]$. Найдите отношение $\dfrac{S[a,b]}{S[-r,r]}$, т. е. вероятность $\Pr_n[a, b]$ того, что случайно выбранная точка сферы окажется в слое $S^{n-1}_{[a,b]}(r)$ над отрезком $[a, b]$, считая, что точки распределены по сфере равномерно.

Ответ: $\quad \Pr_n[a,b] = \int\limits_a^b \left(1-\left(\frac{x}{r}\right)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dx \Bigg/ \int\limits_{-r}^r \left(1-\left(\frac{x}{r}\right)^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dx.$

b. Пусть $\delta \in (0, 1)$ и $[a, b] = [\delta r, r]$. Покажите, что при $n \to \infty$

$$\Pr_n[\delta r, r] \sim \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi n}}\, e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}.$$

Указание: можно воспользоваться методом Лапласа получения асимптотики интеграла по большому параметру.

c. Из полученного в пункте b результата следует, что подавляющая часть площади многомерной сферы сосредоточена в малой окрестности экваториальной плоскости — в слое $S^{n-1}_{[-\delta r,\delta r]}(r)$ над отрезком $[-\delta r, \delta r]$.

Выведите отсюда, что если в $\mathbb{R}^n$ взять случайно и независимо пару единичных векторов, то при $n \gg 1$ с большой вероятностью они окажутся почти ортогональными, т. е. их скалярное произведение будет близко к нулю. Оцените вероятность того, что это скалярное произведение окажется больше $\varepsilon > 0$, и подсчитайте его дисперсию при $n \gg 1$.

d. Развивая результат, полученный в пункте a, покажите, что если $r = \sigma\sqrt{n}$, то при $n \to \infty$

$$\Pr_n[a, b] \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

e. Учитывая полученный в пункте d результат, выведите теперь закон Гаусса распределения ошибок измерений и законы Максвелла распределения молекул газа по скоростям и энергиям (считая в первом случае, что измерения независимы и их среднее квадратичное стабилизируется с ростом количества наблюдений, а во втором случае — что газ однороден и совокупная энергия молекул в порции газа пропорциональна количеству молекул в этой порции).

§ 2. Многомерная сфера, закон больших чисел и центральная предельная теорема

Решая эту задачу, «откройте» следующий важный во многих отношениях (например, для статистической физики) факт.

Пусть S^m — единичная сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ очень большой размерности $m+1$. Пусть на сфере задана достаточно регулярная (например, из некоторого фиксированного класса Липшица) вещественнозначная функция. Берем случайно и независимо друг от друга пару точек на сфере и вычисляем в них значения нашей функции. С большой вероятностью эти значения будут почти одинаковы и близки к некоторому числу M_f.

(Это, пока еще гипотетическое, число M_f называют *медианным значением функции* или *медианой функции*. Его также называют *средним значением функции в смысле Леви*. Мотивировка терминов вскоре прояснится вместе с точным определением M_f.)

Введем некоторые обозначения и соглашения. Договоримся расстояние между точками сферы $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ понимать в смысле ее геодезической метрики ϱ. Через A_δ обозначим δ-окрестность в S^m множества $A \subset S^m$. Поднормируем стандартную меру сферы, заменив ее равномерно распределенной вероятностной мерой μ, т. е. $\mu(S^m) = 1$.

Справедливо следующее утверждение, доказанное Полем Леви и именуемое обычно ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИМ НЕРАВЕНСТВОМ Леви.

Для любых $0<a<1$ *и* $\delta>0$ *существует* $\min\{\mu(A_\delta) \mid A\subset S^m,\ \mu A=a\}$ *и он достигается на сферической шапочке* A^0 *меры* a.

Здесь $A^0=B(r)$, где $B(r)=B(x_0,r)=\{x\in S^m \mid \varrho(x_0,x)<r\}$ и $\mu(B(r))=a$.

a. При $a=1/2$, т. е. когда A^0 — полусфера, получите следствие:
если подмножество $A\subset S^{n+1}$ *такое, что* $\mu(A)\geqslant 1/2$, *то* $\mu(A_\delta)\geqslant 1-\sqrt{\pi/8}\,e^{-\delta^2 n/2}$. (При $n\to\infty$ здесь $\sqrt{\pi/8}$ можно заменить на $1/2$.)

b. Обозначим через M_f такое число, для которого

$$\mu\{x\in S^m \mid f(x)\leqslant M_f\}\geqslant 1/2 \quad \text{и} \quad \mu\{x\in S^m \mid f(x)\geqslant M_f\}\geqslant 1/2.$$

Его-то и называют *медианой* или *средним в смысле Леви значением функции* $f: S^m\to\mathbb{R}$. (Если M_f-уровень функции f на сфере имеет нулевую меру, то мера каждого из указанных двух множеств будет в точности равна половине μ-площади сферы S^m.)

Получите следующую лемму Леви:
если $f\in C(S^{n+1})$ *и* $A=\{x\in S^{n+1} \mid f(x)=M_f\}$, *то* $\mu(A_\delta)\geqslant 1-\sqrt{\pi/2}\,e^{-\delta^2 n/2}$.

c. Пусть теперь $\omega_f(\delta)=\sup\{|f(x)-f(y)| \mid \varrho(x,y)\leqslant\delta\}$ — *модуль непрерывности функции* f.

Значения функции f на множестве A_δ близки к M_f. Точнее, если $\omega_f(\delta)\leqslant\varepsilon$, то $|f(x)-M_f|\leqslant\varepsilon$ на A_δ. Таким образом, лемма Леви показывает, что «хорошие» функции на самом-то деле почти постоянны на почти всей области определения S^m, когда ее размерность m очень велика.

Считая, что $f\in\mathrm{Lip}(S^{n-1},\mathbb{R})$ и L — константа Липшица для функции f, оцените $\Pr\{|f(x)-M_f|>\varepsilon\}$ и дисперсию величины $|f(x)-M_f|$ при $n\gg 1$.

d. Выполните предыдущие оценки в случае, когда функция f определена не на единичной сфере, а на сфере $S^{n-1}(r)$ радиуса r.

e. Если f — гладкая функция, то в качестве константы Липшица L для нее, очевидно, может служить максимум модуля ее градиента. Например, для линейной функции $S_n=\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)$ имеем $L=L_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Пусть имеется последовательность липшицевых функций $f_n\in\mathrm{Lip}(S^{n-1}(r_n),\mathbb{R})$, для которых $L_n=O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$ при том, что $r_n=\sqrt{n}$.

Оцените $\Pr\{|f_n(x)-M_{f_n}|>\varepsilon\}$ и дисперсию величины $|f_n(x)-M_{f_n}|$ при $n\gg 1$. В частности, когда $f_n=S_n$, получите стандартный закон больших чисел.

f. Пусть $f_n=x_1+\ldots+x_n$. Уровни этой функции — гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, ортогональные вектору $(1,\ldots,1)$. То же можно сказать и о линейной функции

$\Sigma_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_1 + \ldots + x_n)$ с той разницей, что при движении из начала координат в направлении $(1, \ldots, 1)$ ее значения совпадают с расстоянием до начала координат. По этой причине на сфере $S^{n-1}(r_n)$ они распределены так же, как любая из координат.

Используя это наблюдение и результат задачи 1.d, полагая $r_n = \sigma\sqrt{n}$, получите ваш вариант центральной предельной теоремы.

§ 3. Многомерный промежуток (многомерный «куб»)

a. Пусть I — стандартный единичный отрезок $[0, 1]$ числовой прямой $\mathbb{R}$, а I^n — стандартный n-мерный промежуток в $\mathbb{R}^n$, обычно именуемый n-мерным единичным кубом. Это единица объема в $\mathbb{R}^n$, но ее размеры $\sqrt{n}$ при $n \gg 1$ весьма внушительны. Значит, даже липшицева функция с константой Липшица L может на I^n иметь разброс значений в пределах $L\sqrt{n}$.

Тем не менее здесь, как и в рассмотренном выше случае сферы, имеет место явление асимптотической стабилизации (концентрации) значений таких функций при $n \to \infty$.

Попробуйте теперь сами найти нужные формулировки и провести в соответствии с ними исследование вопроса до посильного вам уровня. (Затем просмотрите еще § 5 этого добавления.)

b. Если бы мы имели n независимых случайных величин x_i, принимающих значения на единичном отрезке $[0, 1]$ и имеющих распределения вероятностей $p_i(x)$, которые равномерно по i отделены от нуля (в частности, все $p_i(x)$ могут быть одинаковы), то с ростом n подавляющая часть случайных точек $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ окажется в непосредственной близости границы куба.

Объясните это и, учитывая результаты пункта a, получите ваш обобщенный закон больших чисел.

c. Покажите на примере, что если плотности вероятностей случайных величин пункта b сосредоточить в вершинах куба в виде точечных масс, то асимптотической стабилизации значений липшицевых функций при $n \to \infty$ может не быть.

d. Выше мы отметили, что хотя объем куба I^n в $\mathbb{R}^n$ равен единице, его диаметр $\sqrt{n}$ при $n \gg 1$ растет, что создает трудности. Однако справедливо следующее полезное компенсирующее наблюдение: если каждое из двух подмножеств A и B куба I^n имеет меру, большую сколь угодно малого фиксированного положительного числа ε, то расстояние между A и B ограничено сверху константой, зависящей только от ε (и не зависящей от n).

Проверьте это и, если нужно, воспользуйтесь этим.

e. Подсчитайте объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$ и убедитесь, что радиус шара единичного объема при $n \to +\infty$ растет как $\sqrt{n/(2\pi e)}$. Вернитесь к параграфам 1, 2 и убедитесь еще раз, что нормальное распределение и примыкающие к нему законы в геометрическом аспекте тесно связаны с простым многомерным объектом — шаром единичного объема.

§ 4. Гауссовские меры и их концентрация

a. В связи с обсуждением наблюдаемой стабилизации (постоянства) значений регулярной функции на многомерной сфере мы сказали в § 2 этого дополнения об изопериметрическом неравенстве на сфере. Такой же вопрос о минимизации меры δ-раздутия множества важен и по тем же причинам интересен также по отношению к другим пространствам, которые служат естественными областями определения нужных функций.

Например, для гауссовских вероятностных мер, определяемых нормальным распределением вероятностей в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, ответ на этот вопрос тоже известен (получен Борелем). В этом случае экстремальной областью (с исходно фиксированным значением гауссовской меры и δ-раздутием, понимаемым в евклидовой метрике) оказывается полупространство.

В частности, если взять полупространство гауссовской меры $1/2$ и непосредственно вычислить значение гауссовской меры дополнения к его евклидову δ-раздутию, то, учитывая упомянутое изопериметрическое неравенство Бореля, можно заключить, что для любого множества A, имеющего в пространстве $\mathbb{R}^n$ гауссовскую меру $1/2$, меру его δ-раздутия можно оценить снизу в виде $\mu(A_\delta) \geqslant 1 - I_\delta$, где I_δ — интеграл от плотности $(2\pi)^{-n/2}\exp\Bigl(-\frac{|x|^2}{2}\Bigr)$ гауссовской меры по полупространству, удаленному от начала координат на евклидово расстояние δ.

Оценка интеграла I_δ сверху позволяет, например, утверждать, что

$$\mu(A_\delta) \geqslant 1 - 2\exp\Bigl(-\frac{\delta^2}{2}\Bigr).$$

Проверьте это!

b. Это грубая оценка, но и она показывает быстрый рост $\mu(A_\delta)$ при увеличении δ, каково бы ни было исходное множество A меры $1/2$.

Очень интересно (а учитывая возможные переходы в бесконечномерные пространства, даже весьма полезно) заметить, что последняя оценка не зависит от размерности пространства. Может показаться, что отсутствие здесь размерности пространства — большая потеря и слабость оценки в контексте обсуждаемой концентрации меры и стабилизации значений функций многих переменных. На самом деле, эта оценка фактически содержит в себе

даже результат о концентрации меры на единичной сфере большой размерности, обсуждавшийся выше.

Достаточно проверить (проверьте!), что основная часть гауссовской вероятностной меры евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ при $n \gg 1$ сосредоточена в единичной окрестности евклидовой сферы радиуса $\sqrt{n}$. Значит, в пересечении этой окрестности с полупространством, заметно удаленным от начала координат, доля этой меры экспоненциально мала. Таким образом, основная часть меры оказывается в той части окрестности сферы радиуса $\sqrt{n}$, которая попадает в слой между двумя близкими параллельными гиперплоскостями, симметричными относительно начала координат. Если, сделав это наблюдение, теперь гомотетией перейти от сферы радиуса $\sqrt{n}$ к единичной сфере, то получится принцип концентрации меры на единичной сфере, который мы обсуждали выше (проведите нужные вычисления!). В нем размерность пространства присутствует явно. Она присутствовала и в гауссовском случае, но была спрятана в размере $\sqrt{n}$ сферы, в окрестности которой сосредоточена основная доля меры всего пространства.

§ 5. Еще немного о многомерном кубе

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим n-мерный единичный промежуток («куб»)

$$I^n := \Big\{x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \ \Big| \ |x^i| \leqslant \frac{1}{2},\ i = 1, 2, \ldots, n\Big\}.$$

Его объем равен 1, хотя диаметр равен $\sqrt{n}$. (Напомним, кстати, что евклидов шар единичного объема в $\mathbb{R}^n$ имеет радиус порядка $\sqrt{n}$, о чем уже было сказано выше.) Будем считать стандартную меру вероятностной равномерно распределенной мерой на кубе I^n.

Пусть $a = (a^1, \ldots, a^n)$ — единичный вектор, а $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — произвольная точка куба I^n.

Справедливо следующее неравенство (оценка вероятности типа неравенства Бернштейна): $\Pr_n\Big\{\Big|\sum\limits_{i=1}^{n} a^i x^i\Big| \geqslant t\Big\} \leqslant 2\exp(-6t^2)$.

Интерпретируя сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} a^i x^i$ как скалярное произведение $\langle a, x\rangle$, понимаем, что оно может быть большим (порядка $\sqrt{n}$), если вектор a направить не вдоль какого-то одного ребра куба, а вдоль главной диагонали, смешивая все координатные направления в равной степени. Взяв $a = \Big(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$, на основании указанной оценки заключаем, что объем n-мерного куба I^n с ростом n концентрируется в относительно малой окрестности гиперплоскости, проходящей через начало координат ортогонально вектору $\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.

В частности, если рассматривать бильярд в таком кубе как динамическую систему (газ) из невзаимодействующих частиц, то при $n \gg 1$ подавляющее большинство траекторий частиц будет идти в направлении, почти перпендикулярном фиксированному вектору $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, находясь большую долю времени в окрестности указанной выше гиперплоскости.

§ 6. Кодирование сигнала в канале с шумом

Укажем в заключение еще одну область, где функции очень большого числа переменных тоже появляются естественным образом и где принцип концентрации меры проявляется и используется тоже по существу.

Мы уже привыкли к цифровому (дискретному) кодированию и передаче сигнала (музыки, изображения, сообщения — информации) по каналу связи. В таком виде сообщение можно себе мыслить как вектор $x = (x^1, \ldots, x^n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ очень большой размерности. На передачу такого сообщения затрачивается энергия E, пропорциональная $\|x\|^2 = |x^1|^2 + \ldots + |x^n|^2$ (подобно рассмотренной выше суммарной кинетической энергии молекул газа). Если T — продолжительность передачи сообщения x, то $P = E/T$ — средняя мощность, затрачиваемая на передачу одного символа (одной координаты вектора x). Если Δ — среднее время, затрачиваемое на передачу одной координаты вектора x, то $T = n\Delta$ и $E = nP\Delta$.

Передающее и принимающее устройства согласованы так, что передатчик преобразует (кодирует) подлежащее передаче исходное сообщение в форму вектора x, отправляет его по каналу связи, а приемник, зная код, расшифровывает x, преобразуя его в форму исходного сообщения.

Если нам надо передать M сообщений $A_1, \ldots, A_M$ длины n, то достаточно в шаре радиуса $E = nP\Delta$ фиксировать M точек $a_1, \ldots, a_M$, согласовав этот выбор с приемным концом канала связи. Если в канале связи нет помех, то, получив вектор a из согласованного набора, приемник безошибочно декодирует его в соответствующее сообщение A.

Если же в канале связи есть помехи (что обычно и случается), то помеха, случайный вектор $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, сместит передаваемый вектор a и на приемник поступит вектор $a + \xi$, который надо будет правильно расшифровать.

Если точки $a_1, \ldots, a_M$ были выбраны так, что шары радиуса $\|\xi\|$ с этими центрами не пересекаются, то однозначная расшифровка еще возможна. Но если соблюдать это требование, то уже нельзя брать сколько угодно точек $a_1, \ldots, a_M$, и возникает проблема плотной упаковки шаров. Это сложная задача, решения которой в рассматриваемой ситуации, как показал Шеннон, можно избежать, учитывая, что размерность n пространства $\mathbb{R}^n$ здесь огромна.

Позволим себе иногда ошибаться при расшифровке принятого сообщения. Потребуем, однако, чтобы вероятность ошибки была сколь угодно мала

(меньше любого фиксированного положительного числа). Шеннон показал, что даже при наличии в канале связи случайных помех (белый шум) любой ограниченной мощности, выбирая достаточно длинный код (т. е. при больших значениях n), можно добиться скорости передачи сколь угодно близкой к скорости передачи информации по каналу без шума, при этом со сколь угодно малой вероятностью ошибки.

Геометрическая идея теоремы Шеннона непосредственно связана с обсуждавшимися выше особенностями распределения меры (объема) областей в пространстве большой размерности. Поясним это.

Предположим, что два одинаковых шара в пространстве $\mathbb{R}^n$ пересекаются. Если принятый сигнал окажется в этом пересечении, то возможна ошибка в расшифровке переданного сообщения. Но если вероятность попадания в какую-то область считать пропорциональной относительному объему области, то естественно сравнить объем пересечения шаров с объемом шара. Проведем нужную оценку. Если центры двух шаров радиуса 1 находятся на взаимном расстоянии ε $(0<\varepsilon<2)$, то пересечение этих шаров содержится в шаре радиуса $\sqrt{1-(\varepsilon/2)^2}$ с центром в середине отрезка, соединяющего центры исходных шаров. Значит, отношение объема пересечения двух исходных шаров к собственному объему каждого из них не превосходит $(1-(\varepsilon/2)^2)^{n/2}$. Теперь ясно, что при любом фиксированном значении ε эта величина может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно большого значения n.

Дополнение 4

Функции многих переменных и дифференциальные формы с термодинамическими интерпретациями[1]

§ 1. Дифференциальная форма и термодинамическая система

1. Дифференциальная 1-форма (напоминания). Выражения $a_1\,dx^1 + \ldots + a_n\,dx^n$, как известно, называют *дифференциальной формой*, точнее, *дифференциальной 1-формой* (в отличие от общих k-форм $a_{i_1\ldots i_k}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$). Мы позволим себе, следуя Эйнштейну, сокращенную запись $a_i\,dx^i$ дифференциальной формы $a_1\,dx^1+\ldots+a_n\,dx^n$, подразумевая, как обычно, суммирование по индексу, повторяющемуся сверху и снизу.

Коэффициенты a_i формы будем считать функциями $a_i(x)$ точки $x = (x^1, \ldots, x^n)$ в той области пространства $\mathbb{R}^n$, в которой форма рассматривается. Мы будем предполагать, что $a_i(x)$ — регулярные функции, имеющие столько производных, сколько потребуется для проведения нужной выкладки, содержащей дифференцирования.

Примером дифференциальной 1-формы является дифференциал функции $dU(x) = \frac{\partial U}{\partial x^1}(x)\,dx^1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x^n}(x)\,dx^n$ или кратко $dU = \frac{\partial U}{\partial x^i}\,dx^i$, и еще короче $dU = \partial_i U\,dx^i$.

Однако далеко не всякая 1-форма $a_1\,dx^1+\ldots+a_n\,dx^n$ является дифференциалом некоторой функции. Те 1-формы, которые являются дифференциалами функций, называют *точными* 1-формами. Для того чтобы 1-форма $a_i\,dx^i$ была точной, очевидно необходимо выполнение равенств $\frac{\partial a_i}{\partial x^j} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i}$, отвечающих равенству $\frac{\partial^2 U}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^j \partial x^i}$ смешанных производных функции.

Это необходимое условие, вообще говоря, не является достаточным, но, например, в любой односвязной области оно и достаточно.

Критерием того, что 1-форма $\omega = a_i(x)dx^i$, заданная в некоторой области, является дифференциалом функции в этой области, является обращение в нуль интеграла от этой формы по любому замкнутому пути γ, лежащему в рассматриваемой области:

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

---

[1] Этот материал может быть использован не только на мехмате, но, возможно даже с большим интересом, например, на физфаке и химфаке.

Вопрос о том, является ли 1-форма $a_1(x)\,dx^1+\ldots+a_n(x)\,dx^n$ дифференциалом некоторой функции U в области, равносилен вопросу о том, является ли векторное поле $(a_1, \ldots, a_n)(x)$ потенциальным в этой области, т. е. имеется ли в этой области такая функция U, что $(a_1, \ldots, a_n)(x)=\left(\frac{\partial U}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x^n}\right)(x)$.

Если такая функция U имеется, то обычно функцию $-U$ называют *потенциалом* векторного поля, а само поле называют *потенциальным* в этой области.

Замечательное свойство потенциальных полей состоит в том, что работа в таком поле вдоль пути (интеграл от соответствующей 1-формы $\omega = -a_i(x)\,dx^i$) зависит только от начала и конца пути и равна разности значений потенциала в конце и начале пути. Если путь замкнут, то интеграл, естественно, обращается в нуль.

Задача 1. Проверьте потенциальность гравитационного поля.

2. Любимая игрушка и дифференциальная 1-форма в термодинамике. Теперь напомним кое-что из термодинамики и сначала чуть-чуть поиграем в любимую термодинамиками игрушку, знакомую всем со школьной скамьи. В быту это медицинский шприц, велосипедный насос, цилиндр в моторе любого автомобильного двигателя внутреннего сгорания и многое другое. (Не упоминаю паровые машины, пароходы и паровозы, с которых все это и началось, поскольку новые поколения молодых людей не встречались с динозаврами, ну, разве что в музеях.)

Итак, рассмотрим газ в цилиндре под поршнем. Поршень можно двигать, меняя объем газа. Стенки цилиндра могут проводить тепло, а могут, наоборот, быть адиабатическими, изолируя газ от теплообмена с внешней средой[1].

Равновесному термодинамическому состоянию газа отвечают определенные значения характеризующих это состояние параметров, таких как объем V, температура T, давление P, внутренняя энергия E. Не все они независимы. Объем — внешний параметр, который мы сами можем менять произвольно, а внутренние параметры равновесного термодинамического состояния газа, вообще говоря, меняются согласованно.

[1]Играя на бумаге в этот прибор (ключевой элемент как паровой машины, так и современного двигателя внутреннего сгорания), Сади Карно провел один из первых в физике гениальных (и недорогих) мысленных экспериментов. Двигая поршень, подогревая, а когда надо, охлаждая или теплоизолируя цилиндр, он придумал циклический процесс, называемый теперь (после некоторых сделанных Клапейроном вариаций) циклом Карно. Карно нашел ответ на вопрос Уатта о возможном коэффициенте полезного действия любой тепловой машины, а заодно, как это случается, сделал великое открытие, которое (после разработки Клаузиусом) стало вторым началом термодинамики. (Идея первого начала по существу тоже присутствовала в рассуждениях Карно.) Поиграем и мы чуть-чуть. Это поможет нам как принять полезные математические схемы, так и не потерять потом физическое содержание в возникающих абстракциях.

Так, классический закон Клапейрона утверждает, что между объемом V газа, его давлением P и температурой T в равновесном термодинамическом состоянии газа имеется связь $\frac{PV}{T} = c$ (называемая *уравнением состояния*), где постоянная c зависит только от количества газа.

За счет изменения dE внутренней энергии и подводимого тепла δQ газ может перемещать поршень, совершая некоторую механическую работу δW.

В общем случае энергетический баланс состоит в том, что

$$\delta Q = dE + \delta W. \qquad (1)$$

Заметим (и это весьма важно), что в отличие от dE дифференциальные формы δQ и δW не являются точными. Это не дифференциалы функций. Работа, которую надо совершить, например, при изменении объема газа вдвое, зависит не только от начального и конечного значений объема, так же как и возникающий при этом интегральный теплообмен с внешней средой. Обе эти величины существенно зависят от условий, в которых совершается переход из одного термодинамического состояния в другое. Например, если процесс адиабатический, то теплообмена вообще нет. В таком процессе (на таком пути перехода) интеграл от формы δQ равен нулю. На другом пути, соединяющем те же термодинамические состояния, интеграл от формы δQ, как правило, отличен от нуля, если стенки цилиндра проводят тепло. Ясно, что это автоматически относится и к дифференциальной форме работы δW. Именно поэтому мы употребили различные символы дифференциала в фундаментальном равенстве (1). Например, можно было бы, не меняя объема, т. е. вообще без совершения механической работы, изменить состояние газа, подогрев его.

Равенство (1), учитывая, что $\delta W = P\,dV$ (проверьте это!), можно переписать в виде

$$\delta Q = dE + P\,dV. \qquad (2)$$

В термодинамически равновесном состоянии внутренние параметры состояния системы (здесь газа) оказываются функциями внешних параметров (здесь он один — объем) и единственного внутреннего параметра — температуры. Таким образом, в формуле (2) $E = E(T, V)$, $P = P(T, V)$.

В формулах (1) и (2) слева стоит дифференциальная форма притока тепла, интегрирование которой вдоль пути перехода между двумя равновесными термодинамическими состояниями системы (если мы такое интегрирование научимся делать) даст нам полученное системой тепло (которое может быть отрицательным, если система отдала тепло в окружающую среду). Интегрирование формы PdV даст работу системы на этом пути перехода. Интегрирование точной формы dE независимо от пути перехода сведется к разности $E_2 - E_1$ значений внутренней энергии в рассматриваемых термодинамических состояниях.

Все, что пока было сказано (без подробного обсуждения и точных формулировок), имело целью воскресить в памяти читателя самые общие сведения из термодинамики. Они служат мотивировкой того формального определения термодинамической системы, которое после сделанной подготовки будет дано ниже.

Задача 2. a. Уравнение $\frac{PV}{T}=c$ состояния идеального газа показывает, что, наряду с парой (V,T), в качестве независимых переменных можно было бы взять также пару (P,T) или (V,P). На плоскости каждой из этих пар координат изобразите линии постоянного объема (*изохоры*), давления (*изобары*), температуры (*изотермы*), а также попробуйте пока хотя бы схематично, но физически правильно изобразить *адиабаты* — термодинамические переходы, при которых нет теплообмена с внешней средой.

b. В плоскости координат (V,P) изобразите какой-нибудь замкнутый термодинамический цикл (замкнутую кривую) и свяжите ограниченную этой кривой площадь с работой термодинамической системы (газа) на этом цикле.

c. Все знают частные производные и правило дифференцирования неявной функции. Например, если $F(x,y)=0$, то $\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}=1$, а если $F(x,y,z)=$ $=0$, то $\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}=-1$. Проверьте последнее на законе Клапейрона, считая, что $PV-T=0$ или $xy-z=0$. Обратите внимание на неполноту математического обозначения $\frac{\partial y}{\partial x}$, которое физики в термодинамических расчетах себе никогда не позволяют. Они не напишут $\frac{\partial P}{\partial V}$, а напишут $\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_T$ или $\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_P$ в зависимости от того, какая из пар переменных (V,T) или (V,P) выбрана в качестве независимой. Например, если $xy-z=0$, то при выборе в качестве независимых переменных пары (x,z) получим $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{z}{x^2}$, а если в качестве независимых переменных взята пара (x,y), то, разумеется, $\frac{\partial y}{\partial x}=0$.

Задача 3. a. В оболочке (например, в воздушном шаре, возможно вовсе не шаровой формы) газ находится при давлении P. Покажите, что элементарная работа газа, связанная с изменением формы оболочки, вычисляется, как и в рассмотренном выше частном случае, по формуле $\delta W=P\,dV$.

b. Владея аппаратом анализа, прямым расчетом найдите выталкивающую силу, действующую на тело, погруженное на Земле в жидкость или газ, и подтвердите знаменитый закон Архимеда.

Напомним в заключение этого раздела следующий важный для дальнейшего факт.

Открытия Карно трудами Клаузиуса привели к выводу, что для любой замкнутой кривой γ в пространстве равновесных состояний имеет место замечательное равенство

$$\int\limits_{\gamma}\frac{\delta Q}{T}=0, \tag{3}$$

где T — абсолютная температура. Оно означает, что дифференциальная форма $\frac{\delta Q}{T}$ точна, т. е. является дифференциалом некоторой функции S состояния системы. Именно ее Клаузиус и назвал *энтропией термодинамического состояния системы* или *энтропией системы*.

Учитывая это, равенство (2) теперь можно конкретизировать, записав в виде

$$T\,dS = dE + P\,dV. \tag{4}$$

3. Дифференциальная форма как математическая модель термодинамической системы. Приведенные в предыдущем разделе факты служат мотивировкой следующего (восходящего к Гиббсу, Пуанкаре, Каратеодори) формально-математического определения или математической модели простейшей термодинамической системы.

Пусть равновесное состояние абстрактной термодинамической системы определяется набором параметров $(\tau, a_1, \ldots, a_n) =: (\tau, a)$, где τ будет играть роль *температуры* T, а $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — набор *внешних параметров*, которые можно менять, как объем газа под поршнем в рассмотренном выше «игрушечном» примере.

Саму *термодинамическую систему* в рассматриваемой математической модели отождествим с фундаментальной дифференциальной формой

$$\omega := dE + \sum_{i=1}^{n} A_i\,da_i, \tag{5}$$

называемой *формой теплообмена* или, более точно, *формой притока тепла*.

По определению здесь E — *внутренняя энергия системы*, а A_i — *обобщенная сила*, отвечающая вариации координаты a_i (т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i da_i$ отвечает работе δW системы, связанной с изменением внешних параметров, а сама форма ω соответствует дифференциальной форме теплообмена δQ равенств (1), (2)). Величины E и A_i, естественно, зависят от $(\tau, a_1, \ldots, a_n)$. Эти зависимости входят в определение термодинамической системы. Соотношения $A_i = A_i(\tau, a_1, \ldots a_n)$ называют *уравнениями состояния*[1].

Форма ω, определяющая термодинамическую систему, должна иметь специальный вид $\omega = \tau\,dS$, где S — функция, называемая *энтропией* системы.

Итак, в общем случае вместо равенства (4) имеем равенство

$$\tau\,dS = dE + \sum_{i=1}^{n} A_i\,da_i. \tag{6}$$

Мы привели здесь математическую модель или формально-математическое определение простейшей термодинамической системы. Обратите внимание,

---

[1]Точнее, эти соотношения называют *термическими уравнениями состояния*, а зависимость $E = E(\tau, a_1, \ldots a_n)$ называют *калорическим уравнением состояния*.

мы взяли его не с потолка. В нем содержится опыт многочисленных исследований, результаты которых теперь в обратном к хронологии порядке можно будет получить единообразно из общих математических фактов, относящихся к дифференциальному и интегральному исчислению функций многих переменных и исчислению дифференциальных форм.

§ 2. Математические следствия и их физическая интерпретация

1. Единственность дифференциала, равенство смешанных производных и термодинамика

Задача 4. a. Из единственности дифференциала функции $S = S(\tau, a_1, \ldots \ldots, a_n)$ получите следующие соотношения:

$$\tau \frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial E}{\partial \tau}, \quad \tau \frac{\partial S}{\partial a_i} = \frac{\partial E}{\partial a_i} + A_i.$$

b. Учитывая равенство смешанных производных регулярной функции S переменных $\tau, a_1, \ldots, a_n$, проверьте, что в термодинамической системе имеют место следующие нетривиальные связи:

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} + A_i = \tau \frac{\partial A_i}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial a_j} = \frac{\partial A_j}{\partial a_i}.$$

c. Покажите, учитывая полученное в пунктах a и b этой задачи или независимо, что

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = \frac{\partial A_i}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{\tau}, \quad \left.\frac{\partial S}{\partial a_i}\right|_E = \frac{A_i}{\tau}.$$

Обратите внимание на то, что в последних двух формулах фиксируется, когда вычисляется соответствующая частная производная. В частности, когда вычисляется $\frac{\partial S}{\partial E}$, подразумевается, что соотношение $E = E(\tau, a_1, \ldots, a_n)$ разрешается относительно τ и независимыми становятся переменные $E, a_1, \ldots \ldots, a_n$.

Задача 5. Рассмотрите частный случай термодинамической системы — идеальный газ. Ему соответствует форма (4) и уравнение состояния $P = = cT/V$ (закон Клапейрона).

Пользуясь одним из соотношений предыдущей задачи, покажите, что внутренняя энергия $E = E(T, V)$ идеального газа на самом деле зависит только от температуры T.

Этот факт был установлен Джоулем в знаменитом эксперименте.

2. Термодинамические потенциалы

Задача 6. a. Если бы мы вместо переменных $\tau, a_1, \ldots, a_n$ в качестве независимых взяли $E, a_1, \ldots, a_n$, разрешив уравнение $E = E(\tau, a_1, \ldots, a_n)$ относительно τ, то из формулы (6), определяющей термодинамическую систему,

мы по одной функции S — энтропии, нашли бы все параметры системы: $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{\tau}$, $\frac{\partial S}{\partial a_i} = \frac{A_i}{\tau}$. (Конечно, потом можно вернуться к координатам $\tau, a_1, \ldots, a_n$.)

Это подобно тому, как знание одной функции — потенциала векторного поля, если поле потенциально, позволяет восстановить все поле. По этой причине и в термодинамике характеристические функции, по которым восстанавливается термодинамическая система, т. е. все ее параметры, часто называют *термодинамическими потенциалами*. Мы видим, что в переменных $E, a_1, \ldots, a_n$ таким потенциалом является *энтропия*.

В переменных $\tau, a_1, \ldots, a_n$ характеристической функцией термодинамической системы будет функция $\Psi = E - \tau S$, называемая *свободной энергией*.

Проверьте это и покажите, что $\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -S$, $\frac{\partial \Psi}{\partial a_i} = -A_i$, $E = \Psi - \tau \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}$. Заметим, что, как видно из этих формул, свободная энергия является также потенциалом поля сил $(A_1, \ldots, A_n)$ при постоянном значении температуры, а энергия системы получается преобразованием Лежандра свободной энергии по температуре.

b. Рассмотрим термодинамическую систему (типа газа), определяемую соотношением $\delta Q = dE + P\,dV$ или $T\,dS = dE + P\,dV$, где $E = E(T, V)$ и $P = P(T, V)$. В качестве независимых переменных здесь, наряду с парой (T, V) можно было бы выбрать любую из пар (E, V), (T, P), (S, V), (S, P). Каждому такому выбору соответствует своя характеристическая функция термодинамической системы. Используя правило дифференцирования произведения функций и элементарные преобразования дифференциальных выражений, покажите, что указанным парам координат будут отвечать следующие термодинамические потенциалы: *энтропия* S для (E, V); *свободная энергия* Ψ или $F = E - TS$ для (T, V); *свободная энтальпия* $\Phi = F + PV$ для (T, P); *энергия* E для (S, V); *энтальпия* $H = E + PV$ для (S, P) $(= \Phi + TS)$.

Свободная энергия еще называется *свободной энергией Гельмгольца*, а свободная энтальпия еще называется *свободной энергией Гиббса* и часто обозначается символом G.

3. Производная по направлению и теплоемкость. Всем известно понятие *производной функции по вектору*:

$$D_v f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + vt) - f(x)}{t}.$$

Эта величина характеризует скорость изменения значений функции при смещении от рассматриваемой точки x в области определения функции в направлении вектора v со скоростью $|v|$. Если в качестве v берется единичный вектор данного направления, то производную функции по такому вектору обычно называют *производной функции по данному направлению или в данном направлении*. Например, частные производные функции нескольких переменных — это ее производные в направлении координатных осей.

В термодинамике есть родственное этому понятию по духу понятие теплоемкости. Теплоемкость объекта (кастрюли с супом, стакана воды, порции газа, ...), грубо говоря, — это то количество тепла, которое нужно сообщить объекту, чтобы поднять его температуру на один градус.

А теперь поточнее. Температуру будем мерить в фиксированной шкале — той шкале Кельвина абсолютной температуры, которая уже использовалась в записи уравнения состояния идеального газа. В качестве точки x, от которой мы стартуем, теперь выступает то состояние термодинамического равновесия объекта — термодинамической системы, в котором мы начинаем объект (систему) подогревать. Но состояние равновесия термодинамической системы задается набором ее термодинамических параметров. Параметров несколько, поэтому надо еще сказать в каком направлении e мы собираемся смещаться в пространстве равновесных состояний. Например, для фиксированной порции газа можно измерять ее теплоемкость при постоянном объеме, а можно измерять при постоянном давлении.

Итак, *теплоемкость* $C(x,e)$ системы зависит от исходного состояния x равновесия системы и от направления e смещения в пространстве ее равновесных состояний, причем сама величина $C(x,e)$ есть предел отношения $\frac{\Delta Q}{\Delta T}$ приращения (притока) тепла к приращению температуры системы, когда смещение от состояния x, происходящее в направлении e, стремится к нулю.

Задача 7. Рассмотрите частный случай термодинамической системы — идеальный газ в количестве одного моля. Ему соответствует форма (4) и уравнение состояния $P = RT/V$, где R — так называемая *универсальная газовая постоянная*.

Молярные теплоемкости газа принято обозначать строчной буквой $c(x,e)$. Более того, символами c_V и c_P принято обозначать теплоемкость моля газа при фиксированном объеме и при фиксированном давлении соответственно.

Покажите (вспомнив, где нужно, задачу 5), что для идеального газа справедливы следующие соотношения:

a. $c_V = \frac{\partial E}{\partial T}\Big|_V$;

b. $c_P = \frac{\partial E}{\partial T}\Big|_V + R$;

c. $c_P - c_V = R$ (соотношение Майера).

Задача 8. В довольно большом диапазоне состояний газа величины c_V и c_P можно считать практически постоянными.

a. Принимая это допущение, покажите, что форму δQ притока тепла из соотношения (4) в случае идеального газа можно представить в виде

$$\delta Q = \frac{1}{R}\,(c_V V\,dP + c_P P\,dV),$$

поскольку при постоянстве c_P, c_V можно считать, что $E = c_V T$, и нам известно, что $c_P - c_V = R$.

b. При том же, что и выше, допущении о постоянстве величин c_P, c_V получите формулу

$$dS = \frac{c_V}{T}\,dT + \frac{R}{V}\,dV$$

для дифференциала энтропии моля идеального газа.

c. Получите теперь формулу

$$S = \ln \frac{T^{c_V} V^R}{T_0^{c_V} V_0^R}$$

для энтропии моля идеального газа.

Задача 9. Изменение состояния термодинамической системы, происходящее без теплообмена с окружающей средой, как известно, называется *адиабатическим* изменением состояния или *адиабатическим термодинамическим процессом*. Ясно, что адиабатические процессы в пространстве равновесных термодинамических состояний системы происходят при неизменной энтропии (см. формулы (4) или (6)), поэтому *адиабаты* еще могут быть названы *изоэнтропами*.

Вслед за Пуассоном получите следующие уравнения адиабаты идеального газа:

a. $T^{c_V} V^R = T_0^{c_V} V_0^R$ в переменных (T, V);

b. $P^{c_V} V^{c_P} = P_0^{c_V} V_0^{c_P}$ в переменных (P, V);

c. $T^{c_P} P^R = T_0^{c_P} P_0^R$ в переменных (T, P).

4. Цикл Карно и коэффициент полезного действия тепловой машины. Рассмотрим снова идеальный газ как термодинамическую систему. Для нее выполняется соотношение (2), выражающее энергетический баланс в равновесных термодинамических процессах. Если совершить такой квазистатический процесс вдоль некоторого замкнутого пути γ в пространстве равновесных состояний, то, очевидно, мы придем к равенству

$$\int_\gamma \delta Q = \int_\gamma P\,dV.$$

Слева стоит полученное системой в этом цикле тепло, а справа стоит механическая работа системы, произведенная в этом цикле. Если в качестве независимых параметров взять не пару (T, V), а пару (V, P), то в плоскости (V, P) последнему интегралу отвечает площадь области, ограниченной кривой γ (с точностью до знака, зависящего от ориентации кривой).

Конкретизируем теперь цикл γ.

Напомним, что *цикл Карно* изменения состояния рабочего тела тепловой машины (например, газа, находящегося в цилиндре под поршнем) состоит в следующем. Имеются два энергоемких тела, нагреватель и холодильник (например, паровой котел и атмосфера), находящиеся при постоянной температуре T_1 и T_2 соответственно ($T_1 > T_2$). Рабочее тело (газ) рассматриваемой тепловой машины, имея в состоянии 1 температуру T_1, приводится в

контакт с нагревателем и за счет уменьшения внешнего давления по изотерме квазистатически расширяется и переводится в состояние 2 (см. рис. 86 на с. 212). При этом машина заимствует от нагревателя тепло Q_1 и производит механическую работу W_{12} против внешнего давления. В состоянии 2 газ теплоизолируют и заставляют квазистатически расширяться до состояния 3, пока его температура не достигнет температуры T_2 холодильника. При этом машина также совершит некоторую работу W_{23} против внешнего давления. В состоянии 3 газ приводят в контакт с холодильником и путем увеличения давления изотермически сжимают до состояния 4. При этом над газом совершается работа (сам газ совершает отрицательную работу W_{34}), и газ отдает холодильнику некоторое количество тепла Q_2. Состояние 4 выбирается так, чтобы из него можно было вернуться в исходное состояние 1 квазистатическим сжатием газа по адиабате. Итак, из состояния 4 газ возвращают в состояние 1. При этом над газом придется совершить работу (а сам газ произведет отрицательную работу W_{41}). В результате описанного кругового процесса (*цикла Карно*) внутренняя энергия газа (рабочего тела машины), очевидно, не изменится (ведь мы вернулись в исходное состояние), поэтому произведенная машиной работа равна $W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = Q_1 - Q_2$.

Полученное от нагревателя тепло Q_1 лишь частично пошло на совершение работы W. Величину $\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ естественно назвать *коэффициентом полезного действия* (КПД) рассматриваемой *тепловой машины*.

Задача 10. a. Напомним, что в задаче 8a, воспользовавшись уравнением состояния $PV = RT$ и соотношением Майера $c_P - c_V = R$ для моля идеального газа, мы получили следующее выражение формы δQ притока тепла: $\delta Q = c_P \frac{P}{R}\, dV + c_V \frac{V}{R}\, dP$. Напишите теперь формулу для количества Q тепла, получаемого молем газа при изменении его состояний вдоль произвольного пути γ плоскости равновесных состояний с координатами (V, P).

b. Рассмотрите теперь цикл Карно. Нарисуйте его в плоскости (V, P).

c. Вычислите интеграл $\int\limits_{\gamma_i} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{\gamma_i} dS$ на каждом из четырех участков γ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, цикла Карно.

d. Откройте, вслед за Карно и Клаузиусом, замечательное равенство[1]

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}, \quad \text{или} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0,$$

развитием которого является общая формула Клаузиуса (3) $\Bigl(\int\limits_{\gamma} \frac{\delta Q}{T} = 0\Bigr)$, которой вы, вероятно, воспользовались при доказательстве этой теоремы Карно—Клаузиуса.

---

[1]Оно, как и формула (3), в явном виде впервые появилось уже только у Клаузиуса, с его четким математическим языком и ясностью понятий, которые теперь лежат в фундаменте аппарата и языка всей классической термодинамики.

e. Попробуйте самостоятельно вывести общую теорему Клаузиуса (соотношение (3)), считая известным, что в цикле Карно $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$.

f. Покажите, что коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по циклу Карно, равен $1 - \frac{T_2}{T_1}$.

Знаменитая вторая теорема Карно состоит в том, что никакая тепловая машина, как бы она ни была устроена, не может иметь больший коэффициент полезного действия, если она работает между теми же температурами T_1, T_2 нагревателя и холодильника[1].

Развитием этой второй теоремы Карно является фундаментальное общее *неравенство Клаузиуса*

$$\int_\gamma \frac{\delta Q}{T} \leqslant 0,$$

относящееся к любому замкнутому термодинамическому циклу любой термодинамической системы. Если цикл обратим, то интеграл, конечно, равен нулю (объясните это!). В типичном же случае он отрицателен, поскольку тепловые процессы, как правило, необратимы.

Все, что мы до этого обсуждали, относилось к обратимым термодинамическим процессам (путям в пространстве равновесных состояний).

g. Оцените КПД паровой машины, в которой максимальная температура пара не превышает 150 °C, то есть $T_1 = 423$ K, а температура холодильника — окружающей среды — порядка 20 °C, то есть $T_2 = 291$ K.

Задача 11. *Коэффициент полезного действия реактивного движения*.

a. Пусть Q — химическая энергия единицы массы топлива ракеты, ω — скорость истечения топлива. Тогда $\frac{1}{2}\omega^2$ есть кинетическая энергия выброшенной единицы массы топлива. Коэффициент α в равенстве $\frac{1}{2}\omega^2 = \alpha Q$ есть коэффициент полезного действия процессов горения и истечения топлива. Для ракетных двигателей на твердом топливе (бездымный порох) $\omega = 2$ км/с, $Q = 1000$ ккал/кг, а на жидком (бензин с кислородом) $\omega = 3$ км/с, $Q = 2500$ ккал/кг. Определите в этих случаях коэффициент α.

(Калория — устаревшая единица измерения тепловой энергии, выражавшая количество тепла, потребное для нагревания одного грамма воды на один градус Цельсия. Калория = 4,1868 джоуля — механический эквивалент тепла (1 кал = 4,1868 Дж). Кстати, о порядке величин: стакан воды, точнее, двести граммов воды, подогрели с нуля градусов до кипения, до ста градусов Цельсия. На какую высоту затраченной энергией можно было бы поднять, например, домкратом, легковой автомобиль весом в одну тонну?)

---

[1] Профессиональные историки науки могут сказать, и не без основания, что мы тут несколько упрощаем дело и что у Карно не все было так уж гладко и явно сформулировано. Объективности ради отмечаем это, отсылая заинтересованного читателя к рукописям Карно и к работам их комментаторов.

b. Коэффициент полезного действия (КПД) ракеты определяется как отношение ее конечной кинетической энергии $m_K \frac{v^2}{2}$ к химической энергии сгоревшего топлива $m_T Q$ (здесь m_K — масса корпуса, то есть масса ракеты без топлива, m_T — масса топлива, а v — конечная скорость).

Опираясь на принцип сохранения импульса механической системы, элементарными методами математического анализа легко получить (получите!) следующую формулу Мещерского—Циолковского для расчета скорости движения тела переменной массы

$$V(t) = V_0 + \omega \ln \frac{M(0)}{M(t)}.$$

Здесь V_0 — начальная скорость, $M(0)$ — начальная масса ракеты вместе с топливом, $M(t)$ — масса ракеты с топливом в момент времени t, а $V(t)$ — скорость, которую ракета имеет в этот момент t. Положим $V_0 = 0$. Тогда для интересующей нас сейчас конечной скорости ракеты v получаем формулу

$$v = \omega \ln\left(1 + \frac{m_T}{m_K}\right).$$

Пользуясь этой формулой, получите формулу для КПД ракеты через m_K, m_T, Q и α (см. п. а) этой задачи).

c. Оцените КПД автомобиля с жидкостным реактивным двигателем, если автомобиль разгоняется до установленной в городе скорости 60 км/час.

d. Оцените КПД ракеты на жидком топливе, выводящей спутник на низкую околоземную орбиту.

e. Оцените, для какой конечной скорости реактивное движение на жидком топливе имеет наибольший КПД.

f. Укажите, при каком отношении масс m_T/m_K топлива и корпуса КПД ракеты с любым видом топлива становится максимально возможным.

Дополнение 5

Операторы теории поля в криволинейных координатах

Два вводных слова

Почти в любом задачнике и даже учебнике математического анализа попросту говорится примерно следующее. «Запомните, дети»:

Градиентом функции $U(x, y, z)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} U := \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Ротором векторного поля $A = (P, Q, R)(x, y, z)$ называется вектор

$$\operatorname{rot} A := \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Дивергенцией векторного поля $B = (P, Q, R)(x, y, z)$ называется функция

$$\operatorname{div} B := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

То, что это верно только в декартовых координатах, а также как и что надо делать, если система координат иная, обычно не обсуждается. Это и понятно, потому что сама постановка такого вопроса уже требует какого-то адекватного определения этих объектов.

§ 1. Напоминания из алгебры и геометрии

1. Билинейная форма и ее координатное представление

a. Скалярное произведение и общая билинейная форма. Нам предстоит рассматривать векторное пространство со скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$. Пока можно считать, что $\langle\ ,\ \rangle$ — обозначение произвольной билинейной формы на n-мерном векторном пространстве X. Если в пространстве выбран базис $\xi_1, \ldots, \xi_n$, то объекты пространства (в частности, векторы и формы) приобретают координатное представление. Напомним это применительно к билинейной форме $\langle\ ,\ \rangle$.

Взяв два вектора $x = x^i \xi_i$, $y = y^j \xi_j$ в их разложении по выбранному базису, имеем $\langle x, y\rangle = \langle x^i \xi_i, y^j \xi_j\rangle = \langle \xi_i, \xi_j\rangle x^i y^j = g_{ij} x^i y^j$. Здесь, как обычно, всюду подразумевается суммирование по повторяющемуся сверху и снизу

индексу. Итак, при заданном базисе пространства набор величин $\langle \xi_i, \xi_j \rangle = g_{ij}$ полностью определяет билинейную форму.

Если форма — скалярное произведение, то базис считается ортогональным, если $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Конечно, тут обычно преполагается невырожденность формы.

b. Невырожденность билинейной формы. Билинейная форма $\langle\ ,\ \rangle$ называется невырожденной, если она тождественно равна нулю относительно одного из аргументов при фиксированном значении другого лишь в том случае, когда фиксированный аргумент равен нулю (является нулевым вектором).

Невырожденность формы равносильна тому, что определитель матрицы (g_{ij}) отличен от нуля. Действительно, если фиксированный вектор $x = x^i \xi_i$ таков, что $\langle x, y \rangle \equiv 0$ относительно y, то $\langle \xi_i, \xi_j \rangle x^i = 0$ и $g_{ij} x^i = 0$ при любом значении $j \in \{1, \ldots, n\}$. Эта однородная система уравнений имеет единственное (нулевое) решение в точности тогда, когда отличен от нуля определитель матрицы (g_{ij}) системы.

2. Соответствие вектор — форма

a. Соответствие вектор — 1-форма в присутствии 2-формы. В присутствии 2-формы $\langle\ ,\ \rangle$ каждому вектору A можно сопоставить 1-форму — линейную функцию $\langle A, x \rangle$. Если форма $\langle\ ,\ \rangle$ невырожденна, то такое соответствие взаимно однозначно. Действительно, если дана какая-то линейная функция $a(x) = a_j x^j$ (где $a_j = a(\xi_j)$) и мы хотим ее представить в виде $\langle A, x \rangle$, где $A = A^i \xi_i$, то на координаты вектора A возникает система уравнений $a(\xi_j) = \langle \xi_i, \xi_j \rangle A^i$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, которая однозначно разрешима, если определитель матрицы (g_{ij}) отличен от нуля.

Итак, координаты вектора $A = A^i \xi_i$ и коэффициенты 1-формы a в том же базисе $\{\xi_i\}$ связаны взаимно обратными соотношениями

$$a_j = g_{ij} A^i, \quad A^i = g^{ij} a_j.$$

b. Соответствие вектор — $(n-1)$-форма. Аналогично, в присутствии невырожденной n-формы Ω каждому вектору B можно сопоставить $(n-1)$-форму $\Omega(B, \ldots)$.

Ниже мы будем иметь дело с векторными полями A, B и осуществлять описанные процедуры в касательном пространстве, например, применительно к форме работы $\omega_A^1 = \langle A, \cdot \rangle$ и форме потока $\omega_B^{n-1} = \Omega^n(B, \ldots)$, в присутствии скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$ и формы объема Ω^n соответственно.

3. Криволинейные координаты и метрика

a. Криволинейные координаты, метрика и форма объема. Пусть на n-мерной поверхности (многообразии) имеется метрика, которая в каких-то локальных координатах $(t^1, \ldots, t^n)$ (в локальной карте) задается формой $g_{ij}(t)\, dt^i\, dt^j$, определяющей скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle(t)$ в соответствую-

щей параметру t касательной плоскости (касательном пространстве) к поверхности.

Например, если заданная в параметрическом виде поверхность (или кривая) вложена в евклидово пространство, то скалярное произведение в касательных плоскостях (пространствах) к поверхности естественным образом индуцируется из объемлющего пространства.

Мы даже знаем, как находить площадь (n-меру) такой поверхности, — надо интегрировать форму объема $\Omega^n = \sqrt{\det g_{ij}(t)}\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n$.

b. Ортогональные системы криволинейных координат и орты. Напомним, что система криволинейных координат $(t^1, \ldots, t^n)$ называется ортогональной, если $g_{ij}(t) \equiv 0$ при $i \neq j$.

Элемент длины в ортогональных системах криволинейных координат записывается особенно просто

$$ds^2 = g_{11}(t)(dt^1)^2 + \ldots + g_{nn}(t)(dt^n)^2,$$

что часто переписывают в более компактных обозначениях

$$ds^2 = E_1(t)(dt^1)^2 + \ldots + E_n(t)(dt^n)^2.$$

Векторы $\xi_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \xi_n = (0, \ldots, 0, 1)$ координатных направлений образуют базис касательного пространства, соответствующего значению параметра t. Но нормы (длины) этих векторов, вообще говоря, не равны единице. Независимо от того, ортогональна ли система координат или нет, всегда $\langle \xi_i, \xi_i \rangle(t) = g_{ii}(t)$, т. е. $|\xi_i| = \sqrt{g_{ii}(t)}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Значит, орты $e_1, \ldots, e_n$ (векторы единичной длины) координатных направлений имеют следующие координатные представления

$$e_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0, \ldots, 0\Big), \quad \ldots, \quad e_n = \Big(0, \ldots, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{nn}}}\Big).$$

В частности, если система криволинейных координат ортогональная, то ортонормированным базисом в соответствующем касательном пространстве будет следующая система векторов координатных направлений

$$e_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{E_1}}, 0, \ldots, 0\Big), \quad \ldots, \quad e_n = \Big(0, \ldots, 0, \frac{1}{\sqrt{E_n}}\Big).$$

c. Декартовы, цилиндрические и сферические координаты. Примерами ортогональных систем координат могут служить стандартные декартовы, цилиндрические и сферические координаты в $\mathbb{R}^3$. Широту θ в сферических координатах будем здесь, следуя географам, отсчитывать от экватора.

Задача. Запишите метрику $g_{ij}(t)\, dt^i\, dt^j$ в каждой из этих систем координат и выпишите ортонормированный базис (e_1, e_2, e_3).

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ квадратичная форма

$g_{ij}(t)\,dt^i\,dt^j$ имеет соответственно вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2+dy^2+dz^2= \\ &= dr^2+r^2\,d\varphi^2+dz^2= \\ &= dR^2+R^2\cos^2\theta\,d\varphi^2+R^2\,d\theta^2. \end{aligned}$$

Для декартовых, цилиндрических и сферических координат тройки ортов координатных направлений имеют соответственно следующий вид:

$$e_x=(1,0,0),\quad e_y=(0,1,0),\quad e_z=(0,0,1);$$
$$e_r=(1,0,0),\quad e_\varphi=\Big(0,\frac{1}{r},0\Big),\quad e_z=(0,0,1);$$
$$e_R=(1,0,0),\quad e_\varphi=\Big(0,\frac{1}{R\cos\theta},0\Big),\quad e_\theta=\Big(0,0,\frac{1}{R}\Big).$$

§ 2. Операторы grad, rot, div в криволинейных координатах

0. Дифференциал формы и операторы grad, rot, div. Дифференциал dU функции U является 1-формой. При наличии скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$, как мы знаем, 1-форме dU соответствует определенный вектор A, такой что $dU=\langle A,\cdot\rangle$. Этот вектор называется *градиентом функции* U и обозначается $\operatorname{grad} U$.

Итак $dU=\langle\operatorname{grad} U,\cdot\rangle$.

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (или на любом трехмерном римановом многообразии) взята 1-форма $\omega_A^1=\langle A,\cdot\rangle$, отвечающая векторному полю A. Дифференциал $d\omega_A^1$ этой формы есть 2-форма ω_B^2, отвечающая, ввиду наличия формы объема Ω^3, некоторому векторному полю B (т. е. $\omega_B^2= =\Omega^3(B,\cdot,\cdot)$). Тогда поле B называется *ротором векторного поля* A и обозначается $\operatorname{rot} A$.

Итак, $d\omega_A^1=\omega_{\operatorname{rot} A}^2$.

Если на n-мерной поверхности (например, на $\mathbb{R}^n$) имеется форма объема Ω^n, то определена $(n-1)$-форма потока векторного поля B, а именно, форма $\omega_B^{n-1}=\Omega^n(B,\cdot,\cdot)$. Дифференциал $d\omega_B^{n-1}$ этой $(n-1)$-формы является n-формой, которая, следовательно, имеет вид $\rho\Omega^n$. Коэффициент пропорциональности — функция ρ — называется *дивергенцией векторного поля* B и обозначается $\operatorname{div} B$.

Итак, $d\omega_B^{n-1}=(\operatorname{div} B)\,\Omega^n$.

1. Градиент функции и его координатное представление

а. Координатная запись соответствия вектор — 1-форма. В § 1, п. 2а мы вывели связь коэффициентов 1-формы $\omega_A^1=\langle A,\cdot\rangle$ и координат вектора $A=A^i\xi_i$. Если вместо векторов ξ_i взять одноименные векторы e_i единичной длины, то, поскольку $\xi_i=\sqrt{g_{ii}}\,e_i$, координаты вектора $A=A_e^i e_i$ в базисе $\{e_i\}$

и его прежние координаты будут связаны соотношениями $A_e^i = A^i\sqrt{g_{ii}}$ при $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Значит, новые формулы связи будут иметь вид

$$a_j = g_{ij}\frac{A_e^i}{\sqrt{g_{ii}}}, \qquad \frac{A_e^i}{\sqrt{g_{ii}}} = g^{ij}a_j.$$

Эти формулы позволяют по вектору $A = A_e^i\, e_i$ написать соответствующую форму $\omega_A^1 = \langle A, \cdot\rangle = a_j\, dt^j$ и, наоборот, по 1-форме $\omega^1 = a_j\, dt^j$ найти отвечающий ей вектор $A = A_e^i\, e_i$.

Задача. В декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ укажите явный вид 1-формы $\omega_A^1 = \langle A, \cdot\rangle$, отвечающей вектору $A = A_e^i\, e_i$.

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ форма ω_A^1 имеет соответственно вид

$$\begin{aligned}\omega_A^1 &= A_x\, dx + A_y\, dy + A_z\, dz = \\ &= A_r\, dr + A_\varphi r\, d\varphi + A_z\, dz = \\ &= A_R\, dR + A_\varphi R\cos\varphi\, d\varphi + A_\theta R\, d\theta.\end{aligned}$$

b. Дифференциал функции и градиент. Применим общие соотношения связи вектора A и формы ω_A^1 к случаю формы $dU = \langle \operatorname{grad} U, \cdot\rangle$, чтобы найти разложение $\operatorname{grad} U = A_e^i e_i$. Поскольку $dU = \frac{\partial U}{\partial t^j}\, dt^j$, т. е. $a_j = \frac{\partial U}{\partial t^j}$, то $A_e^i = g^{ij}\sqrt{g_{ii}}\,\frac{\partial U}{\partial t^j}$.

В случае ортогональной системы криволинейных координат матрица (g_{ij}) диагональна, как и обратная к ней матрица (g^{ij}), причем $g^{ii} = 1/g_{ii}$. Значит, в этом случае

$$\operatorname{grad} U = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\,\frac{\partial U}{\partial t^1}\, e_1 + \ldots + \frac{1}{\sqrt{g_{nn}}}\,\frac{\partial U}{\partial t^n}\, e_n.$$

c. Градиент в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

Задача. Запишите вектор $\operatorname{grad} U = A_e^i e_i$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ вектор $\operatorname{grad} U = A_e^i e_i$ имеет соответственно вид

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} U &= \frac{\partial U}{\partial x}e_x + \frac{\partial U}{\partial y}e_y + \frac{\partial U}{\partial z}e_z = \\ &= \frac{\partial U}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}e_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}e_z = \\ &= \frac{\partial U}{\partial R}e_R + \frac{1}{R\cos\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}e_\varphi + \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \theta}e_\theta.\end{aligned}$$

2. Дивергенция и ее координатное представление

a. Координатная запись соответствия вектор — $(n-1)$-форма. Мы знаем, что если в n-мерном векторном пространстве присутствует невырожденная n-форма Ω^n, то каждому вектору B можно взаимно однозначно сопоставить $(n-1)$-форму $\omega_B^{n-1} = \Omega^n(B, \ldots)$. Мы хотим написать явные формулы связи координат вектора $B = B^i\, \xi_i$ и коэффициентов формы $\omega_B^{n-1} = b_i\, x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{x^i} \wedge \ldots \wedge x^n$, считая, что оба объекта записаны в одном базисе $\{\xi_i\}$ пространства. Здесь, как всегда, x^i — линейная функция, действие которой состоит в выделении i координаты вектора, т. е. $x^i(v) := v^i$; символ $\widehat{x^i}$ показывает, что соответствующий множитель опущен; а n-форма Ω^n в n-мерном векторном пространстве есть $x^1 \wedge \ldots \wedge x^n$ или пропорциональна этой стандартной форме объема, равной единице на наборе $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ базисных векторов.

Вообще, значение формы $\Omega^n = x^1 \wedge \ldots \wedge x^n$ на любом наборе $(v_1, \ldots, v_n)$ векторов равно определителю матрицы (v_i^j), составленной из координат этих векторов, поэтому, учитывая правило разложения определителя по строке, можем написать, что

$$\Omega^n(B, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} B^i\, x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{x^i} \wedge \ldots \wedge x^n.$$

Но $\omega_B^{n-1} = \Omega^n(B, \ldots)$, значит,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i\, x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{x^i} \wedge \ldots \wedge x^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} B^i\, x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{x^i} \wedge \ldots \wedge x^n.$$

Следовательно, $b_i = (-1)^{i-1} B^i$ при любом значении $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Если бы в качестве Ω^n фигурировала форма $c\,\Omega^n = c\, x^1 \wedge \ldots \wedge x^n$, то мы, очевидно, имели бы соотношения $b_i = (-1)^{i-1} c\, B^i$ при любом значении $i \in \in \{1, \ldots, n\}$.

Напомним еще, что при наличии в векторном пространстве скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$ и фиксированного базиса $\{\xi_i\}$ возникает естественная форма объема $\sqrt{\det g_{ij}}\, x^1 \wedge \ldots \wedge x^n$, определяемая, как и само скалярное произведение, в данном базисе величинами $g_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$.

Наконец, напомним, что при этом векторами единичной длины (нормы) являются, вообще говоря, не векторы базиса $\{\xi_i\}$, а векторы $e_i = \xi_i / \sqrt{g_{ii}}$. Поскольку $\xi_i = \sqrt{g_{ii}}\, e_i$, исходное разложение вектора $B = B^i \xi_i$ в базисе $\{e_i\}$ превратится в $B = B_e^i\, e_i$, где $B_e^i = \sqrt{g_{ii}}\, B^i$.

Итак, если в пространстве есть скалярное произведение, то имеется естественная форма объема $\Omega_g^n = \sqrt{\det g_{ij}}\, x^1 \wedge \ldots \wedge x^n$, и если $\omega_B^{n-1} = \Omega_g^n(B, \ldots)$, то коэффициенты формы $\omega_B^{n-1} = b_i\, x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{x^i} \wedge \ldots \wedge x^n$ и координаты вектора B в разложении $B = B_e^i\, e_i$ по базисным ортам $e_i = \xi_i / \sqrt{g_{ii}}$ связаны соотношениями

$$b_i = (-1)^{i-1} \sqrt{\det g_{ij}}\, \frac{B_e^i}{\sqrt{g_{ii}}}.$$

В ортогональном базисе $\det g_{ij} = g_{11} \cdot \ldots \cdot g_{nn}$. В этом случае

$$b_i = (-1)^{i-1} \sqrt{g_{11} \cdot \ldots \cdot \widehat{g_{ii}} \cdot \ldots \cdot g_{nn}}\, B_e^i.$$

Все изложенное, разумеется, остается в силе применительно к случаю связи векторного поля $B(t)$ и дифференциальной формы $\omega_B^{n-1} = \Omega_g^n(B, \ldots)$, порождаемой полем посредством формы объема.

Значит, если

$$\Omega_g^n = \sqrt{\det g_{ij}}(t)\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n, \quad \omega_B^{n-1} = b_i(t)\, dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \ldots \wedge dt^n,$$

а $B(t) = B_e^i(t)\, e_i(t)$ — разложение по ортам системы криволинейных координат $(t^1, \ldots, t^n)$, то

$$b_i = (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{g_{ii}}} B_e^i, \quad B_e^i = (-1)^{i-1} \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{\det g_{ij}}} b_i.$$

Если система криволинейных координат ортогональная, действует прежнее соотношение $b_i = (-1)^{i-1} \sqrt{g_{11} \cdot \ldots \cdot \widehat{g_{ii}} \cdot \ldots \cdot g_{nn}}\, B_e^i$.

В частности, для триортогональной системы криволинейных координат (t^1, t^2, t^3), используя упоминавшиеся в самом начале обозначения $E_i = g_{ii}$, можно написать следующее координатное представление формы ω_B^2, отвечающей вектору $B = B_e^1\, e_1 + B_e^2\, e_2 + B_e^3\, e_3$:

$$\begin{aligned}\omega_B^2 &= B_e^1 \sqrt{E_2 E_3}\, dt^2 \wedge dt^3 + B_e^2 \sqrt{E_3 E_1}\, dt^3 \wedge dt^1 + B_e^3 \sqrt{E_1 E_2}\, dt^1 \wedge dt^2 = \\ &= \sqrt{E_1 E_2 E_3} \left(\frac{B_e^1}{\sqrt{E_1}}\, dt^2 \wedge dt^3 + \frac{B_e^2}{\sqrt{E_2}}\, dt^3 \wedge dt^1 + \frac{B_e^3}{\sqrt{E_3}}\, dt^1 \wedge dt^2 \right).\end{aligned}$$

(Примите во внимание, что в трехмерном случае 2-форму ω^2 обычно записывают не как $b_1\, dt^2 \wedge dt^3 + b_2\, dt^1 \wedge dt^3 + b_3\, dt^1 \wedge dt^2$, а как $a_1\, dt^2 \wedge dt^3 + a_2\, dt^3 \wedge dt^1 + a_3\, dt^1 \wedge dt^2$, например, $P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy$.)

Задача. В декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ укажите явный вид 2-формы $\omega_B^2 = \Omega_g^3(B, \ldots)$, отвечающей векторному полю $B = B_e^i\, e_i$.

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ форма ω_B^2 имеет соответственно вид

$$\begin{aligned}\omega_B^2 &= B_x\, dy \wedge dz + B_y\, dz \wedge dx + B_z\, dx \wedge dy = \\ &= B_r r\, d\varphi \wedge dz + B_\varphi\, dz \wedge dr + B_z r\, dr \wedge d\varphi = \\ &= B_R R^2 \cos\theta\, d\varphi \wedge d\theta + B_\varphi R\, d\theta \wedge dR + B_\theta R \cos\theta\, dR \wedge d\varphi.\end{aligned}$$

b. Дифференциал формы потока и дивергенция поля скорости. Форму $\omega_B^{n-1} = \Omega_g^n(B, \ldots)$ часто называют формой потока, поскольку в случае, когда B — поле скорости потока, именно эту форму приходится интегрировать (по крайней мере при $n = 3$), чтобы найти расход (поток) через поверхность.

Дифференциал формы потока ω_B^{n-1} есть n-форма, пропорциональная форме объема. Коэффициент пропорциональности, как мы знаем, называется дивергенцией поля B.

Итак, $d\omega_B^{n-1} = \operatorname{div} B\, \Omega_g^n$.

Мы хотим научиться по самому полю $B = B_e^i e_i$ находить его дивергенцию $\operatorname{div} B$.

Нам уже известно, как по полю $B = B_e^i e_i$ находится форма потока ω_B^{n-1}. Найдем ее, вычислим ее дифференциал, получим n-форму, пропорциональную форме объема, коэффициент пропорциональности и будет дивергенцией поля B.

Реализуем это. Запишем $(n-1)$-форму ω_B^{n-1} в общем виде:

$$\omega_B^{n-1} = b_i(t)\, dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt^i} \wedge \ldots \wedge dt^n,$$

найдем ее дифференциал

$$d\omega_B^{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial t^i} (-1)^{i-1} \right) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n,$$

выразим коэффициенты b_i формы ω^{n-1} через координаты B_e^i вектора $B = B_e^i\, e_i$:

$$d\omega_B^{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t^i} \left(\frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{g_{ii}}}\, B_e^i \right) \right) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n,$$

сравним полученную форму с формой объема

$$\Omega_g^n = \sqrt{\det g_{ij}}(t)\, dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^n$$

и найдем

$$\operatorname{div} B = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t^i} \left(\frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{\sqrt{g_{ii}}}\, B_e^i \right) \right).$$

В ортогональной системе криволинейных координат эта формула принимает вид

$$\operatorname{div} B = \frac{1}{\sqrt{g_{11} \cdot \ldots \cdot g_{nn}}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t^i} \left(\frac{\sqrt{g_{11} \cdot \ldots \cdot g_{nn}}}{\sqrt{g_{ii}}}\, B_e^i \right) \right).$$

c. Дивергенция в цилиндрических и сферических координатах.

Задача. Напишите формулы для вычисления дивергенции векторного поля $B = B_e^i e_i$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ дивергенция $\operatorname{div} B$ вектор-

ного поля $B = B^i_e e_i$ вычисляется соответственно по формулам

$$\begin{aligned}\operatorname{div} B &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{R^2\cos\theta}\left(\frac{\partial R^2\cos\theta B_R}{\partial R} + \frac{\partial R B_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial R\cos\theta B_\theta}{\partial\theta}\right).\end{aligned}$$

3. Ротор векторного поля и его координатное представление.

a. Соответствие векторное поле A — векторное поле $B = \operatorname{rot} A$. Рассмотрим теперь особо трехмерный случай. Будем, как и выше, считать, что в криволинейных координатах (t^1, t^2, t^3) нам задана метрика $g_{ij}(t)\,dt^i\,dt^j$, порождающая заодно форму объема $\Omega^3_g = \sqrt{\det g_{ij}}(t)\,dt^1\wedge dt^2\wedge dt^3$.

В этом случае векторному полю $A = A^i_e\,e_i$ сопоставляется 1-форма ω^1_A, а дифференциалу $d\omega^1_A$ этой формы, как 2-форме (как $(n-1)$-форме), соответствует некоторое векторное поле $B = B^i_e\,e_i$, такое что $d\omega^1_A = \omega^2_B$. Это поле B, как мы знаем, называется ротором исходного поля A и обозначается $\operatorname{rot} A$.

b. Координатная запись соответствия A и $B = \operatorname{rot} A$. Мы хотим научиться вычислять координаты поля $B = \operatorname{rot} A$ по координатам поля A. В соответствии с описанной выше процедурой по полю $A = A^i_e e_i$ строим отвечающую ему 1-форму $\omega^1_A = \langle A, \cdot\rangle$:

$$\omega^1_A = a_i\,dt^i = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{jj}}}\,A^j_e\,dt^i,$$

берем ее дифференциал

$$\begin{aligned}d\omega^1_A = \frac{\partial}{\partial t^k}\left(\frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{jj}}}A^j_e\right)dt^k\wedge dt^i &= \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\left(\frac{g_{3j}}{\sqrt{g_{jj}}}A^j_e\right) - \frac{\partial}{\partial t^3}\left(\frac{g_{2j}}{\sqrt{g_{jj}}}A^j_e\right)\right)dt^2\wedge dt^3 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^3}\left(\frac{g_{1j}}{\sqrt{g_{jj}}}A^j_e\right) - \frac{\partial}{\partial t^1}\left(\frac{g_{3j}}{\sqrt{g_{jj}}}A^j_e\right)\right)dt^3\wedge dt^1 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\left(\frac{g_{2j}}{\sqrt{g_{jj}}}A^j_e\right) - \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\frac{g_{1j}}{\sqrt{g_{jj}}}A^j_e\right)\right)dt^1\wedge dt^2,\end{aligned}$$

рассматривая эту форму как форму вида ω^2_B, по коэффициентам формы $\omega^2_B = d\omega^1_A = b_1\,dt^2\wedge dt^3 - b_2\,dt^3\wedge dt^1 + b_3\,dt^1\wedge dt^2$ находим координаты $B^i_e = \dfrac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\,b_i$ вектора $B = \operatorname{rot} A$.

В случае триортогональной системы криволинейных координат (t_1, t_2, t_3) формулы упрощаются. В этом случае

$$\begin{aligned}d\omega^1_A = \frac{\partial}{\partial t^k}\left(\sqrt{g_{ii}}A^i_e\right)dt^k\wedge dt^i &= \left(\frac{\partial}{\partial t^2}\left(\sqrt{g_{33}}A^3_e\right) - \frac{\partial}{\partial t^3}\left(\sqrt{g_{22}}A^2_e\right)\right)dt^2\wedge dt^3 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^3}\left(\sqrt{g_{11}}A^1_e\right) - \frac{\partial}{\partial t^1}\left(\sqrt{g_{33}}A^3_e\right)\right)dt^3\wedge dt^1 + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial t^1}\left(\sqrt{g_{22}}A^2_e\right) - \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\sqrt{g_{11}}A^1_e\right)\right)dt^1\wedge dt^2,\end{aligned}$$

и, используя обозначения $E_i := g_{ii}$, можно написать координаты вектора $\operatorname{rot} A = B = B_e^1\, e_1 + B_e^2\, e_2 + B_e^3\, e_3$:

$$B_e^1 = \frac{1}{\sqrt{E_2E_3}}\left(\frac{\partial A_e^3\sqrt{E_3}}{\partial t^2} - \frac{\partial A_e^2\sqrt{E_2}}{\partial t^3}\right),$$
$$B_e^2 = \frac{1}{\sqrt{E_3E_1}}\left(\frac{\partial A_e^1\sqrt{E_1}}{\partial t^3} - \frac{\partial A_e^3\sqrt{E_3}}{\partial t^1}\right),$$
$$B_e^3 = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2}}\left(\frac{\partial A_e^2\sqrt{E_2}}{\partial t^1} - \frac{\partial A_e^1\sqrt{E_1}}{\partial t^2}\right),$$

то есть

$$\operatorname{rot} A = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\begin{vmatrix} \sqrt{E_1}e_1 & \sqrt{E_2}e_2 & \sqrt{E_3}e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \sqrt{E_1}A_e^1 & \sqrt{E_2}A_e^2 & \sqrt{E_3}A_e^3 \end{vmatrix}.$$

c. Ротор в декартовых, цилиндрических и сферических координатах

Задача. Напишите формулы для вычисления ротора векторного поля $A = A_e^1 e_1 + A_e^2 e_2 + A_e^3 e_3$ в декартовых, цилиндрических и сферических координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$.

Ответ: В декартовых (x, y, z), цилиндрических (r, φ, z) и сферических (R, φ, θ) координатах евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ ротор $\operatorname{rot} A$ векторного поля $A = A_e^1 e_1 + A_e^2 e_2 + A_e^3 e_3$ вычисляется соответственно по формулам

$$\operatorname{rot} A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)e_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)e_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)e_z =$$
$$= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial rA_\varphi}{\partial z}\right)e_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)e_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial rA_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)e_z =$$
$$= \frac{1}{R\cos\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi \cos\theta}{\partial \theta}\right)e_R + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{\partial RA_\theta}{\partial R}\right)e_\varphi +$$
$$+ \frac{1}{R}\left(\frac{\partial RA_\varphi}{\partial R} - \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)e_\theta.$$

Дополнение 6

Современная формула Ньютона—Лейбница и единство математики (заключительный обзор)

§ 1. Напоминания

1. Дифференциал, дифференциальная форма и общая формула Стокса

а. В чем было дело и что нас довело до жизни такой. Восхождение к современной формуле Ньютона—Лейбница мы начали еще на первом курсе, когда сказали, что такое *дифференциал* $df(x)$ функции $f: X \to Y$ в точке x. Постепенно разобрав это понятие детально, выяснили, что это линейная функция, действующая на линейном пространстве T_xX векторов смещения от рассматриваемой точки, со значениями в пространстве T_yY смещений от точки $y=f(x)$. Пространства T_xX, T_yY были названы *касательными пространствами* к X и Y в соответствующих точках, а сам дифференциал назывался также *касательным отображением* или *производным отображением* по отношению к исходному отображению (функции) $f: X \to Y$ в точке x.

После того как вы познакомились с понятием касательной прямой или касательной плоскости к поверхности, вы понимаете происхождение и геометрический смысл этой терминологии.

Оставляя само определение дифференциала неизменным, мы, переходя к функциям многих переменных и отображениям многомерных объектов, разумеется, каждый раз расшифровывали также координатную запись дифференциала. Так, например, появилось понятие матрицы Якоби отображения.

Мы знаем, что дифференциал функции $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет вид

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)dx^n,$$

т. е. является линейной комбинацией дифференциалов простейших функций — координат, а значение $df(x)(\xi)$ дифференциала на векторе $\xi \in T_x\mathbb{R}^n$ совпадает со значением производной $D_\xi f(x)$ функции по этому вектору и, поскольку $dx^i(\xi) = \xi^i$,

$$df(x)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)\xi^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x)\xi^n.$$

Познакомившись в алгебре с линейными и полилинейными формами, с кососимметричными формами и операцией их внешнего произведения, вы смогли, применив это к дифференциалам, написать дифференциальную форму вида

$$\omega^k(x) = a_{i_1\ldots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

понимая, что это кососимметрическая k-форма на касательном пространстве, значение которой на наборе его векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k$ вычисляется, если известно значение $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Последнее, как известно из алгебры (учитывая, что $dx^i(\xi) = \xi^i$), равно определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} \xi_1^{i_1} & \ldots & \xi_1^{i_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_k^{i_1} & \ldots & \xi_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что к дифференциальным формам нас привела *формула замены переменной в кратном интеграле*. Вслед за Эйлером нас озаботило то обстоятельство, что если в одномерном интеграле сама форма $f(x)\,dx$, стоявшая под знаком интеграла, диктовала нам правильную формулу замены $f(\varphi(t))\,d\varphi(t)$, то в многомерном случае этого не было. Хотелось исправить этот недостаток и заодно понять, что же мы на самом деле интегрируем, если результат не должен зависеть от выбора системы координат.

Разбираясь в этом вопросе, нам пришлось заодно разобраться также в целом ряде понятий не только алгебры, но и геометрии. Мы поняли, что такое k-мерная поверхность, криволинейные координаты, локальная карта и атлас, что такое ориентация поверхности и как она задается, что такое край поверхности и индуцированная ориентация края, наконец, как все это выглядит в общем случае многообразия размерности k.

Нам пришлось разобраться с тем, что происходит с рассматриваемыми нами объектами и операциями при изменении системы координат, как и в какую сторону переносятся точки, векторы и функции на них, в частности формы, при гладких отображениях и как конкретно осуществлять соответствующий перенос в координатах. Заодно мы убедились, что операция дифференцирования формы, которая в координатном представлении формы выполняется самым простым и естественным способом

$$d\omega^k(x) = da_{i_1 \ldots i_k}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

который по этой причине часто принимается за исходное определение этой операции, на самом деле инвариантна относительно выбора системы координат.

Привлекая еще некоторые подсказки физики (подсчет работы, потока), мы поняли, что интегрируем дифференциальные формы, что они не только решают исходный вопрос о формуле замены в кратном интеграле, но и приводят к следующему далекому обобщению классической формулы Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_{M_+^k} d\omega^{k-1} = \int\limits_{\partial M_+^k} \omega^{k-1}.$$

Эту формулу, именуемую обычно *общей формулой Стокса*, с полным правом можно было бы именовать формулой Ньютона—Лейбница—Гаусса—Остроградского—Грина—Максвелла—Картана—Пуанкаре.

b. Задача о первообразной вчера и сегодня. Одним из самых первых вопросов классического математического анализа был вопрос об обращении операции дифференцирования, точнее, вопрос о том, всякая ли функция f (например, непрерывная), является чьей-то производной и если да, то как находить первообразную F данной функции. На языке форм это вопрос о том, является ли 1-форма $f(x)\,dx$ дифференциалом dF некоторой 0-формы — функции F.

Мы дали положительный ответ на этот вопрос, рассматривая всё на числовом промежутке. Мы даже не рассматривали какие-то иные ситуации. А задайте себе тот же вопрос, например, для функции, тождественно равной единице на окружности или для соответствующей формы $d\varphi$, и вы сразу поймете, что ответ окажется отрицательным. Нет на окружности однозначной дифференцируемой функции, производная которой была бы всюду равна единице.

Это одно из проявлений связи ответов на вопросы глобального анализа с топологией области, где вопрос ставится и решается.

Значительная часть дальнейшего текста посвящена более глубокому, хотя и очень неполному, обсуждению этой связи.

Обобщая классическую ситуацию, поставим следующий общий вопрос. *Дана дифференциальная k-форма ω^k; ищется форма ω^{k-1}, такая что $\omega^k = d\omega^{k-1}$.*

c. Замкнутые и точные дифференциальные формы. Дифференциальная форма ω^k, имеющая первообразную (т. е. являющаяся дифференциалом некоторой формы ω^{k-1}: $\omega^k = d\omega^{k-1}$), называется *точной формой*.

Очевидным и легко проверяемым необходимым дифференциальным условием точности формы ω^k является равенство $d\omega^k = 0$, связанное с тем, что повторное внешнее дифференцирование любой дифференциальной формы тождественно равно нулю. Если дифференциал некоторой формы равен нулю, форму называют *замкнутой*.

Итак, *замкнутость — необходимое условие точности формы*.

На лекциях мы подробно, во всех деталях и интерпретациях рассмотрели случай 1-форм. Уже там мы убедились в том, что замкнутость формы, являясь необходимым признаком точности, вообще говоря, не является достаточным, и это существенно связано с топологией области, в которой ставится и рассматривается вопрос.

В физике важную роль играют потенциальные векторные поля. При наличии в рассматриваемом пространстве скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$ (или иной невырожденной билинейной формы) между линейными функциями (формами) и векторными полями возникает естественное взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством $\omega_A^1(x)(\xi) = \langle A(x), \xi\rangle$. Кстати, когда ищут работу при перемещении в поле A вдоль некоторого пути γ, то как раз интегрируют форму ω_A^1, называемую в этой ситуации *формой работы*. Замечательная характерная особенность потенциальных

векторных полей состоит в том, что работа в таких полях зависит только от начала и конца пути перехода и равна разности значений потенциала, порождающего поле. В частности, работа по замкнутому контору (по циклу) в таком поле всегда равна нулю.

На языке векторных полей дифференциальный признак потенциальности поля, как мы знаем, сводится к проверке того, что поле безвихревое (его ротор равен нулю). Мы также знаем, что безвихревое поле не всегда потенциально и это зависит от топологии области его действия. В односвязной области необходимый признак достаточен. Например, в трехмерном шаре или в шаре с выколотым центром или вырезанным шаром всякое безвихревое поле потенциально, в двумерном круге — тоже, а в круге с выколотым центром или круговом кольце уже нет. (Напомню пример: записав форму $d\varphi$ в декартовых координатах (x, y), мы взяли соответствующее ей векторное поле $(-y, x)/(x^2+y^2)$.)

Наряду с дифференциальным признаком точности формы, «ощупывающим» форму локально, у нас был *интегральный критерий* точности 1-формы, состоявший в том, что интеграл формы по любому циклу (замкнутому пути), лежащему в рассматриваемой области, должен быть равен нулю.

Этот *интегральный критерий точности формы* справедлив по отношению к формам любой степени при правильном понимании того, что такое цикл соответствующей размерности.

Это одна из *теорем де Рама*, следствием которой, например, является значительно более ранняя теорема или *лемма Пуанкаре*, утверждающая, что в пространстве $\mathbb{R}^n$, в шаре и в любой области им гомеоморфной, любая замкнутая форма точна.

2. Многообразия, цепи и оператор границы

а. Циклы и границы. В формуле Стокса внизу стоят геометрические объекты (кривые, поверхности, многообразия и их границы — края), по которым идет интегрирование соответствующих дифференциальных форм.

Подобно оператору d дифференцирования, действующему на формах, здесь имеется граничный оператор ∂, который сопоставляет поверхности ее край. Край ∂M^k многообразия M^k — тоже многообразие, но на единицу меньшей размерности. Более того, многообразие ∂M^k уже не имеет точек края, т. е. повторное применение оператора ∂ всегда дает пустое множество. В этом отношении операторы d и ∂ похожи. Но если оператор d повышал размерность объекта на единицу, то оператор ∂ понижает размерность на единицу.

Понятиям замкнутой и точной формы здесь отвечают следующие понятия *цикла* и *границы*.

Компактная поверхность, многообразие M^k (а потом еще скажем и цепь) размерности k называется *циклом размерности* k, если $\partial M^k = \varnothing$, т. е. если M^k не имеет точек края.

Так, сфера размерности k является циклом размерности k.

Поверхность, многообразие M^k (и цепь) размерности k называется *границей*, если у нее есть «первообразная» в том смысле, что есть такая поверхность, многообразие M^{k+1} (цепь), что $M^k = \partial M^{k+1}$.

Ясно, что если поверхность является границей какой-то компактной поверхности, то она непременно должна быть циклом. Но ситуация тут такая же, как с формами, — это условие необходимое, но, вообще говоря, не достаточное для того, чтобы в области, где лежит этот цикл, нашлась такая поверхность, границей которой он бы был.

Возьмите, например, круговое кольцо на плоскости. Любая окружность, охватывающая дырку, является циклом, но не является границей чего-либо, лежащего в кольце. А если бы вместо кольца был круг, то ситуация бы радикально изменилась.

Рассмотрим, кстати, границу кольца и заодно напомним следующее. Оператор ∂ взятия границы — не просто какое-то теоретико-множественное преобразование. Он по атласу поверхности или многообразия создает атлас края, который называется *индуцированным атласом края*. При этом если исходный атлас состоял из согласованных карт, то индуцированный атлас тоже обладает этим свойством. Значит, если многообразие было ориентировано, то его край автоматически приобретает ориентацию, которая называется *индуцированной ориентацией* или *согласованной ориентацией края*.

Если то же кольцо G, о котором мы только что говорили, ориентировано стандартным левым репером декартовых координат на плоскости, то его край, состоящий из двух окружностей γ_1, γ_2, будет ориентирован так, что внешняя окружность γ_2 обходится в положительном направлении (против часовой стрелки), а внутренняя γ_1 — в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Интеграл по такому краю сведется к разности интегралов по γ_2 и γ_1. Удобно поэтому сразу писать, что $\partial G_+ = \gamma_{2+} - \gamma_{1+}$.

Если вам надо будет, например, вычислять работу, связанную с тем, что совершается пять обходов вдоль пути γ_{2+}, потом три вдоль γ_{1+} и еще два вдоль γ_{2-}, то вы скажете, что вам надо интегрировать по цепи $5\gamma_{2+} + 3\gamma_{1+} + 2\gamma_{2-} = 5\gamma_{2+} + 3\gamma_{1+} - 2\gamma_{2+} = 3\gamma_{2+} + 3\gamma_{1+}$. Интеграл по такой цепи, разумеется, будет соответствующей линейной комбинацией интегралов по γ_{1+}, γ_{2+}.

Это наблюдение поясняет, почему полезно рассматривать формальные линейные комбинации геометрических объектов. Их и называют *цепями*. Мы здесь всего лишь пояснили, откуда возникает понятие цепи, что это вообще такое, где и почему это бывает удобно. Мы не погружаемся в серию формальных определений, которые, с одной стороны, нам здесь в самом общем виде не нужны, а с другой стороны — их можно найти в учебнике. Подобно тому как от обычных функций порой приходится переходить к обобщенным функциям, в геометрии от простых объектов переходят к их обобщениям, например к сингулярным кубам, их линейным комбинациям — цепям сингулярных кубов, потом кое-где и этого оказывается мало, тогда

делают следующее расширение, называемое потоком, объединяющее и формы, и многообразия...

b. Гомологичные циклы. Ниже мы увидим, что порой интеграл от формы по одному циклу можно посчитать, переходя к другому, иногда значительно более простому, циклу, определенным образом связанному с исходным. Это замечательное, важное и полезное обстоятельство используется в разных разделах математики и ее приложениях.

Упомянутая связь циклов состоит в следующем: их разность должна быть границей объекта, лежащего в рассматриваемой области. Про такие циклы говорят, что они *гомологичны* в этой области.

Например, два замкнутых ориентированных пути γ_{1+}, γ_{2+} в области D (или на многообразии M) гомологичны, если найдется такая ориентированная поверхность $S^2_+ \subset D$ ($S^2_+ \subset M$), что $\partial S^2_+ = \gamma_{2+} - \gamma_{1+}$.

Так, рассмотренные выше окружности γ_{1+}, γ_{2+} гомологичны в кольце G_+.

Поскольку оператор ∂ взятия границы по линейности распространяется на цепи, то, разумеется, можно так же определить и гомологию цепей.

Например, цепи γ_{2+} и $2\gamma_{2+}$ не гомологичны в кольце G_+.

Роль и применение понятия гомологии циклов в контексте интегрирования дифференциальных форм мы сейчас увидим.

§ 2. Спаривание

1. Интеграл как билинейная функция и общая формула Стокса

a. Интеграл точной формы по циклу и замкнутой формы по границе. Введем сначала удобные обозначения.

Если $\Omega(M)$ — обозначение для всего множества дифференциальных форм на многообразии (поверхности) M, то пусть $\Omega^k(M)$ — подмножество форм степени k (т. е. k-форм), $Z^k(M)$ — его подмножество замкнутых k-форм, а $B^k(M)$ — его подмножество точных k-форм.

Аналогично, если $C(M)$ — множество цепей на многообразии (поверхности M), то пусть $C_k(M)$ — подмножество цепей размерности k (k-цепей), $Z_k(M)$ — его подмножество циклов (k-циклов), а $B_k(M)$ — его подмножество граничных циклов (k-границ).

Итак, $\Omega(M) \supset \Omega^k(M) \supset Z^k(M) \supset B^k(M)$ и $C(M) \supset C_k(M) \supset Z_k(M) \supset B_k(M)$.

Поскольку мы сейчас не будем менять многообразие M, на котором собираемся что-то делать, то для упрощения записи, когда не возникает недоразумений, мы опускаем символ M, участвующий в приведенных выше обозначениях.

Теперь сделаем одно ключевое наблюдение.

Подсчитаем интеграл от точной формы $b^k \in B^k$ по циклу $z_k \in Z_k$ и от замкнутой формы $z^k \in Z^k$ по границе $b_k \in B_k$. Воспользовавшись формулой

Стокса, находим

$$\int_{z_k} b^k = \int_{z_k} d\omega^{k-1} = \int_{\partial z_k} \omega^{k-1} = \int_{\varnothing} \omega^{k-1} = 0$$

и, считая, что b_k является границей некоторой цепи c_{k+1}, имеем

$$\int_{b_k} z^k = \int_{\partial c_{k+1}} z^k = \int_{c_{k+1}} dz^k = \int_{c_{k+1}} 0 = 0.$$

b. Интеграл от замкнутой формы по циклу и его инвариантность при определенных изменениях формы и цикла. Сделанное только что наблюдение ведет к следующему важному и очень полезному заключению.

Рассмотрим теперь интеграл от замкнутой формы z^k по циклу z_k. Учитывая, что добавление к замкнутой форме z^k точной формы b^k снова дает замкнутую форму (поскольку $d(z^k + b^k) = dz^k + db^k = 0$), а добавление к циклу z_k граничного цикла b_k снова дает цикл (поскольку $\partial(z^k + b^k) = \partial z^k + \partial b^k = 0$), ссылаясь на сделанное наблюдение, можем теперь написать следующую цепочку равенств

$$\int_{z_k} z^k = \int_{z_k} (z^k + b^k) = \int_{z_k + b_k} (z^k + b^k) = \int_{[z_k]} [z^k].$$

Здесь $[z^k]$ — класс форм, отличающихся от исходной формы z^k на точную форму, а $[z_k]$ — класс циклов, отличающихся от исходного цикла z_k на какой-то граничный цикл.

Итак, при вычислении интеграла от замкнутой формы z^k по циклу z_k можно позволить себе, не меняя значение интеграла, выбрать на свое усмотрение любой цикл из класса $[z_k]$ и любую форму из класса $[z^k]$.

2. Отношения эквивалентности (гомологии и когомологии)

a. К единообразию терминологии: циклы и коциклы, границы и кограницы. Наряду с унификацией обозначений, удобно договориться о следующей унификации терминологии. Если элементы множеств Z_k и B_k называют *циклами* и *границами* соответственно, то элементы множеств Z^k и B^k называют *коциклами* и *кограницами* соответственно.

Таким образом, коцикл — это замкнутая дифференциальная форма, а кограница — точная форма.

b. Гомологии и когомологии. Класс $[z_k]$, точнее класс $[z_k](M)$, называется *классом гомологий цикла z_k на многообразии (поверхности) M*.

Класс $[z^k]$, точнее класс $[z^k](M)$, называется *классом когомологий коцикла z^k на многообразии (поверхности) M*.

Если оператор ∂ взятия границы цепи называют *оператором границы*, то оператор d дифференцирования форм называют *оператором кограницы*.

Два цикла *гомологичны на многообразии (поверхности) M*, если их разность — граница цепи, лежащей в M.

Два *коцикла когомологичны на многообразии (поверхности) M*, если их разность — кограница на M (т. е. замкнутые формы когомологичны на поверхности, если их разность — точная форма на этой поверхности).

3. Спаривание классов когомологий и гомологий

a. Интеграл как билинейная функция. Интеграл $\int\limits_{c_k} \omega^k$ от k-формы по k-цепи на каком-то многообразии M можно рассматривать как спаривание $\langle \omega^k, c_k \rangle$ объектов двух векторных пространств — линейного пространства k-форм Ω^k и линейного пространства k-цепей C_k.

Зная свойства интеграла, можно заключить, что операция $\langle \omega^k, c_k \rangle$ билинейна.

b. Невырожденность билинейной формы спаривания (теорема де Рама). Рассматривая выше спаривание коцикла и цикла, мы получили важный результат, который теперь можно записать в следующем виде:

$$\langle z^k, z_k \rangle = \langle [z^k], [z_k] \rangle.$$

Вспоминая определение классов $[z^k]$, $[z_k]$ когомологий и гомологий, можно сказать, что это элементы факторпространств $H^k := Z^k/B^k$ и $H_k := Z_k/B_k$ соответственно.

Векторные пространства H^k и H_k, полная запись которых $H^k(M)$ и $H_k(M)$, называются соответственно *пространством k-мерных когомологий многообразия M* и *пространством k-мерных гомологий многообразия M*.

Таким образом, интеграл на самом деле спаривает также классы когомологий и гомологий. Спаривание $\langle [z^k], [z_k] \rangle$, очевидно, линейно, и, как впервые показал де Рам, оно *невырождено*.

(Напомним, что билинейная форма $\langle\ ,\ \rangle$ называется невырожденной, если ни при каком отличном от нуля значении одного из аргументов форма не является тождественно нулевой относительно другого аргумента.)

c. Интегральный критерий точности замкнутой формы. Из упомянутой теоремы де Рама вытекает следующий критерий точности замкнутой формы. *Замкнутая форма $z^k = \omega^k$ на многообразии (поверхности, области) M точна на M тогда и только тогда, когда интеграл этой формы по любому k-мерному циклу, лежащему в M, равен нулю.*

Действительно, если $\langle z^k, z_k \rangle = 0$ при любом цикле z_k, лежащем в M, то по теореме де Рама $[z^k] = 0$ в $H^k = Z^k/B^k$. А это и значит, что $z^k \in B^k$.

Мы подробно и во всех аспектах рассмотрели и доказали этот критерий в случае 1-форм. Теперь вы его имеете в общем виде.

В частности, вы можете теперь, глядя на область или многообразие, где имеется безвихревое поле или бездивергентное векторное поле, гарантировать, что оно потенциально или, соответственно, имеет векторный потенциал (является ротором некоторого поля).

Теорему де Рама, конечно, можно использовать и по второму аргументу. Зная, например, что на каком-то многообразии все замкнутые k-формы точны, можно сказать, что на таком многообразии каждый k-цикл является граничным циклом (гомологичен нулю). Таким образом, делается определенное заключение о топологии самого многообразия.

4. Иная интерпретация гомологий и когомологий

a. Сопряженность операторов d и ∂. В обозначениях спаривания $\langle\omega^k, c_k\rangle$ формула Стокса имеет вид

$$\langle d\omega^{k-1}, c_k\rangle = \langle\omega^{k-1}, \partial c_k\rangle,$$

демонстрирующий сопряженность операторов d и ∂.

b. Операторы d и ∂ как отображения. В некоторых случаях полезна более полная символика операторов d и ∂. Например, в записи следующих последовательностей линейных отображений

$$\ldots \xrightarrow{d_{k-2}} \Omega^{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \Omega^k \xrightarrow{d_k} \Omega^{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} \ldots$$

$$\ldots \xleftarrow{\partial_{k-1}} C_{k-1} \xleftarrow{\partial_k} C_k \xleftarrow{\partial_{k+1}} C_{k+1} \xleftarrow{\partial_{k+2}} \ldots$$

Используя стандартные обозначения Ker и Im для ядра линейного отображения и образа отображения, можно, например, написать, что

$$Z^k = \operatorname{Ker} d_k, \quad Z_k = \operatorname{Ker} \partial_k, \quad B^k = \operatorname{Im} d_{k-1}, \quad B_k = \operatorname{Im} \partial_{k+1},$$

и, значит,

$$H^k = \operatorname{Ker} d_k / \operatorname{Im} d_{k-1} \quad \text{и} \quad H_k = \operatorname{Ker} \partial_k / \operatorname{Im} \partial_{k+1}.$$

5. Комментарий. Несколько слов в заключение. Повторю, что это всего лишь обзор, обзор в существенном, без погружения в детали. Детали изложены в учебнике, а многочисленные развития — в специальной литературе, которую, конечно, легче читать, имея начальные представления о предмете.

В физике, механике часто говорят на языке векторных полей. Но вы знаете, как переводятся вопросы с языка полей на язык форм и обратно, знаете связь стандартных операторов grad, rot, div с оператором d внешнего дифференцирования форм.

В механике сплошной среды вовсю используется оператор Гамильтона ∇. Некоторая техника работы с ним представлена в учебнике. Там же найдете ответ на вопрос, как записываются и вычисляются операторы grad, rot, div в криволинейных координатах.

Все это, включая формулу Стокса, потом находит многочисленные применения. Посмотрите, например, вывод уравнения Эйлера механики сплошной среды или запись уравнений Максвелла теории электромагнитного поля. Я не говорю уже о внутриматематических применениях в анализе, особенно комплексном анализе, геометрии, алгебраической топологии...

Литература

I. Классика

1. Первоисточники

Ньютон И.
Математические начала натуральной философии. Пер. с лат. А. Н. Крылова. — М.: Наука, 1989. — 688 с.
Математические работы. — М.—Л.: ОНТИ, 1937.

Лейбниц Г. В. Избранные отрывки из математических сочинений. *Успехи матем. наук*, 1948. **3** (1), 165—205.

2. Важнейшие систематические изложения предмета

Эйлер Л.
Введение в анализ бесконечных. В 2-х т. — М.: Физматгиз, 1961.
Дифференциальное исчисление. — М.—Л.: Гостехиздат, 1949.
Интегральное исчисление. В 3-х т. — М.: Гостехиздат, 1956—1958.

Коши О. Л.
Алгебраический анализ. — Лейпциг: Бэр и Хэрманн, 1864.
Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. — СПб.: Имп. Акад. наук, 1831.

3. Классические курсы анализа первой половины XX столетия

Валле-Пуссен Ш.-Ж. Курс анализа бесконечно малых. В 2-х т. М.—Л.: ГТТИ, 1933.

Гурса Э. Курс математического анализа. В 2-х т. М.—Л.: ОНТИ, 1936.

II. Учебники

Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Высшая школа, 2000.
Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. В 2-х ч. Изд. 2-е, перераб. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985, 1987.
Камынин Л. И. Курс математического анализа. В 2-х ч. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993, 1995.

Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3-х т. — М.: Высшая школа, 1988, 1989.

Никольский С. М. Курс математического анализа. В 2-х т. — М.: Наука, 1990.

III. Учебные пособия

Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 1990.

Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. Избранные задачи по вещественному анализу. — М.: Наука, 1992.

Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. — Новосибирск: Изд-во Инс-та матем. Ч. I, книги 1 и 2, 1999. Ч. II, книги 1 и 2, 2000, 2001.

Рудин У. Основы математического анализа. Изд. 2-е. — М.: Мир, 1976.

Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. — М.: Наука. Ч. 1—2, 1969; Ч. 3, 1970.

Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Ч. 1—2. — М.: Наука, 1972.

Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. Изд. 7-е, стереотип. — М.: Наука, 1969.

IV. Дополнительная литература

Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. — М.: ГТТИ, 1938.

Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. статей. К 100-летию со дня рождения. — М.: Мир, 1979.

Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.

Боос В. Лекции по математике. Анализ. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. (В частности, статья «Архитектура математики».)

Вейль Г. Математическое мышление. — М.: Наука, 1989.

Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. — М.: Мир, 1967.

Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998.

Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.

Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.
Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука, 1962.
Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1967.
Зорич В. А. Математический анализ задач естествознания. — М.: МЦНМО, 2008.
Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.
Клейн Ф. Очерки о развитии математики в XIX столетии. — М.: Наука, 1989.
Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 4-е, перераб. — М.: Наука, 1976.
Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986.
Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 2-х т. — М.: Наука, 1970.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. II. Теория поля. — М.: Наука, 1967.
Манин Ю. И. Математика и физика. — М.: Знание, 1979. — (Новое в жизни, науке, технике. Серия: Математика, кибернетика; № 12.)
Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965. — (Библиотека сборника «Математика».)
Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. — М.: Мир, 1971.
Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990.
Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. В 2-х ч. Изд. 3-е. — М.: Наука, 1978.
Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.
Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1990.
Спивак М. Математический анализ на многообразиях. — М.: Мир, 1971.
Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. В 2-х ч. Изд. 2-е. — М.: Физматгиз, 1962—1963.
Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 1. Современная наука о природе. Законы механики; Т. 4. Кинетика, теплота, звук; Т. 5. Электричество и магнетизм Т. 6. Электродинамика. Т. 7. Физика сплошных сред. — М.: Мир, 1965, 1966.
Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Наука, 1963.
Шварц Л. Анализ. В 2-х т. — М.: Мир, 1972.
Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Том IV. — М.: Наука, 1967. (В том числе статьи «Мотивы научного исследования» (с. 39—41) и «Физика и реальность» (с. 200—227).)

Указатель основных обозначений

Логические символы

$\Rightarrow$ — логическое следование (импликация)

$\Leftrightarrow$ — логическая эквивалентность (равносильность)

$:=$, $=:$ — равенства по определению; двоеточие стоит со стороны определяемого объекта

Множества

$\overline{E}$ — замыкание множества E (с. 6)

∂E — граница множества E (с. 111)

$\mathring{E} := E \setminus \partial E$ — внутренность (открытая часть) множества E

$B(x, r)$ — шар с центром в точке x радиуса r (с. 4)

$S(x, r)$ — сфера с центром в точке x радиуса r (с. 6)

Пространства

(X, d) — метрическое пространство X с метрикой d (с. 1)

(X, τ) — топологическое пространство X с системой τ открытых множеств (с. 9)

$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) — арифметическое n-мерное вещественное (комплексное) пространство

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$) — множество вещественных (комплексных) чисел

$x = (x^1, \ldots, x^n)$ — координатная запись точки n-мерного пространства

$C(X, Y)$ — множество (пространство) непрерывных на X функций со значениями в Y (с. 30)

$C[a, b]$ — сокращенное обозначение для $C([a, b], \mathbb{R})$ или $C([a, b], \mathbb{C})$

$C^{(k)}(X, Y)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых отображений из X в Y (с. 72, 81)

$C^{(k)}[a, b]$ — сокращенное обозначение для $C^{(k)}([a, b], \mathbb{R})$ или $C^{(k)}([a, b], \mathbb{C})$

$C_p[a, b]$ — пространство $C[a, b]$, наделенное нормой $\|f\|_p$ (с. 43)

$C_2[a, b]$ — пространство $C[a, b]$ с эрмитовым скалярным произведением $\langle f, g\rangle$ функций или с нормой среднего квадратичного уклонения

$\mathscr{R}(E)$ — множество (пространство) функций, интегрируемых по Риману на множестве E (с. 111)

$\mathscr{R}[a, b]$ — сокращенное обозначение для $\mathscr{R}(E)$ при $E = [a, b]$

$\widetilde{\mathscr{R}}(E)$ — пространство классов интегрируемых по Риману функций, совпадающих почти всюду на E (с. 115)

$\widetilde{\mathscr{R}}_p(E)$ ($\mathscr{R}_p(E)$) — пространство $\widetilde{\mathscr{R}}(E)$, наделенное нормой $\|f\|_p$

$\widetilde{\mathscr{R}}_2(E)$ ($\mathscr{R}_2(E)$) — пространство $\widetilde{\mathscr{R}}(E)$, наделенное эрмитовым скалярным произведением функций $\langle f, g\rangle$ или нормой среднего квадратичного уклонения

$\mathscr{R}_p[a,b]$, $\mathscr{R}_2(E)$ — сокращенные обозначения для $\mathscr{R}_p(E)$, $\mathscr{R}_p(E)$ при $E=[a,b]$

$\mathscr{L}(X;Y)$ ($\mathscr{L}(X_1,\ldots,X_n;Y)$) — пространство линейных (n-линейных) отображений из X ($X_1\times\ldots\times X_n$) в Y (с. 54)

TM_p или $TM(p)$, T_pM, $T_p(M)$ — пространство, касательное к поверхности (многообразию) M в точке $p\in M$ (с. 316, 317)

$\mathscr{S}$ — пространство Шварца быстро убывающих функций (с. 534)

$\mathscr{D}(G)$ — пространство основных финитных функций в области G (с. 431, 450)

$\mathscr{D}'(G)$ — пространство обобщенных функций в области G (с. 431, 450)

$\mathscr{D}$ — сокращенное обозначение для $\mathscr{D}(G)$ при $G=\mathbb{R}^n$

$\mathscr{D}'$ — сокращенное обозначение для $\mathscr{D}'(G)$ при $G=\mathbb{R}^n$

Метрики, нормы, скалярные произведения

$d(x_1,x_2)$ — расстояние между точками x_1, x_2 в метрическом пространстве (X,d) (с. 1)

$|x|$, $\|x\|$ — модуль (норма) вектора $x\in X$ в линейном нормированном пространстве X (с. 41)

$\|A\|$ — норма линейного (полилинейного) оператора A (с. 49)

$\|f\|_p := (\int\limits_E |f|^p(x)\,dx)^{1/p}$, $p\geqslant 1$ — интегральная норма функции f (с. 43)

$\|f\|_2$ — норма среднего квадратичного уклонения ($\|f\|_p$ при $p=2$)

$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ — эрмитово скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (с. 43)

$\langle f,g\rangle := \int\limits_E (f\cdot\bar{g})(x)\,dx$ — эрмитово скалярное произведение функций f и g (с. 466)

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в $\mathbb{R}^3$ (с. 241)

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ или $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ — векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в $\mathbb{R}^3$ (с. 241)

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ — смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в $\mathbb{R}^3$ (с. 187)

Функции

$g\circ f$ — композиция (суперпозиция) функций f и g

f^{-1} — функция, обратная к функции f

$f(x)$ — значение функции f в точке x; функция от x

$f(x^1,\ldots,x^n)$ — значение функции f в точке $x=(x^1,\ldots,x^n)\in X$ n-мерного пространства X; функция, зависящая от n переменных $x^1,\ldots,x^n$

$\operatorname{supp} f$ — носитель функции f (с. 419)

$\rfloor f(x)$ — скачок функции f в точке x (с. 434, 453)

$\{f_t;\, t\in T\}$ — семейство функций, зависящих от параметра $t\in T$ (с. 342)

$\{f_n;\, n\in\mathbb{N}\}$ или $\{f_n\}$ — последовательность функций (с. 339)

$f_t \underset{\mathscr{B}}{\longrightarrow} f$ на E — сходимость семейства функций $\{f_t;\, t\in T\}$ к функции f на множестве E при базе $\mathscr{B}$ в T (с. 343)

$f_t \underset{\mathscr{B}}{\rightrightarrows} f$ на E — равномерная сходимость семейства функций $\{f_t; t\in T\}$ к функции f на множестве E при базе $\mathscr{B}$ в T (с. 343)

$f=o(g)$ при $\mathscr{B}$, $f=O(g)$ при $\mathscr{B}$, $f\sim g$ или $f\simeq g$ при $\mathscr{B}$ — асимптотические формулы (символы сравнительного асимптотического поведения функций f и g при базе $\mathscr{B}$) (с. 554)

$f(x)\simeq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ при $\mathscr{B}$ — разложение в асимптотический ряд (с. 558)

$\mathscr{D}(x)$ — функция Дирихле (с. 340)

$\exp A$ — экспонента от линейного оператора A (с. 65)
$\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ — бета-функция Эйлера (с. 406)
$\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера (с. 406)
χ_E — характеристическая функция множества E (с. 111)

Дифференциальное исчисление

$f'(x), f_*(x), df(x), Df(x)$ — касательное к f отображение (дифференциал f) в точке x (с. 58, 319)
$\dfrac{\partial f}{\partial x^i}, \partial_i f(x), D_i f(x)$ — частная производная (частный дифференциал) в точке $x = (x^1, \ldots, x^n)$ по переменной x^i от функции f, зависящей от переменных $x^1, \ldots, x^n$ (с. 67)
$D_v f(x)$ — производная функции f по вектору $\boldsymbol{v}$ в точке x (с. 77, 317)
∇ — оператор набла Гамильтона (с. 245)
$\operatorname{grad} f$ — градиент функции f (с. 191)
$\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ — дивергенция векторного поля $\boldsymbol{A}$ (с. 191)
$\operatorname{rot} \boldsymbol{B}$ — ротор (вихрь) векторного поля $\boldsymbol{B}$ (с. 191)

Интегральное исчисление

$\mu(E)$ — мера множества E (с. 112)
$\int\limits_E f(x)\,dx, \int\limits_E f(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1 \ldots dx^n, \int \cdots \int\limits_E f(x^1, \ldots, x^n)\,dx^1 \ldots dx^n$ — интеграл от функции f по множеству $E \subset \mathbb{R}^n$ (с. 102, 111)
$\int\limits_Y dy \int\limits_X f(x, y)\,dx$ — повторный интеграл (с. 119)
$\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \int\limits_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}, \int\limits_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s} \rangle$ — криволинейный интеграл (второго рода) или работа поля $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ вдоль пути γ (с. 219)
$\int\limits_\gamma f\,ds$ — криволинейный интеграл (первого рода) от функции f вдоль кривой γ (с. 219)
$\iint\limits_S P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy, \iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \iint\limits_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{\sigma} \rangle$ — интеграл (второго рода) по поверхности S в $\mathbb{R}^3$; поток поля $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$ через поверхность S (с. 202, 219)
$\iint\limits_S f\,d\sigma$ — поверхностный интеграл (первого рода) от функции f по поверхности S (с. 218)

Дифференциальные формы

ω (ω^p) — дифференциальная форма (степени p) (с. 186, 319)
$\omega^p \wedge \omega^q$ — внешнее произведение форм ω^p, ω^q (с. 184, 294)
$d\omega$ — (внешний) дифференциал от формы ω (с. 190)
$\int\limits_M \omega$ — интеграл от формы ω по поверхности (многообразию) M (с. 206, 208, 323)
$\omega^1_{\boldsymbol{F}} := \langle \boldsymbol{F}(x), \cdot \rangle$ — форма работы (с. 236)
$\omega^2_{\boldsymbol{V}} := (\boldsymbol{V}(x), \cdot, \cdot)$ — форма потока (с. 187)

Предметный указатель

Указатель имен

Учебное издание для вузов

Владимир Антонович Зорич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ II

Подписано в печать 10.07.2019 г. Формат 70 × 100/16.
Печ. л. 43. Тираж 2000 экз. Заказ № ????

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04

Отпечатано в ОАО «Первая образцовая типография», филиал «Дом печати — Вятка»
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
http://www.gipp.kirov.ru; e-mail: order@gipp.kirov.ru